Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Funkcje

Ilościowe opisy zjawisk

- Pojęcie *funkcji* to jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. W opisach *ilościowych*, które są charakterystyczne dla współczesnej nauki, używa się powszechnie tego pojęcia.
- Funkcje są formalnymi reprezentacjami sytuacji, gdy jakaś wielkość jest w sposób jednoznaczny zależna od innych wielkości.
- Rozważa się jednak całkiem ogólne sytuacje, a więc również te, w których zależność funkcyjna nie wiąże wielkości liczbowych, lecz elementy jednego zbioru z elementami innego zbioru.
- Z funkcjami spotykamy się bardzo wcześnie w procesie edukacji – tabliczki dodawania i mnożenia charakteryzują bowiem pewne funkcje, określone dla liczb i mające wartości liczbowe.

Uwaga na intuicyjne skojarzenia!

- W zależności od kontekstu, używa się określeń: funkcja, przyporządkowanie, odwzorowanie, przekształcenie, operacja, i in.
- Należy jednak wyraźnie podkreślić, że funkcje w matematyce są pewnymi zbiorami, a dokładniej: relacjami, spełniającymi stosowne warunki jednoznaczności.
- Czasami trudno uwolnić się od różnych intuicyjnych skojarzeń, motywowanych uzusem językowym i skłaniających np. do żywienia przekonań, że funkcje są jakimiś procesami, że za ich przyczyną coś „dzieje się" z rozważanymi obiektami.
- Pewna praktyka posługiwania się funkcjami pozwala na wyzwolenie się z tego typu złudnych przeświadczeń.

Pojęcie funkcji

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazwiemy każdą taką relację między elementami zbiorów X oraz Y, która nie zawiera żadnych dwóch par uporządkowanych mających te same poprzedniki oraz różne następniki.

- Innymi słowy, f jest *funkcją* ze zbioru X w zbiór Y, jeżeli:
  1. $f \subseteq X \times Y$
  2. dla dowolnych $x \in X$ oraz $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$: jeśli $(x, y_1) \in f$ i $(x, y_2) \in f$, to $y_1 = y_2$.
- Jeśli $(x, y) \in f$, to x nazywamy *argumentem* funkcji f, zaś y nazywamy *wartością* funkcji f (dla argumentu x). Zamiast pisać $(x, y) \in f$ zwykle piszemy $f(x) = y$.

Dziedzina i przeciwdziedzina

- *Dziedziną* funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $dom(f)$ wszystkich jej argumentów, czyli zbiór tych wszystkich $x \in X$, dla których istnieje $y \in Y$ taki, że $y = f(x)$.
- *Przeciwdziedziną* (lub *zbiorem wartości*) funkcji $f \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $rng(f)$ tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$ taki, że $y = f(x)$.

- Jeśli $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją oraz jej dziedzina jest równa całemu zbiorowi X (czyli gdy $dom(f) = X$), to mówimy, że f jest określona w zbiorze X (lub: określona na zbiorze X). W takim przypadku używamy (znanego ze szkoły) zapisu $f : X \to Y$. Używa się wtedy określeń:
    1. funkcja f odwzorowuje X w Y
    2. funkcja f przekształca X w Y.

Przykłady

- Zbiór $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$ jest funkcją. Zapisujemy ją: $y = \frac{1}{x}$ lub $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy w tym przypadku: $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rng(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Relacja mniejszości $<$ liczb rzeczywistych nie jest funkcją.

- Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$, niech $\llcorner x \lrcorner$ będzie największą liczbą całkowitą, która nie przekracza x (czyli jest mniejsza lub równa x). Wtedy $\llcorner\ \lrcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Tę funkcję nazywamy funkcją *podłogi*.
- Dualna do niej jest funkcja *sufitu* $\ulcorner\ \urcorner : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą $\ulcorner x \urcorner$, która jest większa lub równa liczbie x. Dla przykładu: $\llcorner \pi \lrcorner = 3$, $\ulcorner \pi \urcorner = 4$.
- Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami są: $\{(X, \wp(X)) : X \subseteq U\}$ oraz $\{(X, X') : X \subseteq U\}$.

