

Semiotyka logiczna (3)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

Paradoksy

Plan na dziś

Antynomia. To sprzeczność logiczna.

Paradoks. W uproszczeniu, jest to coś (np. stwierdzenie), co ma pozory fałszu, choć (po stosownej analizie) okazuje się prawdą (w odpowiednio zmodyfikowanym języku).

Sofizmat. To rozumowanie, które ma pozory poprawności, ale (po stosownej analizie) okazuje się niepoprawne.

Uwaga. W terminologii anglosaskiej używa się terminu **paradox** zarówno dla antynomii, jak i dla paradoksów.

Antynomie

Znalezienie w jakiejś koncepcji teoretycznej antynomii dyskwalifikuje tę koncepcję jako wartościową teorię. Wiadomo, że sprzeczność implikuje logicznie **wszystko**. Zalecana jest zatem eliminacja antynomii.

Częstym źródłem powstawania antynomii jest nieodróżnianie języka przedmiotowego od metajęzyka.

Innym powodem pojawiania się antynomii bywają nietrafnie czynione założenia.

Także takie anomalie semantyczne, jak np. wieloznaczność, intensjonalność, nieostrość mogą być odpowiedzialne za powstawanie antynomii.

Antynomie

Często wymieniane przykłady antynomii:

- Antynomia Zermela-Russella. Ogół wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami jest zbiorem.
- Antynomia Burali-Forti. Istnieje największa liczba porządkowa.
- Istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

O antynomiach możemy mówić wtedy, gdy język, reguły inferencji oraz semantyka rozważanego systemu są dobrze określone. Jeśli tak nie jest, to mamy do czynienia z koncepcją mętną i dyskusowanie o sprzecznościach logicznych ma sens dopiero po jej logicznej rekonstrukcji.

Paradoksy

Wedle przyjętego tu określenia paradoksu, mamy z nim do czynienia, gdy następuje kolizja zastanych intuicji z jakimś zjawiskiem.

Dla rozwiązania paradoksu (jego wytłumaczenia, usunięcia) potrzebne jest zatem wyraźne określenie owych intuicji.

Nie ma zatem paradoksów w sensie absolutnym: są one zrelatywizowane do pewnego zespołu przekonań (m.in. charakteryzujących odnośne intuicje).

Zauważmy, że „formalizm zawsze zwycięża” (Roman Suszko): matematyka nigdy nas nie zdradziła. Zrozumienie istoty poszczególnych paradoksów pozwala określić wyraźnie granice stosowalności naszych intuicji. Czasem też intuicje te wręcz modyfikuje.

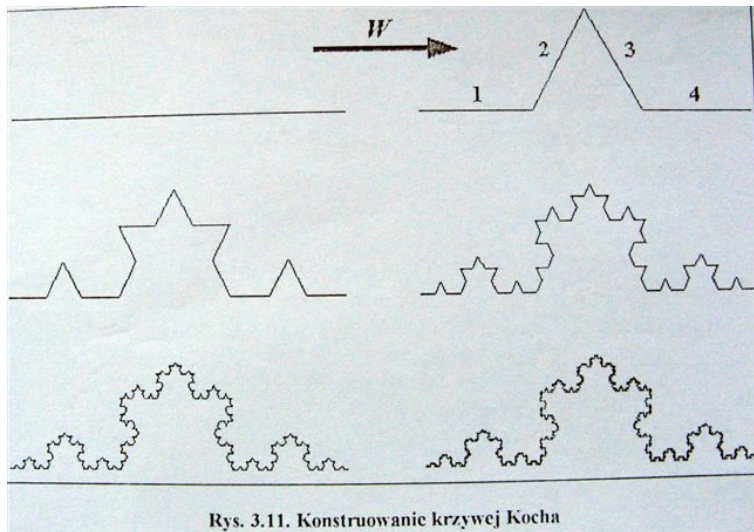
Paradoksy matematyczne

Paradoksy matematyczne, o których chyba wszyscy coś słyszeli:

