3. Semantyczna niesprzeczność

3.1. Definicje

Zbiór formuł jest ***semantycznie niesprzeczny*** (***spełnialny***), gdy ma co najmniej jeden model, tj. gdy wszystkie jego elementy są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji. W przeciwnym przypadku, tj. gdy nie ma żadnego modelu (wszystkie jego elementy nie są prawdziwe w żadnej wspólnej interpretacji), jest ***semantycznie sprzeczny***. Badanie rozważaną metodą, czy dany (skończony) zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny polega na:

- przypuszczeniu, że wszystkie rozważane formuły są prawdziwe (w co najmniej jednej wspólnej interpretacji);
- zbudowaniu drzewa semantycznego, w którego pniu umieszczone są wszystkie rozważane formuły;
- konkluzji, uzależnionej od kształtu otrzymanego drzewa.

Możliwe są następujące sytuacje dla danego zbioru formuł X:

- wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte; wtedy zbiór X jest semantycznie sprzeczny (wszystkie elementy zbioru X nie mogą być współprawdziwe);
- pewne gałęzie drzewa są otwarte; wtedy X jest semantycznie niesprzeczny, a każda z otwartych gałęzi drzewa pozwala utworzyć interpretację, w której wszystkie elementy zbioru X są współprawdziwe;[1]

Rozważymy przykłady ilustrujące obie z wyliczonych wyżej sytuacji. Może warto w tym miejscu zaznaczyć, że także problemy omawiane w innych podrozdziałach tego rozdziału sprowadzają się do badania, czy pewne zbiory formuł są semantycznie sprzeczne, czy też semantycznie niesprzeczne.[2]

3.2. Przykłady

Przykład III.3.1: Krawędź banału

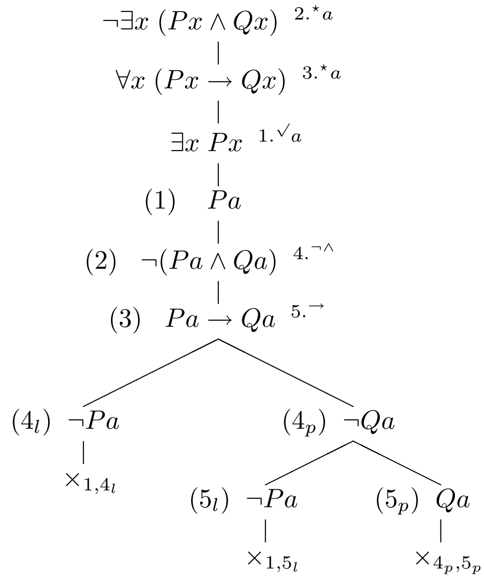
Zacznijmy od przykładu na krawędzi banału. Sprawdzimy, czy jest semantycznie niesprzeczny zbiór złożony z następujących formuł:

$$\neg\exists x\,(Px \wedge Qx)$$
$$\forall x\,(Px \to Qx)$$
$$\exists x\,Px$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy te formuły. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa się zamkną, to badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Jeśli pozostanie jakaś gałąź otwarta, to zbiór ten jest semantycznie niesprzeczny.

[1]Dotyczy to otwartych gałęzi skończonych. Jak rzeczy się mają w przypadku gałęzi nieskończonych (a więc, siłą rzeczy, otwartych) wyjaśniamy w rozdziale IV.

[2]W rozdziale IV podajemy uzasadnienie, tj. formalny dowód, że skończony zbiór formuł nie ma modelu wtedy i tylko wtedy, gdy jego drzewo semantyczne (czyli drzewo dla koniunkcji wszystkich jego elementów) ma wszystkie gałęzie zamknięte. Uzasadnienie to wykorzystuje wspomniany w części wstępnej niniejszych notatek *lemat Hintikki*. Pokazujemy także, jak pewien ważny wynik metalogiczny (*twierdzenie o zwartości*) pozwala sprowadzać pytanie o spełnialność dowolnego zbioru X formuł języka KRP do pytania o spełnialność wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. Z punktu widzenia zastosowań omawianej metody istotna jest ta wersja twierdzenia o zwartości, która ustala, że jakiś zbiór formuł języka KRP jest semantycznie ***sprzeczny*** wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego ***skończonych*** podzbiorów jest semantycznie sprzeczny.



Wszystkie gałęzie są zamknięte. Zatem nie istnieje interpretacja, w której wszystkie powyższe formuły byłyby jednocześnie prawdziwe, zbiór tych formuł jest semantycznie sprzeczny.

A czemu wspomnieliśmy o krawędzi banału? Spójrzmy (posłuchajmy?!), co „mówią" rozważane trzy zdania. Pierwsze stwierdza, że część wspólna denotacji predykatów P oraz Q jest pusta. Drugie głosi, że denotacja P zawiera się w denotacji Q, a trzecie powiada, że denotacja P jest niepusta. Tak jednocześnie być nie może. Kto lubi rysuneczki, może sporządzić stosowny diagram Venna i przekonać się **naocznie**, że niemożliwe jest zaznaczenie na nim, które obszary są puste, a które niepuste bez popadnięcia w kolizję logiczną. Każde dwa z rozważanych zdań tworzą zbiór semantycznie niesprzeczny (co łatwo sprawdzić, budując stosowne drzewa semantyczne dla każdej pary powyższych formuł), wszystkie trzy razem — zbiór semantycznie sprzeczny.