- Jeśli $f : X \times Y \to Z$, to argumentami funkcji f są pary uporządkowane $(x, y) \in X \times Y$, zaś jej wartościami są elementy zbioru Z. W takich przypadkach wartość funkcji f dla argumentu (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$. Mówimy też, że jest to funkcja *dwuargumentowa*. Należy przy tym pamiętać, że kolejność argumentów funkcji dwuargumentowej jest istotna.
- W całkiem podobny sposób określamy funkcje trójargumentowe, czteroargumentowe, itd. Ogólnie, mówimy, że f jest *funkcją n-argumentową* (*funkcją n zmiennych*), gdy $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$, dla pewnych zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz Y.

- Dla dowolnego ustalonego uniwersum U, funkcjami dwuargumentowymi są: $\{((X, Y), X \cup Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$ oraz $\{((X, Y), X \cap Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq Y\}$.
- Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określona wzorem: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jest trójargumentowa.

Będziemy wielokrotnie korzystać w dalszych wykładach niektórych funkcji, znanych są słuchaczom ze szkoły:

- Podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dzielenie.
- Dalsze operacje: potęgowanie, pierwiastkowanie, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna.
- Funkcje wielomianowe jednej zmiennej. W szczególności: funkcja liniowa oraz funkcja kwadratowa.
- Funkcje wymierne. Funkcja homograficzna.
- Funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens, cotangens.
- Wartość bezwzględna.

Zachęcamy słuchaczy do przypomnienia sobie definicji wymienionych rodzajów funkcji.

Wygodnie będzie przyjąć oznaczenia:

1. $\mathbb{N}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych (czyli $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$)
2. $\mathbb{Z}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych (co jest tym samym co zbiór $\mathbb{N}_+$)
3. $\mathbb{Q}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych
4. $\mathbb{R}_+$: zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

Iniekcje. Funkcja $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy różnym argumentom funkcji f przyporządkowane są różne jej wartości. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *iniekcją* ze zbioru X w zbiór Y, gdy dla dowolnych $x_1 \in X$ oraz $x_2 \in X$, jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jeśli f jest iniekcją, to mówimy, że f jest funkcją *różnowartościową*. Jeśli $f : X \to Y$ jest różnowartościowa, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

- *Surjekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy przeciwdziedziną funkcji f jest cały zbiór Y. Tak więc, $f : X \to Y$ jest *surjekcją* ze zbioru X na zbiór Y, gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Jeśli $f : X \to Y$ jest surjekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[na]{} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{na} Y$$

- *Bijekcje*. Funkcja $f : X \to Y$ jest *bijekcją* ze zbioru X na zbiór Y (albo: *bijekcją* między zbiorami X i Y), gdy f jest jednocześnie iniekcją z X w Y oraz surjekcją z X na Y. Bijekcje nazywamy funkcjami *wzajemnie jednoznacznymi* (także: $1 - 1$ funkcjami). Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{na} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

- Funkcja $f(x) = 2x + 3$ jest bijekcją z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.
- Funkcja $f(x) = x^2$ jest surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$. Nie jest ona surjekcją z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

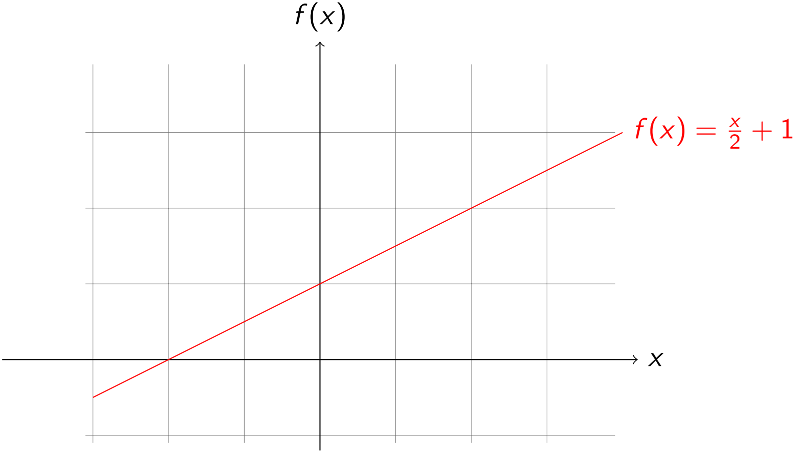
- Funkcje sufitu i podłogi są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$. Nie są surjekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Nie są bijekcjami z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$.
- Bijekcje $f : X \to X$ nazywamy również (zwłaszcza w przypadku, gdy zbiór X jest skończony) *permutacjami* zbioru X.

