# Zermelo a Szkoła Warszawska

VIII PZF 2008

Sekcja Logiki

# 100 lat aksjomatycznej teorii mnogości

Ernst Zermelo (1871–1953)

# 100 lat aksjomatycznej teorii mnogości

W 1908 roku Ernst Zermelo opublikował pierwszą aksjomatykę teorii mnogości:

- Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen* **65**, 261–281.

Teoria mnogości była intensywnie rozwijana w Warszawskiej Szkole Matematycznej.

Celem niniejszej dyskusji jest, m.in.:

- przypomnienie inspiracji dla aksjomatyzacji teorii mnogości;
- wskazanie na rolę Warszawskiej Szkoły Matematycznej w rozwoju teorii mnogości.

# Uczestnicy dyskusji

Uczestnikami naszej dyskusji są Państwo Profesorowie (w kolejności zabierania głosu):

- **Roman Murawski** (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza)
- **Jan Zygmunt** (Uniwersytet Wrocławski)
- **Stanisław Krajewski** (Uniwersytet Warszawski)
- **Zofia Adamowicz** (Polska Akademia Nauk)
- **Janusz Czelakowski** (Uniwersytet Opolski)
- **Krzysztof Wójtowicz** (Uniwersytet Warszawski).

Obowiązki moderatora dyskusji pełni **Jerzy Pogonowski** (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza).

# Roman Murawski

## Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

Wacław Sierpiński zainteresował się teorią mnogości około 1907 roku.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

Wacław Sierpiński zainteresował się teorią mnogości około 1907 roku.

Wacław Sierpiński (1882-1969)

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

Sierpiński zainteresował teorią mnogości Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Stanisława Ruziewicza.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

Sierpiński zainteresował teorią mnogości Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Stanisława Ruziewicza.

Janiszewski (1888-1920)

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

Sierpiński zainteresował teorią mnogości Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Stanisława Ruziewicza.

Janiszewski (1888-1920)

Mazurkiewicz (1888-1945)

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
    - Z. Janiszewski,

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
  - Z. Janiszewski,
  - S. Mazurkiewicz,

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
    - Z. Janiszewski,
    - S. Mazurkiewicz,
    - W. Sierpiński.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
  - Z. Janiszewski,
  - S. Mazurkiewicz,
  - W. Sierpiński.
- Z. Janiszewski, *O potrzebach matematyki w Polsce* (1917); proponuje:

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
  - Z. Janiszewski,
  - S. Mazurkiewicz,
  - W. Sierpiński.
- Z. Janiszewski, *O potrzebach matematyki w Polsce* (1917); proponuje:
  - 1. skupienie wysiłków naukowych na jednym dziale matematyki;

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Polski uniwersytet w Warszawie.
- Profesorami matematyki zostają:
  - Z. Janiszewski,
  - S. Mazurkiewicz,
  - W. Sierpiński.
- Z. Janiszewski, *O potrzebach matematyki w Polsce* (1917); proponuje:
  - 1. skupienie wysiłków naukowych na jednym dziale matematyki;
  - 2. stworzenie nowego czasopisma matematycznego.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Teoria mnogości i dyscypliny pokrewne.

## Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Teoria mnogości i dyscypliny pokrewne.
- *Fundamenta Mathematicae* (od 1920).

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Teoria mnogości i dyscypliny pokrewne.
- *Fundamenta Mathematicae* (od 1920).
- Czasopismo poświęcone „teorii mnogości i zagadnieniom pokrewnym (bezpośrednie zastosowania teorii mnogości), Analysis Situs, logika matematyczna, badania aksjomatyczne".

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Wielka dalekowzroczność twórców *Fundamenta* — teoria mnogości jeszcze nie jest doceniana i w pełni uznana.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Wielka dalekowzroczność twórców *Fundamenta* — teoria mnogości jeszcze nie jest doceniana i w pełni uznana.
- Akcentowanie powiązania teorii mnogości z innymi działami matematyki.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Wielka dalekowzroczność twórców *Fundamenta* — teoria mnogości jeszcze nie jest doceniana i w pełni uznana.
- Akcentowanie powiązania teorii mnogości z innymi działami matematyki.
- Tablica Janiszewskiego — teoria mnogości zajmuje miejsce szczytowe.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Wielka dalekowzroczność twórców *Fundamenta* — teoria mnogości jeszcze nie jest doceniana i w pełni uznana.
- Akcentowanie powiązania teorii mnogości z innymi działami matematyki.
- Tablica Janiszewskiego — teoria mnogości zajmuje miejsce szczytowe.
- Teoria mnogości podstawą matematyki w sensie metodologicznym.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Wielka dalekowzroczność twórców *Fundamenta* — teoria mnogości jeszcze nie jest doceniana i w pełni uznana.
- Akcentowanie powiązania teorii mnogości z innymi działami matematyki.
- Tablica Janiszewskiego — teoria mnogości zajmuje miejsce szczytowe.
- Teoria mnogości podstawą matematyki w sensie metodologicznym.
- Nacisk na zastosowania teorii mnogości w innych działach matematyki.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Związki teorii mnogości z logiką i podstawami matematyki oraz z filozofią matematyki;

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Związki teorii mnogości z logiką i podstawami matematyki oraz z filozofią matematyki;
- Stanisław Leśniewski i Jan Łukasiewicz w komitecie redakcyjnym *Fundamenta*.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Związki teorii mnogości z logiką i podstawami matematyki oraz z filozofią matematyki;
- Stanisław Leśniewski i Jan Łukasiewicz w komitecie redakcyjnym *Fundamenta*.

Leśniewski (1886-1939)

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Związki teorii mnogości z logiką i podstawami matematyki oraz z filozofią matematyki;
- Stanisław Leśniewski i Jan Łukasiewicz w komitecie redakcyjnym *Fundamenta*.

Leśniewski (1886-1939)

Łukasiewicz (1878-1956)

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.
- Rozszerzenie perspektywy badawczej.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.
- Rozszerzenie perspektywy badawczej.
- Poglądy filozoficzne sprawą prywatną.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.
- Rozszerzenie perspektywy badawczej.
- Poglądy filozoficzne sprawą prywatną.
- Dowolne poprawne metody.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.
- Rozszerzenie perspektywy badawczej.
- Poglądy filozoficzne sprawą prywatną.
- Dowolne poprawne metody.
- Ważna poprawność i owocność metod.

# Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej

- Plany tomów naprzemiennych: teoria mnogości i jej zastosowania oraz logika i podstawy matematyki.
- Rozszerzenie perspektywy badawczej.
- Poglądy filozoficzne sprawą prywatną.
- Dowolne poprawne metody.
- Ważna poprawność i owocność metod.
- Ważne wyniki a nie metody.

# Jan Zygmunt

## Zermelo a Szkoła Warszawska

# Zermelo a Szkoła Warszawska

Tarski (1901–1983)

Kuratowski (1896–1980)

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**TWIERDZENIE 1.** (Zermelo 1904, Tarski 1939, Kanamori 1997). Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem; niech $F$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór potęgowy zbioru $X$ w $X$, tzn. $F : P(X) \to X$. Wtedy istnieje dokładnie jeden zbiór $W \subseteq X$ oraz jedna relacja $<$ określona w $X$, która ściśle dobrze porządkuje zbiór $W$, przy czym spełnione są dwa warunki:

- (a) dla dowolnego $x \in W$, $F(\{y \in W : y < x\}) = x$,
- (b) $F(W) \in W$.

