

KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW:

SEMANTYKA: ZADANIA

(LOGIKA MATEMATYCZNA: WYKŁADY 16, 17)

SEMESTR LETNI 2007–2008

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ UAM

<http://www.logic.amu.edu.pl>

17. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

17.1. Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- (a) $\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists y (Q(x) \wedge R(x, y)))$
- (b) $\exists x (P(x) \wedge \forall z (Q(z) \rightarrow R(x, z)))$
- (c) $\exists x (P(x) \wedge \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α , gdzie:

- (a) t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z (P(y, z) \rightarrow Q(x))$; x jest jedyną zmienną w termie t ;
- (b) t jest postaci $g(x, y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow Q(z))$; x i y są jedynymi zmiennymi w termie t ;
- (c) t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$; t jest termem bazowym.

17.1.3. Podaj wartość $S(t, x, t')$ dla:

- (a) t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- (b) t postaci $f(x, f(x, x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x, y))$;
- (c) t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a, a)$; $g(a, a)$ jest termem bazowym.

17.1.4. Podaj wartość $S(t, x, \alpha)$ dla:

- (a) t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- (b) t postaci $f(x, y)$ oraz α postaci $\forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- (c) t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, x))$.

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- (a) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f ;
- (b) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g ;
- (c) utworzonych z jednej zmiennej x , jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g .

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniem języka KRP:

- (a) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, x, x))$
- (b) $\exists x ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- (c) $\forall x \exists y (P(f(y), x) \wedge Q(x, f(y)))$.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \dots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum \mathfrak{M} o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- (a) α postaci $\exists x_1 (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- (b) α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$
- (c) α postaci $\exists x_1 (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2 (x_1 \prec x_2)$
- (d) α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

17.2.2. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- (a) α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- (b) α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- (c) α postaci $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3. Niech \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech \prec będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} , dla:

- (a) α postaci $\forall x \forall y \exists z (x \prec z \wedge z \prec y)$
- (b) α postaci $\forall x \forall y \exists z (z \prec x \wedge z \prec y)$
- (c) α postaci $\forall x \forall y \exists z (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz \mathfrak{M} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości \leq . Niech \prec będzie predykatem denotującym relację \leq . Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze \mathfrak{M} ?

17.2.4. Niech \mathfrak{N} będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia \cdot i następnika „ $+1$ ” oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- \oplus denotuje operację dodawania
- \otimes denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- \prec denotuje relację mniejszości
- \doteq denotuje relację identyczności
- \circ denotuje liczbę 0.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest podzielna bez reszty przez y
- (b) x jest liczbą pierwszą
- (c) x i y są względnie pierwsze
- (d) x jest sumą dwóch kwadratów
- (e) x jest większa od każdego dzielnika y
- (f) x nie jest następnikiem żadnego dzielnika y
- (g) x jest liczbą parzystą
- (h) x jest największym wspólnym dzielnikiem y oraz z
- (i) x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z .

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze \mathcal{N} :

- (a) Istnieje największa liczba pierwsza.
- (b) Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- (c) Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- (d) Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego dzielnika.
- (e) Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi: $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
- (f) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- (g) Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech \mathcal{L} będzie nieskończonym zbiorem L częściowo uporządkowanym przez relację \sqsubseteq . Oznacza to, że relacja \sqsubseteq jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja \sqsubset będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat \doteq denotuje relację identyczności $=$. Niech predykat \ll denotuje relację \sqsubseteq , a predykat \prec relację \sqsubset .

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest elementem \sqsubseteq -minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji \sqsubseteq)
- (b) x jest elementem \sqsubseteq -maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji \sqsubseteq)
- (c) x jest elementem \sqsubseteq -najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji \sqsubseteq względem każdego y)
- (d) x jest elementem \sqsubseteq -największym (x jest następnikiem w relacji \sqsubseteq względem każdego y)
- (e) x nie jest \sqsubseteq -następnikiem y oraz nie jest \sqsubseteq -poprzednikiem z .

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze \mathcal{L} :

- (a) Porządek \sqsubseteq jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- (b) Porządek \sqsubset jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji \sqsubset oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji \sqsubset istnieje element \sqsubseteq -pośredni).

- (c) Porządek \sqsubset jest dyskretny (każdy element, który ma \sqsubset -poprzednik (\sqsubset -następnik), ma także bezpośredni \sqsubset -poprzednik (bezpośredni \sqsubset -następnik)).
- (d) Porządek \sqsubset nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- (e) Istnieją elementy \sqsubseteq -nieporównywalne.
- (f) Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubseteq -poprzednik.
- (g) Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubseteq -następnik.
- (h) Istnieją elementy \sqsubset -nieporównywalne.
- (i) Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubset -poprzednik.
- (j) Każde dwa elementy mają wspólny \sqsubset -następnik.

Niech teraz \mathcal{L} będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja \sqsubseteq będzie inkluzją, a \sqsubset inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w \mathcal{L} ?

17.3. Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- (a) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- (b) $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- (c) $\forall x \exists y P(y, x) \rightarrow \exists y \forall x P(y, x)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\exists x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta)$
- (b) $(\alpha \vee \forall x \beta) \rightarrow \forall x (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α .
- (c) $\forall x (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \forall x (\beta \rightarrow \neg \alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następująca formuła jest prawdziwa w każdej strukturze skończonej, ale nie jest tautologią KRP:

- (a) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y , dla:

- (a) $X = \{\forall x (\alpha \rightarrow \beta), \forall x (\beta \rightarrow \gamma)\}, Y = \{\forall x (\alpha \rightarrow \gamma)\}$
- (b) $X = \{\forall x \alpha, \forall x \beta\}, Y = \{\forall x (\alpha \wedge \beta), \forall x (\alpha \vee \beta)\}$.

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α , dla:

- (a) $X = \{\forall x \exists y P(x, y), \exists x P(x, x)\}, \alpha$ postaci $\forall x P(x, x)$
- (b) $X = \{\exists x P(x), \forall x (P(x) \vee Q(x))\}, \alpha$ postaci $Q(x)$.