- Dowolną funkcję, której dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dla pewnej $n \in \mathbb{N}_+$ nazywamy *ciągiem skończonym* (o długości n). Wartości takiej funkcji nazywamy wtedy *wyrazami* tego ciągu: jej wartość dla k-tego argumentu nazywamy k-tym wyrazem ciągu. Zwykle ciągi skończone o długości n zapisujemy tak samo jak n-tki uporządkowane: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Jeśli żadne dwa wyrazy ciągu nie są identyczne, to ciąg nazywamy *różnowartościowym*.
- *Ciągiem nieskończonym* nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}_+$. Ciąg nieskończony o n-tym wyrazie równym a_n oznaczamy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ (czasem przez: $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_+}$). Często pomijamy indeks $n \in \mathbb{N}_+$, gdy kontekst na to pozwala. Czasem wyrazy ciągu indeksujemy elementami zbioru $\mathbb{N}$.

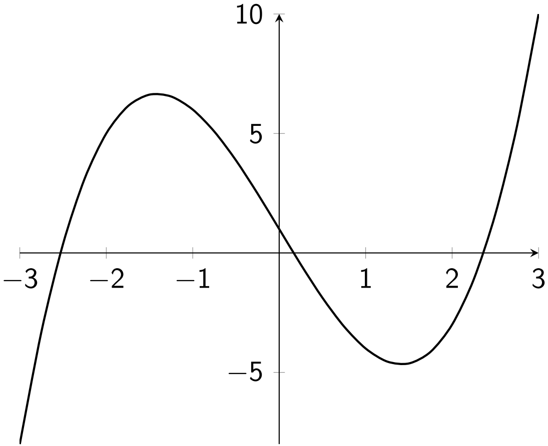
- Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy ciągami *liczbowymi*.
- Podobnie, ciągi, których wyrazami są funkcje, nazywamy ciągami *funkcyjnymi*.

- Ciąg $(\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\})$ jest skończonym (różnowartościowym) ciągiem zbiorów.
- Ciąg $(1,2,3,4,3,2,1)$ jest skończonym ciągiem liczbowym, który nie jest różnowartościowy.
- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest $a_n = \frac{1}{n}$ jest ważnym nieskończonym ciągiem liczbowym (nazywanym *ciągiem harmonicznym*), który wielokrotnie pojawi się w dalszych wykładach.
- Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest funkcja, zdefiniowana wzorem $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ jest przykładem ciągu funkcyjnego (dla $x \in \mathbb{R}$, powiedzmy).
- Ciąg $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$, którego n-tym wyrazem jest n-ta liczba pierwsza p_n jest nieskończonym ciągiem liczbowym.
- Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych traktujemy jako ciągi: zerowym elementem jest część całkowita liczby rzeczywistej, a kolejne dalsze elementy rozwinięcia mają postać $\frac{c_n}{10^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, zaś c_n jest liczbą naturalną nie większą od 10.

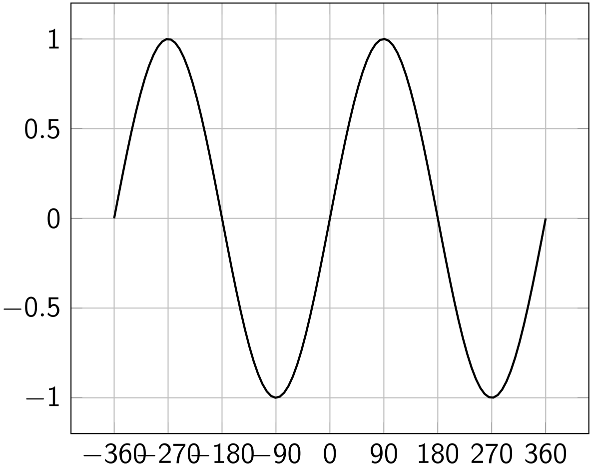
Pamiętamy, że relacje reprezentować można przez grafy. Ponieważ każda funkcja jest relacją, więc również funkcje mogą być reprezentowane przez grafy. Można również, w przypadku funkcji o dziedzinie skończonej, podawać jej reprezentację w postaci tabeli: wertykalnie – kolumna argumentów, kolumna odpowiadających im wartości (albo horyzontalnie – wiersz argumentów, wiersz odpowiadających im wartości). Bardziej rozpowszechniona jest jednak – dobrze znana słuchaczom ze szkoły – reprezentacja graficzna funkcji poprzez ich *wykresy*. Słuchacze pamiętają ze szkoły układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie. Gdy rysujemy wykres funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, to argumenty x tej funkcji tworzą *oś odciętych*, jej wartości $f(x)$ znajdują się na takim wykresie pionowo nad x na takiej wysokości, która odpowiada wartości $f(x)$. Rysujemy więc graf relacji $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Należy przy tym pamiętać, że na osi odciętych oraz osi rzędnych możemy używać różnej *skali*, co często znakomicie ułatwia zarówno rysowanie wykresów, jak też ich rozpoznawanie. Rozważmy kilka przykładów.



