Wstęp do Matematyki (2)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Własności relacji

Wprowadzenie

Jak pamiętamy z poprzednich zajęć, relacje traktujemy jak zbiory. Później poznamy inną jeszcze (algebraiczną) charakterystykę relacji.

Dziś pochylimy się nad relacjami dwuargumentowymi. Omówione zostaną:

- operacje na relacjach;
- własności relacji.

Różne kombinacje własności relacji, ważne w zastosowaniach, rozważymy na następnych zajęciach.

Operacje na relacjach

Dla dowolnych relacji R oraz S jest określona ich: *suma* $R \cup S$, *iloczyn* $R \cap S$, *różnica* $R - S$, *różnica symetryczna* $R \div S$ oraz *iloczyn kartezjański* $R \times S$. Dla każdej relacji $R \subseteq X \times Y$ określone jest jej *dopełnienie*: $R' = (X \times Y) - R$. Relacją *pustą* jest zbiór $\emptyset$.

- Niech $R \subseteq X \times Y$. *Konwersem* relacji R nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$ zdefiniowaną wzorem: $yR^{-1}x$ wtedy i tylko wtedy, gdy xRy.
- Niech $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. *Złożeniem* relacji R i S nazywamy relację $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowaną wzorem: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy i ySz.

Relacją pełną na zbiorze X nazywamy relację $X \times X$. *Relacją identyczności* na zbiorze X nazywamy relację $i_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Operacje na relacjach

Niech $R \subseteq X \times X$.

- *Przechodnim domknięciem relacji R* nazywamy relację R^{tr} zdefiniowaną indukcyjnie:
  - $R^1 = R$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$
  - $R^{tr} = \bigcup\limits_n R^n$.
- Przez *relację stowarzyszoną* z relacją R rozumiemy relację R^+ zdefiniowaną warunkiem:
  xR^+y wtedy i tylko wtedy, gdy $\{z : xRz\} = \{z : yRz\}$ oraz $\{z : zRx\} = \{z : zRy\}$.

Operacje na relacjach

- *Złożeniem symetrycznym* relacji R i S nazywamy relację $R \odot S = (R \circ S) \cup (S \circ R)$
- *Domknięciem sumy* relacji R i S nazywamy relację $R \oplus S = (R \cup S)^{tr}$.

Jest wiele dalszych, ważnych w zastosowaniach, operacji na relacjach. Niektóre poznamy później.

Szczególne znaczenie mają pewne zbiory relacji, które są *domknięte* na poszczególne operacje na relacjach. Cierpliwości, także o tym będzie później.

Operacje na relacjach: przykłady

W zbiorze wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$:

- Konwersem relacji mniejszości $<$ jest relacja większości $>$.
- Konwersem relacji R zdefiniowanej przez warunek: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są liczbami względnie pierwszymi, jest relacja R.
- Dopełnieniem relacji $<$ jest relacja $\geqslant$ (która jest też sumą relacji $<$ i $=$). Iloczynem relacji $\leqslant$ i $\geqslant$ jest relacja $=$.

Niech relacje R i S będą określone w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych:

- xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y^2$
- xSy wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.

Wtedy: $xR \circ Sy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 < y$.

Operacje na relacjach

Oto niektóre własności operacji na relacjach:

- Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
- $R \circ i_X = i_X \circ R = R$, $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$.
- $(R^{-1})^{-1} = R$, $-(R^{-1}) = (-R)^{-1}$.
- Jeśli $R \subseteq S$, to:
  - $R^{-1} \subseteq S^{-1}$, $R^{tr} \subseteq S^{tr}$
  - $T \circ R \subseteq T \circ S$ oraz $R \circ T \subseteq S \circ T$.
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
- $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$, $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$,
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Operacje na relacjach

Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- istnieje z taki, że yRz oraz zSx
- istnieje z taki, że zSx oraz yRz
- istnieje z taki, że $xS^{-1}z$ oraz $zS^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Własności relacji

Mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest:

- *zwrotna*, gdy xRx dla wszystkich $x \in X$;
- *przeciwzwrotna*, gdy xRx nie zachodzi dla żadnego $x \in X$;
- *symetryczna*, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli xRy, to yRx;
- *asymetryczna*, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx;
- *antysymetryczna*, gdy dla wszystkich $x, y \in X$: jeśli xRy oraz yRx, to $x = y$;
- *przechodnia*, gdy dla wszystkich $x, y, z \in X$: jeśli xRy oraz yRz, to xRz;
- *spójna*, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in X$ taki, że $x \neq y$ oraz: xRy lub yRx.