17.5. Teoria mnogości

Uwaga. Sluchacze tych wykladów maja za soba kurs WSTEPU DO MATEMATYKI, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- (a) x jest funkcją różnowartościową z y na z .
- (b) Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- (c) Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- (a) $\forall x \forall y \forall z ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z)$
- (b) $\forall x \forall y \forall z ((x \in y \wedge y \neq z) \rightarrow x \notin z)$
- (c) $\forall x \forall y \forall z ((x \subseteq y \wedge y \in z) \rightarrow x \notin z)$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- (a) $\forall x \forall y \forall z ((x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \rightarrow x \cap z = \emptyset)$
- (b) $\forall x \forall y (x = x \cap y \rightarrow x \subseteq y)$
- (c) Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

17.5.4. Udowodnij, że:

- (a) operacje sumy \cup oraz różnicy – można zdefiniować w terminach operacji: \cap oraz różnicy symetrycznej \div ;
- (b) operacji sumy \cup nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu \cap oraz różnicy –.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- (a) Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S , a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R . Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R , czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- (b) Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X .
- (c) Złożenie $R_1 \circ SR_2$ relacji równoważności R_1 oraz R_2 jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- (a) Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y .
- (b) Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- (c) Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- (a) Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- (b) Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedynki.
- (c) Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a (w drugiej aksjomatyce):

- (a) Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y .
- (b) Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y .

17.6.4. Niech \mathbb{F} będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech \mathfrak{B} będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- (a) Czy zbiór \mathbb{F} jest filtrem, czy ideałem algebry \mathfrak{B} ?
- (b) Czy algebra \mathfrak{B} zawiera jakieś atomy lub koatomy?

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenie języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- (a) Są wstrętne prawdy i piękne fałszy.
- (b) Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę.
- (c) Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- (d) Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- (e) Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- (a) $\forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x)); P(x) \text{ — } x \text{ wdycha opary rtęci, } Q(x) \text{ — } x \text{ kona, rzeżąc, pocąc się i mocząc, } R(x) \text{ — } x \text{ świruje jarzabka.}$

- (b) $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists x \neg R(x))))$; $P(x)$ — x jest bezrobotny, $Q(x, y)$ — x jest bogatszy od y , $R(x)$ — x jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.
- (c) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 ((M(x_1, x_2, x_3) \wedge M(x_4, x_3, x_5)) \rightarrow \exists x_6 (M(x_1, x_6, x_4) \wedge M(x_5, x_2, x_6)))$; $M(x, y, z)$ — y leży między x oraz z , przy czym nie jest wykluczone, iż y jest identyczny z x lub y jest identyczny z z .

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- (a) Żaden papież nie był kobietą.
- (b) Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- (c) Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- (d) Prawdy wieczne są odwieczne.
- (e) Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.

Rozwiązania ćwiczeń

17.1. Język KRP

17.1.1.

- (a) Pierwsze z lewej wystąpienie y jest wolne w tej formule. Zmienna y jest zmienną wolną tej formuły.
- (b) Ta formuła nie zawiera zmiennych wolnych.
- (c) Zmienna y jest jedyną zmienną wolną tej formuły.

17.1.2.

- (a) Tak. Żadna zmienna występująca w termie $f(x)$ nie stanie się związana po podstawieniu tego termu do rozważanej formuły.
- (b) Nie. Po wstawieniu termu $g(x, y)$ do formuły $\forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow Q(z))$ zmienna y występująca w tym termie staje się związana w rozważanej formule.
- (c) Tak. Term $f(a)$ nie zawiera zmiennych wolnych, a więc jest podstawialny do każdej formuły.

17.1.3.

- (a) $S(f(a), x, g(x, f(x)))$ jest termem $g(f(a), f(f(a)))$.
- (b) $S(f(x, f(x, x)), x, g(x, g(x, y)))$ jest termem $g(f(x, f(x, x)), g(f(x, f(x, x), y)))$.
- (c) Nie można dokonać podstawienia. Term $g(a, a)$ nie zawiera zmiennej x .

17.1.4.

- (a) $S(y, x, \forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z)))$ jest formułą $\forall x \exists z (P(y) \rightarrow Q(y, z))$.

- (b) $S(f(x, y), x, \forall x \exists z (P(x) \rightarrow Q(x, z)))$ jest formułą $\forall x \exists z (P(f(x, y)) \rightarrow Q(f(x), z))$. Zauważ, że zmienna x stała się związana po podstawieniu!
- (c) $S(g(x, f(y)), x, P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, x)))$ jest formułą:
 $P(g(x, f(y))) \rightarrow Q(f(g(x, f(y))), g(g(x, f(y))), g(x, f(y)))$.

17.1.5.

- (a) Jest to zbiór: $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}$.
- (b) Jest to zbiór: $\{x, g(x, x), g(x, g(x, x)), g(g(x, x), x), \dots\}$.
- (c) Jest to zbiór:
 $\{x, t, g(x, x), g(t, t), g(x, t), g(t, x)\} \cup$
 $\{g(x, g(x, x)), g(x, g(t, t)), g(x, g(x, t)), g(x, g(t, x))\} \cup$
 $\{g(t, g(x, x)), g(t, g(t, t)), g(t, g(x, t)), g(t, g(t, x))\} \cup \dots$

17.1.6.

- (a) Tak, jest zdaniem.
- (b) Pierwszy człon koniunkcji zawiera wolne wystąpienie zmiennej y , a więc rozważana formuła nie jest zdaniem.
- (c) Tak, jest zdaniem.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1.

- (a) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden jej człon. Wystarczy teraz zauważyć, że ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} pierwszy człon tej alternatywy, ponieważ ciąg $w' = \langle 0, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$.
- (b) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w strukturze \mathfrak{M} co najmniej jeden jej człon. Ciąg w spełniałby w strukturze \mathfrak{M} pierwszy człon tej alternatywy, gdyby **każdy** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \dots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \dots \rangle$ nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej alternatywy: ciąg w spełniałby w strukturze \mathfrak{M} drugi człon tej alternatywy, gdyby **każdy** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \dots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 1, 0, 1, 1, \dots \rangle$ nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy zatem, że ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ nie spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} żadnego z członów rozważanej alternatywy. W konsekwencji, alternatywa ta nie jest spełniona w strukturze \mathfrak{M} przez ciąg w .
- (c) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami egzystencjalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_1 x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy **co najmniej jeden** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 0: ciąg $\langle 0, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej koniunkcji: ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} drugi człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_2 x_1 \prec x_2$ wtedy

i tylko wtedy, gdy **co najmniej jeden** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 2: ciąg $\langle 1, 2, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$. Ponieważ ciąg w spełnia w strukturze \mathfrak{M} oba człony koniunkcji, spełnia też w strukturze \mathfrak{M} całą koniunkcję.