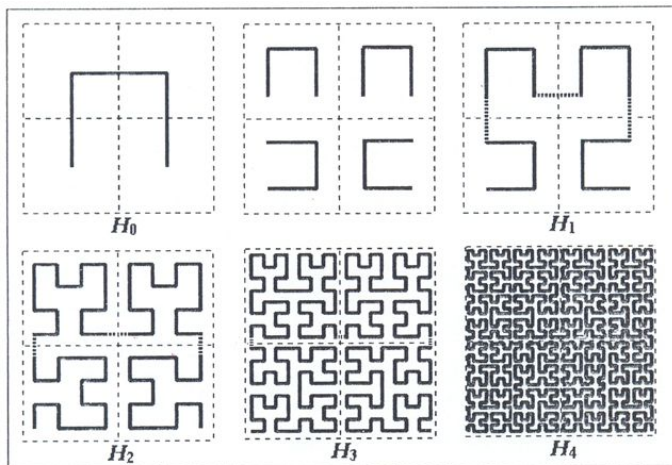
- **Banach-Tarski.** Kulę można podzielić np. na 5 części i złożyć z nich dwie kule, każda o objętości takiej, jak kula wyjściowa.
- **Paradoks Skolema.** Istnieje przeliczalny model teorii mnogości, w którym prawdziwe jest zdanie stwierdzające istnienie zbiorów nieprzeliczalnych.
- **Geometria i topologia.** Wstęga Möbiusa, flaszka Kleina, itp.
- **Paradoksy nieskończoności.** Paradoks Galileusza, Hotel Hilberta, itp.
- **Fraktale.** Istnieją krzywe ograniczone o nieskończonej długości. Itp.

„Intuicja matematyczna” jest czymś innym niż intuicja zdroworozsądkowa. Ta pierwsza jest zmienna, druga jest bardziej odporna na zmiany.

Krzywa Kocha

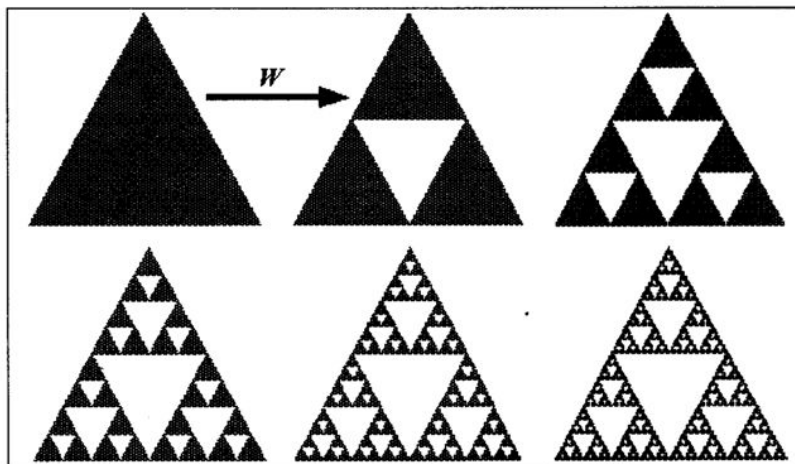


Krzywa Hilberta



Rys. 4.7. Klasyczna konstrukcja krzywej Hilberta – grubą linią przerywaną zaznaczono miejsca połączeń

Trójkąt Sierpińskiego



Rys. 3.9. Efekt kolejnych kroków iteracji układu odwzorowań trójkąta Sierpińskiego

Intuicja a topologia

	Sposób złączenia	Uzyskany kształt
Walec		
Wstęga Möbiusa		
Torus		
Butelka Kleina		

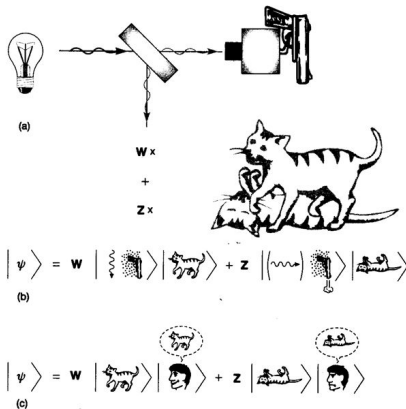
Paradoksy fizyczne

Fizyczny obraz świata dawno już wyprzedził obraz zdroworozsądkowy. Niektóre znane paradoksy:

- **Perpetuum mobile.** Różne urządzenia, rzekomo będące *perpetuum mobile*.
- **Einstein-Podolsky-Rosen.** Oddziaływanie na wielkie odległości, mające wpływ na stany kwantowe.
- **Schrödinger.** Czy możemy określić, czy kot jest żywy *przed* otwarciem pudełka?
- **Olbers.** Dlaczego nocnego nieba nie wypełnia całkowicie blask gwiazd?
- **Paradoks dziadka.** Podróżujesz w czasie i zabijasz swojego dziadka, zanim spłodzeni zostali twoi rodzice.