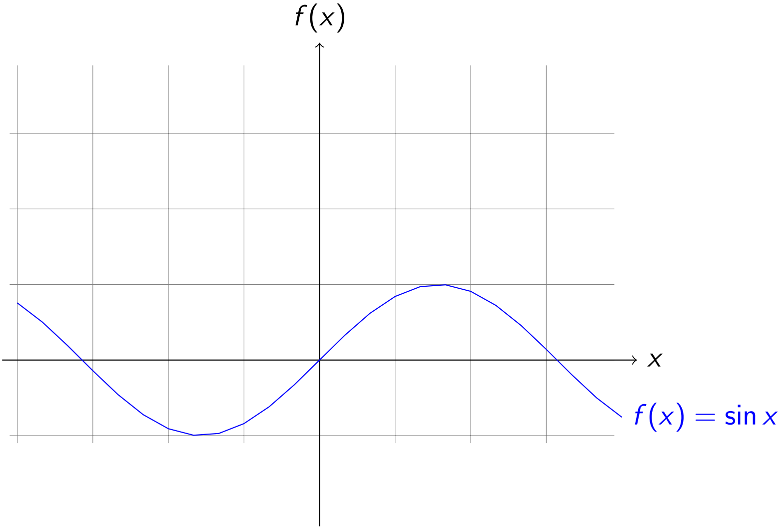
Funkcja $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych (proste pionowe i poziome przechodzą przez punkty kratowe).



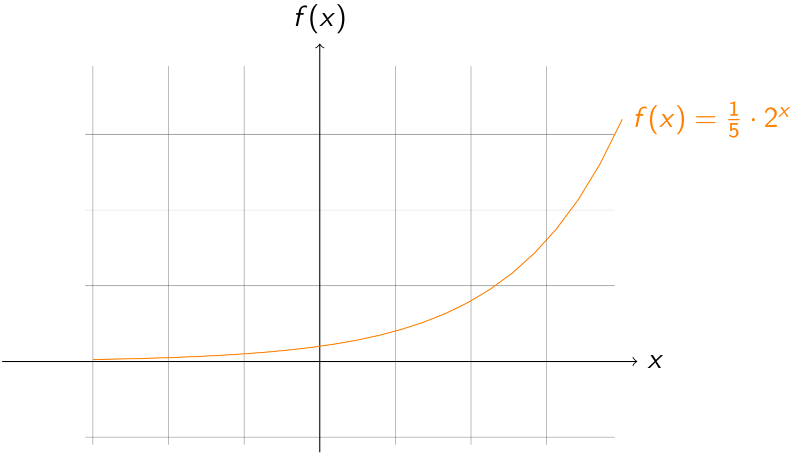
Funkcja $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + 1$. Dziedziną i przeciwdziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Zauważmy, że skala na osi odciętych jest inna niż na osi rzędnych.



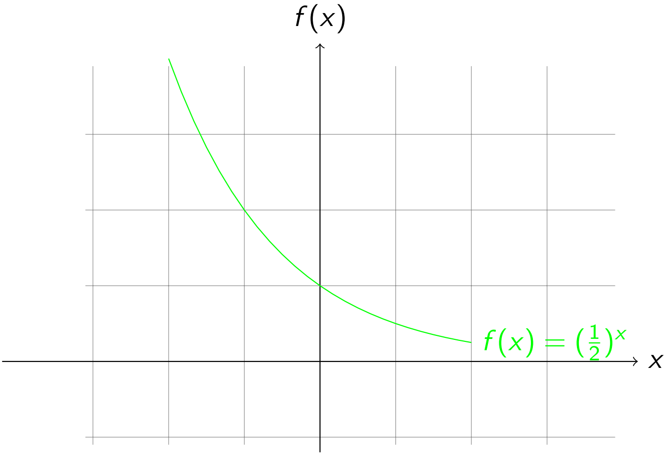
Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami funkcji są wielkości kątowe mierzone w stopniach (tutaj w zakresie od -360 do 360 stopni), a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.