- (d) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwie jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami generalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\forall x_1 x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy **każdy** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną. Jednak np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \dots \rangle$ nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy więc, że ciąg w nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $\forall x_1 x_1 \prec x_2$, czyli pierwszego członu rozważanej koniunkcji. Nie spełnia zatem również całej koniunkcji. Szukanie odpowiedzi na pytanie, czy ciąg w spełnia w strukturze \mathfrak{M} drugi człon rozważanej koniunkcji (a nietrudno pokazać, że nie spełnia) nie jest już potrzebne.

17.2.2.

- (a) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla **każdego** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \dots \rangle$, gdzie a jest **dowolną** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest alternatywą, więc w' spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden człon tej alternatywy. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \dots \rangle$ nie spełnia **żadnego** z członów tej alternatywy. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełniają alternatywę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełniającego w strukturze \mathfrak{M} formułę:

$$\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1).$$

- (b) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla **każdego** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \dots \rangle$, gdzie a jest **dowolną** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest koniunkcją, więc w' spełnia ją w strukturze \mathfrak{M} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwie człony tej koniunkcji. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \dots \rangle$ nie spełnia **żadnego** z członów tej koniunkcji. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełniają koniunkcję $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełniającego w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$.
- (c) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa: (1) w nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $\forall x_1 (x_1 \prec x_2)$ **lub** (2) w spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_2 (x_1 \prec x_2)$. Punkt (1) oznacza, że nie dla wszystkich wartościowań $w' = \langle a, w_2, w_3 \dots \rangle$ wartościowanie w' spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $x_1 \prec x_2$. Istotnie, tak właśnie jest: np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \dots \rangle$ nie spełnia w strukturze \mathfrak{M} formuły $x_1 \prec x_2$. Ponieważ zachodzi jeden (pierwszy) z członów alternatywy (1) **lub** (2), więc zachodzi cała ta alternatywa. Oznacza to, że **dowolne** wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \dots \rangle$ spełnia w strukturze \mathfrak{M} formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3.

Najpierw rozważamy przypadek, gdy \prec denotuje relację mniejszości $<$.

- (a) Rozpatrywana formuła stwierdza, że między każdymi dwiema liczbami naturalnymi istnieje liczba „pośrednia” (w sensie porządku $<$). Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze \mathfrak{M} , ponieważ np. między liczbami 1 i 2 nie ma żadnej liczby naturalnej n takiej, że $1 < n$ oraz $n < 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba mniejsza od nich obu. Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze \mathfrak{M} , ponieważ nie istnieje np. liczba mniejsza od liczb 0 oraz 1.
- (c) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba większa od nich obu. Formuła ta jest więc prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} : dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n np. liczba $m + n + 1$ jest większa zarówno od m , jak i od n .

UWAGA. W powyższej interpretacji nie mamy możliwości stwierdzenia, że rozważane liczby naturalne są różne (nie dysponujemy predykatem identyczności).

Rozważamy teraz przypadek, gdy \prec denotuje relację niewiększości \leq .

- (a) Rozpatrywana formuła jest fałszywa w strukturze \mathfrak{M} : np. dla liczb 3 oraz 2 nie istnieje liczba n taka, że $3 \leq n$ oraz $n \leq 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} . Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $k \leq m$, jak i $k \leq n$.
- (c) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze \mathfrak{M} . Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $m \leq k$, jak i $n \leq k$.

17.2.4.

A) W przypadku predykatu \doteq będziemy pisać $t_1 \doteq t_2$ zamiast $\doteq (t_1, t_2)$. Podobnie, w przypadku predykatu \prec będziemy pisać $t_1 \prec t_2$ zamiast $\prec (t_1, t_2)$. Niech ponadto predykat \preceq będzie zdefiniowany warunkiem: $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \prec y$ lub $x \doteq y$. [Oznacza to, że wyrażenie $x \preceq y$ jest skrótem dla wyrażenia $x \prec y \vee x \doteq y$.]

- (a) $\exists z (x \doteq \otimes(y, z))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $div(x, y)$. Formułę $div(x, y)$ czytamy zatem: x jest podzielna się bez reszty przez y .
- (b) $\forall y (y \preceq x \rightarrow ((y \doteq S(\circ)) \vee y \doteq x) \vee \neg div(x, y))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $pr(x)$. Formułę $pr(x)$ czytamy zatem: x jest liczbą pierwszą.
- (c) $\forall z ((\neg z \doteq S(\circ)) \wedge (z \preceq x \wedge z \preceq y)) \rightarrow \neg(div(x, z) \wedge div(y, z))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $rp(x, y)$. Formułę $rp(x, y)$ czytamy zatem: x oraz y są względnie pierwsze.
- (d) $\exists y \exists z (x \doteq \oplus(\otimes(y, y), \otimes(z, z)))$. Formuła ta stwierdza, że x jest sumą dwóch kwadratów.
- (e) $\forall z (div(y, z) \rightarrow z \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest większa od każdego dzielnika y .
- (f) $\forall z (div(y, z) \rightarrow \neg x \doteq s(z))$. Formuła ta stwierdza, że liczba x nie jest następnikiem żadnego dzielnika liczby y .
- (g) $\exists z (x \doteq \otimes(S(S(\circ)), z))$. Formuła ta stwierdza, że x jest liczbą parzystą.
- (h) $div(y, x) \wedge div(z, x) \wedge \forall u ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest największym wspólnym dzielnikiem y oraz z .
- (i) $div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)$. Formuła ta stwierdza, że x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z .