Zwróćmy uwagę, że np. zjawiska kwantowe, uważane za paradoksalne, gdy opisywać je w językach etnicznych, są spójnie opisywane językiem matematyki.

Paradoksy fizyczne



Paradoksy percepcji

Zauważenie, że zmysły nas „oszukują” było, przypuszczalnie, jedną z ważnych inspiracji do rozwoju nauk empirycznych. Oto kilka paradoksów percepcji:

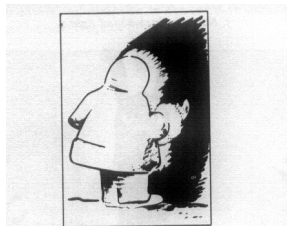
- Wzrok każe uznać, że szyny kolejowe gdzieś tam daleko się przetną.
- Czy miałeś ostatnie słowo w „rozmowie” z echem?
- Czy znasz dworzec PKP w Opolu? Wiesz, co można usłyszeć w sali, w której sprzedaje się bilety?
- Jakie są podstawy podziału zapachów na przyjemne oraz wstrętne? Uwarunkowane ewolucyjnie czy społecznie?
- Podobne (jak wyżej) pytania dla zmysłu smaku.

Pewne substancje wpływają na percepcję (i zachowania np. [choroba filipińska](#)). Ale: w stanie deprivacji sensorycznej również możemy mieć pewne doznania zmysłowe.

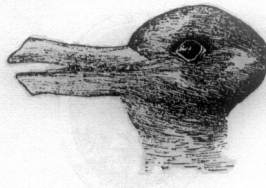
Paradoksy percepcji



Paradoksy percepcji

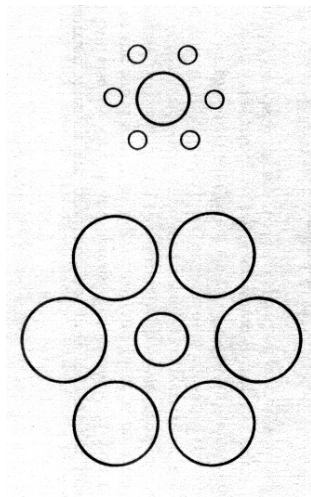


3. Indian-Eskimo figure.

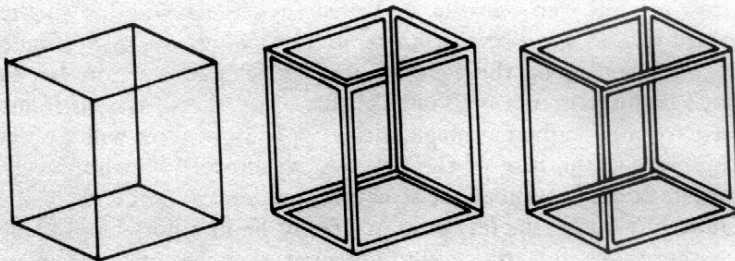


4. Duck-rabbit figure.

Paradoksy percepcji

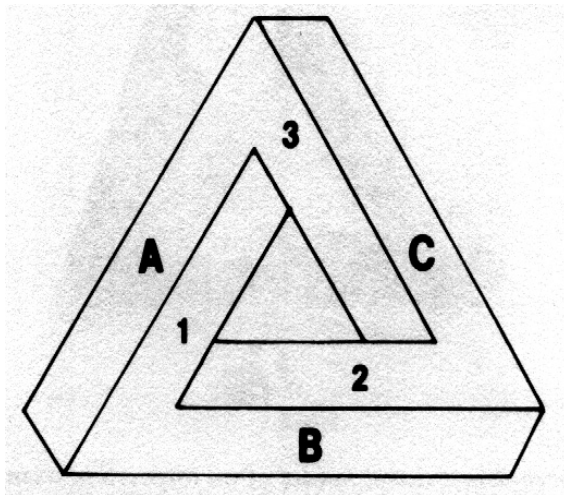


Paradoksy percepcji



23. *Necker cubes.*

Paradoksy percepcji



Paradoksy filozoficzne

Tu paradoksów jest równie wiele, jak nierozstrzygalnych pytań.