Funkcja $f(x) = \sin(x)$. Argumentami tej funkcji są liczby rzeczywiste, a jej wartościami liczby rzeczywiste w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.



Funkcja $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych.



Funkcja $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych. Skala na osi odciętych jest taka sama jak na osi rzędnych.

Słuchacze znają ze szkoły pewne wykresy funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych: sferę, paraboloidę, elipsoidę, stożek, walec, itp. Przykładowe prezentacje ukazujące jak rysować takie wykresy:

1. https://www.youtube.com/watch?v=Q_NEbzFAdDE
2. https://www.youtube.com/watch?v=L3QEkUEsLbM

Narzędzia do rysowania wykresów funkcji, np.:

1. https://www.geogebra.org/
2. https://www.medianauka.pl/portal:matematyka
3. http://www.matemaks.pl/index.html
4. http://www.scilab.org/
5. http://fooplot.com/
6. https://rechneronline.de/function-graphs/
7. *MATLAB*, *Mathematica*, itp.

Obcięciem funkcji $f : X \to Y$ do zbioru $Z \subseteq X$ nazywamy funkcję $f|Z$ zdefiniowaną następująco:
$f|Z = f \cap (Z \times Y) = \{(x, y) \in f : x \in Z\}$
Jeśli funkcja g jest obcięciem funkcji f do pewnego zbioru, to f nazywamy *przedłużeniem* g. Tak więc, f jest przedłużeniem g, gdy $g = f|dom(g)$.
Złożeniem (*superpozycją*) funkcji f oraz g nazywamy funkcję $g \circ f$ zdefiniowaną następująco:

$$g \circ f = \{(x, z) \in dom(f) \times rng(g) : \text{istnieje } y \text{ taki, że } (x, y) \in f \text{ oraz } (y, z) \in g\}$$

Rozpatrując złożenie $g \circ f$, zwykle zakłada się, że $rng(f) \subseteq dom(g)$. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, zaś g jest funkcją z Y w Z, to ich złożenie, czyli $g \circ f$ jest funkcją z X w Z. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to wartość złożenia funkcji f oraz g dla argumentu $x \in dom(f)$ oznaczamy też $g(f(x))$.
Jeśli f jest funkcją różnowartościową, to zbiór $\{(y, x) : (x, y) \in f\}$ również jest funkcją, nazywaną *funkcją odwrotną* do funkcji f. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy zwykle przez f^{-1}. Tak więc, jeśli f jest funkcją z X w Y, to funkcja do niej odwrotna, czyli f^{-1} jest funkcją z Y w X.

- Obcięciem ciągu $(3, 5, 7, 9, 2, 2, 4)$ do zbioru $\{3, 4, 5\}$ jest ciąg $(7, 9, 2)$.
- Niech $f(x) = 2x + 3$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $(g \circ f)(x) = (2x + 3)^2$, natomiast $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$.

- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $(g \circ f)(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \geqslant 0$. Wtedy $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$. Zauważmy, że jeśli rozpatrujemy funkcję $f(x) = x^2$ określoną na całym zbiorze $\mathbb{R}$, to funkcja do niej odwrotna nie istnieje, ponieważ w tej dziedzinie f nie jest różnowartościowa.
- Funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej jest funkcja logarytmiczna. Jeśli $y = a^x$, to $x = \log_a y$.
- Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i jest różnowartościowa. Jest ona swoją własną funkcją odwrotną, czyli $f^{-1} = f$.

Niech X będzie dowolnym podzbiorem ustalonego uniwersum U. *Funkcją charakterystyczną* zbioru X (w tym uniwersum) nazywamy funkcję $\chi_X : U \to \{0, 1\}$, zdefiniowaną następująco:

1. Jeśli $x \in X$, to $\chi_X(x) = 1$
2. Jeśli $x \notin X$, to $\chi_X(x) = 0$.

Funkcja charakterystyczna zbioru jest zatem indykatorem przynależności elementów uniwersum do tego zbioru.