B)

- (a) $\exists x (pr(x) \wedge \forall y (pr(y) \rightarrow y \preceq x))$. To zdanie stwierdza, że istnieje największa liczba pierwsza. Jest ono fałszywe w strukturze \mathfrak{M} .
- (b) Tego nie można napisać w języku KRP. „Bardzo dużo” jest wyrażeniem niejasnym znaczeniowo. W języku KRP rozważanej sygnatury można zapisać np. to, że dla każdej liczby pierwszej istnieje większa od niej liczba pierwsza (por. punkt (a) powyżej). Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- (c) $\forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 (x \doteq \oplus(\otimes(y_1, y_1), \oplus(\otimes(y_2, y_2), \oplus(\otimes(y_3, y_3), \otimes(y_4, y_4))))))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów. Jest ono prawdziwe w strukturze \mathfrak{M} .
- (d) $\forall x \forall v \forall y \forall z (((div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)) \wedge (div(y, v) \wedge div(z, v) \wedge \forall u ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq v))) \rightarrow x \prec v)$. Ta formuła stwierdza, że najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego dzielnika. Jest ona fałszywa w strukturze \mathfrak{M} .

- (e) Zapišmy najpierw formułę $R(x)$ wyrażającą fakt, że $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\oplus(\otimes(S(S(S(\bigcirc))), \otimes(x, x)), \oplus(\otimes(S(S(\bigcirc)), x), S(\bigcirc))) \doteq \bigcirc.$$

Napišemy teraz, że istnieją dokładnie dwie liczby, dla których zachodzi $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\exists x_1 \exists x_2 ((R(x_1) \wedge R(x_2)) \wedge \forall y (R(y) \rightarrow (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2))).$$

To zdanie jest fałszywe w strukturze \mathfrak{M} .

- (f) $\forall x \forall y \forall z (\otimes(\oplus(x, y), z) \doteq \oplus(\otimes(x, z), \otimes(y, z)))$. To zdanie wyraża (prawostronną) rozdzielność dodawania względem mnożenia. Jest ono prawdziwe w strukturze \mathfrak{M} . Podobnie zapisujemy lewostronną rozdzielność dodawania względem mnożenia (Ćwiczenie: zapisz).
- (g) $\forall x (\exists z (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z)) \rightarrow \exists u \exists v ((pr(u) \wedge pr(v)) \wedge x \doteq \oplus(u, v)))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. W chwili, gdy pisane są te słowa, nie wiadomo, czy to zdanie jest prawdziwe w strukturze \mathfrak{M} . Jest to tzw. *hipoteza Goldbacha*.

17.2.5.

A)

- (a) $\neg \exists y (\neg y \doteq x \wedge y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem \sqsubseteq -minimalnym.
- (b) $\neg \exists y (\neg y \doteq x \wedge x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem \sqsubseteq -maksymalnym.
- (c) $\forall y (x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem \sqsubseteq -najmniejszym.
- (d) $\forall y (y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem \sqsubseteq -największym.
- (e) $\neg y \ll x \wedge \neg x \ll x$. Formuła ta stwierdza, że x nie jest \sqsubseteq -następnikiem y oraz nie jest \sqsubseteq -poprzednikiem z .

B)

- (a) Trzeba zapisać, że predykat \ll denotuje relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną:
 $\forall x (x \ll x)$
 $\forall x \forall y \forall z ((x \ll y \wedge y \ll z) \rightarrow x \ll z)$
 $\forall x \forall y ((x \ll y \wedge y \ll x) \rightarrow x \doteq y)$
 $\forall x \forall y (\neg x \doteq y \rightarrow (x \ll y \vee y \ll x))$.
 Koniunkcja tych formuł stwierdza, że \sqsubseteq (czyli denotacja predykatu \ll) jest liniowym porządkiem.
- (b) $\exists x \exists y (\neg x \doteq y \wedge x \prec y) \wedge \forall x \forall y \exists z (x \prec y \rightarrow (x \prec z \wedge z \prec y))$. Formuła ta stwierdza, że \sqsubset (czyli denotacja predykatu \prec) jest porządkiem gęstym.
- (c) $\forall x (\exists y x \prec y \rightarrow \neg \exists z (x \prec z \wedge z \prec y)) \wedge \forall x (\exists y x \prec y \rightarrow \neg \exists z (y \prec z \wedge z \prec x))$. Formuła ta stwierdza, że \sqsubset (czyli denotacja predykatu \prec) jest porządkiem dyskretnym: każdy element, który ma \sqsubset -poprzednik (\sqsubset -następnik) ma też bezpośredni \sqsubset -poprzednik (bezpośredni \sqsubset -następnik).
- (d) Koniunkcja zaprzeczeń formuł z (b) i (c) powyżej stwierdza, że \sqsubset (czyli denotacja predykatu \prec) nie jest ani porządkiem gęstym, ani porządkiem dyskretnym.
- (e) $\exists x \exists y (\neg x \ll y \wedge \neg y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy \sqsubseteq -nieporównywalne.
- (f) $\forall x \forall y \exists z (z \ll x \wedge z \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny \sqsubseteq -poprzednik.
- (g) $\forall x \forall y \exists z (x \ll z \wedge y \ll z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny \sqsubseteq -następnik.
- (h) $\exists x \exists y (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy \sqsubset -nieporównywalne.

- (i) $\forall x \forall y \exists z (z \prec x \wedge z \prec y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny \sqsubset -poprzednik.
- (j) $\forall x \forall y \exists z (x \prec z \wedge y \prec z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny \sqsubset -następnik.

Dla każdego z powyższych zdań znaleźć można zbiór częściowo uporządkowany, w którym zdanie to jest fałszywe. Innymi słowy, zdania te nie są prawdziwe o wszystkich zbiorach częściowo uporządkowanych.

Jeśli L jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, a relacja \sqsubseteq jest relacją inkluzji i relacja \sqsubset jest relacją inkluzji właściwej, to w strukturze $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$:

- (a) Nie jest prawdziwe. Inkluzja nie jest porządkiem liniowym w L .
- (b) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa nie jest porządkiem gęstym w rozważanym zbiorze. Dla przykładu, nie istnieje zbiór A taki, że $\{1, 2\} \subset A$ oraz $A \subset \{1, 2, 3\}$.
- (c) Jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa jest porządkiem dyskretnym w rozważanym zbiorze.
- (d) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej: zobacz punkty (b) i (c) powyżej.
- (e) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subseteq B$ ani $B \subseteq A$.
- (f) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$.
- (g) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \subseteq A \cup B$ oraz $B \subseteq A \cup B$.
- (h) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subset B$ ani $B \subset A$.
- (i) Nie jest prawdziwe. Zbiór pusty \emptyset oraz dowolny zbiór niepusty A nie mają wspólnego \subset -poprzednika.
- (j) Nie jest prawdziwe. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz dowolny jego podzbiór A nie mają wspólnego \subset -następnika.