Dyskusja.

1)Funkcja $F$ generuje dobre uporządkowanie zbioru $W$ tak:

- $a_0 = F(\emptyset)$
- $a_1 = F(\{a_0\}) = F(\{F(\emptyset)\})$
- $a_2 = F(\{a_0, a_1\}) = F(\{F(\emptyset), F(\{F(\emptyset)\})\})$, itd.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

$F$ zastosowane do pewnego przedziału początkowego zbioru $W$ produkuje nowy element. Konstrukcja zbioru $W$ jest zakończona, gdy $F$ nie daje nowego elementu, tzn. $F(W) \in W$.

2) Załóżmy, że $X \subseteq P(X)$, tzn., że $X$ jest zbiorem przechodnim. Jeśli $F$ jest identycznością na $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ldots$, to otrzymujemy skończone liczby porządkowe w sensie von Neumanna.

3) Funkcja $F$ nie może być identycznością na całym, zbiorze $P(X)$, o czym przekonuje nas rozumowanie typu antynomii Russella. Bo gdyby $F(Y) = Y$ dla każdego $Y \in P(X)$, to $P(X)$ zawierałoby się w $X$, tzn. $P(X) \subseteq X$. Stąd jednak wynika sprzeczność, jeśli weźmiemy pod uwagę zbiór $R = \{x : x \in X \wedge x \notin x\}$. Rozumowanie to odkrył Zermelo wcześniej niż Russell.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

Szkic dowodu *Twierdzenia 1*.

Zbiór $Y \subseteq X$ nazywany *$F$-zbiorem*, jeśli istnieje relacja $R$, która ściśle dobrze porządkuje zbiór $Y$ oraz dla każdego $x \in Y$:

$$F(\{y \in Y : yRx\}) = x.$$

Mówimy wtedy, że $Y$ jest *$F$-zbiorem* ze *względu* na relację $R$.

Przykłady $F$-zbiorów: Zbiór pusty jest $F$-zbiorem i jest nim każdy z wymienionych zbiorów:

$\{F(\emptyset)\}$; $\{F(\emptyset), F(\{F(\emptyset)\})\}$; $\{F(\emptyset), F(\{F(\emptyset)\}), F(\{F(\emptyset), F(\{F(\emptyset)\})\})\}$; $\ldots$

Nie jest $F$-zbiorem np. żaden singleton $\{x\}$, o ile $x \neq F(\emptyset)$.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**LEMAT**. Jeśli $Y$ jest $F$-zbiorem ze względu na relację $R$ oraz $Z$ jest $F$-zbiorem ze względu na relację $S$, to $\langle Y, R\rangle$ jest przedziałem początkowym $\langle Z, S\rangle$ lub odwrotnie.
Uwaga. Z lematu wynika — jeśli przyjmiemy, że $Y = Z$ — że dowolny $F$-zbiór jest $F$-zbiorem ze względu na dokładnie jedną relację $R$.

W dowodzie powyższego Lematu powołamy się na następujące TWIERDZENIE (o porównywaniu zbiorów dobrze uporządkowanych; patrz K. Kuratowski *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, s. 82.): *Jeśli zbiory $A$ i $B$ są dobrze uporządkowane, to bądź zbiór $A$ jest podobny do przedziału początkowego zbioru $B$, bądź $B$ jest podobny do przedziału początkowego zbioru $A$.*

Niech $W =_{def}$ suma wszystkich $F$-zbiorów. Z Lematu otrzymujemy, że $W$ jest $F$-zbiorem ze względu na pewną relację, nazwijmy ją $<$, zatem spełniony jest wzór (a).
Co do (b), gdyby $F(W) \notin W$, to $W \cup \{F(W)\}$ byłby $F$-zbiorem, co przeczy określeniu $W$.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**WNIOSEK 1.** (Twierdzenie Zermela o dobrym uporządkowaniu.) Jeśli istnieje funkcja wyboru dla $P(X)$, to zbiór $X$ można dobrze uporządkować.

Dowód. Niech $G : P(X) \to X$ będzie funkcją wyboru. Określimy teraz funkcję $f$ przez wybór z uzupełnień, wedle przepisu — wybieraj z tego, co zostaje —

- $f(Y) = G(X - Y)$ dla $Y \neq X$
- $f(Y) =$ ustalony element $X$ dla $Y = X$.

Oczywiście $G(X - Y) \in X - Y$. Stosując Twierdzenie 1 do tak określonej funkcji $f$ otrzymujemy, że $W = X$.

**WNIOSEK 2 (Twierdzenie Cantora o przekątni).** Dla dowolnego $F : P(X) \to X$ istnieją dwa różne zbiory $W$ oraz $Y$, obydwa **definiowalne** za pomocą $F$, takie że $F(W) = F(Y)$; co więcej $Y \subseteq W$.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

Dowód. Niech $\langle W, < \rangle$ będzie zbiorem rozważanym w Twierdzeniu 1.

$$Y =_{df} \{x \in W : x < F(W)\}.$$

Z Twierdzenia 1, punkt (a): $F(Y) = F(W)$, ale $F(W) \in W - Y$, zatem $W \neq Y$.

Inna, **niekonstruktywna**, wersja dowodu Wniosku 2:

Niech $F : P(X) \to X$. Rozważmy zbiór $D$ zdefiniowany następująco:

$$D = \{x \in X : (\exists Z)(x = F(Z) \wedge F(Z) \notin Z)\}.$$

Zatem dla dowolnego $x$ mamy:

$(*) \quad x \in D \leftrightarrow (\exists Z)(x = F(Z) \wedge F(Z) \notin Z).$

Gdyby $F(D) \notin D$, to wobec $(*)$ mielibyśmy $F(D) \in D$, czyli sprzeczność. Zatem $F(D) \in D$. Stąd istnieje $Z$ takie, że $F(Z) = F(D)$ i $F(Z) \notin Z$. Stąd $D \neq Z$.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**WNIOSEK 3** (Uogólnienie twierdzenia Cantora o przekątni: Tarski 1939). Niech $\mathbf{S}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $X$, które można dobrze uporządkować. Wtedy żadna funkcja $F : \mathbf{S} \to X$ nie jest różnowartościowa, tzn. $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathbf{S}}}$.

Inne godne uwagi i wzmianki w tym kontekście twierdzenia:

**TWIERDZENIE 2** (Uogólnienie tw. Cantora; Dilworth & Gleason, 1962). Niech $\langle E, \leqslant \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech $\mathbf{S}$ będzie rodziną wszystkich przedziałów początkowych zbioru $\langle E, \leqslant \rangle$. Jeśli $F : E \to \mathbf{S}$ jest homomorfizmem porządkowym, tzn. dla dowolnych $x, y \in E$, jeśli $x \leqslant y$, to $F(x) \subseteq F(y)$, to $F$ nie jest surjekcją.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**TWIERDZENIE 3** (Twierdzenie Fregego; J. Bell, 1999). Niech $v$ będzie funkcją określoną na pewnej rodzinie podzbiorów zbioru $E$ i wykonalną w $E$ oraz spełniającą warunki:

- $\emptyset \in dom(v)$,
- $(\forall U \in dom(v))(\forall x \in E - U) U \cup \{x\} \in dom(v)$,
- $(\forall U, V \in dom(v))[v(U) = v(V) \leftrightarrow U \approx V]$.