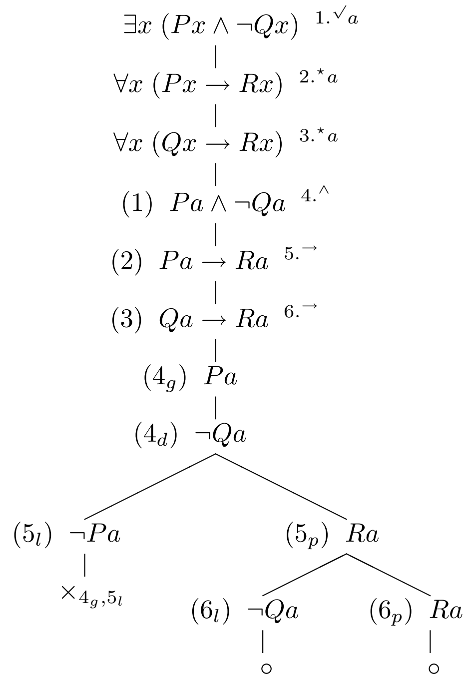
Przykład III.3.2.: Ocieranie się o krawędź banału

W dalszym ciągu ocieramy się o banał. Pokażemy, że zbiór złożony z poniższych formuł jest semantycznie niesprzeczny, tzn. istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe.

$$\exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$$
$$\forall x\,(Px \to Rx)$$
$$\forall x\,(Qx \to Rx)$$

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły. Jest to zatem przypuszczenie, że wszystkie one mogą być prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. Przypuszczenie to będzie potwierdzone, jeśli co najmniej jedna gałąź drzewa zostanie otwarta; wtedy, zgodnie z definicją, zbiór tych formuł jest semantycznie niesprzeczny. Gdyby wszystkie gałęzie drzewa zostały zamknięte, to powyższe przypuszczenie musielibyśmy odrzucić — rozważany zbiór formuł byłby semantycznie sprzeczny.

A oto drzewo:



To drzewo ma dwie gałęzie otwarte i do żadnej formuły, na żadnej z tych gałęzi, nie można już stosować żadnych reguł. Zatem istnieją interpretacje, w których wszystkie trzy powyższe formuły są jednocześnie prawdziwe. Z każdej z gałęzi otwartych uzyskać można informację, jakie zdania atomowe zachodzą w każdej z tych interpretacji. W przypadku rozważanego drzewa, informacje te są takie same na każdej gałęzi otwartej; otrzymujemy więc następującą interpretację, w której wszystkie trzy rozważane zdania są prawdziwe:

- uniwersum jest złożone z (co najmniej) jednego obiektu oznaczanego przez stałą a;
- obiekt oznaczany przez stałą a należy do denotacji predykatów P oraz R, a nie należy do denotacji predykatu Q.

Zgodnie z uprzednio proponowaną konwencją, znaleziona interpretacja reprezentowana jest za pomocą tabelki:

	P	Q	R
a	+	−	+

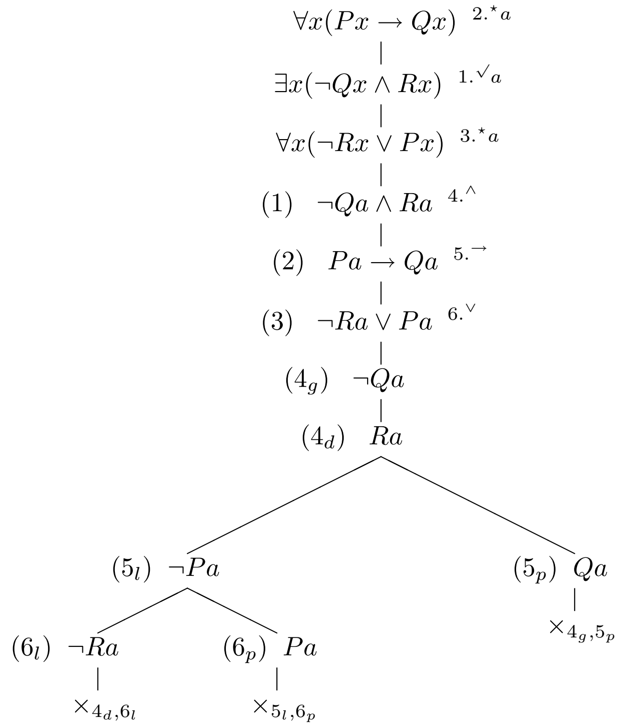
Przypominamy, że znak „+” na przecięciu wiersza odpowiadającego obiektowi oraz kolumny odpowiadającej denotacji predykatu jednoargumentowego (tj. własności) oznacza, że obiekt ten należy do tej denotacji (ma daną własność); znak „−”, że nie należy.

Przykład III.3.3.: Sierść a inteligencja

U fryzjera należy zachować powagę, a co najmniej ostrożność (uzbrojony facet zajmuje się twoją głową!). Nie zawsze jest to łatwe; gdy usłyszysz np. taki (może nie całkiem pełnosprawny gramatycznie, ale to nieistotne) tekst:

> *Każda blondynka jest inteligentna. Co najmniej jedna brunetka nie jest inteligentna. Każda z Was, miłe dziewczęta: nie jest brunetką lub jest blondynką.*

to być może odruchowo, dla zachowania równowagi logicznej, na której ufasz osadzić także swą równowagę psychiczną, zbudujesz drzewo semantyczne w którego pniu będą formuły języka KRP z jednoargumentowymi predykatami P, Q, R (tu interpretowane: Px — x jest blondynką, Qx — x jest inteligentna, Rx — x jest brunetką). I podczas gdy Mistrz będzie się zajmował zewnętrzem twej kształtnej główki, w jej przestronnym wnętrzu pojawi się następujące wyobrażenie:



Wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte. Oznacza to zatem, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby jednocześnie pierwsze trzy formuły występujące w pniu tego drzewa. A to z kolei, zgodnie z definicją semantycznej niesprzeczności znaczy, że te trzy formuły tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. Tak więc, choć każde z rozpatrywanych na początku tego przykładu zdań może z osobna być np. prawdziwym komplementem (lub prawdziwą złośliwą obserwacją), to ***wszystkie razem*** nie mogą być prawdziwe, w żadnym świecie, niezależnie od tego, jakie występują w nim korelacje między posiadaniem (lub nie) określonej sierści a ilorazem inteligencji.