- **Nihilizm.** Jeśli prawda nie istnieje, to stwierdzenie „Prawda nie istnieje” jest prawdą.
- **Quine.** Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to Pingwiny rządzą światem.
- **Forrester.** Jeśli mamy kogoś zabić, to powinniśmy uczynić to w sposób humanitarny. Jeśli zabijamy w sposób humanitarny, to zabijamy. Jeśli zatem mamy kogoś zabić, to powinniśmy to zrobić.
- **Hempel.** Obserwowanie żółtych liści dostarcza confirmacji, że wszystkie kruki są czarne.
- **Hegel.** Człowiek uczy się z historii, że człowiek niczego nie uczy się z historii.
- **Shaynes.** Następne zdanie jest prawdziwe. Poprzednie zdanie jest fałszywe.

Paradoksy filozoficzne

- **Kamień.** Istota wszechmogąca może stworzyć kamień, którego nie może podnieść.
- **Teodycea.** Istnienie zła na świecie jest w zgodzie z miłosierdziem bożym.
- **Epimenides.** Kreteńczyk mówi: „Wszyscy Kreteńczycy kłamią.”
- **Grelling.** Przymiotnik jest *autologiczny*, gdy ma własność, o której mówi. Przymiotnik jest *heterologiczny*, gdy nie ma własności, o której mówi. Jaki jest przymiotnik *heterologiczny*?
- **Berry.** Najmniejsza liczba naturalna niedefiniowalna przez mniej niż 30 słów jest definiowalna przez mniej niż 30 słów.
- **Achilles.** Jeśli Żółw znajduje się w odległości np. 1m od Achillesa, to Achilles nigdy go nie dogoni.
- **Stos.** Jedno ziarno nie tworzy stosu. Dwa ziarna nie tworzą stosu. Trzy ziarna nie tworzą stosu. . . . Milion ziaren tworzy stos.

Paradoksy filozoficzne

- **Moment śmierci.** Jeśli żyjemy, to śmierci nie ma. Jeśli nie żyjemy, to nie ma życia. Moment śmierci nie może należeć ani do życia, ani do śmierci.
- **Moore.** „Byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę.”
- **Protagoras i Euatlos.** Euatlos pobierał nauki (bez opłat) u Protagorasa. Miał zapłacić za naukę, gdy wygra swój pierwszy proces. Po zakończeniu nauki, nie podejmował się pracy sądowniczej. Protagoras wytoczył mu proces. Przedstaw:
 - argumentację Protagorasa, że Euatlos powinien zapłacić za naukę;
 - argumentację Euatlosa, że nie powinien płacić za naukę.
- **Wszechmoc.** Co się stanie, gdy pocisk, który przebija wszystko trafi w tarczę, której nic nie może przebić?
- **Diamenty i woda.** Dlaczego diamenty są droższe od wody, skoro woda jest niezbędna do życia, a diamenty nie są?

Paradoksy filozoficzne



Achilles daleko w tyle...

- **Statystyka przestępstw.** W miastach o większej liczbie kościołów, większa jest także liczba popełnianych przestępstw.
- **Loteria.** Można wierzyć, że prawdopodobieństwo, że każdy konkretny los jest wygrany, jest znikome. Nie można wierzyć, że prawdopodobieństwo, że *wszystkie* losy są przegrane, jest bliskie zeru.
- **Monty Hall Problem.** Gra o dwóch ruchach. Mamy trzy pudełka, dokładnie jedno zawiera nagrodę, dwa pozostałe są puste. Ja wiem, w którym pudełku jest nagroda, ty nie wiesz. Chcesz wygrać nagrodę. W pierwszym ruchu wybierasz pudełko. Wtedy ja pokazuję, że jedno z pozostałych pudełek jest puste. W drugim ruchu masz dwie możliwości:
 - (a) pozostać przy pierwszym wyborze
 - (b) zmienić wybór na pozostałe pudełko, którego nie odkryłem.

Pytanie. Co jest bardziej opłacalne (dla uzyskania nagrody):

- pozostać przy pierwszym wyborze
- zmienić wybór na pozostałe pudełko, którego nie odkryłem
- (a) i (b) są równie prawdopodobne.

Paradoksy decyzyjne

Paradoks Condorceta polega na tym, że **globalne** preferencje wyborców mogą być cykliczne — czyli że relacja *większość preferuje X nad Y* **nie** jest przechodnia, nawet jeśli dla każdego wyborcy z osobna jego preferencje (*dany wyborca preferuje X nad Y*) są przechodnie.