Wtedy możemy zdefiniować zbiór $N \subseteq E$, element $0 \in N$ oraz funkcję następnika $s : N \to N$ w taki sposób, że układ $\langle N, 0, s \rangle$ jest modelem aksjomatów Peany.

# Pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**TWIERDZENIE 4** (Inne uogólnienie Twierdzenia Cantora o przekątni; G. Kirmayer 1981).

- (a) Jeśli zbiór $E$ zawiera podzbiór nieskończony oraz ko-nieskończony (tzn. którego dopełnienie też jest nieskończone), to nie istnieje surjekcja $F : E \to \mathbf{S}_1$ , gdzie $\mathbf{S}_1$ jest rodziną wszystkich nieskończonych i ko-nieskończonych podzbiorów zbioru $E$;
- (b) Jeśli $E$ jest zbiorem nieskończonym, to nie istnieje surjekcja $F : E \to \mathbf{S}_2$, gdzie $\mathbf{S}_2$ jest rodziną wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $E$.

# Dowód Zermela twierdzenia Schrödera-Bernsteina

**TWIERDZENIE SCHRÖDERA-BERNSTEINA**. Jeśli zbiór $M$ jest równoważny z jakąś swoją częścią $M'$, to jest też równoważny z każdą inną częścią $M_1$, która zawiera $M'$ jako część składową.
Inaczej, jeśli $M' \subseteq M_1 \subseteq M$ oraz istnieje bijekcja $f : M \to M'$, to istnieje bijekcja $g : M \to M_1$.

*Dowód* Zermela (1908a, tw. 25).
Zdefiniujemy zbiór $Q$ oraz funkcję $F : P(M) \to P(M)$ następująco:

$$Q = M_1 - M' \qquad F(A) = Q \cup \overrightarrow{f} A)$$

Funkcja $F$ jest monotoniczna.
Niech $T = \{A \subseteq M : F(A) \subseteq A\}$.
$T \neq \emptyset$, bo $M \in T$. Niech $A_0 = \bigcap T$. Wtedy $A_0 \in T$.

# Dowód Zermela twierdzenia Schrödera-Bernsteina

Ponadto $F(A_0) = A_0$. Gdyby bowiem $F(A_0) \subset A_0$, to — wobec monotoniczności — $F(F(A_0)) \subseteq F(A_0) \subset A_0$, co przeczyłoby definicji $A_0$. Zatem

$$A_0 = F(A_0) = Q \cup \overrightarrow{f}(A_0).$$

Stąd

$$M_1 = A_0 \cup (M' - \overrightarrow{f}(A_0)) \text{ oraz } M' = \overrightarrow{f}(A_0) \cup (M' - (A_0))$$

są sumami rozłącznymi.

Stąd istnieje bijekcja z $M_1$ na $M'$, mianowicie na $A_0$ jest to $f$, a na pozostałym zbiorze identyczność.

# Dowód Zermela twierdzenia Schrödera-Bernsteina

- 1. Dowód powyższy jest niepredykatywny (kiedy stwierdza się, że $A_0 \in T$).
- 2. Zermelo podkreśla znaczenie aksjomatów zbioru potęgowego i wyróżniania w konstrukcji tego dowodu.
- 3. W dowodzie nie używa się liczb naturalnych ani zasady indukcji zupełnej; ten fakt podkreśla sam Zermelo w przypisie 29. Wykorzystuje się wyłącznie teorię łańcuchów Dedekinda.
- 4. Zermelo swój dowód przesłał Poincarému w liście (styczeń 1906), a tenże go opublikował w 1906 r. Wcześniej jednak Zermelo zakomunikował swój dowód Hilbertowi (w liście z 28 czerwca 1905 r.).
- 5. Podobny dowód opublikował Peano (1906). Wilkosz (cf. tenże, *Podstawy ogólnej teorii mnogości*, 1925, por. s. 50) daje pierwszeństwo Peanie: „Idea dowodu Peany pozwoliła na koniec Ernestowi Zermelo na zbudowanie przepięknego dowodu (...)". Również Russell był tym dowodem urzeczony. (cf. List Russella do Jourdaina z 15 III 1908, opublikowany w Grattan-Guinness 1977, s. 109.)

# Dowód Zermela twierdzenia Schrödera-Bernsteina

Powyższe twierdzenie i jego dowód były modyfikowane i uogólniane w pracach: S. Banacha (1924), K. Kuratowskiego (1925), Lindenbauma-Tarskiego (1926, Twierdzenie o wartości średniej), A. Tarskiego i Knastera (abstrakty z 1928), Ulama (1929), Tarskiego (1948), Sikorskiego (1948).

Pełnej algebraizacji wątków związanych z tw. Schrödera-Bernsteina dokonał Tarski w pracy *A lattice theoretical fix-point theorem and its applications*, 1955; w szczególności na uwagę zasługuje twierdzenie z dziedziny algebr Boole'a, które w literaturze przedmiotu nazywane jest „Tarski-Schröder-Bernstein theorem".

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

„Leżąca u podstaw nowego dowodu definicja dobrego uporządkowania, jaka pojawia się już w sformułowaniu twierdzenia ma tę zaletę, że odnosi się wyłącznie do elementarnych pojęć teorii mnogości, podczas gdy, jak uczy doświadczenie, przy utartych przedstawieniach niedoinformowani skłonni są do szukania jakiejś mistycznej treści poza, raptownie wprowadzoną, *Cantorowską* relacją $a \prec b$. Nasza definicja może zostać tu raz jeszcze wyczerpująco sformułowana w sposób następujący:

**Definicja.** *Zbiór M nazywa się „dobrze uporządkowanym”, gdy każdemu jego elementowi a odpowiada jednoznacznie jako „reszta” pewien podzbiór* $\mathfrak{R}(a)$ *i gdy każdy niepusty podzbiór P [zbioru] M zawiera jeden i tylko jeden „element pierwszy”, tj. taki element* $p_0$*, którego reszta* $\mathfrak{R}(p_0)$ *obejmuje zbiór P jako podzbiór.”*

Ernst Zermelo: ***Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.*** *Mathematische Annalen* **65**, 1908, 107–128.

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**Twierdzenie.** *Jeśli, na podstawie jakiegokolwiek prawa, z każdym niepustym podzbiorem zbioru $M$ jest stowarzyszony pewien z jego elementów jako „element wyróżniony", to zbiór $\mathfrak{U}(M)$ wszystkich podzbiorów $M$ posiada jeden i tylko jeden podzbiór* **M** *o tej własności, że każdemu dowolnemu podzbiorowi $P$ [zbioru] $M$ odpowiada zawsze jeden i tylko jeden element $P_0$ z* **M***, który zawiera $P$ jako podzbiór oraz [jakiś] element z $P$ jako element wyróżniony. Zbiór $M$ jest dobrze uporządkowany przez* **M***.*

Ernst Zermelo: ***Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.*** *Mathematische Annalen* **65**, 1908, 107–128.