Przykład III.3.4.: Teraz Polska

Pokażemy, że w żadnej interpretacji nie mogą być jednocześnie prawdziwe następujące formuły:

$$\exists x \exists y\ ((Px \wedge \neg Py) \wedge \neg xQy)$$
$$\forall x \forall y\ ((Px \wedge Ry) \to xQy)$$
$$\neg \exists x\ (\neg Px \wedge \neg Rx)$$

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe trzy formuły. Postaramy się stosować reguły w takiej kolejności, aby drzewo to miało rozgałęzienia najpóźniej, jak to możliwe — jak wiemy, pozwala to zminimalizować niezbędną pracę (bo nie trzeba powtarzać tych samych kroków w różnych gałęziach drzewa), co stanowi dla nas, jako zadeklarowanych antypracoholików, wartość autoteliczną.

$$\exists x\exists y\,((Px \wedge \neg Py) \wedge \neg xQy) \quad {}^{1.\checkmark a}$$

$$\forall x\forall y\,((Px \wedge Ry) \rightarrow xQy) \quad {}^{6.\star a}$$

$$\neg\exists x\,(\neg Px \wedge \neg Rx) \quad {}^{5.\star b}$$

$$(1) \quad \exists y\,((Pa \wedge \neg Py) \wedge \neg aQy) \quad {}^{2.\checkmark b}$$

$$(2) \quad ((Pa \wedge \neg Pb) \wedge \neg aQb) \quad {}^{3.\wedge}$$

$$(3_g) \quad Pa \wedge \neg Pb \quad {}^{4.\wedge}$$

$$(3_d) \quad \neg aQb$$

$$(4_g) \quad Pa$$

$$(4_d) \quad \neg Pb$$

$$(5) \quad \neg(\neg Pb \wedge \neg Rb) \quad {}^{8.\neg\wedge}$$

$$(6) \quad \forall y\,((Pa \wedge Ry) \rightarrow aQy) \quad {}^{7.\star b}$$

$$(7) \quad (Pa \wedge Rb) \rightarrow aQb \quad {}^{11.\rightarrow}$$

- (8_l) $\neg\neg Pb$ $^{9.\neg\neg}$
  - (9) Pb
    - $\times_{4_d,9}$
- (8_p) $\neg\neg Rb$ $^{10.\neg\neg}$
  - (10) Rb
    - (11_l) $\neg(Pa \wedge Rb)$ $^{12.\neg\wedge}$
      - (12_l) $\neg Pa$
        - $\times_{4_g,12_l}$
      - (12_p) $\neg Rb$
        - $\times_{10,12_p}$
    - (11_p) aQb
      - $\times_{3_d,11_p}$

Istotnie, wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Nie istnieje zatem interpretacja, w której trzy powyższe formuły byłyby jednocześnie prawdziwe. Zbiór tych formuł jest więc semantycznie sprzeczny.

Nie zawsze udaje się od razu zbudować „optymalne" drzewo, tj. zastosować tylko te reguły, które prowadzą do jak najszybszego zamknięcia wszystkich gałęzi lub doprowadzenia do sytuacji, w której nie stosują się już żadne reguły (pamiętacie — to oznacza koniec pracy!!!). Pewną wskazówką przy optymalizacji drzew jest np. to, czy w drzewie o wszystkich gałęziach zamkniętych występują formuły złożone, do których nie stosowano żadnych reguł — takie formuły, a więc i kroki do nich prowadzące, można wyeliminować, zyskując na czasie, przestrzeni oraz estetyce, a nie naruszając przy tym poprawności wyniku. Inna wskazówka: stosowanie reguły $R(\neg\neg)$ do formuł, będących podwójnie zaprzeczonymi formułami atomowymi, nie przyczynia się do zamykania gałęzi drzewa.

Jako ćwiczenie uprzejmie proponujemy Czytelniczkom dokładne obejrzenie powyższego drzewa i próbę jego optymalizacji: które kroki nie są niezbędne do zamykania gałęzi? Czy użyto zalecanej i najbardziej efektywnej kolejności stosowania reguł?

Niech predykat P będzie dumnie interpretowany jako własność *bycia Polakiem*, R jako własność *bycia obcokrajowcem*, zaś xQy interpretujmy jako *x szydzi z y*. Wtedy trzy rozważane na początku tego przykładu formuły uzyskują np. następujące odczytanie:

> *Pewien Polak nie szydzi z co najmniej jednego Niepolaka. Każdy Polak szydzi ze wszystkich obcokrajowców. Nikt nie jest jednocześnie Niepolakiem oraz nieobcokrajowcem.*

Idiotyzm tego tekstu ma wielorakie przyczyny. Jedną z nich jest oczywiście to, że wyjściowy zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny, a semantyczna sprzeczność wypowiadana wszystko jedno jakimi ustami (dziewiczo niewinnymi, charyzmatycznymi, świątobliwymi, itd.) musi — na przekór wszelkim pozorom — brzmieć absurdalnie. Inną z tych przyczyn jest toporne używanie negacji przynazwowej (Niepolak, ew. nie-Polak, nieobcokrajowiec). Wreszcie, trzecia z powyższych formuł (zawierająca pięć wystąpień stałych logicznych) może być — z zachowaniem warunków prawdziwości — sparafrazowana do nieco prostszej formuły, zawierającej dwa wystąpienia takich stałych.