17.3. Tautologie KRP

17.3.1.

- (a) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę \mathfrak{M} , w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

- być liczbą podzielną przez 2
- być liczbą podzielną przez 4.

Wtedy:

- Poprzednik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Jeśli wszystkie liczby są podzielne przez 2, to wszystkie liczby są podzielne przez 4*. Ta implikacja jest prawdziwa w rozważanej interpretacji, ponieważ ma fałszywy poprzednik.
- Następnik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Każda liczba podzielna przez 2 jest też podzielna przez 4*. Ta implikacja jest fałszywa w rozważanej interpretacji, ponieważ np. liczba 2 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 4.
- (b) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę \mathfrak{M} , w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:
 - być liczbą parzystą

- być liczbą nieparzystą.

Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta).

- (c) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę \mathfrak{M} , w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacja predykatu P będzie relacją „być następnikiem”. Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (każda liczba ma następnik), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, będąca następnikiem wszystkich liczb naturalnych).

17.3.2. Przyjmijmy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m .

- (a) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja \mathfrak{M} taka, że: $\mathfrak{M} \models \exists x (\alpha \rightarrow \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \exists x \beta$. Stąd istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x \beta$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$). Na mocy definicji relacji spełniania oznacza to, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$.

Na mocy $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x \alpha$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$.

Założenie $\mathfrak{M} \models_w \exists x (\alpha \rightarrow \beta)$ oznacza, że dla pewnego $m_0 \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$.

Ponieważ dla wszystkich $m \in M$ mamy $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$, więc mamy także w szczególności: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$.

Ponieważ reguła odrywania jest niezawodna, z powyższego otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$, co jest sprzeczne z otrzymanym poprzednio $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologią KRP.

- (b) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Załóżmy, że x nie jest zmienną wolną w α . Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja \mathfrak{M} taka, że: $\mathfrak{M} \models \alpha \vee \forall x \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x (\alpha \vee \beta)$. Oznacza to, że istnieje wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x (\alpha \vee \beta)$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x \beta$). Na mocy definicji relacji spełniania istnieje element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \vee \beta$. Stąd, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$.

Z założenia, $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że zachodzi alternatywa:

- (1) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ **lub**
- (2) $\mathfrak{M} \models_w \forall x \beta$.

Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

Jeśli zachodzi (1), to — ponieważ x nie jest zmienną wolną formuły α — na mocy twierdzenia 16.2.5.3., $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Ale $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$, na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost. Stąd przypadek (1) jest wykluczony.

Jeśli zachodzi (2), to $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$ dla wszystkich $m \in M$, na mocy definicji relacji spełniania. W szczególności zatem: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, również przypadek (2) został wykluczony.

Przypuszczenie dowodu nie wprost należy zatem odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologią KRP.

- (c) Wystarczy zauważyć, że formuły $\alpha \rightarrow \neg\beta$ oraz $\beta \rightarrow \neg\alpha$ są semantycznie równoważne, co widoczne jest stąd, że tautologiami KRZ są:

- $\alpha \rightarrow \neg\beta \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
- $\beta \rightarrow \neg\alpha \equiv \neg\beta \vee \neg\alpha$
- $\neg\alpha \vee \neg\beta \equiv \neg\beta \vee \neg\alpha$.

Formuły semantycznie równoważne spełniane są przez dokładnie te same wartościowania.

17.3.3.

- (a) Trzeba pokazać, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich strukturach skończonych, ale nie jest prawdziwa w co najmniej jednej strukturze nieskończonej.

Po pierwsze, pokażemy, że jeśli podana formuła jest fałszywa w jakiejś strukturze $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, gdzie relacja R jest denotacją predykatu P , to zbiór M jest nieskończony. Stąd oczywiście wynika, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich modelach skończonych.

Jeśli $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$ jest fałszywa w $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, to istnieje funkcja $f : M \rightarrow M$ taka, że:

- dla każdego $m \in M$ zachodzi $R(m, m)$
- dla żadnego $m \in M$ nie zachodzi $R(f(m), m)$
- dla każdych $m, n \in M$ mamy: jeśli $R(f(m), n)$, to $R(m, n)$.

Weźmy dowolny element $m \in M$. Konstruujemy ciąg $\langle m_i \rangle$ w sposób następujący:

- $m_0 = m$
- $m_{i+1} = f(m_i)$.

Niech $i < j$. Mamy wtedy:

- zachodzi $R(m_i, m_{j-1})$
- nie zachodzi $R(m_j, m_{j-1})$,

co oznacza, że $m_i \neq m_j$. Tak więc, ciąg $\langle m_i \rangle$ jest różnowartościowy. Stąd zbiór M jest nieskończony.

Po drugie, zauważmy, że rozważana formuła nie jest prawdziwa w strukturze nieskończonej \mathfrak{M} , której uniwersum stanowią wszystkie liczby naturalne, a denotacją predykatu P jest relacja niewiększości \leq .

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Przyjmijmy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywidualną, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m .

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura \mathfrak{M} taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$. Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$, $\mathfrak{M} \models \forall x (\beta \rightarrow \gamma)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x (\alpha \rightarrow \gamma)$. Stąd, dla pewnego wartościowania w mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x (\alpha \rightarrow \gamma)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$.

Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha \rightarrow \beta$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x (\beta \rightarrow \gamma)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta \rightarrow \gamma$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$, to oczywiście także $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$, ponieważ reguła sylogizmu hipotetycznego jest regułą niezawodną. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, zachodzi wynikanie logiczne: $X \models_{krp} Y$.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura \mathfrak{M} taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.

Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \{\forall x (\alpha \wedge \beta), \forall x (\alpha \vee \beta)\}$. Zachodzi zatem alternatywa:

- (1) $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x (\alpha \wedge \beta)$ **lub**

- (2) $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x (\alpha \vee \beta)$.

Każdy z tych przypadków należy rozpatrzeć oddzielnie.

Jeśli zachodzi (1), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x (\alpha \wedge \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \wedge \beta)$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \wedge \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem przypadek (1) został wykluczony.

Jeśli zachodzi (2), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x (\alpha \vee \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \vee \beta)$. Stąd: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie), a zatem również przypadek (2) został wykluczony.