Własności relacji

Mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest:

- *dyskretna*, gdy każdy element jej pola ma zarówno bezpośredni R-poprzednik, jak i bezpośredni R-następnik;
- *gęsta*, gdy $R \neq \emptyset$ i dla każdych $x, y \in X$ takich, że xRy istnieje z taki, że: xRz oraz zRy;
- *serialna*, gdy dla każdego x istnieje y taki, że xRy;
- *kołowa*, gdy dla wszystkich x, y, z: jeśli xRy i yRz, to zRx;
- *euklidesowa*, gdy dla wszystkich x, y, z: jeśli xRy i xRz, to yRz;
- *zbieżna*, gdy dla wszystkich x, y, z: jeśli xRy i xRz, to istnieje u taki, że yRu oraz zRu.

Własności relacji

Uwaga. Własności relacji są zbiorami (relacji).

W definicjach relacji spójnych oraz antysymetrycznych wykorzystuje się relację identyczności.

Jest nieskończenie wiele własności relacji. Podane wyżej są przykładami najczęściej rozważanych.

Znając własności danej relacji możemy z zachodzenia jej między pewnymi elementami wnioskować o jej zachodzeniu (bądź nie) między innymi elementami.

Własności relacji: przykłady

Niech uniwersum stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych. Rozważmy relacje:

- mniejszości $<$
- niewiększości $\leqslant$
- xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są względnie pierwsze
- relację $>$ większości.

Wtedy:

- Relacja $<$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia, serialna.
- Relacja $\leqslant$ jest: zwrotna, przechodnia, serialna, antysymetryczna.
- Relacja R jest: zwrotna, symetryczna, serialna.
- Relacja $>$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia.

Własności relacji

Niektóre związki między własnościami relacji:

- Każda relacja przechodnia i asymetryczna jest przeciwzwrotna.
- Każda relacja asymetryczna, przechodnia i serialna ma nieskończone pole.
- Każda relacja symetryczna i przechodnia jest kołowa.
- Nie ma relacji jednocześnie:
  - symetrycznych i asymetrycznych;
  - zwrotnych i przeciwzwrotnych;
  - dyskretnych i gęstych.
- Istnieją relacje, które nie są:
  - ani symetryczne, ani asymetryczne;
  - ani zwrotne, ani przeciwzwrotne;
  - ani dyskretne, ani gęste.

Własności relacji

Niektóre związki między operacjami na relacjach a własnościami relacji.

Niech $R \subseteq X \times X$.

- R jest zwrotna wtedy i tylko tedy, gdy $i_X \subseteq R$
- R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko tedy, gdy $R \cap i_X = \emptyset$
- R jest symetryczna wtedy i tylko tedy, gdy $R = R^{-1}$
- R jest asymetryczna wtedy i tylko tedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- R jest antysymetryczna wtedy i tylko tedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq i_X$
- R jest przechodnia wtedy i tylko tedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
- R jest przechodnia wtedy i tylko tedy, gdy $R = R^{tr}$
- R jest spójna wtedy i tylko tedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup i_X = X \times X$.

Własności relacji

- Jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$, R^{-1}, R^{tr} też są zwrotne.
- Jeśli relacje R i S są przeciwzwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1} też są zwrotne.
- Złożenie $R \circ S$ relacji przeciwzwrotnych jest przeciwzwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
- Jeśli relacje R i S są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R \circ R^{-1}$, R^{tr}.
- Jeśli relacje R i S są symetryczne, to $R \circ S$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.
- Jeśli R jest asymetryczna, to R^{-1} też.
- Jeśli R jest asymetryczna, to $R \cap S$ jest asymetryczna, dla dowolnej S.
- Jeśli R i S są przechodnie, to $R \cap S$, R^{-1} i R^{tr} też.

Własności relacji

- Jeśli R i S są antysymetryczne, to $R \cap S$ i R^{-1} też.
- Jeśli R i S są antysymetryczne, to: $R \cup S$ jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} \subseteq i_X$.
- Jeśli R i S są asymetryczne, to: $R \cup S$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
- Jeśli R jest symetryczna i przechodnia, to R jest zwrotna, czyli $R = R^{-1}$ oraz $R \circ R \subseteq R$ implikują $i_X \subseteq R$.
- $R \subseteq R \oplus S$ oraz $S \subseteq R \oplus S$.
- Jeśli R, S, T są przechodnie, to $(R \oplus S) \oplus T = R \oplus (S \oplus T)$.
- Jeśli R, S, T są przechodnie, to: jeśli $R \subseteq T$ i $S \subseteq T$, to $(R \oplus S) \subseteq T$.

Koniec

Zadanie domowe.

- Zapamiętać ze Zrozumieniem wprowadzone dziś pojęcia: operacje na relacjach oraz własności relacji.
- Przeczytać ze Zrozumieniem prezentację Wstęp do Matematyki (3).
- Rozwiązać zadania

236–242 (operacje na relacjach)	190–204 (własności relacji)

ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Uwaga. Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie uzyskasz zaliczenia z tego przedmiotu. Wybór należy do ciebie.