W poprzednim podrozdziale przypomnieliśmy niektóre prawa KRP, m.in. prawa De Morgana ustalające semantyczną równoważność (współprawdziwość we wszystkich interpretacjach) zanegowanych formuł generalnie lub egzystencjalnie skwantyfikowanych ze stosownymi formułami w których negacja nie jest spójnikiem głównym. Jednym z takich praw jest:

$$\neg\exists x\ A(x) \leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$$

Z KRZ pamiętamy, że negacja koniunkcji jest semantycznie równoważna alternatywie negacji (to jedno z praw De Morgana dla KRZ) oraz że negacja negacji formuły jest semantycznie tejże formule równoważna. Zbierając razem te fakty, łatwo ustalić, że trzecia z formuł z rozważanego zbioru jest semantycznie równoważna z formułą:

$$\forall x\ (Px \vee Rx)$$

i wykorzystać to przy tworzeniu poniższego — może odrobinę choć mniej niezgrabnego od poprzedniego — tekstu utworzonego ze zdań zbudowanych wedle badanych formuł:

> *Pewien Polak nie szydzi z kogoś, kto Polakiem nie jest. Wszyscy Polacy szydzą z każdego obcokrajowca. Każdy jest Polakiem lub obcokrajowcem.*

Może to i brzmi lepiej po polsku (sic!), ale i tak pozostaje, na mocy uczynionych ustaleń dotyczących semantycznej sprzeczności badanego zbioru formuł, bredzeniem.

Przykład III.3.5.: Dwunaste: nie będziesz (nadaremno) molestowała intelektualnie

Semantyczne sprzeczności czają się wszędzie, a wiadomo, że gdy jakiś zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny, to jest on groźny z różnych względów, np.:

- wszystko (dowolna formuła) wynika zeń logicznie (a więc także zdanie mówiące, że gdy czytasz te słowa, to jesteś już praktycznie ***martwa***, Droga Czytelniczko);
- opisuje (?) on interpretacje nieistniejące, a dokładniej, ***nie mogące istnieć***; (np. istnienie różnych Krain Dobrostanu Społecznego, Powszechnego Szczęścia i — rzecz jasna — Sprawiedliwości, itp. ułud ***logicznie*** wykluczone nie jest; ***jest*** natomiast wykluczone logicznie istnienie interpretacji w której prawdziwe byłyby zdania wzajem sprzeczne);
- cokolwiek wypowiesz używając struktur składniowych formuł z tego zbioru będzie — jako całość — brednią, kompletnym nonsensem, choćby nawet najpiękniej się rymowało i brzmiało wręcz niebiańsko; itd.

Szczególnie narażone na cierpienia związane z semantyczną sprzecznością są młode Humanistki, niewinnie ufne w Eufonię Słowa. Im nauka logiki przynieść może największe pożytki, często pomaga poprawić znacząco pozycję społeczną (*Trzeba uważać, ona rozumie, co mówi...*), a czasami jest wręcz niezbędna, aby jak najdłużej, najintensywniej, najciekawiej utrzymać się na szczycie Wielkiego Łańcucha Pokarmowego Planety. Na logice podobno można też zarobić, ale nie będziemy tego akurat wątku rozwijać.

Pokażemy natomiast, że następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny:

$$\forall x\forall y\ (\exists z(zPy \wedge xPz) \rightarrow yPx)$$
$$\neg\exists x\ xPx$$
$$\neg\forall x\forall y\ (yPx \rightarrow \neg xPy)$$

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły:

$$\forall x \forall y\, (\exists z (zPy \wedge xPz) \rightarrow yPx) \quad {}^{3.\star a}$$

$$\neg \exists x\, xPx \quad {}^{2.\star a}$$

$$\neg \forall x \forall y\, (yPx \rightarrow \neg xPy) \quad {}^{1.\checkmark a}$$

$$(1) \quad \neg \forall y\, (yPa \rightarrow \neg aPy) \quad {}^{6.\checkmark b}$$

$$(2) \quad \neg aPa$$

$$(3) \quad \forall y\, (\exists z\, (zPy \wedge aPz) \rightarrow yPa) \quad {}^{4.\star a}$$

$$(4) \quad \exists z\, (zPa \wedge aPz) \rightarrow aPa \quad {}^{5.\rightarrow}$$

$$\begin{array}{ll}
(5_l) \quad \neg \exists z\, (zPa \wedge aPz) \quad {}^{7.\star b} & (5_p) \quad aPa \\
(6) \quad \neg(bPa \rightarrow \neg aPb) \quad {}^{8.\neg\rightarrow} & \times_{2,5_p} \\
(7) \quad \neg(bPa \wedge aPb) \quad {}^{10.\neg\wedge} & \\
(8_g) \quad bPa & \\
(8_d) \quad \neg\neg aPb \quad {}^{9.\neg\neg} & \\
(9) \quad aPb &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(10_l) \quad \neg bPa & (10_p) \quad \neg aPb \\
\times_{8_g,10_l} & \times_{9,10_p}
\end{array}$$

Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, a zatem badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Ćwiczenie: wylicz wszystkie możliwe zastosowania reguł, które pominięto w procesie zamykania gałęzi tego drzewa.

Niewielkim tylko wysiłkiem intelektualnym jest uświadomienie sobie, że nadzbiór zbioru semantycznie sprzecznego też jest semantycznie sprzeczny. Tak więc, cokolwiek (jakiekolwiek formuły) dołożyć do powyższego zbioru, to tak otrzymana całość też będzie semantycznie sprzeczna. Np. w powyższym drzewie każda gałąź (od korzenia do liścia) jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł; cokolwiek do niej dodamy, to otrzymana całość też będzie semantycznie sprzeczna. Tak więc, sprzeczności semantycznej nie można usunąć, ***dodając*** najbardziej nawet wyszukane mądrości, przysięgi, itp., ani też cytując Autorytety, wypowiadając jedno- bądź wieloznaczne groźby, itp.