Ostatecznie, przypuszczenie dowodu nie wprost należy odrzucić. Zachodzi wynikanie logiczne $X \models_{krp} Y$.

17.4.2.

- (a) Wystarczy znaleźć interpretację \mathfrak{M} taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P w tym zbiorze. Niech:

- $M = \{1, 2, 3\}$
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(P) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

- (b) Wystarczy znaleźć interpretację \mathfrak{M} taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P oraz $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ predykatu Q w tym zbiorze. Niech:

- M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

17.5. Teoria mnogości

17.5.1. Definicje wszystkich rozpatrywanych pojęć muszą być sformułowane jedynie w terminach relacji \in oraz relacji identyczności $=$.

- (a) Definiujemy najpierw pojęcia: singletonu, pary nieuporządkowanej i pary uporządkowanej:

$$x = \{y\} \equiv \forall z(z \in x \equiv z = y)$$

$$x = \{y, z\} \equiv \forall u(u \in x \equiv (u = y \vee u = z))$$

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Predykat „być funkcją” ma następującą definicję:

$$\text{Fn}(x) \equiv (\forall y(y \in x \rightarrow \exists u \exists v(y = \langle u, v \rangle)) \wedge \forall y \forall u \forall v((\langle y, u \rangle \in x \wedge \langle y, v \rangle \in x) \rightarrow u = v)).$$

Definiujemy pojęcia dziedziny i przeciwdziedziny:

$$y = \delta(x) \equiv \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle z, u \rangle \in x))$$

$$y = \rho(x) \equiv \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle u, z \rangle \in x)).$$

Definiujemy własność „być funkcją różnowartościową”:

$$\text{In}(x) \equiv \text{Fn}(x) \wedge \forall y \forall z \forall u \forall v ((\langle y, u \rangle \in x \wedge \langle z, v \rangle \in x) \wedge u = v) \rightarrow y = z).$$

Wreszcie, własność „być funkcją różnowartościową z y na z ” definiujemy następująco:

$$\text{Bi}(x, y, z) \equiv \text{In}(x) \wedge (\delta(x) = y \wedge \rho(x) = z).$$

- (b) Definiujemy relacje inkluzji oraz inkluzji właściwej:

$$x \subseteq y \equiv \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$

$$x \subset y \equiv x \subseteq y \wedge \neg x = y.$$

Definiujemy własność „być zbiorem potęgowym zbioru x ”:

$$y = \wp(x) \equiv \forall z(z \in y \equiv z \subseteq x).$$

Fakt, że zbiory y oraz z są równoliczne ma zapis następujący:

$$\exists x \text{ Bi}(x, y, z).$$

Wtedy twierdzenie Cantora, głoszące, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów otrzymuje zapis następujący:

$$\neg \exists x \exists y \text{ Bi}(x, y, \wp(y)).$$

- (c) Definiujemy zbiór pusty oraz operację sumy zbiorów:

$$x = \emptyset \equiv \forall y \neg y \in x$$

$$z = x \cup y \equiv \forall u(u \in z \equiv (u \in x \vee u \in y)).$$

Definiujemy liczby porządkowe oraz graniczne liczby porządkowe:

$$\text{Ord}(x) \equiv (\forall y \forall z((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in x) \wedge \forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x) \rightarrow (z \in y \vee y = z \vee y \in z)))$$

$$\text{Lim}(x) \equiv ((\text{Ord}(x) \wedge \neg x = \emptyset) \wedge \forall y \neg x = y \cup \{x\}).$$

Definiujemy najmniejszą graniczną liczbę porządkową ω :

$$x = \omega \equiv (\text{Lim}(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg \text{Lim}(y))).$$

Definiujemy własność „być zbiorem przeliczalnym”:

$$\text{Ctb}(x) \equiv \exists y \text{ Bi}(y, x, \omega).$$

Definiujemy własność „być zbiorem nieskończonym”:

$$\text{Inf}(x) \equiv \exists y \exists z (z \in \wp(x) \wedge \text{Bi}(y, x, z)).$$

Wreszcie, definiujemy własność „być zbiorem nieprzeliczalnym”:

$$\text{Uct}(x) \equiv \text{Inf}(x) \wedge \neg \text{Ctb}(x).$$

Zdanie *Istnieje zbiór nieprzeliczalny* ma zatem postać:

$$\exists x \text{ Uct}(x).$$

Zwróćmy uwagę, że w definicji własności „być zbiorem nieprzeliczalnym” piszemy, że nie istnieje funkcja ustalająca równoliczność pewnych zbiorów.

17.5.2.

- (a) Wystarczy znaleźć zbiory A , B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
- $C = \{\{\{1, 2\}, 3\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \in B$, $B \in C$ oraz $A \notin C$.

- (b) Wystarczy znaleźć zbiory A , B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
- $C = \{\{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \in B$, $B \neq C$ oraz $A \in C$.

- (c) Wystarczy znaleźć zbiory A , B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \subseteq B$, $B \in C$ oraz $A \in C$.

17.5.3.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A , B oraz C takie, że:

- $A \subseteq B$
- $B \cap C = \emptyset$
- $A \cap C \neq \emptyset$.

Z ostatniej nierówności otrzymujemy, że istnieje $x \in A \cap C$, czyli $x \in A$ oraz $x \in C$. Skoro $A \subseteq B$, to $x \in B$. Ponieważ $B \cap C = \emptyset$, to $x \notin C$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to $A \cap C = \emptyset$, dla dowolnych zbiorów A , B oraz C .

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A oraz B takie, że:

- $A = A \cap B$
- $A \not\subseteq B$.

Z drugiego z powyższych warunków otrzymujemy, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \notin B$. Stąd i z warunku pierwszego, skoro $x \in A$ oraz $A = A \cap B$, to $x \in A \cap B$, czyli także $x \in B$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A = A \cap B$, to $A \subseteq B$, dla dowolnych zbiorów A oraz B .

- (c) Dla dowodu, że produkt kartezjański dowolnej niepustej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ zbiorów niepustych jest niepusty wystarczy skorzystać z pewnika wyboru: wybieramy po jednym elemencie a_i z każdego ze zbiorów A_i . Wtedy ciąg $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ jest elementem produktu kartezjańskiego rodziny $\{A_i : i \in I\}$.

17.5.4.

