Funkcje rekurencyjne (10) (JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

23 maja 2007

Plan na dziś

Plan na dziś:

- przypomnienie PA;
- kodowania symboli;
- arytmetyzacja składni PA;
- relacja dowodliwości w PA.
- konstrukcja zdania Gödla dla PA.

Arytmetyka Peana

Przypomnijmy aksjomaty specyficzne Arytmetyki Peana, PA:

- $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
- $\neg(0 = S(x))$
- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x + y)$
- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
- $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

Ostatnia z tych formuł to schemat aksjomatów.
Przypomnijmy też, że modelem zamierzonym PA jest zbiór wszystkich liczb naturalnych z operacją następnika, elementem wyróżnionym 0 oraz znanymi operacjami dodawania i mnożenia.

Arytmetyzacja składni

W języku arytmetyki PA możemy „mówić" nie tylko o liczbach naturalnych (interpretacja zamierzona), lecz także o samej arytmetyce PA. Możliwość tę uzyskujemy poprzez kodowanie symboli, wyrażeń oraz ciągów wyrażeń języka PA liczbami naturalnymi.

Kodować można na wiele sposobów. Dla przykładu: niech zmienna indywiduowa x_i ma numer $2 \cdot i$, a pozostałe symbole jakieś numery nieparzyste:

- $\neg$ — 3,
- $\forall$ — 5,
- $+$ — 7,
- S — 9,
- 0 — 11,
- (— 13,
-) — 15,
- $=$ — 17, itp.

Arytmetyzacja składni

Wtedy ciągi symboli języka PA można (jednoznacznie!) kodować przez iloczyny kolejnych liczb pierwszych podniesionych do stosownych potęg. Np. kodem wyrażenia:

$$\forall x_2 \ \neg(x_2 = S(0))$$

będzie:

$$2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^{13} \cdot 11^4 \cdot 13^{17} \cdot 17^9 \cdot 19^{13} \cdot 21^{11} \cdot 23^{15} \cdot 29^{15}$$

Cóż, nie jest to mała liczba... Istotna jest jednak jedynie możliwość jednoznacznego oraz obliczalnego kodowania ciągów symboli.

Arytmetyzacja składni

Liczbę, która koduje wyrażenie języka PA (term, formułę) nazywamy numerem Gödlowskim tego wyrażenia (w skrócie: numerem).
Liczebniki to numery termów postaci: 0, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$,...
(a więc numery nazw kolejnych liczb naturalnych).
Umowa notacyjna. W dalszym ciągu, niech:

- x, y, z oznaczają zmienne indywidualne;
- m, n, r oznaczają liczby naturalne;
- $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{r}$ oznaczają liczebniki.

Kodowanie ciągów wyrażeń (np.: dowodów) odbywa się tak samo, jak kodowanie wyrażeń (iloczyny kolejnych liczb pierwszych podniesionych do potęg będącym numerami elementów ciągu). Także to kodowanie jest jednoznaczne i obliczalne.

Arytmetyzacja składni PA

Numer Gödlowski wyrażenia (termu, formuły) A będziemy oznaczać przez $\ulcorner A \urcorner$. Zamiast „numer Gödlowski" będziemy czasem krótko mówić „ng".

Nie każda liczba naturalna jest numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia języka PA.

Ważne jest to, że — jak zobaczymy za chwilę — zbiór numerów Gödlowskich wszystkich wyrażeń języka PA jest rekurencyjny.

Inaczej mówiąc, istnieje efektywna procedura, która dla dowolnej liczby naturalnej n pozwala stwierdzić, czy n jest numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia (termu, formuły), tzn. czy istnieje term lub formuła A języka PA, taki/taka, że $n = \ulcorner A \urcorner$.

Kodowania symboli

Jest wiele możliwości kodowania wyrażeń języka PA przez liczby naturalne:

- funkcja β Gödla (zob. wykład o zbiorach i relacjach rekurencyjnych i rekurencyjnie przeliczalnych);
- kodowanie Smullyana opisane w wykładzie dodatkowym;
- kodowanie w bazie dziesiętnej;
- itp.

Ważne są dwie rzeczy:

- kodowanie musi być jednoznaczne i obliczalne;
- punktem wyjścia powinien być rekurencyjny zestaw pojęć logicznych (zob. niżej).

Rekurencyjne kodowanie pojęć logicznych

Następujące pojęcia metamatematyczne są rekurencyjne:

- Zbiór ng zmiennych,
- Zbiór ng termów,
- Zbiór ng formuł,
- Relacja $podst(m, n) = r$ zachodząca, gdy r jest numerem formuły otrzymanej z formuły (o jednej zmiennej wolnej) o numerze n przez podstawienie w miejsce tej zmiennej liczebnika $\overline{m}$,
- Relacja między ng formuły a ng jej zmiennej wolnej,
- Relacja podstawialności termu za zmienną w formule,
- Relacja zachodząca między ng przesłanek i ng wniosku reguł wnioskowania PA,
- Zbiór ng aksjomatów PA,
- Relacja $dow(m, n)$ zachodząca, gdy ciąg formuł o numerze m jest dowodem formuły o numerze n.