Trzecia z rozpatrywanych na początku tego przykładu formuł jest semantycznie równoważna z formułą:

$$\exists x \exists y\, (yPx \wedge xPy).$$

(jest tak na mocy praw De Morgana dla kwantyfikatorów oraz pewnych praw KRZ — ufnie pozostawiamy ustalenie, o które prawa KRZ chodzi w tym przypadku pilnym Czytelniczkom).

Wykorzystamy ten fakt w Interpretacji Edukacyjnej (dotyczącej brutalnego transferu wiedzy), tj. przy czytaniu wyrażenia xPy jako *x molestuje intelektualnie y*:

> *Dla dowolnych dwóch obywateli, jeśli pewien obywatel (obywatelka) jest molestowany(a) intelektualnie przez pierwszego z nich, ale sam(a) molestuje intelektualnie drugiego, to ów drugi obywatel również molestuje intelektualnie pierwszego. Sam siebie nikt nie molestuje intelektualnie. Są tacy obywatele, którzy molestują się intelektualnie nawzajem.*

To, że — jak właśnie ustaliliśmy — tekst powyższy jest semantycznie sprzeczny („opisuje” sytuację logicznie niemożliwą) może uspokoi te Humanistki, którym kiedykolwiek zdawało się, że są intelektualnie molestowane. Gdyby nadal dręczył je tego typu niepokój, to mogą wykonać ćwiczenie stylistyczne, polegające na napisaniu powyższego tekstu zgrabniejszą polszczyzną. Jakiekolwiek tego tekstu upiększanie nie odwoła jednak jego semantycznej sprzeczności (oczywiście, jeśli *upiększając* nie będziecie *oszukiwać!*). Wreszcie, można w ramach Programu Łagodzenia Obyczajów, inaczej jeszcze zinterpretować predykat P i otrzymać inny zwięzły, semantycznie sprzeczny, absolutnie nikomu niepotrzebny tekst.

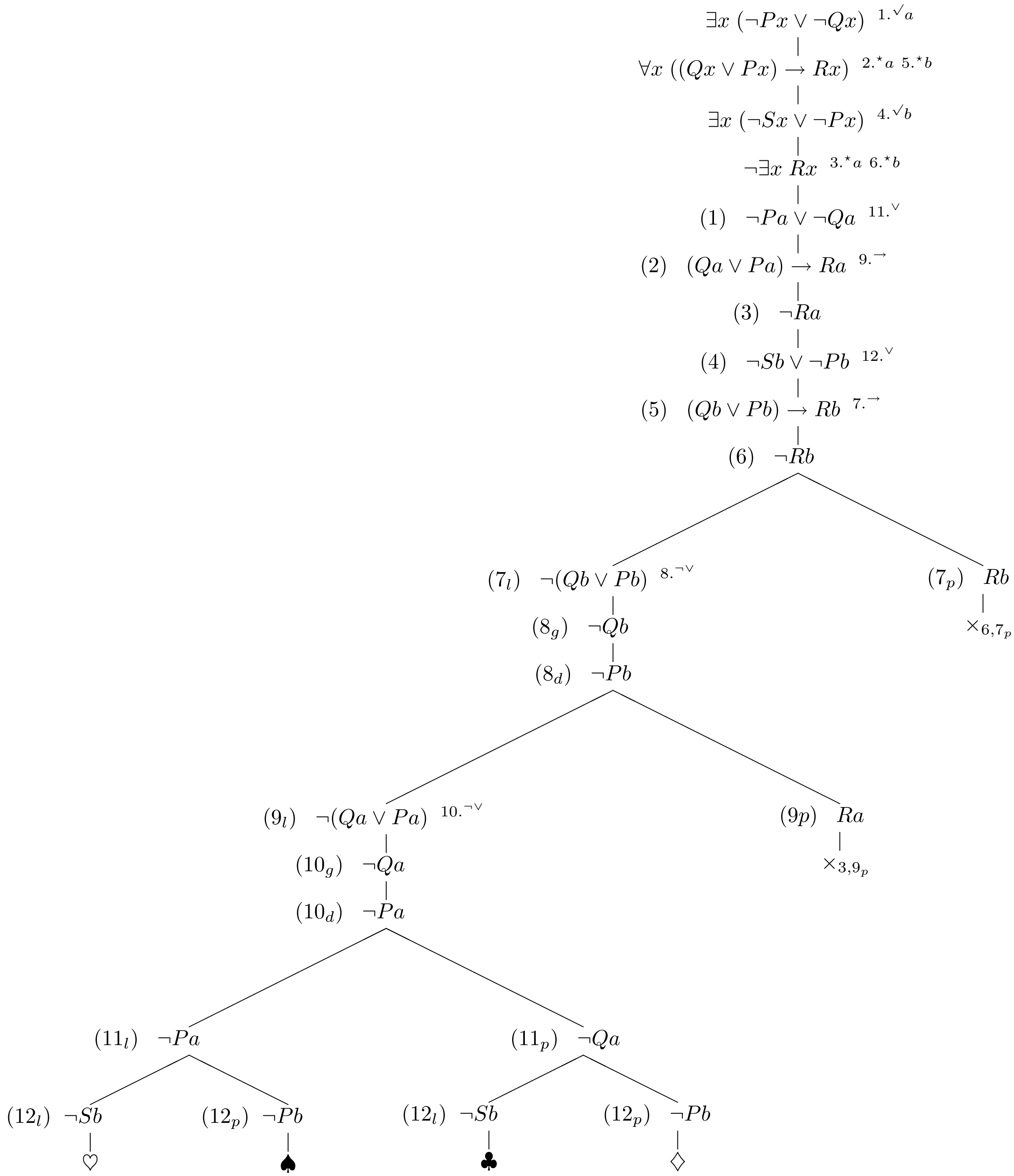
Przykład III.3.6.: Bajeczka bardzo niepoprawna politycznie