Preferencje wyborców dla kandydatów A , B , C :

- Wyborca 1 — $A \geq B \geq C$
- Wyborca 2 — $B \geq C \geq A$
- Wyborca 3 — $C \geq A \geq B$

Wtedy $\frac{2}{3}$ wyborców uważa że A jest lepszy niż B , $\frac{2}{3}$ uważa że B jest lepszy niż C , i $\frac{2}{3}$ uważa że C jest lepszy niż A . Nie ma zwycięskiej koalicji większościowej.

Twierdzenie Arrowa

Twierdzenie Arrowa.

Jest to twierdzenie o niemożności ustalenia globalnej preferencji grupowej, przy naturalnych (!) założeniach dotyczących preferencji indywidualnych. Pokazuje więc ono, że w pewnych warunkach podjęcie **racjonalnej** decyzji grupowej (a więc podjętej np. na drodze demokratycznego głosowania) nie jest wykonalne.

Można poszukiwać interpretacji Twierdzenia Arrowa odnoszących się do systemów wiedzy (zespołów przekonań).

Sformułujemy Twierdzenie Arrowa w wersji **popularnej**, bez odwoływania się do formalizmu matematycznego. Najpierw założenia (o preferencjach [wyborach, głosowaniach] indywidualnych i grupowych):

Twierdzenie Arrowa

- **Uniwersalność.** Procedura głosowania musi na podstawie rankingu preferencji każdego z głosujących wybrać w sposób **deterministyczny** (bez udziału elementu losowego) ranking preferencji grupy.
- **Suwerenność.** **Każdy** wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których rozstrzygnięcia są narzucone.
- **Brak dyktatury.** Wynik głosowania zależy od głosów więcej niż jednego uczestnika.

Twierdzenie Arrowa

- **Monotoniczność.** Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- **Niezależność nieistotnych alternatyw.** Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Dla przykładu: jeśli pełny zakres opcji to A, B, C, D, E, i wynikiem procedury jest kolejność CDEAB, to względna kolejność CAB musi zostać taka sama niezależnie od tego jak zmieniałyby się preferencje dla D i E.

Twierdzenie Arrowa

Teza Twierdzenia Arrowa mówi, że jeśli jest przynajmniej dwóch głosujących i przynajmniej trzy możliwości, to **nie da** się zbudować takiej metody **grupowego** podejmowania decyzji, która spełniałaby powyższe kryteria.

W większości systemów podejmowania decyzji poszczególne z wymienionych założeń są naruszane.

Twierdzenie Arrowa ma istotne konsekwencje dla teorii podejmowania decyzji. W szczególności, obnaża pewne mity na temat demokracji. Uwidacznia bowiem konflikty między preferencjami indywidualnymi a globalnymi. Kwestionuje też potoczne przekonanie o „demokratyczności” wszelkich decyzji podejmowanych metodą głosowania.

Sofizmaty

Sofizmaty wykorzystują m.in.:

- nieostrość wyrażen językowych
- mieszanie różnych supozycji, w których występują wyrażenia
- przedstawianie wniosków jako rzekomo wynikających logicznie z przesłanek, gdy w istocie mamy do czynienia z grami językowymi (wykorzystującymi np. analogie: syntaktyczne, morfologiczne, itp.)
- przedstawianie implikatur jako przykładów wynikania logicznego.

Spora część dalszych wykładów poświęcona będzie analizie takich argumentacji, w których nie ma wynikania logicznego między przesłankami a wnioskiem. Czasami sofizmatami nazywa się **błędy w argumentacji**.

Sofizmaty

Oto kilka typowych błędów argumentacji:

- 1. **pochopna konkluzja**, czyli argumentacja, w której wyprowadza się wniosek mocniejszy niż pozwalałyby na to przesłanki (*Po wspólnie spędzonej nocy Natasza nie powiedziała **Dziękuję**, a więc Rosjanki nie lubią Polaków.*);
- 2. **brak związku logicznego** — błąd mający miejsce wtedy, gdy przesłanki, wbrew opinii nadawcy, w żadnym stopniu nie uzasadniają wniosku (*On nie jest polskim patriotą — jego dziadek służył w **Kriegsmarine***);
- 3. **użycie błędnego schematu logicznego** — usterka argumentacji polegająca na oparciu się w rozumowaniu na schemacie, który nie jest tautologią (*Jest człowiek, jest problem. Zatem: nie ma człowieka, nie ma problemu.*);

Sofizmaty

- 4. **brak związku przyczynowego**, polegający na błędnym mniemaniu, że wniosek stanowi — w sensie empirycznym — konieczny skutek przyjętych przesłanek (*Wszystko, co Jonasz napisał w tym tekście to konfabulacje. Wiadomo przecież, że Strzelce to kpiarze mający skłonność do zmyślania.*);
- 5. **równia pochyła** — łańcuch wnioskowań, w którym między punktem wyjścia a końcowym wnioskiem pośredniczą kolejne przejścia, zwykle mające postać kilku następujących po sobie kroków przyczynowo-skutkowych, przy czym przejścia te są na tyle słabe, że w rezultacie między pierwszą przesłanką a ostateczną konkluzją nie ma właściwie żadnego uchwytneho związku:

Sofizmaty

Juvenilizm jest zdrową, przyszłościową postawą. Wspomagany realistycznymi, pragmatycznymi ustaleniami dotyczącymi profilu wiekowego społeczeństwa i twardymi, obiektywnymi prawami teorii ekonomicznych pozwoli zastąpić ckliwą gerontofilię dobrze uzasadnioną, beznamiętną gerontofobią. Wkrótce doprowadzi to do powszechnej akceptacji dopuszczalności eutanazji. Wspomagając się naukowymi ustaleniami eugeniki, będziemy wtedy mogli racjonalnie uzasadnić konieczność rozszerzenia tej formy inżynierii społecznej na wyselekcjonowane, wskazane przez kompetentnych fachowców grupy społeczne, mniejszości etniczne, itd. W efekcie, okaże się, iż eksterminacja poszczególnych narodów to całkiem rozsądny pomysł.

Zatem: Król Maciuś I z jego pajdokracją odpowiedzialny jest za ludobójstwo.

Sofizmaty

- 6. **argument z autorytetu** — użycie przesłanki bez dowodu, z powołaniem się na źródło, które nadawca błędnie uważa za rozstrzygające (*Spadek inflacji skutkuje wzrostem bezrobocia. Tak mówi Cadyk z Leżajska, a on nigdy się nie myli.*);
- 7. **niejasność i wieloznaczność**, czyli użycie w argumentacji fraz niemożliwych do prawidłowego, jednoznacznego zinterpretowania nawet przy założeniu pełni dobrej woli u odbiorcy (*Te tezy są głęboko słuszne, bo zawierają immanentny sens.*);
- 8. **błędne koło**, polegające na użyciu takiej przesłanki, której prawdziwość można udowodnić tylko przy założeniu, że konkluzja jest prawdziwa (*To, co mówię jest prawdą, bo ja nie kłamię.*).

Sofizmaty

Później omówimy też dokładniej m.in. tzw. nieuczciwe chwyt w dyskusji takie, jak:

- przytyk osobisty
- wątpliwa przesłanka
- fałszywy trop
- tendencyjna interpretacja
- celowe irytowanie przeciwnika
- przerzucenie ciężaru dowodu.

Te sposoby, oraz wiele innych, pozwalają bardzo skutecznie przekonywać (nieprzygotowanego słuchacza) do akceptacji przekonań, które chcemy mu narzucić.

Lemat Wrocławski

Lemat Wrocławski. Istnieje zbiór pusty.

Dowód. Rozważmy zbiór W wszystkich zbiorów pustych. Zachodzi dokładnie jedna z następujących możliwości:

- a) Zbiór W jest zbiorem pustym
- b) Zbiór W jest zbiorem niepustym.

W przypadku a) zbiór W jest zbiorem spełniającym tezę Lematu Wrocławskiego.

W przypadku b), skoro W jest zbiorem niepustym, to zawiera jakieś elementy. Ale, z definicji W , każdy element zbioru W jest zbiorem pustym. A zatem *dowolny* element zbioru W spełnia tezę Lematu Wrocławskiego.

Gdzie jest usterka logiczna w powyższym rozumowaniu?

Lemat Krakowski

Lemat Krakowski. **Nic nie istnieje.**

Dowód.

- Założenie optyczno-liryczne: brak cienia jest dowodem nieistnienia.
- Cienie nie rzucają cienia.
- Zatem cienie nie istnieją.
- Stąd, nic nie posiada cienia.
- Dowodzi to, że nic nie istnieje.

Gdzie jest usterka logiczna w powyższym rozumowaniu?

Koniec

Koniec. Nie przedstawiliśmy tu żadnej systematyzacji paradoksów, antynomii oraz sofizmatów, ograniczając się jedynie do podania ich przykładów.

Na następnych wykładach zajmiemy się problematyką pragmatyki logicznej, a dokładniej: logiczną analizą [argumentacji](#).