- Funkcja charakterystyczna zbioru wszystkich liczb parzystych w uniwersum $\mathbb{N}$ przyjmuje wartość 1 dla każdej liczby parzystej, a wartość 0 dla każdej liczby nieparzystej.
- Rozważmy funkcję charakterystyczną zbioru $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych w uniwersum $\mathbb{R}$. Tę funkcję nazywamy *funkcją Dirichleta*. Czy potrafisz wyobrazić sobie jak wygląda jej wykres?

Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq dom(f)$, $B \subseteq rng(f)$.

1. *Obrazem* zbioru A względem funkcji f jest zbiór: $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$.
2. *Przeciwobrazem* zbioru B względem funkcji f jest zbiór: $f^{-1}[B] = \{x \in dom(f) : f(x) \in B\}$.

- Rozważmy funkcję $f(x) = 2x$ oraz przedział otwarty $(3,4)$. Wtedy $f[(3,4)] = (6,8)$. Proponujemy sporządzić wykres. Jakieś refleksje?
- $|[\mathbb{R} - \mathbb{R}_+]| = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
- Przeciwobrazem zbioru $\{1\}$ względem funkcji Dirichleta jest zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.
- Niech $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz niech $B = (1,2)$. Wtedy $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$. Wtedy $f^{-1}[(1,2)] = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Narysuj wykres rozważanej funkcji, zaznacz na nim zbiór B i podaj interpretację geometryczną zbioru $f^{-1}[(1,2)]$.

- *Opis językowy*. Funkcja może zostać określona przepisem otrzymywania jej wartości dla ustalonych argumentów. Przepis musi gwarantować istnienie oraz jednoznaczność wartości funkcji. Tak definiujemy np. funkcje podłogi oraz sufitu.
- *Jawny wzór*. Funkcja może zostać określona w postaci jawnego wzoru, ustalającego zależność między argumentami a wartościami. Np.: funkcja liniowa, kwadratowa, potęgowa, itd. są tak właśnie definiowane.
- *Definiowanie warunkowe*. Funkcja może być określona różnymi wzorami dla różnych fragmentów swojej dziedziny. Np.: *wartość bezwzględna* $|x|$ liczby rzeczywistej x: $|x| = x$ dla $x \geqslant 0$, a $|x| = -x$ dla $x < 0$.
- *Definicje przez indukcję*. Funkcja może być określona przez *wzory rekurencyjne*, określające jej wartości dla wybranego początkowego argumentu oraz formułujące przepis, jak otrzymywać dalsze wartości, gdy obliczone są już wartości wcześniejsze. Np.: dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb naturalnych, funkcja *silnia*.

Nieśmiertelne monogamiczne kazirodcze króliki

- Mamy Pierwszą Parę królików (samca i samicę). Chcemy obliczyć, ile par królików otrzymamy po n miesiącach przy założeniu, że każda para królików rodzi co miesiąc nową parę (samca i samicę), która staje się reproduktywna po miesiącu (i natychmiast z tego korzysta).
- Nadto, króliki żyją wiecznie, są monogamiczne i kazirodcze (począwszy od drugiej pary tylko brat z siostrą dają potomstwo; Pierwsza Para też kontynuuje prokreację), oraz nie ustają w rozmnażaniu. [Jest również wersja ze śmiertelnymi królikami.]

Ciąg Fibonacciego:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

Ciąg Mosera-Steinhausa

Wprowadźmy oznaczenia (oryginalna symbolika Steinhausa była inna):

1. $\triangle(n)$ oznacza n^n
2. $\square(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n
3. $\bigstar(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\square$ dla argumentu n.

Czy potrafisz obliczyć $\bigstar(2)$?

1. $\bigstar(2) = \square(\square(2)) = \square(\triangle(\triangle(2)))$
2. $\triangle(\triangle(2)) = \triangle(2^2) = \triangle(4) = 4^4 = 256$
3. $\bigstar(2) = \square(256) = \triangle(\triangle\ldots(\triangle(256)\ldots))$, gdzie operacja $\triangle$ wykonywana jest 256 razy.

Ciąg Mosera-Steinhausa

W notacji Steinhausa argumenty były umieszczane wewnątrz wielokątów. Konstrukcję: n w m p-kątach ($p \geqslant 3$) opisuje funkcja $M(n, m, p)$:

1. $M(n, 1, 3) = n^n$
2. $M(n, 1, p + 1) = M(n, n, p)$
3. $M(n, m + 1, p) = M(M(n, 1, p), m, p)$.