Czasami jeden rzut oka wystarczy, aby zamniemać, że dany tekst jest semantycznie niesprzeczny — pomyśl tylko, ile razy dajesz wiarę np. wiadomościom prasowym lub telewizyjnym (nie mówiąc już o elukubracjach medialnych ekonomistów albo psychologów). Życie wedle wskazań intuicji i mniemań jest interesujące, pełne zaskoczeń, itd. Logika nie przeszkadza w tych przygodach, czasami bywa pomocna w ich urozmaiceniu, a niekiedy nawet ułatwia (umożliwia) przeżycie.

Nie ograniczymy się jedynie do rzucania okiem na poniższy zbiór formuł, ale pokażemy, iż jest on semantycznie niesprzeczny — skonstruujemy interpretacje, w którym wszystkie rozważane formuły są jednocześnie prawdziwe.

$$\begin{gathered}\exists x\ (\neg Px \vee \neg Qx)\\ \forall x\ ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx)\\ \exists x\ (\neg Sx \vee \neg Px)\\ \neg\exists x\ Rx\end{gathered}$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły:



Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tego drzewa nie można już zastosować żadnych reguł. Zauważmy, że krok $^{12.\vee}$ należało wykonać w dwóch miejscach, a mianowicie w gałęziach zakończonych (przed wykonaniem tego kroku) formułami o numerach (11_l) oraz (11_p). Cztery gałęzie tego drzewa (oznaczone tu liśćmi: ♣, ♢, ♡ oraz ♠) są otwarte. Badany zbiór formuł jest więc semantycznie niesprzeczny — istnieją interpretacje, w których wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe. Dla celów tego przykładu zauważmy, że zbierając informacje umieszczone na każdej z gałęzi otwartych powyższego drzewa otrzymujemy przepis, jak skonstruować interpretacje, w których wszystkie formuły z danej gałęzi są prawdziwe (pamiętajmy, że formuły z pnia drzewa należą do każdej z jego gałęzi).

Każda z szukanych interpretacji zawiera denotacje stałych indywiduowych a oraz b. Należą one do dopełnień (względem uniwersum) denotacji predykatów P, Q, R. Ponadto, w interpretacjach wyznaczonech przez gałęzie z liśćmi ♡ oraz ♣ denotacja stałej b nie należy do denotacji predykatu S. To, czy denotacja stałej a należy do denotacji predykatu S nie ma znaczenia w przypadku każdej z interpretacji wyznaczonej przez gałęzie otwarte drzewa. W przypadku interpretacji wyznaczonych przez gałęzie o liściach ♠ oraz ♢ nie ma znaczenia także to, czy denotacja stałej b należy do denotacji predykatu S.

Poniższe tabelki ukazują szukane interpretacje (znak zapytania na przecięciu wiersza i kolumny oznacza, że nie jest istotne, czy postawimy tam znak „+”, czy „–”, obie możliwości są dopuszczalne, *anything goes*):

♡	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	–

♠	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	?

♣	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	–

♢	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	?

Jak Czytelniczki z pewnością pamiętają, prawem KRZ jest formuła $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$; w KRZ obowiązują również prawa przemienności koniunkcji oraz przemienności alternatywy. Zatem pierwsza i trzecia z formuł z rozważanego w tym przykładzie zbioru mogą być zastąpione semantycznie im równoważnymi formułami ze spójnikiem implikacji; jedna z takich zamian ma postać następującą:

$$\exists x\ (Px \rightarrow \neg Qx)$$
$$\forall x\ ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx)$$
$$\exists x\ (Px \rightarrow \neg Sx)$$
$$\neg \exists x\ Rx$$

Także ten zbiór formuł jest, rzecz jasna, semantycznie niesprzeczny. Pierwsza i trzecia z przytoczonych na początku tego przykładu formuł mogą też zostać zastąpione semantycznie im równoważnymi formułami zawierającymi spójnik koniunkcji, na mocy prawa KRZ: $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$:

$$\exists x\ \neg(Px \wedge Qx)$$
$$\forall x\ ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx)$$
$$\exists x\ \neg(Px \wedge Sx)$$
$$\neg \exists x\ Rx$$

Humanistkom spragnionym lektury czegoś mniej koszernego niż formułki języka KRP proponujemy następujący tekst, będący (choć zgrzebnym stylistycznie, to jednak nie całkiem ułomnym gramatycznie) jednym z opisów możliwej interpretacji ostatnich czterech powyżej wyliczonych formuł:

> *Jest ktoś, kto nie jest jednocześnie zdrowy i młody. Każdy, kto jest zdrowy lub młody, jest szczęśliwy. Jest ktoś, kto nie jest jednocześnie zdrowy i mądrzejszy niż przewiduje ustawa. Nie ma szczęśliwych.*

Zgodnie z naszymi ustaleniami, bajeczka powyższa opisuje możliwy stan rzeczy. Dla przykładu, sytuacja taka zachodzi w świecie, w którym żyje ktoś, kto nie jest młody, nie jest zdrowy, nie jest szczęśliwy i ma żonę (kochankę) o tych samych trzech własnościach (starą, chorą i nieszczęśliwą). To, czy jedno z nich (denotacja stałej a) jest mądrzejsze niż przewiduje ustawa, nie ma absolutnie żadnego znaczenia; ograniczenia dotyczące w tej mierze drugiego z nich, tj. denotacji stałej b podano w tabelkach ♡ oraz ♣.