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**Rodziny zbiorów nasycone** (czyli **maksymalne**). Niech $\mathbb{K}$ będzie rodziną (klasą) rodzin podzbiorów zbioru $M$, czyli niech $\mathbb{K} \subseteq P(P(M))$. Rodzinę $\mathbf{M}$ nazywać będziemy *nasyconą* (lub też *maksymalną*) w klasie $\mathbb{K}$, jeśli $\mathbf{M} \in \mathbb{K}$ oraz nie istnieje w $\mathbb{K}$ rodzina $\mathbf{M}'$ , będąca właściwym nadzbiorem $\mathbf{M}$; symbolicznie

$$\neg\exists \mathbf{M}'[\mathbf{M}' \in \mathbb{K} \wedge \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}' \wedge \mathbf{M} \neq \mathbf{M}'].$$

W dalszym ciągu ustalimy uwagę na rodzinach monotonicznych, czyli na klasie $\mathbb{MON}$, którą definiujemy następująco:

$$\mathbf{M} \in \mathbb{MON} \ \equiv \ \mathbf{M} \subseteq P(M) \wedge (\forall A, B \in \mathbf{M})[A \subseteq B \vee B \subseteq A].$$

Warunek powyższy mówi, że każde dwa zbiory należące do rodziny monotonicznej $\mathbf{M}$ są porównywalne ze względu na inkluzję $\subseteq$. Rodziny monotoniczne zwane są też dlatego *łańcuchami*. Jeśli $\mathbf{M}$ jest rodziną monotoniczną, to dla dowolnych różnych zbiorów $A, B \in \mathbf{M}$ mamy: $A \subset B$ lub $B \subset A$.

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**Rodziny zbiorów wyznaczające relacje porządkujące.** Dla $\mathbf{M} \subseteq P(M)$ niech formuła (predykat) $x <_{\mathbf{M}} y$ będzie skrótem następującej formuły:

$$(\exists A \in \mathbf{M})[y \in A \wedge x \notin A].$$

Będziemy mówić, że relacja $<_{\mathbf{M}}$ jest *wyznaczona* przez $\mathbf{M}$, a rodzina $\mathbf{M}$ *ustala* relację $<_{\mathbf{M}}$.

**TWIERDZENIE 1.** Jeśli $\mathbf{M}$ jest elementem maksymalnym w $\mathbb{MON}$, to predykat $<_{\mathbf{M}}$ definiuje w $M$ relację przechodnią, asymetryczną i spójną.

**TWIERDZENIE 2.** Jeśli $M$ jest zbiorem uporządkowanym przez relację $<$, to rodzina $\mathbf{R}$ wszystkich jego reszt jest maksymalną rodziną monotoniczną w $P(M)$. Ponadto, rodzina reszt $\mathbf{R}$ jest jedyną rodziną monotoniczną w $P(M)$, która wyznacza relację $<$.

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

**Rodziny zbiorów wyznaczające relacje dobrego uporządkowania.** Niech teraz $\mathbb{DOB}$ oznacza zbiór wszystkich rodzin podzbiorów zbioru $M$, które są dobrze uporządkowane przez relację odwrotnej inkluzji, czyli
$\mathbf{D} \in \mathbb{DOB} \leftrightarrow \mathbf{D} \subseteq P(M)$ i $\mathbf{D}$ jest dobrze uporządkowane przez $\supseteq$.

**TWIERDZENIE 3.** Jeśli $\mathbf{M}$ jest maksymalnym elementem w $\mathbb{DOB}$, tzn. $\mathbf{M}$ jest dobrze uporządkowane przez $\supseteq$ oraz nie istnieje takie $\mathbf{M}' \in \mathbb{DOB}$, że $\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}'$, to relacja $x <_{\mathbf{M}} y$ dobrze porządkuje zbiór $M$.

**TWIERDZENIE 4.** Niech $\mathbf{M} \subseteq P(M)$ będzie rodziną monotoniczną (łańcuchem) dobrze uporządkowaną przez relację inkluzji odwrotnej. Wtedy następujące warunki są równoważne:
(1) Zbiory $M$ i $\emptyset$ należą do $\mathbf{M}$ oraz dla dowolnego $X \in \mathbf{M}$: $1^0$ jeśli $X$ jest bezpośrednim następnikiem $Y \in \mathbf{M}$, to $X$ ma dokładnie jeden element więcej niż $Y$; $2^0$ jeśli zaś $X$ jest elementem granicznym, tzn. $X$ nie jest bezpośrednim następnikiem żadnego elementu, to $X$ jest iloczynem mnogościowym wszystkich swoich poprzedników.
(2) $\mathbf{M}$ jest maksymalna.

# Drugi dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu

Rodzina **M** (występująca w oryginalnym sformułowaniu TWIERDZENIA) jest w trakcie dowodu definiowana w kolejnych krokach:

1. Niech $\varphi$ będzie funkcją wyboru dla zbioru $M$, tzn. jest określona na $P(M) - \{0\}$.

2. Zbiór **Z** nazywa się Θ-łańcuchem w $P(M)$, jeśli

- (i) $\mathbf{Z} \subseteq P(M)$,
- (ii) $M \in \mathbf{Z}$,
- (iii) Jeżeli $A \in \mathbf{Z}$, to $A - \{\varphi(A)\} \in \mathbf{Z}$.
- (iv) Jeżeli $X \subseteq \mathbf{Z}$, to $\bigcap X \in \mathbf{Z}$.

3. Rodzina **M** jest *ex definitione* iloczynem mnogościowym wszystkich Θ-łańcuchów w $P(M)$.

Dowodzi się, że **M** jest rodziną maksymalną, dobrze uporządkowaną przez $\supseteq$; dokładniej, że należy do $\mathbb{DOB}$.

# Aksjomat wyboru w Szkole Warszawskiej

Temat jest nadzwyczaj rozległy. Obszerne fragmenty książki G. Moore'a *Zermelo's Axiom of Choice*, 1982, opisują osiągnięcia Szkoły Warszawskiej w tym względzie.

- Rozprawa Sierpińskiego *L'axiome de M. Zermelo...*, 1918; jej sens ideowy.
- Co można znaleźć na temat aksjomatu wyboru w trzech kolejnych wydaniach *Zarysu teorii mnogości* Sierpińskiego?

# Aksjomat wyboru w Szkole Warszawskiej

Matematycy i logicy warszawscy odkrywali:

- nowe równoważniki aksjomatu wyboru w różnych działach teorii mnogości i poza nią;
- słabsze wersje aksjomatu wyboru w teorii mnogości, algebrze i metalogice;
- zdania (twierdzenia), z których aksjomat wyboru wynika.