- (a) Przypominamy, że różnica symetryczna zbiorów A i B zdefiniowana jest wzorem:

$$A \dot{\div} B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Operacja ta jest łączna, tzn.: $A \dot{\div} (B \dot{\div} C) = (A \dot{\div} B) \dot{\div} C$, można więc pisać $A \dot{\div} B \dot{\div} C$ w miejsce $A \dot{\div} (B \dot{\div} C)$ lub $(A \dot{\div} B) \dot{\div} C$. Mamy:

- $A \cup B = A \dot{\div} B \dot{\div} (A \cap B)$
- $A - B = A \dot{\div} (A \cap B)$.

- (b) Niech zbiór C otrzymany będzie ze zbiorów A i B z pomocą operacji \cap i $-$. Liczbę zastosowań operacji \cap i $-$ potrzebnych do otrzymania C z A i B nazwiemy *wysokością* zbioru C . Przez indukcję po wysokości zbioru C pokażemy, że C jest podzbiorem albo A albo B .

Jeśli wysokość C wynosi 0, to $C = A$ lub $C = B$ i twierdzenie jest udowodnione.

Niech C ma wysokość $n+1$ i założmy, że twierdzenie zostało udowodnione dla wszystkich zbiorów o mniejszej wysokości. Wtedy $C = D \cap E$ lub $C = D - E$ dla pewnych zbiorów D i E , których wysokość jest mniejsza niż $n+1$.

W obu przypadkach $C \subseteq D$, a z założenia indukcyjnego D jest podzbiorem albo A , albo B . Zatem również C jest podzbiorem albo A , albo B .

Tak więc, z A i B z pomocą operacji \cap i $-$ otrzymać można tylko podzbiory A lub podzbiory B . Ale $A \cup B$ nie zawsze jest podzbiorem A lub podzbiorem B . Stąd, operacji sumy \cup nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu \cap i różnicy $-$.

17.5.5.

- (a) Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y :

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- $\exists z (yRz \wedge zSx)$
- $\exists z (zSx \wedge yRz)$
- $\exists z (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

- (b) Jeśli R jest relacją identyczności, to oczywiście jest relacją równoważności, a także jest częściowym porządkiem (bo jest zwrotna i przechodnia, a następnik implikacji charakteryzującej warunek antysymetrii jest zawsze spełniony, więc R jest również antysymetryczna).

Z drugiej strony, skoro R jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem, to ponieważ R jest zarazem symetryczna i antysymetryczna, to dla dowolnych x oraz y , z $R(x, y)$ otrzymujemy $x = y$. Ponieważ R jest w dodatku zwrotna, więc R musi być relacją identyczności.

- (c) Przypominamy, że:

- operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
- jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R , R_1 i R_2
- relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
- relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
- jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.

Niech teraz R_1 i R_2 będą relacjami równoważności.

Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.

Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1.

- (a) $\exists(x, y) \doteq \exists(x), \exists(y)$.
- (b) Zbiór I elementów algebry Boole'a jest jej ideałem, gdy:
 - $\forall x \forall y ((x \in I \wedge y \in I) \rightarrow \exists(x, y) \in I)$
 - $\forall x \forall y ((x \in I \wedge y \leq x) \rightarrow y \in I)$.
- (c) Zbiór F elementów algebry Boole'a jest jej filtrem, gdy:
 - $\forall x \forall y ((x \in F \wedge y \in F) \rightarrow \exists(x, y) \in F)$
 - $\forall x \forall y ((x \in F \wedge x \leq y) \rightarrow y \in F)$.

17.6.2. Niech \mathfrak{B} będzie algebrą Boole'a o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ wraz z operacjami:

- $\exists(x, y) = \max\{x, y\}$
- $\exists(x, y) = \min\{x, y\}$
- $\exists(x) = 1 - x$,

gdzie jedynką algebry jest 1, a jej zerem jest 0. Wtedy:

- (a) Algebra \mathfrak{B} nie zawiera atomów.
- (b) Algebra \mathfrak{B} nie zawiera koatomów.
- (c) Porządek algebry \mathfrak{B} jest liniowy.

17.6.3.

- (a) Przez różnicę elementów x oraz y rozumiemy element $\boxtimes(x, \boxminus(y))$. Oto dowód (w drugiej aksjomatyce), że kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y , czyli że zachodzi: $\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$:

- | | | |
|----|--|---------------------------------|
| 1. | $\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \boxplus(y, \boxminus(y)))$ | aksjomat B_2^7 |
| 2. | $\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \Delta)$ | 1, aksjomat B_2^1 |
| 3. | $\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(y, x)$ | 2, aksjomat B_2^2 |
| 4. | $\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(x, y)$ | 3, aksjomat B_2^6 |
| 5. | $\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$ | 4, symetryczność identyczności. |

- (b) Mamy pokazać, że dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y , czyli że: $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

Po pierwsze, przypomnijmy, że następujące warunki są równoważne:

- (1) $\boxtimes(x, y) = x$
- (2) $\boxplus(x, y) = y$.

Po drugie, zauważmy, że zachodzi implikacja:

$$(3) \text{ jeśli } \boxtimes(x, z) = \Delta \text{ oraz } \boxplus(x, z) = \nabla, \text{ to } z = \boxminus(x).$$

Istotnie, następujące dwa ciągi równości, wraz z (1) oraz (2) uzasadniają (3):

$$z = \boxplus(\Delta, z) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), z) = \boxtimes(\boxplus(x, z), \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\nabla, \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\boxminus(x), z).$$

$$z = \boxtimes(\nabla, z) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), z) = \boxplus(\boxtimes(x, z), \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\Delta, \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\boxminus(x), z).$$

Pokażemy teraz, że:

- (4) $\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \Delta$
- (5) $\boxplus(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \nabla$.