Wszystkim Czytelniczkom życzymy zdrowej, szczęśliwej młodości oraz przypominamy, że nieprzestrzeganie ustaw grozi konsekwencjami.

Przykład III.3.7.: Schadenfreude

Pokażemy, że następujące dwie formuły tworzą zbiór semantycznie sprzeczny, tj. nie są jednocześnie prawdziwe w żadnej interpretacji:

$$
\begin{array}{ll}
(1^\star) & \forall x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, Qz \\
(2^\star) & \neg \exists x \exists y \exists z\, (xPy \rightarrow Qz)
\end{array}
$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy obie powyższe formuły:

$$\forall x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, Qz \quad {}^{1.\rightarrow}$$

$$\neg \exists x \exists y \exists z\, (xPy \rightarrow Qz) \quad {}^{4.\star a\ 9.\star c}$$

$$
\begin{array}{ll}
(1_l) \quad \neg \forall x \forall y\, xPy \quad {}^{2.\checkmark a} & (1_p) \quad \exists z\, Qz \quad {}^{8.\checkmark c} \\
(2) \quad \neg \forall y\, aPy \quad {}^{3.\checkmark b} & (8) \quad Qc \\
(3) \quad \neg aPb & (9) \quad \neg \exists y \exists z\, (cPy \rightarrow Qz) \quad {}^{10.\star c} \\
(4) \quad \neg \exists y \exists z\, (aPy \rightarrow Qz) \quad {}^{5.\star b} & (10) \quad \neg \exists z\, (cPc \rightarrow Qz) \quad {}^{11.\star c} \\
(5) \quad \neg \exists z\, (aPb \rightarrow Qz) \quad {}^{6.\star a} & (11) \quad \neg (cPc \rightarrow Qc) \quad {}^{12.\neg\rightarrow} \\
(6) \quad \neg (aPb \rightarrow Qa) \quad {}^{7.\neg\rightarrow} & (12_g) \quad cPc \\
(7_g) \quad aPb & (12_d) \quad \neg Qc \\
(7_d) \quad \neg Qa & \times_{8,12_d} \\
\times_{3,7_g} &
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie drzewa zostały zamknięte. Oznacza to, iż nie istnieje interpretacja, w której obie rozważane formuły byłyby jednocześnie prawdziwe. Zbiór z nich złożony jest semantycznie sprzeczny. Zauważmy, że do zamknięcia wszystkich gałęzi drzewa nie było potrzebne wykonanie wszystkich możliwych zastosowań reguły $R(\neg\exists)$: formuły o numerze (4) nie rozwijaliśmy ze względu na stałą a (gdybyśmy to uczynili, to moglibyśmy, równie niepotrzebnie, rozwijać otrzymaną wtedy formułę $\neg \exists z\, (aPa \rightarrow Qz)$ zarówno względem a, jak i b) natomiast formuły o numerze (5) nie rozwijaliśmy ze względu na stałą b. I w tym momencie każda Humanistka może z dumą wrzasnąć: ***Jestem sprytniejsza od komputera!!!*** (ponieważ komputer wszystkie te rozwinięcia precyzyjnie i całkiem niepotrzebnie (!) oczywiście by wykonał).

Z powyższego ustalenia wynika, że koniunkcja tych dwóch formuł nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji. Innymi słowy, jest ona fałszywa w każdej interpretacji. Stąd, koniunkcja ta jest kontrtautologią KRP.

Usilnie namawiamy Czytelniczki do odrobiny samodzielności. Prosimy mianowicie o sprawdzenie, że każda z tych formuł z osobna ***jest*** prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Wystarczy w tym celu zbudować drzewa semantyczne dla każdej z tych formuł i przekonać się, że mają one gałęzie otwarte.

Gdyby Czytelniczki rozochociły się tą samodzielnością, to nie ma żadnego zakazu, aby same przekonały się, że również zbiór złożony z ***negacji*** rozważanych formuł ***jest*** semantycznie sprzeczny, natomiast każda z tych zaprzeczonych formuł z osobna ***jest*** prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Ale w przypadku, gdyby nadmiar samodzielności ciążył intelektualnie, to zapraszamy do obejrzenia poniższego drzewa, w którego pniu umieszczamy negacje rozważanych formuł; pokażemy, że drzewo to ma wszystkie gałęzie zamknięte, a więc że negacje formuł $(1^\star)$ oraz $(2^\star)$ też tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. Oto drzewo:

$$\neg(\forall x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, Qz)\ ^{2.\neg\rightarrow}$$

$$\neg\neg\exists x \exists y \exists z\, (xPy \rightarrow Qz)\ ^{1.\neg\neg}$$

$$(1)\quad \exists x \exists y \exists z\, (xPy \rightarrow Qz)\ ^{3.\checkmark a}$$

$$(2_g)\quad \forall x \forall y\, xPy\ ^{6.\star a}$$

$$(2_d)\quad \neg\exists z\, Qz\ ^{8.\star c}$$

$$(3)\quad \exists y \exists z\, (aPy \rightarrow Qz)\ ^{4.\checkmark b}$$

$$(4)\quad \exists z\, (aPb \rightarrow Qz)\ ^{5.\checkmark c}$$

$$(5)\quad aPb \rightarrow Qc\ ^{9.\rightarrow}$$

$$(6)\quad \forall y\, aPy\ ^{7.\star b}$$

$$(7)\quad aPb$$

$$(8)\quad \neg Qc$$

$$\begin{array}{cc} (9_l)\quad \neg aPb & (9_p)\quad Qc \\ \times_{7,9_l} & \times_{8,9_p} \end{array}$$

Istotnie, wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte, a więc negacje formuł ($1^\star$) oraz ($2^\star$) również tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. I znowuż, urocza Humanistko, okazałaś się sprytniejsza od komputera, nie rozwijając bez potrzeby wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych (oraz negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych) ze względu na wszystkie stałe! Zanim jednak ***radośnie wrzaśniesz***, sumiennie policz ile pracy zaoszczędziłaś. . .