Mocna reprezentowalność pojęć logicznych w PA

Można udowodnić, że istnieją formuły $\underline{podst}(x, y) = z$ oraz $\underline{dow}(x, y)$ języka PA takie, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n oraz r:

- jeśli $podst(m, n) = r$, to $PA \vdash \underline{podst}(\overline{m}, \overline{n}) = \overline{r}$
- jeśli nie zachodzi $podst(m, n) = r$, to $PA \vdash \neg\underline{podst}(\overline{m}, \overline{n}) = \overline{r}$
- jeśli $dow(m, n)$, to $PA \vdash \underline{dow}(\overline{m}, \overline{n})$
- jeśli nie zachodzi $dow(m, n)$, to $PA \vdash \neg\underline{dow}(\overline{m}, \overline{n})$.

Innymi słowy, formuły $\underline{podst}$ oraz $\underline{dow}$ mocno reprezentują relacje *podst* oraz *dow*, odpowiednio. Istnienie tych formuł wynika z faktu, że każda relacja rekurencyjna jest mocno reprezentowalna w PA.

Relacja dowodliwości w PA

Formuła $\exists x \; \underline{dow}(x, \overline{n})$ stwierdza, że formuła o numerze n jest twierdzeniem PA.

Zdefiniujmy relację jednoargumentową (a więc zbiór liczb naturalnych) tw:

$$tw(n) \equiv \exists x \; dow(x, n).$$

Wtedy tw jest rekurencyjnie przeliczalny.
Jest to zbiór ng wszystkich twierdzeń PA.
Ponieważ nie możemy z góry ograniczyć długości dowodów twierdzeń PA, więc kwantyfikatora egzystencjalnego w definicji tw nie możemy zastąpić kwantyfikatorem ograniczonym.

Zbiór tw nie jest zbiorem rekurencyjnym.

Uwaga na definicje!

Definicja relacji *tw*:

$$tw(n) \equiv \exists x \;\; dow(x, n).$$

podana jest w metajęzyku.

Podobnie rzecz ma się z definicjami relacji *podst* oraz *dow*.
Formuły $\underline{podst}$ oraz $\underline{dow}$, które — odpowiednio — mocno reprezentują te relacje są wyrażeniami języka PA.

W języku PA możemy zdefiniować predykat jednoargumentowy $\underline{tw}(x)$ taki, że:

$$\underline{tw}(\overline{n}) \equiv \exists x \;\; \underline{dow}(x, \overline{n}).$$

Jak wyrazić niesprzeczność PA w PA?

Jak pamiętamy z kursu logiki, teoria T jest niesprzeczna, gdy nie istnieje formuła A jej języka taka, że zarówno A jak i $\neg A$ są twierdzeniami T.
Ta definicja jest równoważna następującej: teoria T jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła jej języka nie jest twierdzeniem T.

Można udowodnić, że PA jest trafna, tj. że każde twierdzenie PA jest prawdziwe w PA.
Innymi słowy, w PA nie jest dowodliwa żadna formuła fałszywa w PA.

Dla wyrażenia **w PA** niesprzeczności PA można więc wybrać jakąś formułę fałszywą w PA.
Niech będzie nią np. formuła: $\neg \underline{tw}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$, którą oznaczymy przez Con_{PA}.

Konstrukcja zdania Gödla

Niech $\underline{god}(y)$ będzie skrótem dla formuły $\neg\exists x \;\; \underline{dow}(x, \underline{podst}(y, y))$ oraz niech n będzie numerem formuły $\underline{god}(y)$.

Wtedy: formuła $\underline{god}(\overline{n})$ stwierdza, że formuła o numerze $podst(n, n)$ nie ma dowodu.

Ale $podst(n, n)$ jest właśnie numerem formuły $\underline{god}(\overline{n})$.

Widać więc, że formuła $\underline{god}(\overline{n})$ stwierdza o sobie samej, że nie jest twierdzeniem.

Konstrukcja zdania Gödla

Co można (prawdziwie!) powiedzieć o formule $\underline{god}(\overline{n})$?

- Czy $\underline{god}(\overline{n})$ jest dowodliwa?
- Czy $\underline{god}(\overline{n})$ jest prawdziwa?

Co można (prawdziwie!) powiedzieć o formule $\neg\underline{god}(\overline{n})$?

- Czy $\neg\underline{god}(\overline{n})$ jest dowodliwa?
- Czy $\neg\underline{god}(\overline{n})$ jest prawdziwa?

Koniec

Na następnym, ostatnim wykładzie:

- odpowiemy na powyższe cztery pytania;
- pokażemy, jak rozważania dotyczące (matematycznych reprezentacji) obliczalności mogą zostać wykorzystane w pewnych innych ważnych twierdzeniach metalogicznych.