Ponadto:

- dowodzili nowych twierdzeń, stosując aksjomat wyboru (np. w teorii miary, teorii algebr Boole'a);
- rugowali aksjomat wyboru (gdzie było to możliwe) z dowodów znanych twierdzeń i zastępowali dowody nieefektywne efektywnymi;
- w latach późniejszych przyczynili się do nadania aksjomatowi wyboru charakteru topologicznego.

# Stanisław Krajewski

## O metodzie aksjomatycznej

# Zofia Adamowicz

## Droga od Zermelo do forsingu

# Droga od Zermelo do forsingu

Prześledzę w wielkim skrócie rozwój teorii mnogości od Zermelo do Cohena, zwracając szczególną uwagę na wątek dotyczący ustalenia statusu pewnika wyboru i hipotezy continuum w teorii mnogości, a także na polski wkład w ten proces.

Akcenty polskie są wytłuszczoną czcionką.

Korzystam głównie z artykułu historycznego: Gregory Moore „The Origins of Forcing" (Logic Colloquium 86, Leeds).

# Podwaliny teorii mnogości: Cantor i Zermelo

Cantor (1845–1918)

Zermelo (1871–1953)

# Podwaliny teorii mnogości

Historię teorii mnogości można zacząć od pracy Cantora z 1874 roku, w której dowodzi on, że są co najmniej dwie moce nieskończone. Dowodzi mianowicie, że:

$$\mathbb{R} \text{ nie jest równoliczne z } \mathbb{N}.$$

Cantor stawia sobie pytanie — czy istnieją inne moce? Czy są takie wśród mocy podzbiorów prostej?
Stawia hipotezę (1878): NIE MA. To sławna *Hipoteza Continuum*.
Od 1874 próbuje udowodnić swoją hipotezę. Chęć udowodnienia tej hipotezy była jego główną siłą twórczą. Podchodził do problemu z dwóch stron:

- bezpośrednio — badał zbiory liczb rzeczywistych i ich moce
- pośrednio — badał jakie w ogóle moce mogą istnieć.

# Cantor i Zermelo

Cantor sformułował następujący postulat:

- *Każdy zbiór może być dobrze uporządkowany — „policzony".*

Odtąd w teorii mnogości można wyodrębnić dwa wątki — ewolucję pojęcia liczby porządkowej i liczby kardynalnej oraz ewolucję dowodów powyższego postulatu. Zajmę się wątkiem drugim.
W 1904 roku Ernst Zermelo sformułował *aksjomat wyboru* i z jego pomocą udowodnił twierdzenie:

- *Każdy zbiór może być dobrze uporządkowany.*

Metoda Zermelo jest inna niż metoda „liczenia" Cantora. Cantor musiał wielokrotnie „wybierać" ze swego zbioru element $x$ — taki, który jeszcze nie został „policzony". Metoda Zermelo polega na jednokrotnym dokonaniu wyboru po jednym elemencie, ze wszystkich podzbiorów $X$, a potem na użyciu tej selekcji do uporządkowania $X$.

# Zermelo

Dowód Zermelo został jednak zakwestionowany przez współczesnych mu matematyków, między innymi przez Hessenberga i Bernsteina. Zakwestionowano podstawy na których jest on oparty — niejasność użytych pojęć, np. pojęcia funkcji oraz użytych środków, np. wybierania podzbiorów ze zbiorów składających się z elementów o określonej własności. W roku 1908 Zermelo uściślił swój dowód. Oparł pojęcie funkcji na pojęciu zbioru — potraktował ją jako zbiór par. Z kolei pozostawało niejasne czym jest para. Pojęcie pary uporządkowanej dwóch obiektów przeszło ciekawą ewolucję — kilku matematyków podało różne definicje. Ostatecznie przyjęła się definicja Kuratowskiego. Także na potrzeby swego dowodu Zermelo sformułował aksjomatykę, zawierającą między innymi aksjomat pozwalający wybierać ze zbiorów podzbiory wyróżnione jako zbiory elementów mających daną własność — aksjomat wyróżniania. A więc pierwsze aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości wyrosło z dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.

# Teoria mnogości, AC i CH przed Gödlem

Fraenkel w 1921 roku prowadził dyskusję z Zermelo nad potrzebą aksjomatu zastępowania.
W 1922 roku Fraenkel sformułował aksjomat zastępowania.
Także w 1922 roku podał dowód niezależności pewnika wyboru od aksjomatów Zermelo (bez zastępowania), używający urelementów.

W 1923 Skolem sformułował teorię mnogości jako teorię pierwszego rzędu. Zauważył istnienie modelu przeliczalnego (twierdzenie Skolema-Löwenheima), a więc zauważył, że nieskończoność większa niż przeliczalna jest relatywna. W dopisku do swego artykułu zasugerował pomysł dołożenia do przeliczalnego modelu nowego zbioru liczb naturalnych, analogicznie do dołożenia $\sqrt{2}$ do ciała. Postulował możliwość niezależności hipotezy continuum.

# Teoria mnogości, AC i CH przed Gödlem

**W 1934 roku Tarski udowodnił słabe górne twierdzenie Skolema-Löwenheima: jeśli teoria pierwszego rzędu ma model nieskończony, to ma model nieprzeliczalny (appendix do pracy Skolema).**

W latach 1929–1939 toczyła się żarliwa dyskusja pomiędzy Zermelo a Skolemem nad wyborem logiki adekwatnej dla teorii mnogości — pierwszego czy drugiego rzędu oraz, odpowiednio, dyskusja nad właściwym sformułowaniem aksjomatu zastępowania. Zermelo był za logiką drugiego rzędu. W wykładzie z 1931 roku Zermelo skrytykował i odrzucił to co nazwał „Skolemizmem". Upierał się, że prawdziwość hipotezy continuum nie zależy od modelu.

**W Warszawie hipoteza continuum fascynowała Sierpińskiego. W 1934 roku Sierpiński wydał książkę „Hypothèse du continu", gdzie rozważył około stu równoważników hipotezy continuum dotyczących wewnętrznej struktury prostej i płaszczyzny.**

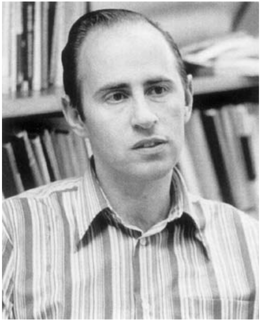
# Gödel

W 1937 roku Gödel dał wykład w Wiedniu na temat zbiorów konstruowalnych. Udowodnił, że w uniwersum konstruowalnym zachodzi pewnik wyboru, a więc udowodnił niesprzeczność pewnika wyboru (był tam Mostowski).
Dopiero w listopadzie 1938 roku Gödel opublikował dowód, że w uniwersum zbiorów konstruowalnych zachodzi uogólniona hipoteza continuum. Wydaje się, że miał ten dowód wkrótce po wykładzie w Wiedniu. Nie ogłaszał go przez rok, bo szukał przez ten czas dowodu niezależności hipotezy continuum.

Przy okazji nadania Cohenowi medalu Fieldsa na kongresie w Moskwie w 1966 roku Church stwierdził, że Gödel w 1942 miał dowód niezależności $V = L$ od teorii typów. Zaś Wang w artykule z 1976 roku twierdzi, że w 1943 roku Gödel miał dowód niezależności pewnika wyboru od teorii typów. Gödel to potwierdził, jednocześnie wyraźnie stwierdzając, że jego metoda nie pozwala na uzyskanie żadnego silniejszego wyniku. Jednak według Solovaya, dowody Gödla miały posmak forsingu.

# Między Gödlem a Cohenem

Gödel (1906–1978)



Cohen (1934–2007)

# Między Gödlem a Cohenem

Mostowski (1939) badał pewnik wyboru dla rodzin zbiorów skończonych i podał ostateczną konstrukcję modeli Fraenkla-Mostowskiego.

Sierpiński (1947) pokazał, że uogólniona hipoteza continuum [nie ma mocy pośredniej między $\mathfrak{m}$ a $2^{\mathfrak{m}}$] implikuje pewnik wyboru (fakt zasugerowany przez Lindenbauma i Tarskiego).

Mostowski (1949) udowodnił lemat o kontrakcji — ufundowany model spełniający aksjomat ekstensjonalności jest izomorficzny ze strukturą przechodnią.

Novak i Mostowski (1950) pokazali, że teoria mnogości Gödla-Bernaysa jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii Zermelo-Fraenkla (ZF). Ten wynik uprościł badanie zagadnień niesprzeczności.

Mostowski (1952) i niezależnie Wang pokazali, że teoria Zermelo nie jest skończenie aksjomatyzowalna. W obu dowodach były luki. Zostały one zauważone przez Montague.

# Między Gödlem a Cohenem

Andrzej Mostowski (1913–1975)

# Między Gödlem a Cohenem

W 1957 roku Montague pokazał, że teoria ZF nie jest skończenie aksjomatyzowalna nad teorią Zermelo.

W 1953 roku Shepherdson udowodnił, że nie da się pokazać niezależności pewnika wyboru ani hipotezy continuum metodą modeli wewnętrznych.

W 1956 roku Levy zdefiniował względną konstruowalność.

# Cohen

Pierwszym odkryciem Cohena było pokazanie istnienia modelu minimalnego. W szczególności wynika stąd niemożliwość udowodnienia niezależności pewnika wyboru ani hipotezy continuum metodą modeli wewnętrznych. Cohen nie wiedział o pracy Shepherdsona. Był zdziwiony, że Kreisel i Scott nie znali „tak elementarnego wyniku”.

W 1962 roku Cohen miał już ideę forsingu. Potem ją zarzucił na kilka miesięcy, bo napotkał trudności. Popadł w depresję. Przełom nastąpił w środku kwietnia 1963. Zreferował wtedy dowód Fefermanowi.
Wydał też preprint „The independence of the axiom of choice” zawierający pełen dowód niezależności $V = L$ (stwierdzenia, że wszystkie zbiory są konstruowalne), AC (aksjomatu wyboru) i CH (hipotezy continuum) od $ZF + AC$ używający forsingu i języka rozgałęzionego.
Feferman i inni nie wierzyli w poprawność dowodu Cohena.

# Cohen

15 kwietnia 1963 Kreisel napisał do Gödla o wynikach Cohena (nawiązał do metody priorytetu).
24 kwietnia Cohen napisał do Gödla. Parę dni później spotkał się z Gödlem.
6 maja Cohen napisał do Gödla o swoim niepokoju, czy nie ma w jego maszynopisie subtelnego błędu i o tym, że Kreisel i Scott wysłuchali go, ale Scott potem podniósł „głupią" wątpliwość, a więc niewiele zrozumiał. Prosił Gödla o *imprimatur* i dał mu czas „do następnego weekendu". Napisał, że jest w wielkim napięciu nerwowym. Wzbudził współczucie Gödla.

20 czerwca Gödel odpisał: „Mam nadzieję, że Pana napięcie nerwowe nie przeszkadza Panu w Pracy. Właśnie uzyskał Pan najważniejsze wyniki w teorii mnogości od czasu jej aksjomatyzacji. Powinien Pan być w znakomitym nastroju".
Wcześniej 7 maja Sacks pisał do Gödla. Aprobował dowód Cohena i napisał, że składa się on z wcześniej znanych prostych pomysłów sprytnie połączonych w całość.

# Nowatorstwo metody Cohena

Czego Cohen użył?

- modelu przeliczalnego (Skolem)
- modelu dla $V = L$ (Gödel)
- względnej konstruowalności (Levy)
- zasady refleksji i lematu o kontrakcji (Mostowski)
- języka rozgałęzionego (Gödel).

Co było zupełnie nowe:

- pojęcie forsowania
- pojęcie zbioru generic
- budowanie modelu ze skończonych klocków niepełnej informacji o nim.

# Posłowie

W latach 1965–1967 Scott i Solovay stworzyli modele boolowskie dla teorii mnogości. Przy okazji zauważyli, że elementy algebry Boole'a uzupełniającej zbiór warunków forsujących mogą być traktowane jako zbiory regularne otwarte w pewnej przestrzeni topologicznej (uogólniającej przestrzeń Stone'a). **W 1969 roku Mostowski napisał monografię „Constructible sets with applications", w której zdefiniował forsing topologiczny.**

**Filtr generic okazał sie takim filtrem, o jakim mowa w lemacie Rasiowa-Sikorski, 1960. Lemat Rasiowa-Sikorski jest prostym faktem algebraicznym, który nabrał znaczenia w związku z forsingiem. Jego sformułowanie w tym właśnie czasie świadczy o tym, że takie idee wówczas wisiały w powietrzu. Nie można jednak twierdzić, że przyczynił się do odkrycia forsingu.**

# Posłowie

Rasiowa (1917–1994)

Sikorski (1920–1983)

# Janusz Czelakowski

## Kategoryczność teorii mnogości

# Kategoryczność teorii mnogości

*Of all the cardinalities only the finite ones and the denumerable one remain. Only these have real meaning; everything else is formalistic fiction.*
John von Neumann

- **Zermelo** — „definite properties of sets'' i postać aksjomatu wyróżniania.
- **Skolem** — identyfikacja definite properties z formułami pierwszego rzędu.
- Teoria mnogości uprawiana w ramach logiki pierwszego rzędu.
- Przeliczalne modele ZF.
- Polemiki pomiędzy Zermelo a skolemitami.

# Kategoryczność teorii mnogości

**Zasada czystości** (uniwersalnie kwantyfikowana po wszystkich zbiorach):

*Każdy element zbioru jest zbiorem.*

- Umożliwia formalizację teorii mnogości w języku $L_{st} = \{\in\}$ ze zmiennymi przebiegającymi zbiory (ew. klasy).
- Każdy zbiór spełniający zasadę czystości — *dziedzicznie czysty* (krótko — *czysty*).
- $ZF^-$ — **teoria pierwszego rzędu Zermelo-Fraenkla bez aksjomatu regularności.**

# 1. Aksjomat regularności

**Formuły elementarne:**

- $On(x)$: „$x$ jest liczbą porządkową”
- $Reg(x)$: $(\exists y)(On(y) \wedge x \in R(y))$,

gdzie $R$ jest symbolem operacji ranga.

- $R$ jest definiowalna na gruncie $ZF^{-}$ formułą pierwszego rzędu.
- $Reg(x)$ czytamy „Zbiór $x$ jest regularny”.

# 1. Aksjomat regularności

**Aksjomat regularności:** $(\forall x)\ Reg(x)$ „Każdy zbiór jest regularny”.

**Uwaga:** Aksjomat regularności jest zazwyczaj formułowany w postaci zdania

- $(\forall x)[(\exists y)(y \in x) \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge \neg(\exists z)(z \in y \wedge z \in x))]$.

W obecności aksjomatu wyborów zależnych $DC$ wszystkie znane formy aksjomatu regularności są równoważne (na gruncie $ZF^{-}$).

**DC dla klas.** Niech $R$ będzie relacją serialną określoną w klasie $A$. Niech $a_0 \in A$. Istnieje wtedy odwzorowanie $f : \omega \rightarrow A$ takie, że $f(0) = a_0$ oraz $f(n)\ R\ f(n+1)$ dla każdego $n \in \omega$.

DC jest słabą wersją aksjomatu wyboru.

# 2. Teorie

- *ZF* — **teoria pierwszego rzędu Zermelo-Fraenkla**.
- Zatem: $ZF = ZF^{-} +$ **Aksjomat regularności.**
- $ZF_2$ — **teoria** *ZF* **drugiego rzędu (inaczej: nieograniczona wersja teorii** *ZF***).**

$ZF_2$ posiada te same aksjomaty co $ZF$ z jednym wyjątkiem: schemat zastępowania zastąpiony pojedynczym **aksjomatem nieograniczonego zastępowania**:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(u \in x \wedge z \approx F(u))).$$

Intuicyjnie, jeżeli $F$ jest operacją na zbiorach czystych, to dla każdego zbioru czystego $x$, obraz $y = \{F(u) : u \in x\}$ zbioru $x$ jest też zbiorem (czystym). (Operacja $F$ nie musi być definiowana przez formułę elementarną języka $L_{st} = \{\in\}$.)

# 2. Teorie

**$ZF_{1.5}$ — teoria $ZF$ rzędu jeden i pół.**
Posiada te same aksjomaty co teoria pierwszego rzędu $ZF$ (ze schematem zastępowania) plus
**Aksjomat nieograniczonego zastępowania dla $\omega$:**
*Niech F będzie zmienną drugiego rzędu reprezentującą operacje na zbiorach. Wtedy*
$(\exists y)(\forall z)(z \in y \rightarrow (\exists n)(n \in \omega \wedge z \approx F(n)))$.
Intuicyjnie, jeżeli $F$ jest dowolnym odwzorowaniem określonym na $\omega$ i którego wartościami są zbiory, to obraz $F[\omega]$ jest też zbiorem.

Dalsze teorie:

- **$ZFD$ — teoria pierwszego rzędu Zermelo-Fraenkla + $DC$**
- **$ZF_2D$ — teoria $ZF$ drugiego rzędu + $DC$.**

# 3. Modele

*Model* dla języka $L_{st} = \{\in\}$ — para

$$\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}}),$$

gdzie $e_{\mathbf{A}}$ jest binarną relacją na uniwersum $A$, które może być klasą. Elementy uniwersum $A$ nazywamy *zbiorami w sensie modelu* **A** lub krótko **A**-*zbiorami*.

Jeżeli a jest elementem uniwersum $A$, to

$$E_{\mathbf{A}}(a) := \{x \in A : x \; e_{\mathbf{A}} \; a\}.$$

**Zasada czystości dla A**. *Dla każdego $a \in A$, $E_{\mathbf{A}}(a)$ jest zbiorem czystym.*
Zbiór $E_{\mathbf{A}}(a)$ — *ekstensja* **A**-zbioru $a$.
$E_{\mathbf{A}}(a)$ obejmuje te elementy klasy $A$, które należą do a w sensie modelu **A**.

# 3. Modele

Model $\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}})$ jest *przechodni*, gdy:

- $e_{\mathbf{A}}$ jest ograniczeniem relacji $\in$ do klasy $A$ (tj. klasa $A$ jest czysta);
- klasa $A$ jest przechodnia (dla każdych $x, y$, jeżeli $y \in x \in A$, (tj. $y\ e_{\mathbf{A}}\ x \in A$), to $y \in A$).

Na gruncie $ZFC$ nie da się udowodnić zdania:
*Jeżeli ZF jest niesprzeczna, to ZF posiada model przechodni.*
$ZF$ posiada modele nieufundowane, tj. modele $\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}})$, w których istnieją nieskończone ciągi zstępujące
$\ldots e_{\mathbf{A}}\ a_n\ e_{\mathbf{A}} \ldots e_{\mathbf{A}}\ a_1\ e_{\mathbf{A}}\ a_0$.

**Twierdzenie 1.** Każdy model $\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}})$ teorii $ZF_{1.5}$ jest ufundowany.

W efekcie każdy model teorii $ZF_2$ i jej wzmocnień jest ufundowany.

# 4. Uniwersum zbiorów regularnych

Odwzorowanie ranga (the rank mapping) określone (na gruncie $ZF$ i mocniejszych teorii):

- $R(0) := 0\ (= \emptyset)$,
- $R(\alpha + 1) := \wp(R(\alpha))$, $\alpha \in \mathbf{Ord}$,
- $R(\lambda)) := \bigcup\{R(\alpha) : \alpha < \lambda\}$, $\lambda$ graniczna.
- $\mathbf{V}_{regular} := \bigcup\{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{Ord}\}$.

Nazwy: *uniwersum zbiorów regularnych*, uniwersum *Mirimanowa-von Neumanna* lub też *kumulatywna hierarchia zbiorów*.

Założenie istnienia $\mathbf{V}_{regular}$ jako dobrze określonego przedmiotu matematycznego wychodzi poza $ZF$.
Stosuje się parafrazę — predykat $Reg(x)$ i ogranicza się kwantyfikacje do tego predykatu.

# 5. Modele teorii $ZF_2$

**Twierdzenie 1 (o kategoryczności).**
*Zakładamy $ZF_2D$. Niech $\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}})$ oraz $\mathbf{B} = (B, e_{\mathbf{B}})$ będą modelami dla języka $L_{st} = \{\in\}$. Jeżeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są modelami teorii $ZF_2D$ i są przy tym klasami właściwymi, to są one izomorficzne.*

**Wniosek.** *Zakładamy $ZF_2D$. Układ $(\mathbf{V}_{regular}, \in)$ jest jedynym z dokładnością do izomorfizmu modelem $ZF_2D$ będącym klasą właściwą.*

W dowodzie powyższych faktów w stopniu *zasadniczym* wykorzystuje się techniki pochodzące od Mostowskiego (Collapsing Lemma).

# 5. Modele teorii $ZF_2$

Czy $ZF_2D$ posiada modele będące zbiorami? Można wykazać, że:

*jeżeli $ZF_2D$ posiada model $\mathbf{A} = (A, e_{\mathbf{A}})$ będący zbiorem, (tj. $A \in \mathbf{V}_{regular}$), to $\mathbf{A}$ jest izomorficzny z modelem naturalnym, tj. z modelem postaci $(R(\alpha), \in)$ dla pewnej liczby porządkowej $\alpha \in \mathbf{Ord}$.*

Zermelo: Przy założeniu *$ZF_2C$ + Istnieje liczba kardynalna silnie nieosiągalna* teoria ZF 2C posiada modele naturalne $(R(\alpha), \in)$, gdzie $\alpha$ jest silnie nieosiągalna.

- $\sigma$: „$ZF_2D$ posiada model naturalny", tj.
- $\sigma$: $(\exists\alpha)(Ord(\alpha) \wedge ((R(\alpha), \in) \models ZF_2D))$.

# 5. Modele teorii $ZF_2$

**Twierdzenie 2.**

- **1.** *Teoria* $ZF_2D + \sigma$ *posiada model.*
- **2.** *Teoria* $ZF_2D + \neg\sigma$ *posiada model.*

Zatem kwestia istnienia naturalnego modelu dla $ZF_2D$ jest nierozstrzygalna na gruncie tych środków dowodowych, które prowadzą do twierdzenia o kategoryczności.

# 5. Modele teorii $ZF_2$

## Uwagi.

- 1. Teoria $ZF_2D$ nie odróżnia swych modeli od modeli innych teorii, jak $ZF_2 + AC$ lub $ZF_2 + \neg AC$.
  W szczególności, jeżeli **A** jest modelem $ZF_2 + AC$ oraz **B** jest modelem $ZF_2 + \neg AC$ i oba są klasami właściwymi, można argumentować, że **A** i **B** są *nieizomorficznymi* modelami teorii $ZF_2$ ponieważ nie są one elementarnie równoważne.
  Z perspektywy $ZF_2$ modele **A** i **B** są jednak nieodróżnialne. $ZF_2$ nie jest władna rozstrzygnąć, czy jej model spełnia $AC$ lub jego negację.
- 2. Na poziomie metajęzyka, dowody powyższych twierdzeń wymagają przyjęcia silniejszych założeń niż sama teoria $ZF_2D$. Potrzebne są elementy teorii klas.
- 3. Dystynkcja „klasa — zbiór" nie ma charakteru absolutnego i zależy od przyjętej teorii.

# Krzysztof Wójtowicz

## Realizm teoriomnogościowy

# Realizm teoriomnogościowy

**GŁÓWNE PYTANIE**

REDUKCJA MATEMATYKI DO TEORII MNOGOŚCI:

- formalny zabieg metodologiczny
  **czy**
- prawda o świecie matematycznym?

# Realizm teoriomnogościowy

## UWAGI HISTORYCZNE 1

- Do XIX/XX wieku: intuicyjna, „naiwna" interpretacja pojęć matematycznych.
- Brak wspólnego, jednolitego systemu redukującego.
- Stopniowe przechodzenie do formalistycznego ujęcia dowodu matematycznego:
  - W miejsce intuicji — formalne reguły.
  - Np. Peacock, Pasch.
  - Hilbert (*Grundlagen...*, program Hilberta).

# Realizm teoriomnogościowy

## UWAGI HISTORYCZNE 2

- Dojrzewa potrzeba metodologicznej refleksji:
  - Kwestia standardów dowodowych w matematyce (np. Hilberta rozwiązanie problemu Gordana, dowody niekonstruktywne).
- Kwestia „granic matematyczności":
  - Np. arytmetyzacja analizy.
- Kwestia znalezienia systemu podstawowych pojęć.
- POJAWIENIE SIĘ TEORII MNOGOŚCI.

# Realizm teoriomnogościowy

## TEORIA MNOGOŚCI

- Nowe, abstrakcyjne pojęcie zbioru — w oderwaniu od natury jego elementów.
- Pojęcie zbioru: bardzo ogólne — można zrekonstruować wszystkie pojęcia matematyczne.
- Teoria mnogości — teoria podstawowa dla całej matematyki.

# Realizm teoriomnogościowy

## CZY MATEMATYKĘ MOŻNA SPROWADZIĆ DO TEORII MNOGOŚCI?

TAK:

- Pojęcie zbioru jest naturalnym i bardzo ogólnym pojęciem, pozwalającym na rekonstrukcję pojęć matematycznych;
- teoria mnogości wyznacza granice matematyczności;
- teoria mnogości pozwala na unifikację matematyki w jednolitym systemie pojęć.

NIE:

- Pojęcia matematyczne są rozumiane niezależnie od teoriomnogościowych rekonstrukcji;
- każda dyscyplina matematyczna ma swoje specyficzne pojęcia, niemające nic wspólnego z teorią mnogości;
- teoria mnogości jest nadwyżkowa w stosunku do praktyki matematycznej, „infekuje” matematykę pojęciami, których w niej nie ma.

# Realizm teoriomnogościowy

## REDUKCJA A PROBLEM REALIZMU

- JEŚLI TAK: należy przyjąć tezę realizmu mnogościowego: świat matematyczny = uniwersum mnogościowe.
  - Ale jakie. . .
- JEŚLI NIE: inna ontologia dla matematyki.
- JAKA STRATEGIA ARGUMENTACYJNA NA RZECZ REALIZMU?
  - Jeśli argumentem jest rola w naukach empirycznych — to poważny problem dla realizmu mnogościowego.

# Ernst Zermelo

## Dodatki

# Zermelo i matematycy warszawscy

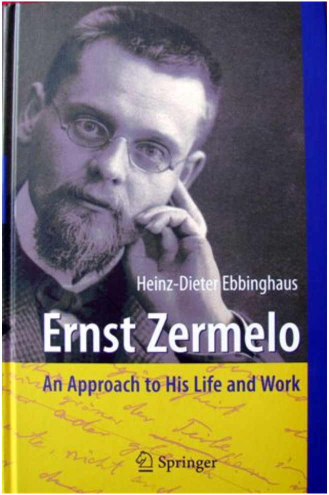
Siedzą (od lewej): Sierpiński, Zermelo, Dickstein, Przeborski.
Stoją (od lewej): Łukasiewicz, Leśniewski, Knaster, Spława-Neyman, Leja.

# Spotkanie we Lwowie


Kuratowski (1), Knaster (2), Banach (3), Stożek (4), Żyliński (5), Ruziewicz (6), Steinhaus (7), Zermelo, Mazurkiewicz (8).

# Biografia Ernsta Zermela

Polecamy znakomity tekst przedstawiający biografię oraz dokonania naukowe Ernsta Zermela:



# Dzieła zebrane Zermela

Wydawnictwo Springer przygotowuje do druku dwutomowe wydanie dzieł zebranych Ernsta Zermela.

Pierwszy tom, zawierający prace z podstaw matematyki, ma ukazać się w 2009 roku.

W przygotowaniu do druku znajduje się również polskie tłumaczenie prac Ernsta Zermela z podstaw matematyki, opracowywane przez Jerzego Pogonowskiego i Jana Zygmunta:

**„Matematyka jest logiką Nieskończonego".**

**Prace Ernsta Zermela z podstaw matematyki.**

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”