Liczba ★2 (czyli 2 w pięciokącie) nazywana jest czasem *mega*, zaś 2 w mega-kącie (czyli wielokącie o mega bokach) nosi nazwę *moser*. Liczbę ★10 (czyli 10 w pięciokącie) nazywa się *megiston*:

1. mega$=M(2, 1, 5)$
2. megiston$=M(10, 1, 5)$
3. moser$=M(2, 1, M(2, 1, 5))$.

Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$:

- $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
- $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
- $f[A] - f[B] \subseteq f[A - B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f[A] \subseteq f[B]$.
- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

Jeśli $A \subseteq dom(f)$ i $B \subseteq rng(f)$, to:

- $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, $f[f^{-1}[B]] = B$, $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.
- $f[A] \cap B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$.
- $f[A] \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq f^{-1}[B]$.

- Dysponując pojęciem funkcji, możemy podać formalną definicję zbiorów skończonych oraz nieskończonych. Możemy obiecać słuchaczom, że nasza Matematyczna Przygoda Edukacyjna stanie się naprawdę frapująca od momentu, gdy zaczniemy obcować z Nieskończonością.
- Mamy wszyscy dość dobre intuicje, jeśli chodzi o *skończone* kolekcje przedmiotów, nawet jeśli tych przedmiotów jest *bardzo dużo*. Nasuwającą się charakterystyką zbiorów skończonych jest wyrażenie *liczby ich elementów* poprzez jakąś liczbę naturalną: zbiór X jest *skończony*, gdy ma n elementów, dla pewnej $n \in \mathbb{N}$. W przeciwnym przypadku X jest *nieskończony*. Taka charakterystyka zakłada, że dobrze wiemy czym jest zbiór $\mathbb{N}$.
- Zdarza się, że potrafimy *udowodnić*, że jakiś zbiór jest skończony w powyższym sensie, ale nie potrafimy określić w sposób wyraźny dokładnej liczby jego elementów. Zdarza się i tak, że potrafimy wyrazić liczbę elementów jakiegoś zbioru jako wartość stosownej funkcji liczbowej, ale dokładne wypisanie tej wartości nie jest możliwe.

Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony. Udowodnimy to metodą nie wprost. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{P}$ jest skończony. Niech zbiór ten zawiera elementy: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, itd. Liczba p_n miałaby być największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Następnie tworzymy sumę: $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Wtedy $p > p_n$. Liczba p jest bądź liczbą pierwszą, bądź liczbą złożoną. Gdyby p była liczbą złożoną, to musiałaby dzielić się bez reszty przez którąś z liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, powiedzmy przez p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. To jednak jest niemożliwe, ponieważ wtedy p_i musiałaby dzielić oba składniki sumy tworzącej p: zarówno iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, jak i liczbę 1. To jest niemożliwe, ponieważ liczba 1 nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, że p_n jest największą liczbą pierwszą. W konsekwencji, musimy odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost i otrzymujemy tezę twierdzenia. Widzimy zatem, że zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych nie jest zbiorem skończonym.

Mówimy, że zbiory X i Y są *równoliczne*, gdy istnieje bijekcja $f : X \to Y$.

- Zbiór pusty nie jest równoliczny z żadnym zbiorem niepustym.
- Zbiór wszystkich liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\{1, 2, 3\}$ nie jest równoliczny ze zbiorem $\wp(\{1, 2, 3\})$. Za chwilę zobaczymy, że *żaden* zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- Każde dwa przedziały domknięte (długości dodatniej) w zbiorze liczb rzeczywistych są równoliczne. Niech $a < b$ oraz $c < d$. Bijekcją między przedziałami $[a, b]$ oraz $[c, d]$ jest funkcja określona dla $x \in [a, b]$ następująco: $f(x) = \frac{(d-c)x+bc-ad}{b-a}$.
- Przedział otwarty $(0, 1)$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}_+$. Równoliczność tę ustala np. bijekcja określona dla $x \in (0, 1)$ następująco: $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Definicja Dedekinda. Zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest *skończony* (w sensie Dedekinda).

- Zbiór pusty jest skończony w sensie tej definicji.
- Zbiór $\{1, 2, 3\}$ jest skończony w sensie tej definicji.
- Zbiór $\mathbb{N}$ jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: zbiorem wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym $\mathbb{N}$. Stosowną bijekcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ otrzymujemy np. definiując: $f(n) = \frac{n}{2}$ dla n parzystych oraz $f(n) = -\frac{n+1}{2}$dla n nieparzystych.
- Można udowodnić, że dwie podane definicje zbiorów nieskończonych są równoważne.