Przypuśćmy, że nadamy predykatom P oraz Q następującą interpretację (ze względu na jej brutalność, osoby o dużej wrażliwości mogą opuścić lekturę tego przykładu, przeciętny telewidz może czytać spokojnie dalej):

$x_1 P x_2$ interpretujmy jako x_1 *ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad* x_2;

Qx interpretujmy jako x *doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Wtedy pierwsze z rozpatrywanych zdań, tj.:

$$(1^\star)\quad \forall x \forall y\, xPy \rightarrow \exists z\, Qz$$

można przy tej interpretacji w miarę poprawnie gramatycznie odczytać; np.:

> *Jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Natomiast zdanie drugie, czyli ($2^\star$) jest — jak sądzimy — nieco trudniejsze do jakiegoś poprawnego, niechropawego stylistycznie odczytania, choć może czytanie następujące jest akceptowalne:

> *Nie istnieją tacy (trzej?) osobnicy, że gdy jeden ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad drugim, to ktoś (trzeci?) doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Jeden z kłopotów przy tym czytaniu polega na tym, że w języku naturalnym mówimy tu *więcej*, niż każe nam powiedzieć rozważana formuła KRP, bo w formule tej nie przesądza się, że odnosimy się do trzech obiektów.

Inną jeszcze możliwością odczytania formuły ($2^\star$) w rozważanej interpretacji wydaje się być np.:

Nie jest tak, że gdy ktoś nad kimś znęca się ze szczególnym okrucieństwem, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.

Ze względu na komplikacje anaforyczne, także to odczytanie brzmi nieswojo.

Zauważmy jednak, że zdanie

$$(2^{\star}) \quad \neg\exists x\exists y\exists z\ (xPy \rightarrow Qz)$$

jest semantycznie równoważne ze zdaniem

$$(3^{\star}) \quad \forall x\forall y\forall z\neg(xPy \rightarrow Qz),$$

a to z kolei jest semantycznie równoważne ze zdaniem

$$(4^{\star}) \quad \forall x\forall y\forall z\ (xPy \wedge \neg Qz).$$

W pierwszym przypadku semantyczna równoważność jest konsekwencją jednego z praw De Morgana dla kwantyfikatorów:[3]

$$\neg\exists x\ A(x) \leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$$

Drugą równoważność otrzymujemy na mocy znanej tautologii KRZ:

$$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

Zatem, można od biedy uznać, że w proponowanej interpretacji inkryminowane zdanie sparafrazować da się (z zachowaniem warunków prawdziwości) np. tak:

Nie dość, że każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to w dodatku nikt nie doznaje sadystycznego zadowolenia.

Czy teraz semantyczna sprzeczność uzyskała Humanistyczną Naoczność? Jeszcze nie?

Można, korzystając z dalszych praw KRP (które uzyskać można także metodą drzew semantycznych), pokazać, że zdanie $(4^{\star})$ (a w konsekwencji także $(2^{\star})$) jest semantycznie równoważne z każdym ze zdań poniższych:

$$(5^{\star}) \quad \forall x\forall y\ (xPy \wedge \forall z\ \neg Qz)$$

$$(6^{\star}) \quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \forall z\ \neg Qz$$

$$(7^{\star}) \quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \neg\exists z\ Qz$$

Jeśli teraz spojrzymy na formuły:

$$(1^{\star}) \quad \forall x\forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ Qz$$

$$(7^{\star}) \quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \neg\exists z\ Qz$$

to nie można nie zauważyć, że powstają one z formuł KRZ postaci $p \rightarrow q$ oraz $p \wedge \neg q$ przez podstawienie za p formuły $\forall x\forall y\ xPy$ a za q formuły $\exists z\ Qz$. Tak więc, w istocie badaliśmy, czy semantycznie sprzeczny jest zbiór formuł KRZ $\{p \rightarrow q, p \wedge \neg q\}$. Zbiór ten jest semantycznie sprzeczny, jako że każda z tych formuł jest semantycznie równoważna negacji drugiej: $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ oraz $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$. W szczególności, formuła $(7^{\star})$ jest semantycznie równoważna formule następującej:

$$(8^{\star}) \quad \neg(\forall x\forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ Qz)$$

Wykonaliśmy więc kawał solidnej (?), żmudnej roboty, której można uniknąć, jeśli zna się już odrobinę logiki. Formuła $(8^{\star})$ jest, zgodnie z uczynioną przed chwilą obserwacją, semantycznie równoważna negacji formuły $(1^{\star})$.

A zatem w przywołanej brutalnej interpretacji formuła $(1^{\star})$ oraz formuła $(8^{\star})$ (semantycznie równoważna formule $(2^{\star})$, jak ustaliliśmy) odczytane mogą być np. tak:

[3]Które to prawa uzasadniliśmy metodą drzew semantycznych w podrozdziale III.2.

Jest prawdą, że: *jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Nie jest prawdą, że: *jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Najwyższy czas zakończyć analizę tego przykładu. Mamy nadzieję, że dostarczyła ona Czytelniczkom stosownego zadowolenia. A jeśli jeszcze nie, to proponujemy opisać światy, w których — przy przywołanej brutalnej interpretacji predykatów P oraz Q — prawdziwe są pojedyńczo formuły ($1^\star$), ($2^\star$) oraz te światy, w których prawdziwe są pojedyńczo negacje tych formuł. I wybrać świat dla siebie.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl