# Semiotyka logiczna (11-12)

J. Pogonowski, J. Smigerska

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

3, 10 stycznia 2008

# Plan na dziś

Plan na dziś:

- o składni i semantyce logicznej
- o kategoriach syntaktycznych i semantycznych
- o (uogólnionych) kwantyfikatorach.

W niniejszej prezentacji wykorzystujemy: notatki z wykładów Jerzego Pogonowskiego dot. uogólnionych kwantyfikatorów prowadzonych w ubiegłym stuleciu oraz wyjątki z rozprawy magisterskiej Joanny Smigerskiej *Kwantyfikatory uogólnione w językach naturalnych i formalnych* pisanej pod opieką Jerzego Pogonowskiego i obronionej w 1998 roku w Instytucie Językoznawstwa UAM.

# Dlaczego nie uczymy się tu Elementarza Semiotycznego?

Słuchacze zechcą wybaczyć, że w tych wykładach nie przedstawiamy systematycznego ujęcia semiotyki (logicznej).

Zakładamy, że informacje, które słuchacze uzyskali na zajęciach z:

- Logiki Matematycznej
- Wstępu do Językoznawstwa
- Lingwistyki Matematycznej

są wystarczające, aby mogli oni samodzielnie uporać się z elementarną problematyką semiotyczną.

O wiele ciekawsze wydało nam się przedstawienie zestawu migawek semiotycznych. Jedną z nich jest analiza uogólnionych kwantyfikatorów.

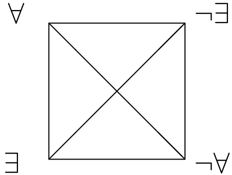
# Historia naturalna kwantyfikatorów

Wśród logików, którzy muszą być wymienieni, gdy rozważamy uogólnione kwantyfikatory, są:

- Arystoteles
- Gottlob Frege
- Stanisław Leśniewski
- Andrzej Mostowski
- Roman Suszko
- Per Lindström
- Leon Henkin
- Współczesność: Richard Montague, Jon Barwise, Jerome H. Keisler, Johan van Benthem, Dag Westerståhl, i in.

# Tradycyjny kwadrat logiczny

Ten diagram (i zawarte w nim związki logiczne) znamy wszyscy:




W dalszym ciągu, będziemy mówić o występujących tu kwantyfikatorach jako o kwantyfikatorach z tradycyjnego kwadratu logicznego (TKL).

# Figury i tryby sylogistyki klasycznej

Pamiętamy również figury sylogistyki Arystotelesa:

$$\frac{\begin{array}{c}Q_1 ZY \\ Q_2 XZ\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 YZ \\ Q_2 XZ\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 ZY \\ Q_2 ZX\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 YZ \\ Q_2 ZX\end{array}}{Q_3 XY}$$

Każdy z $Q_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ może być jednym z kwantyfikatorów z TKL. Możliwych trybów jest 256, trybów poprawnych (takich, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek) jest 24.

Jest też wiele sylogistyk niestandardowych (z dodatkowymi spójkami, negacją przynazwową, itd.)

# Kwantyfikatory standardowe

Kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ pojawiają się w pracach Peirce'a oraz Fregego.

W wieku XIX mamy pierwsze algebraiczne interpretacje kwantyfikatorów. Dyskutuje się też możliwość „kwantyfikacji orzecznika".

Leśniewski stosuje kwantyfikację po zmiennych zdaniowych.

Tarski pokazuje, jak z pomocą kwantyfikatora ogólnego oraz negacji zdefiniować pozostałe stałe logiczne.

Suszko przypisuje kwantyfikatorom kategorie syntaktyczne (w sensie Ajdukiewicza).

# Kwantyfikatory ilościowe Mostowskiego

Za pierwszą pracę dotyczącą kwantyfikatorów uogólnionych uważamy artykuł Andrzeja Mostowskiego z 1957 roku: On generalization of quantifiers *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

Mostowski wprowadza kwantyfikatory ilościowe.

*Kwantyfikator* (lokalny) *na* $M$ jest zbiorem podzbiorów $M$.
*Kwantyfikator* (globalny) jest funktorem $\boldsymbol{Q}$ przypisującym każdemu niepustemu zbiorowi $M$ kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na $M$.

# Przykłady kwantyfikatorów Mostowskiego

Przykładami takich kwantyfikatorów są:

$$\forall_M = \{M\},$$

$$\exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\},$$

$$(\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Reschera)},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Changa)}.$$

# Warunek Mostowskiego

Kwantyfikatory dotyczą tylko liczby elementów, a zatem nie powinny rozróżniać elementów w $M$:

*ISOM* *Jeżeli $f$ jest bijekcją z $M$ do $M'$, to* $X \in \boldsymbol{Q}_M \Leftrightarrow f[X] \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Ten warunek przyjmowany jest we wszystkich późniejszych pracach dotyczących uogólnionych kwantyfikatorów.

# Kwantyfikatory Lindströma

Pojęcie uogólnionego kwantyfikatora wprowadzone przez Mostowskiego nie obejmowało takich kwantyfikatorów jak np. binarny kwantyfikator **most** w zdaniach typu:

$$\textit{Most } \varphi \textit{ are } \psi$$

dający na każdym $M$ binarną relację pomiędzy podzbiorami $M$:

$$\mathbf{most}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X \cap Y| >| X - Y |\}.$$

Lindström wprowadza zdefiniowane niżej pojęcie *kwantyfikatora uogólnionego* związanego z typem (tj. ciągiem $\langle k_1, \ldots , k_n\rangle$ liczb naturalnych; kwantyfikatory Mostowskiego posiadają typ $\langle 1\rangle$, **most** typ $\langle 1, 1\rangle$).

# Kwantyfikatory Lindströma

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na $M$ typu* $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ nazywamy dowolną $n$-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.
(Globalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym typu* $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ jest funktor $\boldsymbol{Q}$, który każdemu zbiorowi $M$ przyporządkowuje kwantyfikator lokalny $\boldsymbol{Q}_M$ typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$.

W większości przypadków będzie mowa o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych monadycznych, czyli typu $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$. Można również mówić o monadycznych kwantyfikatorach *unarnych*, *binarnych*, itd., co oznacza kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$, itd.

# Kwantyfikatory Lindströma

Lindström również zakłada *ISOM* w definicji kwantyfikatora uogólnionego:

*ISOM* *Jeżeli $f$ jest bijekcją z $M$ do $M'$, to*
$(R_1, \ldots, R_n) \in \mathrm{Q}_M \Leftrightarrow (f[R_1], \ldots, f[R_n]) \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Przykłady kwantyfikatorów Lindströma:

$$\mathbf{all}_M = \{(X, Y) \in M^2 : X \subseteq Y\},$$

$$\mathbf{some}_M = \{(X, Y) \in M^2 : X \cap Y \neq \emptyset\},$$

$$\mathbf{more}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X| > |Y|\},$$

$$\mathbf{I}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X| = |Y|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Härtiga).}$$

# Kwantyfikator Henkina

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema).

Symbol funkcyjny $f$ wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.

Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy wyborów niezależnych.

# Kwantyfikator Henkina

Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy.

Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{array}\right> \phi(x, y, u, v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych.

# Kwantyfikator Henkina

Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

*Kwantyfikator Henkina* to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \;\; = \;\; & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \;\; (a, f(a), b, f(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator $Q_0$ Mostowskiego ($Q_0 x\, \varphi(x)$ interpretujemy: istnieje nieskończenie wiele $x$ takich, że $\varphi(x)$) jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina.

# Kwantyfikator Henkina

Hintikka podaje następujący przykład, pokazujący, że w językach etnicznych posługujemy się tego typu kwantyfikacją:

*Some relative of each villager and some relative of each townsman hate each other.*

Barwise wprowadza rozgałęzienia kwantyfikatorów uogólnionych oraz pokazuje, że dla odpowiednich $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ nawet najprostszy prefiks rozgałęziony:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \end{array} \!\!>$$

(nieredukowalny do prefiksu liniowego) pojawia się w językach naturalnych.

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Teza Richarda Montague:
*Skwantyfikowane wyrażenia pojawiają się jako detrminatory we frazach rzeczownikowych.*
przekłada się na pewne ustalenia dotyczące semantyki.

$$S \Longrightarrow NP + VP \qquad NP \Longrightarrow Det + N$$

*NP* - *fraza rzeczownikowa* (Noun Phrase), *VP* - *fraza czasownikowa* (Verb Phrase), *Det* - *determinator* (Determiner).

W modelu $\boldsymbol{M} = (M, \|\ \|)$, gdzie $M$ - uniwersum, $\|\ \|$ - funkcja denotacyjna, rzeczowniki ($N$) są interpretowane jako *podzbiory $M$*, frazy rzeczownikowe ($NP$) jako *zbiory podzbiorów $M$*, zaś determinatory ($Det$) jako *funkcje* działające z denotacji rzeczownika w denotacje frazy rzeczownikowej.

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Jeśli zatem rzeczowniki denotują własności (podzbiory uniwersum), zaś frazy rzeczownikowe zbiory takich własności, to determinatory denotują sposób łączenia własności ze zbiorami własności. Przykłady:

$$||every||\,(A) = \{X \subseteq M : A \subseteq M\},$$

$$||most||\,(A) = \{X \subseteq M : |A \cap X| > |A - X|\},$$

$$||no||\,(A) = \{X \subseteq M : |A \cap X| = \emptyset\}.$$

Kwantyfikatory na uniwersum $M$ są *relacjami* pomiędzy podzbiorami $M$. Każdej $n$-argumentowej funkcji $\boldsymbol{D}$, z $(P(M))^n$ do $P(P(M))$, przyporządkujemy $(n+1)$-argumentowy kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na $M$:

$$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow B \in \boldsymbol{D}(A_1 \ldots A_n).$$

Determinatory sa wtedy interpretowane jako monadyczne kwantyfikatory na danym uniwersum.

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Kwantyfikator $Q$ nazywamy (prostym) *kwantyfikatorem języka naturalnego*, jeżeli jest on denotowany przez pewien (prosty) determinator języka naturalnego.

Westerståhl proponuje następujący postulat:

*Proste determinatory są stałymi: każdy denotuje określony kwantyfikator.*

Nie wszystkie binarne kwantyfikatory wydają się być kwantyfikatorami języka naturalnego. Powstaje pytanie, które z nich takimi są oraz jakie ograniczenia należy nałożyć na kwantyfikatory, aby stały się interpretacjami determinatorów.

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Podstawowym takim warunkiem jest *zachowawczość* (ang. conservativity):

CONSERV Dla wszystkich $M$ oraz wszystkich $A, B \subseteq M$, $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A\, A \cap B$.

*CONSERV* wzmacnia rolę pierwszego argumentu $\boldsymbol{Q}$: tylko ta część $B$, która jest wspólna z $A$, jest istotna dla stwierdzenia czy zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}_M$.

Warunek zachowawczości nawiązuje do tradycyjnego rozumienia kwantyfikacji (podmiotu).

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Binarną wersję *CONSERV* można łatwo rozszerzyć do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

*CONSERV* *Dla każdego M oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$, $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$.

Łatwo sprawdzić, że trójargumentowe kwantyfikatory **more...than**, **fewer...than**, **as many...as** są zachowawcze, w przeciwieństwie do binarnego **more**.

Interpretacje semantyczne niektórych prostych determinatorów:

$$\textbf{all}_M AB \Leftrightarrow \textbf{every}_M AB \Leftrightarrow \textbf{each}_M AB \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

$$\textbf{some}_M AB \Leftrightarrow \textbf{a}_M AB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,$$

$$\textbf{no}_M AB \Leftrightarrow \textbf{zero}_M AB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset,$$

$$\textbf{most}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| > |A - B|,$$

$$\textbf{both}_M AB \Leftrightarrow \textbf{all}_M AB \;\&\; |A| = 2,$$

$$\textbf{neither}_M AB \Leftrightarrow \textbf{no}_M AB \;\&\; |A| = 2,$$

$$\textbf{two}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| \geq 2,$$

$$\textbf{more...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| > |A_2 \cap B|,$$

$$\textbf{fewer...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| < |A_2 \cap B|,$$

$$\textbf{as many...as}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B|.$$

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Niektóre dalsze determinatory:

- zależne od kontekstu (*many, few, a large number of, unexpectedly few, unusualy many,...,*)
- rodzajnik określony, zaimki dzierżawcze, zaimki wskazujące
- liczbowe (*one, two, exactly five, infinitely many, at most finitely many, around ten, every third, approximately ten,...*)
- porównawcze (*more...than, exactly as many...as, ..., fewer of male than female,...*)
- wyjątku (*all but five, all but at most three, all but finitely many,...*)

$\textbf{all but five}_M AB \Leftrightarrow |A - B| = 5$
$\textbf{all but at most three}_M AB \Leftrightarrow |A - B| \leq 3$

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Interpretację kwantyfikatorów zanegowanych można przedstawić następująco:

$$\textbf{not } Q_M AB \Leftrightarrow \neg \boldsymbol{Q}_M AB,$$

*not* nie może jednak stać przed każdym determinatorem (np. *not some, not most, not at most five* są źle sformułowane). Jednak nawet jeżeli np. *not most* nie jest determinatorem, zanegowany kwantyfikator **most** można wyrazić innym kwantyfikatorem:

$$\begin{aligned} \neg\textbf{most}_M & \Leftrightarrow |A \cap B| \leq |A - B| \\ & \Leftrightarrow |A \cap B| \leq \frac{1}{2}|A| \text{(na zbiorach skończonych)} \\ & \Leftrightarrow \textbf{not more than half (of the)}_M AB. \end{aligned}$$

# Kwantyfikacja w językach etnicznych

Dowolne dwa kwantyfikatory języka naturalnego mogą być połączone za pomocą *and* lub *or*. Klasa binarnych kwantyfikatorów języka naturalnego jest zamknięta ze względu na koniunkcję i alternatywę.

Istnieją dwie różne interpretacje kwantyfikatorów postaci $\boldsymbol{Q}_M A$ *and*/*or* $B$:

$$\begin{aligned} Q^1_M A_1 \textit{ and } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 \cap A_2 B, \\ Q^2_M A_1 \textit{ and } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 B \ \& \ Q_M A_2 B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^1_M A_1 \textit{ or } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 \cup A_2 B, \\ Q^2_M A_1 \textit{ or } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 B \vee Q_M A_2 B. \end{aligned}$$

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Naturalnym sposobem badania klasy kwantyfikatorów języka naturalnego jest obserwowanie efektu jaki wywołuje nałożenie na klasę wszystkich kwantyfikatorów lingwistycznie umotywowanych ograniczeń, takich jak np. *CONSERV*.

Z tymi ograniczeniami związane są *semantyczne uniwersalia*, tzn. ogólne stwierdzenia o semantycznej interpretacji kwantyfikatorów, prawdziwe we wszystkich językach naturalnych.

Westerståhl proponuje następujące założenie:

- **(U1)** Kwantyfikatory języków etnicznych są monadyczne lub są redukowalne do kwantyfikatorów monadycznych.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Przypomnijmy, że zachowawczość to własność przypisująca pierwszemu argumentowi rolę uprzywilejowaną:

*CONSERV* *Dla każdego $M$ oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$,* $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$

*CONSERV* pozwala na ograniczenie denotacji frazy czasownikowej do denotacji rzeczownika.

*Extension* (rozszerzenie) to własność określająca niezależność od uniwersum:

*EXT* *Jeżeli $A_1, \ldots, A_n \subseteq M \subseteq M'$,* *to*$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A_1 \ldots A_n$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Połączenie *CONSERV* i *EXT* daje następujący warunek:

*UNIV* $\quad \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B.$

Niezależność kwantyfikatora od cech indywidualnych obiektów wyraża:

*QUANT* $\quad$ *Dla wszystkich $M$ i $M'$, wszystkich bijekcji $f : M \rightarrow M'$ oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$,*
$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots M_n \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} f[A_1] \ldots f[A_n]$

Ten ostatni warunek to inne sformułowanie warunku ISOM rozważanego już przez Mostowskiego.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

*CONSERV*, *EXT* oraz $QUANT$ traktuje się jako **semantyczne uniwersalia**:

- **(U2)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają CONSERV.
- **(U3)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają EXT.
- **(U4)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają QUANT.

(U1)–(U4) to pewne założenia teorii kwantyfikatorów języków etnicznych.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Kwantyfikator $n$-argumentowy ($n \geq 1$) nazywamy *logicznym* jeżeli spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*.

Dla kwantyfikatorów binarnych bycie kwantyfikatorem logicznym oznacza zależność kwantyfikatora jedynie od liczb: $|A - B|$ oraz $|A \cap B|$.

**Twierdzenie.**
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *logiczny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $M, M'$ oraz wszystkich $A, B \subseteq M$ i $A', B' \subseteq M'$: $|A - B| = |A' - B'|$ oraz $|A \cap B| = |A' \cap B'|$ implikuje $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Dowód.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest logiczny (spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*) oraz niech $|A - B| = |A' - B'|$ i $|A \cap B| = |A' \cap B'|$. Wtedy na mocy *QUANT* $\boldsymbol{Q}_A AA \cap B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{A'} A'A' \cap B'$, i na mocy *UNIV* $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

$\Leftarrow$

Jeżeli prawa strona równoważności zachodzi, to *QUANT* jest spełnione natychmiastowo.

Weźmy $M$ oraz $A, B \subseteq M$ oraz niech $M' = A' = A$.

Wtedy $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_A AA \cap B$ zatem *UNIV* jest spełnione.

Oznacza to, że binarne relacje pomiędzy *zbiorami* mogą być zastąpione binarnymi relacjami pomiędzy *liczbami kardynalnymi*, co będzie wykorzystane przy drzewach numerycznych.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie:

Jeżeli $\boldsymbol{Q}_1$ i $\boldsymbol{Q}_2$ spełniają *CONSERV* oraz *EXT* (*QUANT*), to $\boldsymbol{Q}_1 \wedge \boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_1 \vee \boldsymbol{Q}_2, \neg\boldsymbol{Q}_1$ również posiadają te własności.

Dla binarnego kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$ możliwe są dwie $(n+1)$-argumentowe koniunkcje wewnętrzne:

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 1} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \cap \ldots \cap A_n B,$$

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 2} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 B \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \boldsymbol{Q}_M A_n B.$$

Podobnie definiuje się alternatywy wewnętrzne $\boldsymbol{Q}^{\vee 1}$ oraz $\boldsymbol{Q}^{\vee 2}$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest $(n+1)$-argumentowym kwantyfikatorem, to jego *wewnętrzną negacją* jest kwantyfikator $\boldsymbol{Q}\neg$, taki, że:
$(\mathbf{Q}\neg)_M A_1 \ldots A_n, B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n M - B$.

Kwantyfikatorem *dualnym* $\breve{\boldsymbol{Q}}$ do $\boldsymbol{Q}$ jest kwantyfikator $\neg(\boldsymbol{Q}\neg)[= (\neg\boldsymbol{Q})\neg.]$
Negacje zewnętrzna oraz wewnętrzna korespondują odpowiednio z negacją zdania oraz negacją frazy orzecznikowej.

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na wewnętrzną koniunkcję i alternatywę (obu rodzajów) oraz wewnętrzną negację i operację tworzenia kwantyfikatorów dualnych.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Westerståhl twierdzi, że klasa binarnych kwantyfikatorów języków etnicznych jest zamknięta ze względu na zewnętrzną koniunkcję i alternatywę oraz proponuje następujące uniwersale:

- **(U5)** Jeżeli $\boldsymbol{Q}_1$ oraz $\boldsymbol{Q}_2$ są binarnymi kwantyfikatorami języków etnicznych, to $\boldsymbol{Q}_1 \wedge \boldsymbol{Q}_2$ oraz $\boldsymbol{Q}_1 \vee \boldsymbol{Q}_2$ są również takimi kwantyfikatorami.

W przypadku negacji analogiczne stwierdzenie nie jest oczywiste. W poniższej tabeli podane są przykłady determinatorów języka angielskiego, dla których można znaleźć negacje jak i determinatory dualne. Znak „ - " oznacza, iż trudno znaleźć negację bądź determinator dualny do danego. Można oczywiście przedstawić te kwantyfikatory za pomocą odpowiedniej formuły, jednak nadal pozostaje kwestia znalezienia *determinatora* denotującego dany kwantyfikator.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Table:

| $Q$ | $\neg Q$ | $Q\neg$ | $\breve{Q}$ |
|---|---|---|---|
| *some* | *no* | *not every* | *every* |
| *every* | *not every* | *no* | *some* |
| *no* | *some* | *every* | *not every* |
| *most* | *at most half* | *less than half* | *at least half* |
| *many* | *few* | - | *all but a few* |
| *infinitely many* | *at most finitely many* | - | *all but finitely many* |
| *(at least) n* | *less than n* | - | *all but less than n* |
| *at most n* | *more than n* | *all but at most n* | - |
| *(exactly) n* | *not exactly n* | *all but n* | - |
| *more...than* | *at most as many...as* | - | - |
| *fewer...than* | *at least as many...as* | - | - |

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

$n$-argumentowy kwantyfikator jest *trywialny na $M$*, jeżeli $\boldsymbol{Q}_M$ jest pustą lub pełną $n$-argumentową relacją na $P(M)$.

*NONTRIV* $\boldsymbol{Q}$ *jest nietrywialny na pewnych uniwersach.*

- **(U6)** Proste kwantyfikatory języków etnicznych spełniają NONTRIV.

Kwantyfikatory, które naruszają *NONTRIV* nie są interesujące: zdanie rozpoczynające się od determinatora denotującego taki kwantyfikator (spełniający *EXT*) jest albo prawdziwe we wszystkich modelach albo we wszystkich modelach fałszywe. Kwantyfikatorem trywialnym jest np. *mniej niż zero*.

Klasa kwantyfikatorów nietrywialnych nie jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Wzmocnioną wersją *NONTRIV* jest *activity*:

*ACT* $\quad$ $\boldsymbol{Q}$ *jest nietrywialny na każdym universum.*

Wiele kwantyfikatorów języka naturalnego spełnia *ACT*, chociaż nawet pośród prostych kwantyfikatorów istnieją wyjątki, np.: **both, two, three**, itp. (Jeżeli w $M$ jest mniej niż cztery elementy, to $\mathbf{four}_M AB$ jest zawsze fałszywe).

J. van Benthem podaje jeszcze mocniejszą wersję *ACT* dla binarnych kwantyfikatorów, *variety*, zaś Westerståhl uogólnia ją do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

*VAR* $\quad$ *Dla każdego* $M$ *oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$*, takich, że* $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$*, istnieją* $B_1, B_2$*, takie, że* $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_1$ *oraz* $\neg \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_2$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Zachodzą następujące implikacje:

$$VAR \Longrightarrow ACT \Longrightarrow NONTRIV,$$

jednak odwrotna implikacje nie są prawdziwe.

(Przykładem kwantyfikatora, który spełnia $ACT$ zaś narusza $VAR$ jest $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow |A| = 1$).

Westerståhl twierdzi jednak, że wśród kwantyfikatorów języka naturalnego, te kwantyfikatory, które spełniają $ACT$ spełniają również $VAR$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

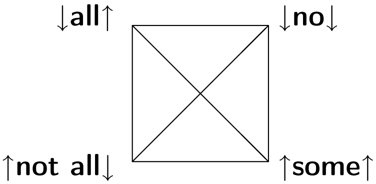
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest

$$\begin{array}{ll} MON\!\uparrow, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \;\wedge\; B \subseteq B' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB', \\ MON\!\downarrow, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \;\wedge\; B' \subseteq B \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB', \\ \uparrow\!MON, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \;\wedge\; A \subseteq A' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B, \\ \downarrow\!MON, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \;\wedge\; A' \subseteq A \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B. \end{array}$$

Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *monotoniczny prawostronnie* (*RIGHT MON*), gdy jest $MON\!\uparrow$ lub $MON\!\downarrow$, zaś *monotoniczy lewostronnie* (*LEFT MON*), gdy jest $\uparrow\!MON$ lub $\downarrow\!MON$.
$\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow\!MON\!\downarrow$, gdy jest $\downarrow\!MON$ i $MON\!\downarrow$ jednocześnie. Analogicznie dla $\uparrow\!MON\!\uparrow$, $\downarrow\!MON\!\uparrow$, $\uparrow\!MON\!\downarrow$.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Cztery typy *podwójnej monotoniczności* są zawarte w kwadracie logicznym:




Inne przykłady podwójnie monotonicznych kwantyfikatorów: ↑*MON*↑: **at least n, infinitely many**, ↓*MON*↓: **at most n, at most finitely many**. Kwantyfikatory **most, the, John's** są *MON*↑, ale nie są *LEFT MON*, zaś kwantyfikatory **exactly n, all but n, between five and ten** nie są ani *LEFT MON* ani *RIGHT MON*.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Różne rodzaje monotoniczności są silnymi własnościami kwantyfikatorów. Związane są też z rozważanym w tradycyjnej sylogistyce *rozłożeniem terminów*.

- (1) Zewnętrzna negacja odwraca kierunki *RIGHT* jak i *LEFT MON*.
- (2) Wewnętrzna negacja odwraca kierunek *RIGHT MON* jednak zachowuje *LEFT MON*.
- (3) Operacja tworzenia kwantyfikatora dualnego zachowuje kierunek *RIGHT MON* jednak odwraca kierunek *LEFT MON*.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

**Twierdzenie.**
Przy spełnionych *CONSERV* oraz *VAR*, jedynymi podwójnie monotonicznymi kwantyfikatorami są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód

Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\downarrow$. Udowodnimy, że $\boldsymbol{Q}$ musi być **no**. Weźmy uniwersum $M$ oraz $A, B \subseteq M$.
(i) Załóżmy, że $A \cap B = \emptyset$. Weźmy niepusty $A', A \subseteq A'$. Na mocy *VAR* istnieje takie $C \subseteq M$, takie, że $\boldsymbol{Q}_M A' C$. Jako, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON$, otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AC$, na mocy $MON\downarrow$ zaś $\boldsymbol{Q}_M A\emptyset$. Założyliśmy, że $A \cap B = \emptyset$, zatem $\boldsymbol{Q}_M AA \cap B$, z tego zaś na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AB$.
(ii) Załóżmy, że zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}_M AB$ . Na mocy $\downarrow MON\downarrow$ otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B$, z czego $(MON\downarrow)$ mamy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B \cap C$ dla dowolnego $C \subseteq M$, na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BC$, zatem $(VAR)$ $A \cap B = \emptyset$.

W pozostałych trzech przypadkach dowód przebiega podobnie.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest:
(i) *ciągły prawostronnie* (*RIGHT CONT*), gdy $\boldsymbol{Q}_M AB$ oraz $\boldsymbol{Q}_M AB''$ oraz $B \subseteq B' \subseteq B''$ implikuje $\boldsymbol{Q}_M AB'$,
(i) *ciągły lewostronnie* (*LEFT CONT*), gdy $\boldsymbol{Q}_M AB$ oraz $\boldsymbol{Q}_M A''B$ oraz $A \subseteq A' \subseteq A''$ implikuje $\boldsymbol{Q}_M A'B$.
Kwantyfikator nazywamy *STRONG RIGHT (LEFT) CONT* jeżeli zarazem on, jak i jego negacja są *RIGHT (LEFT) CONT*.

Zależność pomiędzy monotonicznością i ciągłością wyraża następująca implikacja:

*RIGHT (LEFT) MON* $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ *STRONG RIGHT (LEFT) CONT* $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ *RIGHT (LEFT) CONT*

Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa: np. **exactly n** jest *RIGHT* oraz *LEFT CONT*, jednak nie jest *STRONG RIGHT (LEFT) CONT*.

# Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Barwise i Cooper proponują następujące uniwersale:

- **(U7)** Binarne kwantyfikatory języka naturalnego są RIGHT CONT.

Należy zauważyć, że kwantyfikator, który jest *RIGHT CONT*, jest koniunkcją dwóch kwantyfikatorów, z których jeden jest $MON\uparrow$ zaś drugi $MON\downarrow$, np. **exactly n** jest koniunkcją **at least n** oraz **at most n**. Jako, że *CONSERV* przypisuje pierwszemu argumentowi rolę uprzywilejowaną, lewostronne wersje *MON* czy też *CONT* są silniejsze niż ich prawostronne odpowiedniki.

# Kwantyfikatory jako relacje

Jeżeli żadne inne założenia nie będą podane, zakłada się dalej, że wszystkie rozważane kwantyfikatory są logiczne (czyli spełniają *CONSERV*, *EXT*, oraz *QUANT*) oraz spełniają *NONTRIV*.

Dla kwantyfikatorów w językach etnicznych wydaje się uzasadnione przyjęcie następującego założenia:
*FIN* *Jedynie skończone uniwersa brane są pod uwagę.*
Z drugiej strony, determinatory takie, jak *infinitely many, all but finitely many* wymagają użycia modeli nieskończonych.

| **WŁASNOŚĆ** *Kwantyfikator* $\boldsymbol{Q}$ *jest:* | **DEFINICJA** *gdy:* | **PRZYKŁADY** |
|---|---|---|
| SYMETRYCZNY | $QAB \Rightarrow QBA$ | some, no, at least n at most n, exactly n, between n and m |
| ANTYSYMETRYCZNY | $QAB \wedge QBA \Rightarrow A = B$ | all |
| ASYMETRYCZNY | $QAB \Rightarrow \neg QBA$ | - |
| ZWROTNY | $QAA$ | all, at least five all but finitely many |
| QUASI-ZWROTNY | $QAB \Rightarrow QAA$ | some, most at least n |
| SŁABO ZWROTNY | $QAB \Rightarrow QBB$ | some, most at least n |
| QUASI-UNIWERSALNY | $QAA \Rightarrow QAB$ | no, not all, all but n |
| PRZECIWZWROTNY | $\neg QAA$ | not all, all but n |
| LINIOWY | $QAB \vee QBA \vee A = B$ | not all |
| PRZECHODNI | $QAB \wedge QBC \Rightarrow QAC$ | all, all but finitely many |
| KOŁOWY | $QAB \wedge QBC \Rightarrow QCA$ | - |
| EUKLIDESOWY | $QAB \wedge QAC \Rightarrow QBC$ | - |
| ANTYEUKLIDESOWY | $QAB \wedge QCB \Rightarrow QAC$ | - |

# Kwantyfikatory jako relacje

Dowodzi się, że nie ma kwantyfikatorów:

- asymetrycznych,
- euklidesowych
- kołowych.

Twierdzenia te wyjaśniają „semantyczne luki" w językach naturalnych („-" w powyższej tabelce).

Żaden kwantyfikator nie jest jednocześnie:

- (1) symetryczny i przechodni,
- (2) symetryczny i antyeuklidesowy,
- (3) symetryczny i zwrotny,
- (4) quasi-uniwersalny i zwrotny.

# Kwantyfikatory jako relacje

Jedynym zwrotnym i antysymetrycznym kwantyfikatorem jest **all**.

- (1) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest zwrotny i przechodni, to $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\uparrow$.
- (2) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest symetryczny, to
  - (a) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-zwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\uparrow$,
  - (b) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-uniwersalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\downarrow$.

Przy założeniu FIN oraz ACT, jedynym zwrotnym i przechodnim kwantyfikatorem jest **all**.

# Kwantyfikatory jako relacje

Kwantyfikatory z kwadratu logicznego posiadają następujące własności (modulo *VAR*):

| | | |
|---|---|---|
| **all** | : | zwrotny, przechodni, |
| **some** | : | symetryczny, quasi-zwrotny, |
| **not all** | : | przeciwzwrotny, liniowy, |
| **no** | : | symetryczny, quasi-uniwersalny. |

# Reprezentacja numeryczna

Każdy binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$, który spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*, może być identyfikowany z binarną relacją pomiędzy liczbami kardynalnymi. Relacja ta jest definiowana następująco:

$\boldsymbol{Q}xy \quad \Leftrightarrow \quad$ dla pewnych $A, B$, takich, że $|A - B| = x$ i $|A \cap B| = y$, zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}AB$.

Z drugiej strony, mając daną dowolną binarną relację $\boldsymbol{Q}$ pomiędzy liczbami kardynalnymi, można otrzymać odpowiadający jej logiczny (czyli spełnaiający *CONSERV*, *EXT* i *QUANT*) kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ na mocy:

$$\boldsymbol{Q}AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}|A - B||A \cap B|.$$

# Reprezentacja numeryczna

Oto kilka *numerycznych* wersji podanych wcześniej kwantyfikatorów:

$$\begin{aligned}
&\textbf{all}\ xy \Leftrightarrow x = 0, \\
&\textbf{no}\ xy \Leftrightarrow y = 0, \\
&\textbf{some}\ xy \Leftrightarrow y \neq 0, \\
&\textbf{infinitely many}\ xy \Leftrightarrow y \text{ jest nieskończona} \\
&\textbf{both}\ xy \Leftrightarrow x = 0\ \&\ y = 2.
\end{aligned}$$

Traktowanie kwantyfikatorów z perspektywy relacji pomiędzy liczbami kardynalnymi odpowiednich podzbiorów uniwersum staje się bardziej atrakcyjne, gdy założymy *FIN*. Kwantyfikatory stają się wtedy podzbiorami $N^2$. $N^2$ może być reprezentowane przez *drzewko numeryczne*, w którym każdy punkt $(x, y)$ posiada dwa następniki $(x+1, y), (x, y+1)$, które to punkty są z kolei poprzednikami punktu $(x+1, y+1)$.

# Reprezentacja numeryczna

wiersz $x = |A - B|$ (0,0)

(1,0) (0,1) kolumna $y = |A \cap B|$

(2,0) (1,1) (0,2)

(3,0) (2,1) (1,2) (0,3)

(4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) $x + y = |A|$

Przekątna (diagonalna) w takim drzewie numerycznym to ciąg tych par $(x, y)$ dla których $x + y = |A|$.

+
− +
− − +
− − − +
− − − − +

**all**

−
− +
− + −
− + − −
− + − − −

**exactly one**

−
− +
− − +
− − + +
− − − + +

**most**

−
− −
− − +
− − + +
− − + + +

**at least two**

+
− +
− + +
− − + +
− − + + +

**half or more**

+
− +
+ − +
− + − +
+ − + − +

**all but an even number**

# Reprezentacja numeryczna

Dzięki tej technice, można podać jakie warunki muszą spełniać graficzne reprezentacje kwantyfikatorów, aby kwantyfikatory te posiadały określone własności:

*NONTRIV* $\Leftrightarrow$ w drzewku pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

*ACT* $\Leftrightarrow$ w górnym trójkącie (0,0), (1,0), (0,1) pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

*VAR* $\Leftrightarrow$ na każdej diagonalnej (za wyjątkiem (0,0)) pojawia się przynajmniej jeden $+$ i przynajmniej jeden $-$.

Powyższe warunki obrazują fakt, że *VAR* jest silniejszym założeniem niż *ACT*.

# Reprezentacja numeryczna

Podobne warunki można określić dla monotoniczności:

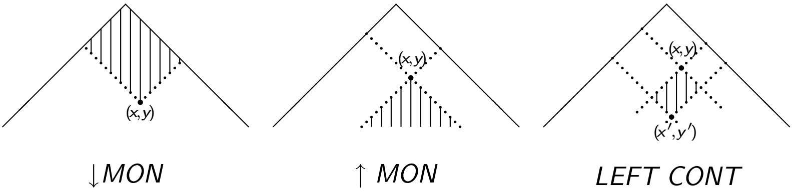
$MON\uparrow$ $\Leftrightarrow$ jeżeli jakiś punkt należy do $\boldsymbol{Q}$, to wszystkie punkty na tej samej diagonalnej na prawo od danego punktu również należą do $\boldsymbol{Q}$ (każdy $+$ wypełnia swoją diagonalną plusami w prawą stronę),

$MON\downarrow$ $\Leftrightarrow$ analogicznie do $MON\uparrow$, tylko w lewą stronę,

*RIGHT CONT* pomiędzy dowolnymi dwoma $+$ na danej diagonalnej pojawiają się tylko plusy.

# Reprezentacja numeryczna

Reguły dla lewostronnej wersji monotoniczności i ciągłości najlepiej zobrazują wykresy:




Wykresy te mówią, że jeżeli punkt $(x, y)$ należy do kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$, to należą do niego wszystkie punkty z zakreskowanego obszaru.

# Reprezentacja numeryczna

**Twierdzenie.** (*VAR*)
Kwantyfikatorami lewostronnie monotonicznymi są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód. Wszystkie kwantyfikatory z kwadratu logicznego są niewątpliwie *LEFT MON*. Rozważmy więc w drzewku numerycznym dowolny kwantyfikator, który jest lewostronnie monotoniczny. Istnieją tylko cztery możliwe górne trójkąty (na mocy *VAR* druga diagonalna musi mieć postać $+-$ lub $-+$). Każdy z tych czterech trójkątów generuje jeden kwantyfikator w drzewie (na mocy wcześniejszych obserwacji typów monotoniczności). Fakt ten zaś implikuje możliwość pojawienia się $+$ wyłącznie na lewej krawędzi drzewka (w przeciwnym przypadku postawiony już $-$ musiałby być $+$). Plusy muszą się zaś pojawić na lewej krawędzi, bo w przeciwnym razie naruszałyby *VAR*. Rozważanym kwantyfikatorem jest zatem kwantyfikator **no**. Podobnie dla reszty TKL.

# Reprezentacja numeryczna

Jedną z podstawowych intuicji dotyczących stałych logicznych jest idea, że w semantycznym zachowaniu się kwantyfikatorów powinna istnieć pewna „gładkość".
Intuicje te w części oddaje *RIGHT CONT*:

$$\text{jeżeli } \boldsymbol{Q}_M AB,\ \boldsymbol{Q}_M AB'' \text{ oraz } B \subseteq B' \subseteq B'',\ \text{to } \boldsymbol{Q}_M AB'$$

Wydaje się uzasadnione wymaganie ciągłości przy niezachodzeniu relacji:

$$\text{jeżeli } \neg\boldsymbol{Q}_M AB,\ \neg\boldsymbol{Q}_M AB'' \text{ oraz } B \subseteq B' \subseteq B'',\ \text{to } \neg\boldsymbol{Q}_M AB'$$

Połączenie tych dwóch reguł wymusza *RIGHT MON* na każdej diagonalnej drzewka numerycznego. Ich koniunkcja będzie od tej pory oznaczana jako *CONT*.

# Reprezentacja numeryczna

Kolejnym postulatem jest wymaganie gładkiego przejścia pomiędzy sąsiednimi diagonalnymi. Jeżeli zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}AB$, to po dodaniu nowego elementu do $A$ przynajmniej jedna z dwóch opcji (zwiększenie $|A - B|$ lub zwiększenie $|A \cap B|$) musi wywoływać zachodzenie $\boldsymbol{Q}$; podobnie przy falsyfikacji $\boldsymbol{Q}$. W terminach drzewka numerycznego warunek ten ma postać:

$$\text{jeżeli } (x, y) \in \boldsymbol{Q}, \text{ to } (x+1, y) \in \boldsymbol{Q} \text{ lub } (x, y+1) \in \boldsymbol{Q},$$

$$\text{jeżeli } (x, y) \in \boldsymbol{Q}, \text{ to } (x+1, y) \in \boldsymbol{Q} \text{ lub } (x, y+1) \in \boldsymbol{Q}.$$

Postulat ten będzie oznaczany $PLUS$.

$CONT$ i $\mathrm{PLUS}$ wyrażają mocną formę ciągłości we trzech głównych kierunkach w drzewku numerycznym: $\nearrow$, $\longleftrightarrow$, $\nwarrow$.

# Reprezentacja numeryczna

Kolejnym warunkiem na to, że stałe logiczne nie rozróżniają liczb kardynalnych jest postulat, że kwantyfikatory powinny być *jednolite*. Żadna para $(x, y)$ nie powinna być wyróżniona: każde przejście w dół drzewka powinno odbywać się w ten sam sposób. Przejście o jeden krok w dół może być postrzegane jako pewien eksperyment na testowanie zachowania się kwantyfikatora. Zaczynając od dowolnej pary $(x, y)$ (przy $\boldsymbol{Q}$ spełnionym bądź nie), notujemy wartości prawdziwościowe dla $(x+1, y)$ oraz dla $(x, y+1)$. Istnieje osiem różnych schematów wartości prawdziwościowych takiej próby (z których *PLUS* wyklucza wyniki $\overset{+}{-\;-}\ \overset{-}{+\;+}$).

Warunek *jednolitości* (*uniformity*) ma postać:

*UNIF* Znak dowolnego punktu w drzewku determinuje znaki swoich następników

# Reprezentacja numeryczna

Warunek UNIF mówi o tym, że wyniki eksperymentu są jednolite, zawsze takie same – nie zależą od liczby elementów w odpowiednich zbiorach. Nie jest istotne, gdzie przeprowadzimy test: kwantyfikator będzie zachowywał się jednolicie.

**Twierdzenie.** (*FIN*)
Jedynymi kwantyfikatorami spełniającymi *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*, jak i *CONT*, *PLUS*, *UNIF* są kwantyfikatory z kwadratu logicznego.

# Reprezentacja numeryczna

<u>Dowód.</u> Wszystkie te kwantyfikatory spełniają wymienione własności. Rozważmy drzewko numeryczne. Które z rozkładów $+/-$ są dozwolone przez wymienione warunki? Na wierzchołku może pojawić sie zarówno $+$ jak i $-$. Na następnej diagonalnej ($x + y = 1$) jest już więcej możliwości. Rozważmy przypadek, gdy na wierzchołku pojawia się $+$. Na mocy *VAR* następna diagonalna może mieć postać $\begin{matrix} & + & \\ + & & - \end{matrix}$ lub $\begin{matrix} & + & \\ - & & + \end{matrix}$. W pierwszym przypadku, trzecia diagonalna musi się zacząć od $+-$ (*UNIF*), zaś na mocy *CONT* diagonalna ta musi być wypełniona przez $-$. Procedura ta powtarza się, zatem otrzymujemy kwantyfikator **no**.

Analogicznie postępuje się w drugim przypadku otrzymując kwantyfikator **all**.

Analogicznie, przypadek, gdy na wierzchołku jest $-$, generuje kwantyfikatory **not all, some**.

# Niektóre własności metalogiczne

Przez $L_Q$ oznaczać będziemy język KRP z kwantyfikatorem $Q$. Interpretacje $L_Q$ wyznaczone będą przez semantyczną charakterystykę $Q$. Dla języka $L_Q$ z ustaloną interpretacją semantyczną $Q$ będziemy też używać terminu „logika $L_Q$". Niech $\aleph_\alpha$ będzie $\alpha$-tą mocą nieskończoną (gdzie $\alpha$ jest liczbą porządkową). Zamiast $\aleph_0$ piszemy czasem $\omega$. Jeśli $\kappa$, $\lambda$ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to przez $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy język w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej niż $\kappa$ oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż $\lambda$. Tak więc, $L_{\omega\omega}$ to język KRP, klasycznej logiki pierwszego rzędu. Przez $L_{\infty\lambda}$ rozumiemy język, w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż $\lambda$.

Poniżej podajemy, bez zamiaru systematyczności wykładu, wybrane fakty dotyczące semantyki niektórych uogólnionych kwantyfikatorów.

# Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele''

Wyrażenie $Q_0 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieskończenie wiele $x$ takich, że $\alpha(x)$.
Semantyka $Q_0$ wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_0 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieskończony.
Oto niektóre własności $L_{Q_0}$:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w $L_{Q_0}$ z dokładnością do izomorfizmu.
  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$.
- W $L_{Q_0}$ nie zachodzi górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- $L_{Q_0}$ nie jest aksjomatyzowalna.

# Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele''

- W $L_{Q_0}$ nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W $L_{Q_0}$ zachodzi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla $L_{Q_0}$ można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\, \alpha(x), \exists^{\geqslant 2} x\, \alpha(x), \ldots}{Q_0 x\, \alpha(x)}.$$

- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w $L_{Q_0}$ bez modeli skończonych jest zupełna.
- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w $L_{Q_0}$.
- $L_{Q_0}$ jest fragmentem $L_{\omega_1 \omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\, \alpha(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\, \alpha(x).$$

# Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele”

Wyrażenie $Q_1 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieprzeliczalnie wiele $x$ takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka $Q_1$ wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_1 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieprzeliczalny.

Ograniczamy się do interpretacji nieprzeliczalnych.
Tak jak w $L_{Q_0}$ definiowalne jest pojęcie skończoności, tak w $L_{Q_1}$ definiowalne jest pojęcie przeliczalności.

Oto niektóre własności $L_{Q_1}$:

# Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele''

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w $L_{Q_1}$.
- Górne twierdzenie Löwenheima-Skolema nie zachodzi w $L_{Q_1}$. Dolne twierdzenie LS zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w $L_{Q_1}$ (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w $L_{Q_1}$ (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w $L_{Q_1}$.
- $L_{Q_1}$ jest (!) aksjomatyzowalna.

# Kwantyfikator Changa

Wyrażenie $Q_c x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje tyle $x$ takich, że $\alpha(x)$ ile jest obiektów w całym uniwersum.
Semantyka $Q_c$ wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_c x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ ma taką samą moc, jak zbiór $dom(\mathfrak{A})$.
Oto niektóre własności $L_{Q_c}$:

- W modelach mocy $\aleph_1$ kwantyfikator $Q_c$ ma taką samą interpretację, jak kwantyfikator $Q_1$.
- Teoria gęstych porządków liniowych nie jest zupełna w $L_{Q_c}$.

# Kwantyfikator Changa

- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w $L_{Q_c}$. [Teoria ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów $\exists$ i $Q_c$.]
- Jeśli przeliczalna teoria w $L_{Q_c}$ ma model, którego moc jest liczbą kardynalną następnikową, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Jeśli przeliczalna teoria w $L_{Q_c}$ ma model mocy $\aleph_0$, to ma modele każdej mocy nieskończonej.
- Niech $Val_1$ będzie zbiorem wszystkich zdań $L_{Q_c}$ prawdziwych w modelach mocy $\aleph_1$ i niech $Val_\omega$ będzie zbiorem wszystkich zdań $L_{Q_c}$ prawdziwych w modelach mocy $\aleph_\omega$. Wtedy (przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum):
  - $Val_1$ oraz $Val_\omega$ są rekurencyjnie przeliczalne.
  - $Val_1 \cap Val_\omega$ jest zbiorem wszystkich $L_{Q_c}$-tautologii.

# Kwantyfikator „jest więcej $A$ niż $B$"

Wyrażenie $Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ czytamy: jest więcej $x$ takich, że $\alpha(x)$ niż $x$ takich, że $\beta(x)$.

Semantyka $Q_M$ wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta[a]\}$.

Oto niektóre własności $L_{Q_M}$:

# Kwantyfikator „jest więcej $A$ niż $B$"

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w $L_{Q_M}$ z dokładnością do izomorfizmu.
- $L_{Q_M}$ nie jest aksjomatyzowalna.
- W $L_{Q_M}$ nie zachodzi: ani dolne ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, ani twierdzenie o zwartości.
- $Q_0$ oraz $Q_c$ są definiowalne w $L_{Q_M}$.
- $L_{Q_M}$ jest logiką o znacznej „mocy wyrażania": można w niej sformułować np. zdanie, które ma model wtedy i tylko wtedy, gdy fałszywa jest uogólniona hipoteza kontinuum.

# Kwantyfikator Henkina

Wyrażenie $Q_H(x, y, u, v)\alpha(x, y, u, v)$ jest skrótem dla formuły z następującym częściowo uporządkowanym prefiksem kwantyfikatorowym:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \text{——} \exists y\\ \forall u \text{——} \exists v\end{array}\right\rangle \alpha(x, y, u, v)$$

Semantyka dla tego kwantyfikatora wyznaczona jest przez warunek: $\mathfrak{A} \models Q_H xyuv\, \alpha(x, y, u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $f$ oraz $g$ (określone na $dom(\mathfrak{A})$ i o wartościach w $dom(\mathfrak{A})$) takie, że $\mathfrak{A} \models \alpha(x, f(x), u, g(u))$.

Oto niektóre własności $L_{Q_H}$:

# Kwantyfikator Henkina

- Kwantyfikatory $Q_0$, $Q_c$ oraz $Q_M$ są definiowalne w $L_{Q_H}$.
- $L_{Q_H}$ nie jest aksjomatyzowalna.
- W $L_{Q_H}$ nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W $L_{Q_H}$ nie zachodzi ani dolne, ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że również $L_{Q_H}$ ma znaczną „moc wyrażania".

# Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Wyrażenie $Q_m x\, \alpha(x)$ czytamy: obiekty $x$ takie, że $\alpha(x)$ tworzą większość w uniwersum.
Aby podać rozsądną semantykę dla $Q_m$ trzeba oczywiście nadać precyzyjne znaczenie terminowi „większość”. Nie interesuje nas przy tym rozumienie tego terminu podane w pierwszej części prezentacji, tj. kwantyfikator ***most***, który miał prostą semantykę: ***most***AB wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $A \cap B$ jest większa od mocy zbioru $A - B$. Teraz chodzi o „większości” w całym uniwersum.

Są różne możliwości ustalenia semantyki dla takiego kwantyfikatora. Podamy jedną z nich, proponowaną przez Szrejdera i Vilenkina.
Niech $X$ będzie zbiorem niepustym i niech $\mathfrak{B}(X)$ będzie algebrą Boole'a jego (niekoniecznie wszystkich) podzbiorów taką, że $X \in \mathfrak{B}(X)$.

# Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Rodzinę $\mathbb{M}(X)$ elementów $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy ***systemem większości***, jeśli:

- (1) $\mathbb{M}(X) \neq \emptyset$
- (2) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $A \subseteq B$, to $B \in \mathbb{M}(X)$
- (3) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to dopełnienie $A$ (w sensie algebry $\mathfrak{B}(X)$) nie należy do $\mathbb{M}(X)$.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w $X$, to układ $(X, \mathbb{M}(X))$ nazywamy ***przestrzenią z większością***. Jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to $A$ nazywamy ***większością*** w $X$.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w $X$, to oczywiście:

- $\emptyset \notin \mathbb{M}(X)$, $X \in \mathbb{M}(X)$
- jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $B \in \mathbb{M}(X)$, to $A \cap B \in \mathbb{M}(X)$.

# Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Przestrzenie z większością mogą być otrzymane np. wtedy, gdy na $X$ jest zadana unormowana skończenie addytywna miara $\mu$, dla której $\mathfrak{B}(X)$ jest rodziną zbiorów mierzalnych, a systemem większości jest podrodzina rodziny $\mathfrak{B}(X)$, której elementy mają miarę nie mniejszą od jakiegoś ustalonego progu $\tau \geqslant \frac{1}{2}$. Jednak istnieją też przestrzenie z większością, które nie mogą być przez taką miarę określone.
Pomijamy tu bardziej szczegółowy opis przestrzeni z większością. Dodajmy jedynie, że stanowią one prostą i dość adekwatną aparaturę pojęciową dla opisu np. systemów podejmowania decyzji (przez grupy ekspertów).

Przestrzenie z większością dostarczają semantyki dla ***kwantyfikatora większości*** $Q_m$:
$\mathfrak{A} \models Q_m x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większością w $dom(\mathfrak{A})$, dla pewnego systemu większości $\mathbb{M}(dom(\mathfrak{A}))$.

# Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Kwantyfikator $Q_m$ może być opisany aksjomatycznie:

- $\forall x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \alpha(x)$
- $Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow \neg Q_m x\, \neg\alpha(x)$
- $\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \beta(x))$.

Można pokazać, że ta aksjomatyka jest trafna i pełna względem podanej wyżej semantyki dla $Q_m$.

Pierwszą pracą dotyczącą tego kwantyfikatora jest (o ile nam wiadomo): Vilenkin, N.Ya., Shreider, Yu.A. 1976. Majority spaces and „majority" quantifier. *Semiotics and Informatics.* The Eight Volume. VINITI, Moscow.

# Moc wyrażania logiki

Używaliśmy dotąd w sposób nieformalny wyrażenia: „logika $L_1$ ma mniejszą moc wyrażania niż logika $L_2$". Można mu nadać precyzyjny sens (w terminach semantycznych):
$L_1 \preceq L_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania $\alpha$ logiki $L_1$ istnieje zdanie $\beta$ logiki $L_2$ takie, że $\alpha$ i $\beta$ mają dokładnie takie same modele. Jeśli $L_1 \preceq L_2$ oraz nie zachodzi $L_2 \preceq L_1$, to piszemy $L_1 \prec L_2$. Jeśli $L_1 \preceq L_2$ oraz $L_2 \preceq L_1$, to piszemy $L_1 \approx L_2$.

- Jeśli $L_1 \preceq L_2$, to mówimy, że $L_1$ ma moc wyrażania nie większą niż $L_2$.
- Jeśli $L_1 \prec L_2$, to mówimy, że $L_1$ ma moc wyrażania mniejszą niż $L_2$.
- Jeśli $L_1 \approx L_2$, to mówimy, że $L_1$ i $L_2$ są równoważne.

# Moc wyrażania logiki

Niektóre z wymienionych wyżej logik są uporządkowane następująco pod względem mocy wyrażania (strzałka oznacza zachodzenie relacji $\prec$):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & L_{Q_0} & \longrightarrow & L_I & & & & \\
 & \nearrow & & & & \searrow & & & \\
L_{\omega\omega} & & & & & & L_{Q_M} & \longrightarrow & L_H \\
 & \searrow & & & & \nearrow & & & \\
 & & L_{Q_R} & \longrightarrow & L_{Q_w} & & & &
\end{array}
$$

(tu $O_I$ jest kwantyfikatorem Härtiga, a $Q_w$ jest kwantyfikatorem **most**).

Jeśli ograniczamy się tylko do modeli skończonych, to $L_{Q_w} \approx L_M$.
Logika $L_{Q_M}$ jest równoważna logice z kwantyfikatorami: $Q_0$ ***oraz*** $Q_w$.

# Twierdzenia limitacyjne Lindströma

Ważne ustalenia dotyczące mocy wyrażania różnych logik podają twierdzenia Lindströma:

- Jeśli w logice $L$ zachodzą: twierdzenie o zwartości oraz dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.
- Jeśli $L$ dopuszcza relatywizację kwantyfikatorów, to:
  - Jeżeli w $L$ zachodzą: twierdzenie o pełności oraz dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.
  - Jeżeli w $L$ zachodzą: dolne oraz górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.

# Twierdzenia limitacyjne Lindströma

Przypominamy, że:

- Jeśli $Q$ jest kwantyfikatorem typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ na zbiorze $X$, to ***relatywizacją*** $Q$ jest kwantyfikator $Q^r$ typu $\langle 1, k_1, \ldots, k_n \rangle$ zdefiniowany następująco:
  $(Y, A_1, \ldots, A_n) \in Q^r_X \ \Leftrightarrow \ (Y^{k_1} \cap A_1, \ldots, Y^{k_n} \cap A_n \in Q_Y)$.
- Logika $L$ ***dopuszcza relatywizację*** (kwantyfikatora $Q$), gdy $L_Q \preceq L$.

Waga twierdzeń Lindströma polega m.in. na tym, że pokazują one, iż zwartość, pełność oraz nieodróżnianie mocy nieskończonych są cechami wyróżniającymi klasycznej logiki pierwszego rzędu. Twierdzenia Lindströma przywoływane są często przez zwolenników Tezy Pierwszego Rzędu (***First Order Logic is the Logic.***) na rzecz uzasadnienia tej tezy.

# Logiki infinitarne

Gdy mówimy o logice, że jest infinitarna, to możemy mieć na myśli np. to, że:

- rozważany język dopuszcza formuły nieskończenie długie;
- dopuszcza się nieskończenie długie dowody;
- stosuje się niefinitarne reguły wnioskowania (np. $\omega$-regułę).

Oczywiście, logiki takie mają znaczną moc wyrażania, np.:

- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można model standardowy arytmetyki Peana.
- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można klasę wszystkich zbiorów skończonych.

# Logiki infinitarne

- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.
- Predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- Pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne (pojedynczą formułą) w $L_{\omega_1\omega_1}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (Twierdzenie Scotta).
- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\alpha\omega}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).

# Logiki infinitarne

- Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema ma swój odpowiednik w $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast górne twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach; dokonuje się jednak podobnych do niego ustaleń, wykorzystując tzw. liczby Hanfa.
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek $\Phi$ narzucimy warunek, aby $\Phi$ był przeliczalny.
- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\alpha\beta}$, gdzie $\alpha \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

# Logiki infinitarne

Formuły logiki pierwszego rzędu $L_{\omega\omega}$ kodować można liczbami naturalnymi lub, co na jedno wychodzi, zbiorami dziedzicznie skończonymi, tj. elementami zbioru $H(\omega)$. Z kolei, formuły logiki $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami zbioru $H(\omega_1)$, tj. zbiorami dziedzicznie przeliczalnymi. Także dowody w $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami $H(\omega_1)$.

Dowody w logice $L_{\omega_1\omega}$ mają długość przeliczalną. Można jednak podać przykład zbioru zdań $\Gamma$ oraz zdania $\sigma$ z tego języka takich, że $\Gamma \models \sigma$, ale nie istnieje dowód $\sigma$ z $\Gamma$ w $L_{\omega_1\omega}$ (zob. np. Bell 2004).

# Logiki infinitarne

Zbiór $H(\omega_1)$ jest domknięty na tworzenie przeliczalnych podzbiorów oraz ciągów. Jednak fakt wspomniany w poprzednim akapicie wskazuje iż, mówiąc w uproszczeniu, $H(\omega_1)$ nie jest domknięty ze względu na operację odpowiadającą kodowaniu dowodów z dowolnych $\Sigma_1$ na $H(\omega_1)$ zbiorów formuł.

Naturalne jest w tej sytuacji poszukiwanie takich zbiorów $A$ zastępujących $H(\omega_1)$, które byłyby domknięte na operacje odpowiadające kodowaniom dowodów w $A$ oraz rozważanie tylko takich formuł, które mają kody w $A$. Była to jedna z motywacji do rozpatrywania tzw. dopuszczalnych fragmentów $L_A$ logiki $L_{\omega_1\omega}$.

# Logiki infinitarne

Barwise odkrył, że istnieją przeliczalne zbiory (*admissible sets*) $A \subseteq H(\omega_1)$, które spełniają powyższe warunki. Są to więc takie uogólnienia zbiorów dziedzicznie skończonych, na których (jako na zbiorach kodów formuł) możliwe i sensowne jest uprawianie (uogólnionej) teorii rekursji oraz teorii dowodu. Udowodnił także swoje znamienite twierdzenie o zwartości: jeśli $A$ jest przeliczalnym zbiorem dopuszczalnym, to każdy zbiór formuł języka $L_A$ będący $\Sigma_1$ na $A$, którego każdy podzbiór (będący jednocześnie elementem $A$) ma model, sam również ma model.

Twierdzenie Barwise'a ma mnogie zastosowania, m.in. pozwala np. udowodnić, że każdy przeliczalny przechodni model dla ZFC ma właściwe rozszerzenie końcowe. Prace Barwise'a to swego rodzaju unifikacja rozważań w teorii modeli, teorii rekursji oraz teorii mnogości.

# Logiki infinitarne

Szczególnie przydatna dla badań zbiorów dopuszczalnych okazała się wersja teorii mnogości KP zaproponowana przez Kripke'go i Platka w połowie lat sześćdziesiątych XX wieku. Jest ona teorią elementarną, ze stałą pozalogiczną $\in$, będącą pewnym osłabieniem teorii mnogości Zermelo-Fraenkla. Nie ma w niej aksjomatu zbioru potęgowego, a szczególną rolę pełnią schematy aksjomatów $\Delta_0$-*separation* oraz $\Delta_0$-*collection* (odpowiedniki schematów aksjomatów wyróżniania i zastępowania), w których występują formuły klasy $\Delta_0$. Zbiory przechodnie $A$ takie, że $(A, \in)$ jest modelem KP nazywane są *zbiorami dopuszczalnymi* (*admissible sets*). Rozważa się także teorię KPU, czyli teorię KP z atomami.

Kompletny wykład teorii zbiorów dopuszczalnych znaleźć można np. w klasycznej monografii Barwise 1975. Przystępne i zwięzłe omówienie (współczesnego stanu) tej teorii znajdujemy np. w Keisler, Knight 2004.

# Wykorzystywana literatura


- Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Barwise, J. 1979. On branching quantifiers in English. *Journal of Philosophical Logic* **8**, 47–80.
- Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.
- Barwise, J., Feferman, S. 1985. *Model Theoretic Logics.* Springer.
- Bell, J.L. 2004. Infinitary Logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- van Benthem, J. 1984. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic.* **49**, 443–466.
- van Benthem, J. 1986. *Essays in logical semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- van Benthem, J. 1995. Quantifiers and Inference. W: Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) *Quantifiers: logics, models and computation.*, 1–20.

# Wykorzystywana literatura


- van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.
- van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.
- Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.
- Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.
- Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.
- Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.

# Wykorzystywana literatura


- Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, , 1–11.
- Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.
- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.
- Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.
- Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophucal Logic.* Vol. **IV**, 1–131.

# Koniec

To było tylko pobieżne przedstawienie problematyki związanej z uogólnionymi kwantyfikatorami.

Zainteresowanych tą problematyką odsyłamy do zamieszczonej literatury przedmiotu.