Czy wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne?

Twierdzenie Cantora. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost.

- Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$: $X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$.
- Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*.
- Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Konsekwencje twierdzenia Cantora

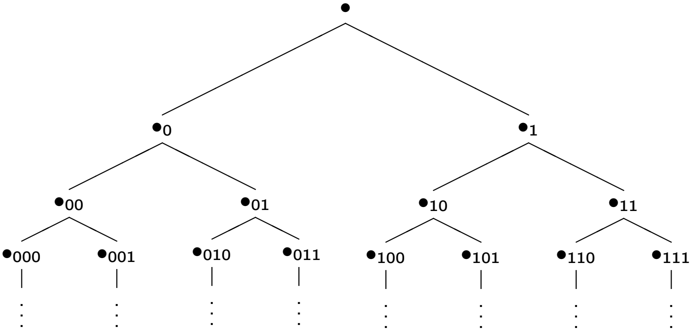
- Jednym z wniosków z tego twierdzenia jest to, że zbiór $\mathbb{N}$ nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym $\wp(\mathbb{N})$. Oznacza to, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich zbiorów liczb naturalnych.
- Innym wnioskiem jest oczywiście to, że jeśli utworzymy nieskończony ciąg zbiorów nieskończonych:

$$(\mathbb{N},\ \ \wp(\mathbb{N}),\ \ \wp(\wp(\mathbb{N})),\ \ \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))),\ldots),$$

  to żadne dwa wyrazy tego ciągu nie będą równoliczne.

Metoda użyta w dowodzie twierdzenia Cantora nazywa się *metodą przekątniową*. Wykorzystamy ją teraz do pokazania, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego.

Pełne drzewo dwójkowe



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy ciągami zer i jedynek. Jeśli jakiś wierzchołek ma kod s, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $s0$ oraz $s1$. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Czy możliwe jest ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi?

Metoda przekątniowa

- Przypuśćmy, że można ponumerować wszystkie gałęzie (czyli nieskończone ciągi zero-jedynkowe) liczbami naturalnymi (tu każda a_i^j jest zerem lub jedynką):
  $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
  $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
  $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
  $\ldots$
- Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:
  - jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
  - jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi* (czasem: *przeliczalnie nieskończonymi*). Jeśli zbiór jest skończony lub przeliczalny, to mawia się, że jest *co najwyżej przeliczalny*. Jeśli zbiór X jest nieskończony, ale nie jest przeliczalny, to mówimy, że jest *nieprzeliczalny*. Jeśli zbiór X jest równoliczny ze zbiorem $\wp(\mathbb{N})$, to mówimy, że jest on zbiorem mocy *kontinuum*.

- Zbiór wszystkich liczb parzystych jest przeliczalny. Funkcja $f(n) = 2n$ jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór wszystkich liczb parzystych.
- Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wszystkich par uporządkowanych liczb naturalnych jest przeliczalny. Jedna z bijekcji między zbiorami $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ jest wyznaczona przez *funkcję pary Cantora*: $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$. Czy widzisz jak wykorzystać ten fakt dla udowodnienia, że zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny?
- Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Jest zbiorem mocy kontinuum.

Myśl przekornie!

- Czy każda funkcja ma jakiś opis językowy?
- Czy można sporządzić wykres dowolnej funkcji?
- Co to znaczy, że jedna funkcja rośnie szybciej od drugiej?
- Czy argumentami funkcji mogą być funkcje?
- Czy wartościami funkcji mogą być funkcje?

- Ze szkoły znasz funkcję *silnia*, zdefiniowaną dla liczb naturalnych. Czy istnieje podobna do niej funkcja dla liczb rzeczywistych?
- Przypuśćmy, że Wszechświat jest skończony. Jaki jest wtedy sens mówienia o zbiorach nieskończonych?

Co musisz ZZZ (Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem)

- Definicja funkcji, argument i wartość funkcji, jej dziedzina i przeciwdziedzina, obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji.
- Iniekcje, surjekcje, bijekcje.
- Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji, funkcja charakterystyczna zbioru.
- Wykres funkcji (zmiennej rzeczywistej).
- Równoliczność zbiorów.
- Zbiory nieskończone (w sensie Dedekinda).
- Twierdzenie Cantora.
- Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Zbiory mocy kontinuum.