Wtedy, na mocy (3), (4) oraz (5) otrzymamy poszukiwaną równość $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

Dowód (4) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned} & \boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\ & \boxplus(\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(x)), \boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(y))) = \\ & \boxplus(\boxtimes(\boxtimes(y, x), \boxminus(x)), \boxtimes(x, \boxtimes(y, \boxminus(y)))) = \\ & \boxplus(\boxtimes(y, \boxtimes(x, \boxminus(x))), \boxtimes(x, \Delta)) = \boxplus(\boxtimes(y, \Delta), \Delta) = \\ & \boxplus(\Delta, \Delta) = \\ & \Delta. \end{aligned}$$

Dowód (5) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned} & \boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\ & \boxtimes(\boxplus(x, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y)))) = \\ & \boxtimes(\boxplus(\boxplus(x, \boxminus(x)), \boxminus(y)), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(y), \boxminus(x)))) = \\ & \boxtimes(\boxplus(\nabla, \boxminus(y)), \boxplus(\boxplus(y, \boxminus(y)), \boxminus(x))) = \\ & \boxtimes(\nabla, \boxplus(\nabla, \boxminus(x))) = \\ & \boxtimes(\nabla, \nabla) = \\ & \nabla. \end{aligned}$$

17.6.4.

- (a) Zbiór \mathbb{F} jest filtrem rozważanej algebry.
- (b) Atomami algebry \mathfrak{B} są dokładnie wszystkie zbiory jednoelementowe. Koatomami algebry \mathfrak{B} są dokładnie wszystkie zbiory, których dopełnienia są jednoelementowe.

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1.

- (a) Wybieramy predykaty:
 - $P(x)$ — x jest prawdą
 - $F(x)$ — x jest fałszem
 - $B(x)$ — x jest piękne
 - $U(x)$ — x jest wstrętne.

Wtedy struktura składniowa zdania *Są wstrętne prawdy i piękne fałsze* jest następująca:

$$\exists x (U(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x (B(x) \wedge F(x)).$$

- (b) Wybieramy predykaty:
 - $K(x)$ — x jest kobietą
 - $M(x)$ — x jest mężczyzną
 - $N(x)$ — x może nawiązać umowę o pracę
 - $R(x)$ — x może rozwiązać umowę o pracę.

Wtedy struktura składniowa zdania *Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę* jest następująca:

$$\forall x ((K(x) \vee M(x)) \rightarrow (N(x) \wedge R(x))).$$

Zwróć uwagę, że w powyższym przykładzie słowu „i” odpowiada alternatywa, a słowu „lub” odpowiada koniunkcja.

- (c) Mamy tu następujące predykaty:
 - $P(x, y, u, v)$ — z x do y jest dalej niż z u do v
 - $Q(x)$ — x jest miejscowością
 - $R(x, y)$ — x jest nie większa od y
 - $S(x)$ — x jest wioską w Japonii.

Mamy ponadto dwie stałe indywidualowe: a — denotującą Kutno oraz b — denotującą Paryż. Struktura składniowa zdania *Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii* jest zatem następująca:

$$\forall x \forall y (((Q(x) \wedge S(y)) \wedge \forall z (S(z) \rightarrow R(y, z))) \rightarrow P(a, x, b, y)).$$

- (d) Mamy tu jeden predykat dwuargumentowy: $P(x, y)$ — x myśli o y . Mamy ponadto jedną stałą indywidualową a , której denotacją jest wypowiadający rozważane zdanie. Trzeba również użyć predykatu identyczności \doteq . Struktura składniowa zdania *Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie* jest zatem następująca:

$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow x \doteq y) \wedge P(a, a).$$

- (e) Załóżmy, że predykatem istotnym dla rekonstrukcji budowy składniowej tego zdania jest:

– $P(x, y, z, t)$ — x ufa y w sprawie z w czasie t .

Wtedy struktura składniowa zdania *Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa* jest następująca:

$$\neg \exists x \exists y \exists z \exists t P(x, y, z, t).$$

Można też proponować inne rekonstrukcje logiczne tego zdania, wprowadzając dodatkowo predykaty dla oznaczania własności: „być momentem”, „być sprawą”, „być osobą”, itd. W istocie, nie zawsze jest jasne, kiedy w języku naturalnym mamy do czynienia z predykatem prostym („nierozkładalnym” na inne predykaty).

17.7.2.

- (a) *Ktokolwiek nie kona, rżąc, pocąc się i mocząc przy wdychaniu oparów rtęci, ten świruje jarząbka.*
- (b) *Jeśli wszyscy są bezrobotni, to o ile ktoś jest bogatszy od wszystkich, to co najmniej jedna osoba nie jest odpowiedzialna za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.*
- (c) *Dla dowolnych pięciu (punktów), jeśli Drugi leży między Pierwszym a Trzecim, a Trzeci leży między Czwartym a Piątym, to istnieje Szósty, leżący między Pierwszym a Czwartym taki, że Drugi leży między Piątym a Szóstym.*

17.7.3.

- (a) To nie jest prawda logiczna. Nie jest to też prawda faktualna. Jak dotąd, (co najmniej) jeden z papieży był kobietą.
- (b) Najpierw trzeba ustalić semantykę zwrotu *dawno, dawno temu*. Może to oznaczać np. milion lat temu, albo sto lat temu, itp. Może też oznaczać np. rok przed twoim urodzeniem — zauważ, że rok przed twoim urodzeniem to dla ciebie przeszłość *nieskończenie* odległa, podobnie jak minuta po twoim zgonie będzie dla ciebie przyszłością *nieskończenie* odległą. Dość żartów. Niech *dawno, dawno temu* znaczy np. *milion lat i dwa tygodnie* temu. Po pierwsze, wiadomo, że istnieją liczby niewymierne, a więc nie wszystkie liczby są wymierne. Po drugie *istnienie* liczb jest niezależne od czasu. Tak więc, rozważane zdanie nie jest ani prawdą logiczną, ani prawdą faktualną. Oczywiście inaczej rzecz się ma np. ze zdaniem stwierdzającym, że *3000 lat temu sądzono, że wszystkie liczby są wymierne*. To zdanie zawiera jednak modalność (doksastyczną) i jego analiza wykracza poza Elementarz Logiczny.
- (c) Ta koniunkcja jest fałszem logicznym, choć każdy z jej członów z osobna może być prawdą faktualną. Nikt nie jest (biologicznie) starszy od własnej matki.
- (d) Przypomnijmy:
 - ODWIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie wcześniejszym t'.*
 - WIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie późniejszym t'.*

Tak więc, zdanie *Prawdy wieczne są odwieczne* nie jest prawdą logiczną. Łatwo zbudować zdanie, wyrażające prawdę wieczną, która nie jest odwieczna.

- (e) Temu zdaniu nie można przypisać wartości logicznej. Termin *lekko spłaszczony* nie jest terminem ostrym.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl