DWA PARADYGMATY METALOGIKI

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Wstęp

Niniejsza notatka zawiera nieco informacji wstępnych związanych z problematyką wykładów 1–7 *Metalogika* dla Studium Doktoranckiego Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego. Spis treści wszystkich planowanych wykładów podano w pliku:

http://www.logic.amu.edu.pl/images/b/b1/Metalogikatresc.pdf

Niniejszy tekst ma charakter kompilacyjny:

- W części pierwszej podajemy podstawowe definicje oraz informacje o wybranych twierdzeniach dotyczących *ogólnych operacji konsekwencji*; informacje te pochodzą z monografii W.A. Pogorzelskiego i P. Wojtylaka *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 2008.
- W części drugiej podajemy dowody I i II twierdzenia Lindströma, w sformułowaniach pochodzących z: Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. 1996. *Mathematical logic.* Springer.

* * *

Dwa tytułowe paradygmaty to:

- ***Paradygmat algebraiczny.*** Rozważania dotyczące ogólnych operacji konsekwencji (w sensie Tarskiego) oraz logik abstrakcyjnych (w sensie Suszki).
- ***Paradygmat semantyczny.*** Rozważania dotyczące *soft model theory* i logik abstrakcyjnych w sensie nadawanym temu terminowi przez: Mostowskiego, Lindströma, Barwise'a i in.

W szczególności, chcielibyśmy zwrócić uwagę na pewną analogię między twierdzeniami charakteryzującymi logikę klasyczną w obu paradygmatach:

- twierdzeniami Pogorzelskiego-Wojtylaka (charakteryzującymi logiki *progowe* w terminach C-definicji)
- twierdzeniami Lindströma (ukazującymi, iż własność zwartości i własność Löwenheima-Skolema charakteryzują klasyczną logikę pierwszego rzędu).

* * *

1. Paradygmat algebraiczny

1.1. Operacje konsekwencji

Niech $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_n)$ będzie algebrą ustalonego języka zdaniowego. Przez ***regułę wnioskowania*** w $\mathbf{S}$ rozumiemy dowolną relację $r \subseteq \wp(S) \times S$. Poprzedniki relacji r nazywamy ***zbiorami przesłanek*** reguły r, a jej następniki ***wnioskami*** tej reguły. Ogół reguł wnioskowania w $\mathbf{S}$ oznaczamy przez $\mathbb{R}_S$. Reguły z pustym zbiorem przesłanek nazywamy regułami ***aksjomatycznymi***. Jeśli r jest regułą wnioskowania oraz $(X, \alpha) \in r$, to parę (X, α) nazywamy ***sekwentem*** reguły r. Często używamy następującej notacji dla sekwentów danej reguły:

$$r : \frac{X}{\alpha}.$$

Najczęściej ograniczamy się do reguł wnioskowania o ***skończonych*** zbiorach przesłanek. Przypominamy, że $Fin(X)$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X, a $Fin^*(X)$ wszystkich skończonych niepustych podzbiorów zbioru X. Ponadto, zwykle wszystkie sekwenty danej reguły mają ustaloną budowę składniową; możemy wtedy regułę zapisywać w postaci schematycznej, jak np. w znanym przypadku reguły *modus ponens* (*reguły odrywania*), gdy rozważany język zawiera funktor $\rightarrow$:

$$MP : \frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}.$$

Każdą parę (R, X), gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$, a $X \subseteq S$ nazywamy ***systemem logiki zdań*** (albo: ***logiką zdaniową***). Jeśli $\mathcal{L} = (R, X)$ jest logiką zdaniową, to mówimy, że:

- R jest zbiorem ***reguł pierwotnych*** $\mathcal{L}$
- X jest zbiorem ***aksjomatów*** $\mathcal{L}$.

Odwzorowanie $C : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$ jest ***operacją konsekwencji*** (nad S) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $X, Y \subseteq S$:

- $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)
- jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)
- $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja).

Zamiast terminu *operacja konsekwencji* używamy także terminów: ***operator konsekwencji*** lub ***operacja domknięcia*** (***operator domknięcia***).

Bezpośrednio z definicji operacji konsekwencji wynika, że każda taka operacja C spełnia też warunek: $C(C(X)) = C(X)$ dla wszystkich $X \subseteq S$.

Mówimy, że operacja domknięcia C jest:

- ***finitystyczna***, gdy

$$C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \in Fin(X)\}$$

  dla wszystkich $X \subseteq S$;

- ***zwarta***, gdy dla każdego $Y \subseteq S$ istnieje $X \in Fin(Y)$ taki, że:
  jeśli $C(Y) = S$, to $C(X) = S$;

- ***niesprzeczna***, gdy $C(\emptyset) \neq S$;

- ***zupełna*** (w sensie Posta), gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdego $\alpha \notin C(\{\emptyset\})$.

Przez ***sprzeczną*** operację konsekwencji rozumiemy operację C taką, że $C(X) = S$ dla wszystkich $X \subseteq S$.

Ogół wszystkich operacji konsekwencji nad S jest częściowo uporządkowany przez relację $\leqslant$ zdefiniowaną następująco:

- $C_1 \leqslant C_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$
  dla wszystkich $X \subseteq S$.

Następujące warunki są równoważne:

- $C_1 \leqslant C_2$
- $C_2 \circ C_1 = C_2$
- $C_1 \circ C_2 = C_2$.

Dla dowolnej rodziny $\{C_t : t \in T\}$ operacji konsekwencji definiujemy operacje $\prod\limits_{t \in T} C_t$ oraz $\coprod\limits_{t \in T} C_t$:

- $(\prod\limits_{t \in T} C_t)(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$
- $(\coprod\limits_{t \in T} C_t)(X) = \bigcap\{C(X) : C_t \leqslant C$ dla wszystkich $t \in T\}$
  dla wszystkich $X \subseteq S$.

Wtedy zachodzą następujące fakty dotyczące uporządkowania ogółu konsekwencji nad S przez relację $\leqslant$:

- $\prod\limits_{t \in T} C_t$ oraz $\coprod\limits_{t \in T} C_t$ są operacjami konsekwencji.
- $(\coprod\limits_{t \in T} C_t)(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y = C_t(Y)$ dla wszystkich $t \in T\}$.

- Rodzina wszystkich operacji konsekwencji nad S jest kratą zupełną z porządkiem kratowym $\leqslant$ oraz kresami określonymi wzorami:

$$\inf\{C_t : t \in T\} = \prod_{t\in T} C_t, \qquad \sup\{C_t : t \in T\} = \coprod_{t\in T} C_t.$$

- Elementem największym w tej kracie jest konsekwencja sprzeczna. Elementem najmniejszym jest operacja Id określona wzorem $Id(X) = X$ dla wszystkich $X \subseteq S$.

- Jeśli wszystkie operacje ze zbioru $\{C_t : t \in T\}$ są finitystyczne, to operacja $\coprod_{t\in T} C_t$ też jest finitystyczna.

1.2. Systemy domknięć

Niech C będzie operacją konsekwencji nad S. Mówimy, że zbiór formuł $X \subseteq S$ jest ***C-domknięty***, gdy $X = C(X)$, czyli gdy X jest punktem stałym operacji C. Rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest jest domknięta na iloczyny, tj.:

$$C(\bigcap\{C(X_t) : t \in T\}) = \bigcap\{C(X_t) : t \in T\}.$$

Rodzina ta nie jest jednak domknięta na sumy. Przy podanych założeniach zachodzi następujący fakt:

- Jeśli C jest finitystyczna, a $\{X_t : t \in T\}$ jest $\subseteq$-łańcuchem zbiorów (formuł), to:
$$C(\bigcup\{C(X_t) : t \in T\}) = \bigcup\{C(X_t) : t \in T\}.$$

Rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest kratą zupełną (z inkluzją jako porządkiem kratowym), z elementem najmniejszym $C(\emptyset)$ oraz elementem największym S. Kresy rodzin $\{X_t : t \in T\}$ zbiorów C-domkniętych wyznaczone są wzorami:

$$\inf\{X_t : t \in T\} = \bigcap\{X_t : t \in T\},$$

$$\sup\{X_t : t \in T\} = C(\bigcup\{X_t : t \in T\}).$$

Przypominamy, że rodzina zbiorów $\mathcal{X}$ jest ***systemem domknięć***, jeśli iloczyn każdej podrodziny rodziny $\mathcal{X}$ jest elementem $\mathcal{X}$.

Widzimy więc, że rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest systemem domknięć, dla dowolnej operacji konsekwencji C. Zachodzi także implikacja odwrotna: dowolny system domknięć wyznacza pewną operację konsekwencji. Jeśli mianowicie $\mathcal{X}$ jest systemem domknięć (rodziną podzbiorów zbioru S, domkniętą na iloczyny), to definiujemy:

$$C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{X} : X \subseteq Y\},$$

dla dowolnego $X \subseteq S$. Można sprawdzić, że tak określona funkcja C jest operacją konsekwencji.

1.3. Zbiory niesprzeczne, maksymalne, aksjomatyzowalne i niezależne

Powiemy, że zbiór $X \subseteq S$ jest:

- C-***niesprzeczny***, gdy $C(X) \neq S$;
- C-***maksymalny***, gdy X jest C-niesprzeczny oraz $C(X \cup \{\alpha\}) = S$ dla każdego $\alpha \notin C(X)$;
- C-***aksjomatyzowalny***, gdy istnieje skończony zbiór Y taki, że $C(X) = C(Y)$;
- C-***niezależny***, gdy $\alpha \notin C(X - \{\alpha\})$, dla każdego $\alpha \in X$.

Oto niektóre własności tych pojęć:

- Jeśli X jest zbiorem C-maksymalnym, to $C(X)$ jest elementem $\subseteq$-maksymalnym w rodzinie wszystkich zbiorów C-domkniętych i C-niesprzecznych.
- Jeśli C jest finitystyczna, to żaden nieskończony zbiór C-niezależny nie jest C-aksjomatyzowalny.
- Jeśli istnieje zbiór, który nie jest C-aksjomatyzowalny, to to rodzina wszystkich C-aksjomatyzowalnych i C-domkniętych zbiorów jest nieskończona.
- Jeśli X jest C-niezależny, to dla dowolnych $Y, Z \subseteq X$: $Y \subseteq Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(Y) \subseteq C(Z)$.

Konsekwencją tych własności są m.in. następujące ustalenia dotyczące mocy pewnych rodzin zbiorów dla finitystycznej operacji konsekwencji C nad przeliczalnym językiem S, dla której istnieje nieskończony zbiór C-niezależny:

- Istnieje kontinuum zbiorów o postaci $C(X)$.
- Istnieje przeliczalnie wiele zbiorów o postaci $C(X)$, gdzie X jest zbiorem skończonym.
- Istnieje kontinuum zbiorów o postaci $C(X)$, gdzie $C(X)$ nie jest C-aksjomatyzowalny.

1.4. Operacje konsekwencji wyznaczone przez reguły wnioskowania

Oprócz rozważań dotyczących operacji konsekwencji pojmowanych całkiem ogólnie, w myśl podanej uprzednio definicji, interesujące i ważne jest badanie operacji konsekwencji wyznaczonej przez zespół reguł wnioskowania (oraz, ewentualnie, zestaw aksjomatów). W praktyce, gdy mówimy o wnioskach uzyskanych z jakiegoś zbioru przesłanek, zazwyczaj odwołujemy się do *metod*, za pomocą których wnioski te można uzyskać: zazwyczaj są to po prostu stosowne reguły wnioskowania. Ponadto, jak zobaczymy za chwilę, *każda* operacja konsekwencji może zostać przedstawiona jako operacja konsekwencji generowana poprzez pewien zestaw reguł wnioskowania (oraz, ewentualnie, zestaw aksjomatów).

Niech $Cld(R, X)$ oznacza, że zbiór formuł X jest ***domknięty na wszystkie reguły ze zbioru*** R: $Cld(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall r \in R)(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)(((P, \alpha) \in r \wedge P \subseteq X) \Rightarrow \alpha \in X).$$

UWAGA. Proszę odróżniać symbol implikacji $\rightarrow$ w KRZ od używanego tu metajęzykowego symbolu $\Rightarrow$. Symbolu $\wedge$ również używamy tu metajęzykowo.

Dla dowolnych: $X \subseteq S$ oraz $R \subseteq \mathbb{R}_S$ niech:

$$C_R(X) = \bigcap \{Y \subseteq S : X \subseteq Y \text{ oraz } Cld(R, Y)\}.$$

Wtedy $C_R(X)$ jest $\subseteq$-najmniejszym zbiorem zawierającym X i domkniętym na wszystkie reguły z R. Zachodzą następujące fakty:

- Dla dowolnych: $X \subseteq S$ oraz $R \subseteq \mathbb{R}_S$: $C_R(X) = X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(R, X)$.
- Załóżmy, że rozważamy jedynie reguły o skończonych zbiorach przesłanek. Wtedy: $\alpha \in C_R(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formalny *dowód* α na gruncie systemu o założeniach X i regułach wnioskowania R, czyli gdy istnieje skończony ciąg formuł $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczna z α_n oraz dla wszystkich $i \leqslant n$: albo $\alpha_i \in X$, albo $(P, \alpha_i) \in r$ dla pewnych $r \in R$ oraz $P \subseteq S$.

Każda para o postaci (R, X), gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$ pozwala określić pewną operację $C_{R,X}$ konsekwencji nad S:

$$C_{R,X}(Y) = C_R(X \cup Y).$$

Operacja $C_{R,X}$ jest finitystyczna, jeśli zbiór X jest pusty. Dla $X = \emptyset$ będziemy zamiast $C_{R,X}$ pisali po prostu C_R.

Każda finitystyczna operacja konsekwencji może zostać przedstawiona w postaci $C_{R,X}$. Zachodzi mianowicie następujący fakt:

- Dla każdej finitystycznej operacji konsekwencji C istnieją: zbiór $X \subseteq S$ oraz zbiór $R \subseteq \mathbb{R}_S$ takie, że $C = C_{R,X}$.

Również dowolne operacje konsekwencji (bez zakładania skończoności zbiorów ich przesłanek) można reprezentować przez reguły:

- Dla każdej operacji konsekwencji C istnieje zbiór $R \subseteq \mathbb{R}_S$ taki, że $C = C_R$.

Jeśli $C = C_{R,X}$, to parę (R, X) nazywamy ***bazą*** dla C. Zauważmy, że:

- dana operacja konsekwencji może mieć wiele różnych baz;
- każda para (R, X) *jednoznacznie* wyznacza operację konsekwencji $C_{R,X}$.

Operacje konsekwencji wyznaczone przez reguły możemy też definiować indukcyjnie. Niech R będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w **S**. Przez ***operację konsekwencji w*** **S** ***wyznaczoną przez*** R rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \rightarrow 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X:

- (1) $C_R^0(X) = X$
- (2) $C_R^{k+1}(X) = C_R^k(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists r \in R)(\exists P \subseteq C_R^k(X))\ (P, \alpha) \in r\}$
- (3) $C_R(X) = \bigcup\{C_R^k(X) : k \in \omega\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_R(X)$ czytamy: α jest ***wyprowadzalna*** z X za pomocą reguł należących do R. Ta notacja jest zgodna z wprowadzoną poprzednio.

1.5. Reguły dopuszczalne i reguły wyprowadzalne

Zbiór Adm(R, X) wszystkich reguł ***dopuszczalnych*** ze względu na X i R definiujemy następująco:
$r \in$ Adm(R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$ i $P \subseteq C_R(X)$, to $\alpha \in C_R(X)$.

Zbiór Der(R, X) wszystkich reguł ***wyprowadzalnych*** ze względu na X i R definiujemy następująco:
$r \in$ Der(R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$, to $\alpha \in C_R(X \cup P)$.

Zachodzą następujące fakty, dla każdego $R \subseteq \mathbb{R}_S$ oraz $X \subseteq S$:

- $r \in$ Adm(R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(\{r\}, C_R(X))$;
- $r \in$ Der(R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(\{r\}, C_R(X \cup Y))$, dla wszystkich $Y \subseteq S$.

Możemy zatem stwierdzić, że:

- reguła dopuszczalna ze względu na R i X nie wyprowadza poza formuły dowodliwe na podstawie (R, X);
- reguła r jest wyprowadzalna z R oraz X wtedy i tylko wtedy, gdy r jest dopuszczalna w każdym nadsystemie systemu (R, X), czyli

  $$\text{Der}(R, X) = \bigcap\{\text{Adm}(R, X \cup Y) : Y \subseteq S\}.$$

  Stąd, każda reguła wyprowadzalna z (R, X) jest też dopuszczalna dla (R, X). Inkluzja odwrotna nie zachodzi.

Mówimy, że para (R, X) jest ***podsystemem*** (R_1, X_1) (i piszemy wtedy $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $X \subseteq C_{R_1}(X_1)$ oraz
- $R \subseteq \text{Der}(R_1, X_1)$.

Jeśli $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$, to:

- $\text{Der}(R, X) \subseteq \text{Der}(R_1, X_1)$
- $C_R(X) \subseteq C_{R_1}(X_1)$.

Widzimy zatem, że formuły i reguły wyprowadzalne w podsystemie danego systemu, są również wyprowadzalne w tym systemie. Z faktu, że $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ nie wynika jednak ani inkluzja $\text{Adm}(R, X) \subseteq \text{Adm}(R_1, X_1)$, ani inkluzja do niej odwrotna.

Jeśli X oraz X_1 są niepuste, to: $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Der}(R, X) \subseteq \text{Der}(R_1, X_1)$.

Relacja $\preccurlyeq$ jest zwrotna i przechodnia. Wyznacza zatem relację równoważności $\approx = \preccurlyeq \cap (\preccurlyeq)^{-1}$. Jeśli $(R, X) \approx (R_1, X_1)$, to:

- $\text{Der}(R, X) = \text{Der}(R_1, X_1)$;
- $C_R(X) = C_{R_1}(X_1)$;
- $\text{Adm}(R, X) = \text{Adm}(R_1, X_1)$.

Jeśli X oraz X_1 są niepuste, to $(R, X) \approx (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Der}(R, X) = \text{Der}(R_1, X_1)$.

Zachodzą następujące fakty:

- $(R, X) \approx (\text{Der}(R, X), X)$
- $(\text{Der}(R, X), X) \approx (R, C_R(X))$
- $(R, C_R(X)) \approx (\text{Der}(R, X), C_R(X))$
- $(\text{Der}(R, X), C_R(X)) \preccurlyeq (\text{Adm}(R, X), X)$
- $(\text{Adm}(R, X), X) \approx (\text{Adm}(R, X), C_X(X))$.

Będziemy używać symbolu $\prec$ dla $\preccurlyeq - (\preccurlyeq)^{-1}$.

Zachodzą następujące fakty, dla dowolnych $X, X_1 \subseteq S$ oraz $R, R_1 \subseteq \mathbb{R}_S$:

- $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R,X} \leqslant C_{R_1,X_1}$;
- $(R, X) \approx (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R,X} = C_{R_1,X_1}$.

W świetle powyższego (oraz pamiętając o tym, że każda operacja konsekwencji może zostać przedstawiona w postaci operacji konsekwencji wyznaczonej przez reguły wnioskowania), porządek kratowy $\leqslant$ w kracie wszystkich operacji konsekwencji może być uważany za generowany poprzez porządek $\preccurlyeq$.

Pojęcia: reguły wyprowadzalnej i reguły dopuszczalnej (sformułowane dla systemów o postaci (R, X)) mogą też (również na mocy powyższego) zostać wyrażone w terminach operacji konsekwencji:

- $r \in \mathrm{DER}(C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(P)$, dla wszystkich $(P, \alpha) \in r$;
- $r \in \mathrm{ADM}(C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $P \subseteq C(\emptyset)$, to $\alpha \in C(\emptyset)$, dla wszystkich $(P, \alpha) \in r$.

Wśród wszystkich systemów, generujących daną operację konsekwencji rolę wyróżnioną pełni system $(\mathrm{DER}(C), C(\emptyset))$, nazywany ***systemem domkniętym*** logiki zdaniowej.

Dla porządku kratowego $\preccurlyeq$ definiujemy kresy rodzin $\{(R_t, X_t) : t \in T\}$:

- $\prod\limits_{t \in T} (R_t, X_t) = (\bigcap\limits_{t \in T} \mathrm{Der}(R_t, X_t), \bigcap\limits_{t \in T} C_{R_t}(X_t))$;
- $\coprod\limits_{t \in T} (R_t, X_t) = (\bigcup\limits_{t \in T} R_t, \bigcup\limits_{t \in T} X_t)$.

Wtedy $\prod\limits_{t \in T} (R_t, X_t)$ jest systemem domkniętym, czyli:

- $\mathrm{Der}(\prod\limits_{t \in T} (R_t, X_t)) = \bigcap\limits_{t \in T} \mathrm{Der}(R_t, X_t)$;
- $C(\prod\limits_{t \in T} (R_t, X_t)) = \bigcap\limits_{t \in T} C_{R_t}(X_t)$.

1.6. Reguły strukturalne

Jak pamiętamy z elementarnego kursu logiki, *reguła podstawiania* (formuł za zmienne zdaniowe w KRZ) ma bardzo szczególny charakter: odwołujemy się w niej do pewnej (algebraicznej) operacji, inaczej niż w przypadku reguł w rodzaju np. *modus ponens*, gdzie odwołujemy się jedynie do własności syntaktycznych (kształtu przesłanek oraz wniosku). Obecnie poznamy pewną własność reguł wnioskowania, związaną z podstawieniami.

Przypominamy, że At oznacza zbiór formuł atomowych (zmiennych zdaniowych) rozważanego języka. Pamiętamy, że każde *podstawienie*, czyli odwzorowanie $e : At \to S$ może w sposób jednoznaczny zostać rozszerzone do endomorfizmu $h^e : S \to S$. Z tego powodu, wynik (jednoczesnego) podstawienia w formule α wyznaczonego przez wartości $e(p_i) = \gamma_i$, dla wszystkich zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$ występujących w α może być poprawnie oznaczany przez $\alpha[p_1/\gamma_1, \ldots, p_n/\gamma_n]$. Rozumie się przez to, że $h^e(\alpha) = \alpha[p_1/\gamma_1, \ldots, p_n/\gamma_n]$.

Możemy teraz podać precyzyjną definicję ***reguły podstawiania*** r_* w S:

- $(\{\alpha\}, \beta) \in r_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = h^e(\alpha)$, dla pewnego podstawienia $e : At \to S$.

Reguła r_* określona może także być poprzez schemat:

- $r_* : \quad \frac{\alpha}{h^e(\alpha)}$, dla wszystkich $\alpha \in S$ oraz wszystkich $e : At \to S$.

Operacja konsekwencji wyznaczona przez regułę podstawiania jest oznaczana przez Sb. Tak więc, dla każdego $X \subseteq S$:

$$Sb(X) = C_{\{r_*\}}(X) = \{\alpha : \alpha \in h^e(X) \text{ dla pewnego } e : At \to S\}.$$

Powiemy, że reguła $r \in \mathbb{R}_S$ jest ***strukturalna***, co zapisujemy $r \in$ Struct, wtedy i tylko wtedy, gdy:

- jeśli $(P, \alpha) \in r$, to $(h^e(P), h^e(\alpha)) \in r$, dla wszystkich $e : At \to S$.

Zwykle rozważane reguły KRZ są strukturalne, oprócz reguły podstawiania.

Precyzyjna definicja reguł strukturalnych jest prosta, jak widzieliśmy. Trudniej oddać w języku potocznym tzw. intuicje związane z tymi regułami. W.A. Pogorzelski w *Elementarnym słowniku logiki formalnej* (s. 416) pisze:

> Bardzo ogólnikowo można przedstawić strukturalność reguł jako stosowalność do wszelkich przesłanek o ustalonej strukturze wyznaczonej na ogół ich funktorem głównym.

Powiemy, że system (R, X) (gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$, $X \subseteq S$) jest ***niezmienniczy*** (co zapisujemy: $(R, X) \in$ Inv), jeśli:

- $R \subseteq$ Struct oraz $X = Sb(X)$.

Jeśli $R \subseteq$ Struct, to $(R \cup \{r_*\}, X)$ nazywamy systemem ***podstawieniowym***.

Powiemy, że sekwent (P, α) jest ***sekwentem bazowym*** reguły r wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$r = \{(h^e(P), h^e(\alpha)) : \text{ dla wszystkich podstawień } e\}.$$

Reguły, które posiadają sekwent bazowy, nazywane są regułami ***standardowymi***. Każda reguła standardowa r może zostać przedstawiona w postaci:

$$r = \bigcup\{r' : r' \subseteq r \text{ oraz } r' \text{ jest standardowa}\}.$$

Każda reguła standardowa jest strukturalna (lecz nie na odwrót). Przykładem reguły strukturalnej, która nie jest standardowa jest reguła r_X, dla każdego $X \subseteq S$:

- $(P, \alpha) \in r_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $h^e(P) \subseteq X$, to $h^e(\alpha) \in X$, dla wszystkich podstawień e.

Z wielu względów warto rozważać pojęcie strukturalności zrelatywizowane do pewnego zbioru $\Gamma \subseteq S$. Definiujemy:

- $r_*|\Gamma$: $\quad \frac{\alpha}{h^e(\alpha)}$, $\quad$ dla wszystkich $\alpha \in S$ oraz $e : At \to \Gamma$.

Dalej, definiujemy: $Sb_\Gamma(X) = C_{\{r_*\}|\Gamma}(X)$. Zachodzą następujące fakty:

- $r_*|S = r_*$
- $Sb_S = Sb$

- $r_*|\emptyset = \emptyset$
- $Sb_\emptyset(X) = X$, dla wszystkich $X \subseteq S$
- $Sb_\Gamma(X \cup Y) = Sb_\Gamma(X) \cup Sb_\Gamma(Y)$, dla wszystkich $X, Y \subseteq S$.

Mówimy, że reguła r jest Γ-***strukturalna*** (co zapisujemy: $r \in$ Struct(Γ)), gdy:

- jeśli $(P, \alpha) \in r$, to $(h^e(P), h^e(\alpha)) \in r$, dla wszystkich $e : At \rightarrow \Gamma$.

Mówimy, że system (R, X) jest Γ-***niezmienniczy*** ($(R, X) \in$ Inv(Γ)) wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $R \subseteq$ Struct oraz $X = Sb_\Gamma(X)$.

Zachodzą następujące fakty:

- $(R, X) \in$ Struct wtedy i tylko wtedy, gdy $(R, X) \in$ Struct(S).
- $(R, X) \in$ Inv wtedy i tylko wtedy, gdy $(R, X) \in$ Inv(S).
- Wszystkie reguły (nad S) są $\emptyset$-strukturalne.
- $(R, X) \in$ Inv($\emptyset$) dla wszystkich $R \subseteq \mathbb{R}_S$ oraz $X \subseteq S$.
- Dla każdych Γ_1, Γ_2: jeśli $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, to Struct($\Gamma_2$) $\subseteq$ Struct(Γ_1).
- Dla każdych Γ_1, Γ_2: jeśli $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, to Inv($\Gamma_2$) $\subseteq$ Inv(Γ_1).
- Dla każdego $\Gamma \subseteq S$: Struct $\subseteq$ Struct(Γ) $\subseteq \mathbb{R}_S$.
- Dla każdego $\Gamma \subseteq S$: Inv $\subseteq$ Inv(Γ) $\subseteq$ Inv($\emptyset$).
- Jeśli $R \subseteq$ Struct(Γ) oraz $X \subseteq S$, to $h^e(C_R(X)) \subseteq C_R(h^e(X))$, dla wszystkich $e : At \rightarrow \Gamma$.
- Jeśli $R \subseteq$ Struct(Γ) oraz $X, Y \subseteq S$, to
  $h^e(C_R(Sb_\Gamma(X) \cup Y)) \subseteq C_R(Sb_\Gamma(X) \cup h^e(Y))$, dla wszystkich $e : At \rightarrow \Gamma$.

Ostatni z powyższych faktów można wykorzystać dla redukcji reguły podstawiania do zbioru aksjomatów:

- Jeśli $R \subseteq$ Struct(Γ) oraz $X \subseteq S$, to:

$$C_{R \cup \{r_*|\Gamma\}}(X) = C_R(Sb_\Gamma(X)).$$

Dowód tego twierdzenia podaje monografia Pogorzelskiego i Wojtylaka (s. 29). Niektóre konsekwencje tego twierdzenia to:

- Dla każdych $R \subseteq$ Struct(Γ) oraz $X \subseteq S$:

$$Sb_\Gamma(C_R(X)) \subseteq C_R(Sb_\Gamma(X)).$$

- Jeśli (R, X) jest Γ-niezmienniczy, to jest domknięty na regułę $r_*|\Gamma$.
- $r_*|\Gamma \in$ Adm$(R, Sb_\Gamma(X))$.
- Jeśli $R \subseteq$ Struct(Γ), $r \in \mathbb{R}_S$ oraz $X \subseteq S$, to: $r \in$ Der$(R \cup \{r_*|\Gamma\}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r \in$ Adm$(R, Sb_\Gamma(X) \cup Sb_\Gamma(Y))$, dla wszystkich $Y \subseteq S$.

Zachodzi następujący fakt dotyczący reguły podstawiania:

- Dla wszystkich $R \subseteq$ Struct oraz $X \subseteq S$:
  1) $r_* \in$ Adm$(R, Sb(X))$
  2) $r_* \notin$ Der$(R, Sb(X))$, jeśli $\emptyset \neq C_R(X) \neq S$.

Jeśli system (R, X) jest niezmienniczy, to dodanie reguły podstawiania do zbioru R nie zmienia zbioru formuł wyprowadzalnych w (R, X). Systemy (R, X) oraz $(R \cup \{r_*\}, X)$ nie są jednak równoważne. Systemy logiczne przedstawiać możemy w dwóch, nierównoważnych wersjach:

- niezmienniczej $(R, Sb(X))$, gdzie $R \subseteq$ Struct
- podstawieniowej $(R \cup \{r_*\}, X)$.

Pojęcia: Γ-strukturalności oraz Γ-niezmienniczości mogą zostać odniesione do operacji konsekwencji:

- C jest ***Γ-strukturalna*** (symbolicznie: $C \in$ STRUCT(Γ)), jeśli
  $h^e(C(X)) \subseteq C(h^e(X))$, dla wszystkich $X \subseteq S$ oraz $e : At \to \Gamma$
- C jest ***strukturalna*** (symbolicznie: $C \in$ STRUCT), jeśli
  $h^e(C(X)) \subseteq C(h^e(X))$, dla wszystkich $X \subseteq S$ oraz $e : At \to S$.

Każdy Γ-niezmienniczy system (R, X) wyznacza Γ-strukturalną operację konsekwencji $C_{R,X}$. Ponadto, każda Γ-strukturalna operacja konsekwencji jest generowana przez pewien system Γ-niezmienniczy.

Rodzina wszystkich strukturalnych (Γ-strukturalnych) operacji konsekwencji tworzy podkratę zupełną kraty wszystkich operacji konsekwencji nad S, gdzie kresami dowolnej rodziny $\{C_t : t \in T\}$ strukturalnych (Γ-strukturalnych) operacji konsekwencji są: $\prod_{t \in T} C_t$ oraz $\coprod_{t \in T} C_t$.

1.7. Operacje konsekwencji a relacje konsekwencji

Ogólna (finitystyczna) ***relacja konsekwencji*** $\vdash \subseteq 2^S \times S$ w S określona jest dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ przez warunki:

- ($\vdash$ 1) $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$
- ($\vdash$ 2) jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$

- ($\vdash$ 3) jeśli dla każdej $\beta \in Y$ $X \vdash \beta$ oraz $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$
- ($\vdash$ 4) jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje Y taki, że: $Y \in Fin(X)$ oraz $Y \vdash \alpha$.

Operacje i relacje konsekwencji są wzajemnie przez siebie definiowalne:

$$(\bigstar) \quad X \vdash_C \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \in C_\vdash(X)$$

(tj. dla każdej $\vdash$ istnieje $C_\vdash$ taka, że ($\bigstar$), a także dla każdej C istnieje $\vdash_C$ taka, że ($\bigstar$)).

Powyższa zależność ($\bigstar$) może być zapisana także w takiej postaci:

- Jeśli C jest operacją konsekwencji, to definiujemy relację konsekwencji $\vdash_C$:
  $X \vdash_C \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(X)$;
- Jeśli $\vdash$ jest relacją konsekwencji, to definiujemy operację konsekwencji $C_\vdash$:
  $\alpha \in C_\vdash(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash \alpha$.

Twierdzenia dotyczące operacji konsekwencji przekładają się zatem na twierdzenia dotyczące relacji konsekwencji i na odwrót.

1.8. Kilka ważnych przykładów

Zwykle w charakterze ważnych przykładów logik zdaniowych rozważa się logiki następujące:

- logikę *intuicjonistyczną*
- logikę *klasyczną*
- logiki *modalne*
- logiki *wielowartościowe* (Łukasiewicza).

Zobaczmy zatem, jak powyższe systemy logiczne opisywane są w terminach operacji konsekwencji.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA.

Językiem tej logiki jest standardowy język $\mathcal{S}_2 = (S_2, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg)$. Niech A_{int} będzie następującym zbiorem aksjomatów:

- (1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- (2) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- (3) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$
- (4) $p \rightarrow (p \vee q)$

- (5) $q \to (p \vee q)$
- (6) $(p \to s) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$
- (7) $(p \wedge q) \to p$
- (8) $(p \wedge q) \to q$
- (9) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$
- (10) $p \to (\neg p \to p)$
- (11) $(p \to \neg p) \to \neg p$.

oraz niech $R_{0*} = \{r_0, r_*\}$, gdzie r_0 jest regułą *modus ponens*, a r_* regułą podstawiania w S_2. Wtedy (R_{0*}, A_{int}) jest systemem ***intuicjonistycznej logiki zdaniowej***. W wersji niezmienniczej logika intuicjonistyczna jest systemem $(R_0, Sb(A_{int}))$, gdzie $R_0 = \{r_0\}$. Jak pamiętamy, na podstawie własności operacji Sb oraz reguły podstawiania: $C_{R_{0*}}(A_{int}) = C_{R_0}(Sb(A_{int}))$.

Niech C^{int} będzie operacją konsekwencji generowaną przez system $(R_0, Sb(A_{int}))$. Mamy zatem dla każdego $X \subseteq S_2$:

$$C^{int}(X) = C_{R_0}(Sb(A_{int}) \cup X).$$

W systemie tym zachodzi twierdzenie o dedukcji:

- Dla dowolnych $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$:
  $\beta \in C^{int}(X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \to \beta) \in C^{int}(X)$.

Twierdzenie o dedukcji charakteryzuje implikację. Pozostałe funktory logiki intuicjonistycznej są charakteryzowane następująco (formuła $\alpha \equiv \beta$ jest skrótem dla formuły $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$):

- $C^{int}(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha, \beta\})$
- $C^{int}(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\})$
- $(\alpha \equiv \beta) \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = C^{int}(X \cup \{\beta\})$
- $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = S_2$.

Otrzymujemy stąd, że w logice intuicjonistycznej wyprowadzalna jest reguła ***dodawania koniunkcji*** r_a:

$$r_a : \quad \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}, \text{ dla wszystkich } \alpha, \beta \in S_2.$$

Zachodzą także następujące fakty:

- $\alpha \to \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.
- $\alpha \vee \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.

- $\alpha \wedge \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cup C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.
- $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_2 \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.

Nadto, C^{int} jest najmniejszą operacją konsekwencji nad S_2, która spełnia powyższe cztery warunki.

Będziemy odwoływać się też (ale nie w tej notce) do pewnych fragmentów logiki intuicjonistycznej (logiki pozytywnej Hilberta, czysto implikacyjnej logiki Hilberta).

LOGIKA KLASYCZNA.

Niech A_2 będzie zbiorem aksjomatów logiki intuicjonistycznej powiększonym o aksjomat $\neg\neg p \rightarrow p$. Przez ***klasyczną logikę zdaniową*** rozumiemy system $(R_0, Sb(A_2))$ (lub: (R_{0*}, A_2)). Definiujemy operację konsekwencji Cn_2:

$$Cn_2(X) = C_{R_0}(Sb(A_2) \cup X).$$

Wprost z definicji zbiorów aksjomatów dla logiki intuicjonistycznej i logiki klasycznej (oraz z monotoniczności operacji konsekwencji) widać, że $C_{R_{0*}}(A_{int}) \subseteq C_{R_{0*}}(A_2)$.

Zachodzą następujące fakty:

- $(\alpha \rightarrow \beta) \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in Cn_2(X \cup \{\alpha\})$.
- $Cn_2(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = Cn_2(X \cup \{\alpha, \beta\}$.
- $Cn_2(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = Cn_2(X \cup \{\alpha\} \cap Cn_2(X \cup \{\beta\}$.
- $\neg\alpha \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn_2(X \cup \{\alpha\}) = S_2$.
- $\alpha \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn_2(X \cup \{\neg\alpha\}) = S_2$.

Ponieważ, jak można wykazać:

- operacja konsekwencji wyznaczona przez $(R_0, Sb(A_2))$ jest największą strukturalną oraz niesprzeczną operacją konsekwencji spełniającą powyższe pięć warunków;
- $(R_0, Sb(A_2))$ jest najmniejszym systemem spełniającym powyższe pięć warunków,

więc warunki te jednoznacznie określają klasyczną logikę zdaniową, czyli następujące warunki są równoważne:

- Niesprzeczny niezmienniczy system (R, A) spełnia powyższe pięć warunków.
- $(R, A) \approx (R_0, Sb(A_2))$.

LOGIKA MODALNA $S5$.

Niech A_{S5} będzie następującym systemem aksjomatów:

- (1) $(p \to (q \to s)) \to ((p \to q) \to (p \to s))$
- (2) $(s \to t) \to (q \to (s \to t))$
- (3) $(p \wedge q) \to p$
- (4) $(p \wedge q) \to p$
- (5) $(p \to q) \to ((p \to s) \to (p \to (q \wedge s)))$
- (6) $p \to (p \vee q)$
- (7) $q \to (p \vee q)$
- (8) $(p \to q) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$
- (9) $\neg(s \to t) \to ((s \to t) \to q)$
- (10) $(p \wedge \neg p) \to q$
- (11) $(p \to \neg p) \to \neg p$
- (12) $(p \wedge \neg(p \wedge q)) \to \neg q$
- (13) $(p \to \neg\neg p) \wedge (\neg\neg p \to p)$.

System modalny $S5$ jest wyznaczone przez te aksjomaty oraz reguły:

- r_0 *modus ponens*
- r_* podstawiania
- r_a dodawania koniunkcji.

Oznaczamy: $R_{0a*} = \{r_0, r_a, r_*\}$ oraz $R_{0a} = \{r_0, r_a\}$.
Twierdzenie o dedukcji dla systemu $S5$ może zastać zapisane w następujących postaciach:

- Jeśli $X \subseteq \{\varphi \to \psi : \varphi, \psi \in S_2\}$, to dla wszystkich $\alpha, \beta \in S_2$:
  Jeśli $\beta \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\})$, to $(\alpha \to \beta) \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X)$.
- Dla każdego $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha \in S_2$: $\alpha \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $((\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_k) \to \alpha) \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}))$ dla pewnych $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in X$.

Zachodzą następujące fakty, charakteryzujące funktory logiki $S5$ w terminach operacji konsekwencji tej logiki:

- $\neg\alpha \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$.
- $\alpha \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\neg\alpha\}) = S_2$.

- $C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha, \beta\})$.
- $C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\}) \cap C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\beta\})$.

Wprowadzamy oznaczenie: $\Box\alpha$ dla $(\alpha \to \alpha) \to \alpha$. Wtedy $(\Box\alpha \equiv (\beta \to \beta) \to \alpha) \in C_{R_{0a*}}(A_{S5})$, dla wszystkich $\alpha, \beta \in S_2$.
Zachodzą następujące fakty:

- $\Box p \to p$
- $(p \to q) \to \Box(p \to q)$
- $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$
- $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$
- $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$.

Definiujemy zbiór formuł $\Box$-***domkniętych*** $S_\Box$: $\alpha \in S_\Box$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \to \Box\alpha \in C_{R_{0a*}}(A_{S5})$. Wtedy: $\alpha \in S_\Box$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \Box\alpha \in C_{R_{0a*}}(A_{S5})$. Zachodzą także następujące fakty:

- $(\alpha \to \beta) \in S_\Box$.
- Jeśli $\alpha \in S_\Box$, to $\neg\alpha \in S_\Box$.
- Jeśli $\alpha, \beta \in S_\Box$, to $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta \in S_\Box$.
- $C_{R_{0a*}}(A_{S5}) \subseteq S_\Box$.

Wreszcie, zachodzą także następujące fakty:

- Dla wszystkich $X \subseteq S_\Box$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$:
  $\beta \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy
  $(\alpha \to \beta) \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}) \cup X)$.
- $\Box\alpha \in C_{R_{0a*}}(A_{S5} \cup \{\alpha\})$ dla wszystkich $\alpha \in S_2$.

Ponieważ $\beta \notin S_\Box$ dla dowolnej formuły atomowej β, więc $S_2 - S_\Box \neq \emptyset$. Tak więc, reguła:

$$r_\Box : \qquad \frac{\alpha}{\Box\alpha},$$

gdzie $\alpha \in S_2$, nie jest wyprowadzalna w $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$. Jest ona jednak dopuszczalna w $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$, czyli:

- jeśli $\alpha \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}))$, to $\Box\alpha \in C_{R_{0a}}(Sb(A_{S5}))$

Jak widzieliśmy, reguła $r_\Box$ jest wyprowadzalna w (R_{0a*}, A_{S5}).

Powyższe przedstawienie systemu modalnego $S5$ pochodzi od Pogorzelskiego i Wojtylaka. Pod nazwą $S5$ występują także inne systemy modalne.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE ŁUKASIEWICZA.

Systemem aksjomatów (nieskończenie) wielowartościowej logiki Łukasiewicza jest zbiór $Ł_\infty$ następujących formuł:

- (1) $(p \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s))$
- (2) $p \to (q \to p)$
- (3) $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
- (4) $(p \wedge q) \to p$
- (5) $(p \wedge q) \to q$
- (6) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$
- (7) $p \to (p \vee q)$
- (8) $q \to (p \vee q)$
- (9) $(p \to s) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$
- (10) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

Przez ∞-***wartościową logikę Łukasiewicza*** rozumiemy system $(R_{0*}, Ł_\infty)$ lub, w wersji niezmienniczej: $(R_0, Sb(Ł_\infty))$.

Wprowadźmy oznaczenia:

- $p \to^0 q$ dla q,
- $p \to^{k+1} q$ dla $p \to (p \to^k q)$.

Skończenie wielowartościowe logiki Łukasiewicza to systemy $(R_{0*}, Ł_n)$, dla $n \geqslant 2$, gdzie zbiór $Ł_n$ zawiera powyższe aksjomaty oraz dwa aksjomaty następującej postaci:

- (11) $(p \to^n q) \to (p \to^{n-1} q)$
- (12) $(p \equiv (p \to^k \neg p)) \to^{n-1} q$

dla każdej $k \leqslant n$ takiej, że $k + 2$ nie dzieli bez reszty $n - 1$.

Zachodzi następujący fakt:

$$C_{R_{0*}}(Ł_\infty) = \bigcap\{C_{R_{0*}}(Ł_n) : n \geqslant 2\}.$$

Zachodzi następująca wersja twierdzenia o dedukcji:

- $\beta \in C_{R_0}(Sb(Ł_n) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \to^{n-1} \beta \in C_{R_0}(Sb(Ł_n) \cup X)$
- $\beta \in C_{R_0}(Sb(Ł_\infty) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n taka, że $\alpha \to^{n} \beta \in C_{R_0}(Sb(Ł_\infty) \cup X)$.

W konsekwencji, dla dowolnych $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha \in S_2$:

- $C_{R_0}(Sb(Ł_n) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \to^{n-2} \neg\alpha \in C_{R_0}(Sb(Ł_n) \cup X)$
- $C_{R_0}(Sb(Ł_\infty) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n taka, że $\alpha \to^{n} \neg\alpha \in C_{R_0}(Sb(Ł_\infty) \cup X)$.

1.9. Matryce logiczne

Określimy teraz semantykę dla rachunków zdaniowych. Pojęciem podstawowym będzie pojęcie *matrycy logicznej*. Wszystkie pojęcia algebraiczne potrzebne do określenia zarówno tego pojęcia, jak i podstawowych własności matryc logicznych podane zostały w *Preliminariach matematycznych*.

1.9.1. Algebry prauporządkowane

Algebrą prauporządkowaną (w skrócie: ***prp-algebrą***) nazywamy każdy układ o postaci $(\mathbf{A}, \leqslant)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest algebrą, a $\leqslant$ praporządkiem (relacją zwrotną i przechodnią) w A, czyli w uniwersum algebry $\mathbf{A}$. Jeśli operacje samej algebry $\mathbf{A}$ wyznaczają jakiś porządek w A (np. porządek kratowy), to nie musi on być ani tożsamy, ani jakkolwiek związany z praporządkiem $\leqslant$.

Niech $\mathbf{S}$ będzie algebrą języka zdaniowego z nieskończonym zbiorem At zmiennych zdaniowych oraz zbiorem wszystkich formuł S i niech $(\mathbf{A}, \leqslant)$ będzie prp-algebrą podobną do $\mathbf{S}$. Definiujemy ***operację konsekwencji wyznaczoną przez*** $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, \leqslant)$, czyli funkcję $\overrightarrow{\mathfrak{A}} : \wp(S) \to \wp(S)$:

- $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha) \in \mathbb{F}(h^v(X))$, dla każdego podstawienia $v : At \to A$.

Zatem $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha)$ należy do filtru wyznaczonego (generowanego) przez $h^v(X)$, dla każdego podstawienia $v : At \to A$.
UWAGA. Posługujemy się tu (i dalej) pojęciem filtru w prp-algebrach. Przypominamy też, że $\mathbb{F}(X)$ jest najmniejszym filtrem zawierającym zbiór X.

Bezpośrednio z tej definicji wynika, że:

- $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha) \in F$, dla każdego filtru w prp-algebrze $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, \leqslant)$ oraz każdego podstawienia $v : At \to A$.

Operacja $\overrightarrow{\mathfrak{A}}$ istotnie jest operacją konsekwencji, mamy bowiem dla wszystkich $X \subseteq S$:

- $X \subseteq \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$.
- Jeśli $X \subseteq Y$, to $\overrightarrow{\mathfrak{A}}(X) \subseteq \overrightarrow{\mathfrak{A}}(Y)$.
- $\overrightarrow{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)) \subseteq \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$.
- $h^e(\overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)) \subseteq \overrightarrow{\mathfrak{A}}(h^e(X))$ dla wszystkich $e : At \to A$.

Ostatni z powyższych warunków implikuje, że $\overrightarrow{\mathfrak{A}}$ jest strukturalną operacją konsekwencji. $\overrightarrow{\mathfrak{A}}$ nie musi jednak być finitystyczna.

Przypominamy, że dla dowolnego praporządku $(A, \leqslant)$, $X \subseteq A$ oraz $a \in A$:

- $a \in B_u(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \leqslant a$ dla wszystkich $y \in X$
- $a \in B_l(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant y$ dla wszystkich $y \in X$
- $Great(X) = X \cap B_u(X)$
- $Least(X) = X \cap B_l(X)$
- $Sup(X) = Least(B_u(X))$
- $Inf(X) = Great(B_l(X))$.

Dla dowolnej prp-algebry $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, \leqslant)$ definiujemy:

- $\alpha \in E(\mathfrak{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha) \in Great(A)$, dla każdego podstawienia $v : At \to A$.

Ponieważ $Great(A) = \mathbb{F}(\emptyset)$, więc mamy: $E(\mathfrak{A}) = \overrightarrow{\mathfrak{A}}(\emptyset)$.

Dwie prp-algebry nazywamy ***izomorficznymi***, gdy istnieje ich izomorfizm, zachowujący porządek. Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Algebra $\mathfrak{B} = (\mathbf{B}, \leqslant_1)$ jest podstrukturą algebry $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, \leqslant_2)$ (piszemy wtedy: $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$), gdy $\mathbf{B}$ jest podalgebrą $\mathbf{A}$ oraz $\leqslant_1$ jest obcięciem porządku $\leqslant_2$ do $\mathfrak{B}$.

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{A}} = \overrightarrow{\mathfrak{B}}$.
- Jeśli $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{A}} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{B}}$.

1.9.2. Reguły $\mathfrak{A}$-niezawodne i $\mathfrak{A}$-normalne

Dla dowolnych $X \subseteq S$, $r \in \mathbb{R}_S$ oraz prp-algebry $\mathfrak{A}$ niech:

- $r \in V(\mathfrak{A}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(P, \alpha) \in r$:
  jeśli $P \subseteq \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$, to $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$.
- $r \in N(\mathfrak{A}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(P, \alpha) \in r$:
  $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X \cup P)$.

Jeśli $X = \emptyset$, to piszemy $V(\mathfrak{A})$ oraz $N(\mathfrak{A})$, odpowiednio. Wtedy:

- Reguły z $V(\mathfrak{A})$ nazywamy regułami $\mathfrak{A}$-***niezawodnymi***.
- Reguły z $N(\mathfrak{A})$ nazywamy regułami $\mathfrak{A}$-***normalnymi***.

Zachodzą następujące fakty:

- $N(\mathfrak{A}, X) = \bigcap\{V(\mathfrak{A}, Y) : X \subseteq Y\}$
- $N(\mathfrak{A}) = \bigcap\{V(\mathfrak{A}, X) : X \subseteq S\}$
- $N(\mathfrak{A}) = \mathrm{Der}(\overrightarrow{\mathfrak{A}}) = \mathrm{Der}(N(\mathfrak{A}), E(\mathfrak{A}))$
- $V(\mathfrak{A}) = \mathrm{Adm}(\overrightarrow{\mathfrak{A}}) = \mathrm{Adm}(N(\mathfrak{A}), E(\mathfrak{A}))$
- $r_* \in V(\mathfrak{A})$
- $N(\mathfrak{A}) \subseteq V(\mathfrak{A})$ (odwrotna inkluzja nie zachodzi).

1.9.3. Matryce logiczne

Każdą parę $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest algebrą, a A^* jest podzbiorem uniwersum algebry $\mathbf{A}$ (czyli $A^* \subseteq A$) nazywamy ***matrycą logiczną***. Zbiór A^* jest zbiorem ***elementów wyróżnionych*** matrycy $\mathfrak{M}$.

Zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł $\mathfrak{M}$-***prawdziwych*** ($\mathfrak{M}$-***tautologii***) jest zdefiniowany następująco:

- $\alpha \in E(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha) \in A^*$, dla każdego $v : At \to A$.

Zbiór $E(\mathfrak{M})$ nazywany jest także ***zawartością*** matrycy $\mathfrak{M}$.

Z kolei, operacja ***konsekwencji matrycowej*** $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ ma następującą definicję:

- $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v : At \to A$
  jeśli $h^v(X) \subseteq A^*$, to $h^v(\alpha) \in A^*$.

Mamy oczywiście $E(\mathfrak{M}) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}(\emptyset)$.

Podamy teraz związki między konsekwencją matrycową a wprowadzoną wcześniej operacją konsekwencji w prp-algebrach.

Niech $\mathbf{A}$ będzie algebrą o uniwersum A, podobną do algebry (ustalonego) języka zdaniowego $\mathbf{S}$. Gdy wyróżnimy jakiś podzbiór A^* w uniwersum A, otrzymujemy matrycę logiczną $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$. Rozważymy dwa przypadki:

- A^* jest pusty lub identyczny z uniwersum A;
- $\emptyset \neq A^* \subsetneq A$.

Matryca $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A)$ generuje sprzeczną operację konsekwencji, czyli w tym przypadku $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(X) = S$ dla wszystkich $X \subseteq S$. Z kolei, matryca $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, \emptyset)$ generuje następującą operację konsekwencji:

- $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(X) = \emptyset$, gdy $X = \emptyset$
- $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(X) = S$, gdy $X \neq \emptyset$.

Rozważmy teraz przypadek drugi, czyli matrycę $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdzie $\emptyset \neq A^* \subsetneq A$.

W zbiorze A definiujemy relację praporządku $\leqslant$:

- $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \notin A^*$ lub $y \in A^*$.

Wtedy A^* jest jedynym filtrem właściwym w zbiorze prauporządkowanym $(A, \leqslant)$, ponieważ:

- $Great(A) = A^*$
- $Least(A) = A - A^*$
- $\mathbb{F}(X) = A^*$, gdy $X \subseteq A^*$
- $\mathbb{F}(X) = A^*$, gdy $X \subsetneq A^*$.

Mamy zatem w tym przypadku: $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(X) = \overrightarrow{\mathfrak{A}}(X)$, gdzie $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, \leqslant)$ jest prp-algebrą wyznaczoną w podany wyżej sposób przez zbiór A^*. I to właśnie jest podstawowy związek między konsekwencjami matrycowymi a konsekwencjami wyznaczonymi przez prp-algebry.

Podobnie jak dla prp-algebr, określamy reguły ***niezawodne*** oraz reguły ***normalne*** w matrycy $\mathfrak{M}$:

- $r \in V(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(P, \alpha) \in r$:
  jeśli $P \subseteq E(\mathfrak{M})$, to $\alpha \in (\mathfrak{M})$;
- $r \in N(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(P, \alpha) \in r$: $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}(P)$.

Zachodzą wtedy następujące fakty:

- $N(\mathfrak{M}) = \mathrm{Der}(\overrightarrow{\mathfrak{M}})$
- $V(\mathfrak{M}) = \mathrm{Adm}(\overrightarrow{\mathfrak{M}})$
- $r_* \in V(\mathfrak{M}) - N(\mathfrak{M})$, jeśli $\emptyset \subsetneq A^* \subsetneq A$.

Z olbrzymiej mnogości faktów dotyczących matryc logicznych wybieramy, na potrzeby tej notatki, jedynie niektóre ustalenia.

Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą skończoną, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ jest finitystyczną operacją konsekwencji.

Mówimy, że zbiór $X \subseteq S$ jest ***spełnialny*** w matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdy istnieje wartościowanie $v : At \to A$ takie, że: $h^v(X) \subseteq A^*$. Jeśli X jest spełnialny w $\mathfrak{M}$, to piszemy $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$.

Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą skończoną, to:

- $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$ dla wszystkich $Y \in Fin(X)$.

Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ oraz $\mathfrak{N} = (\mathbf{B}, B^*)$ będą matrycami podobnymi. Mówimy, że:

- $\mathfrak{M}$ jest ***podmatrycą*** $\mathfrak{N}$, gdy $\mathbf{A}$ jest podalgebrą $\mathbf{B}$ oraz $A^* = A \cap B^*$. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest podmatrycą $\mathfrak{N}$, to piszemy $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.
- $\mathfrak{M}$ jest ***izomorficzna*** z $\mathfrak{N}$, gdy istnieje izomorfizm h algebry $\mathbf{A}$ na algebrę $\mathbf{B}$ taki, że dla wszystkich $x \in A$: $x \in A^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(x) \in B^*$. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{N}$, to piszemy $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{\mathfrak{N}}$.
- Jeśli $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{N}}$.
- $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(Sb(X)) = \bigcap\{E(\mathfrak{N}) : \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \wedge X \subseteq E(\mathfrak{N})\}$.

Relacja R jest ***kongruencją*** matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdy R jest kongruencją algebry $\mathbf{A}$ oraz dla wszystkich $x, y \in A$:

- jeśli xRy i $x \in A^*$, to $y \in A^*$.

Każda kongruencja R matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ wyznacza ***matrycę ilorazową*** $\mathfrak{M}/R = (\mathbf{A}/R, A^*/R)$, gdzie $\mathbf{A}/R$ jest algebrą ilorazową oraz $A^* = \{[a]_R : a \in A^*\}$.

Jeśli R jest kongruencją matrycy $\mathfrak{M}$, to konsekwencja matrycowa wyznaczona przez $\mathfrak{M}$ jest identyczna z konsekwencją matrycową wyznaczoną przez matrycę ilorazową: $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}$.

Produktem rodziny matryc podobnych $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in T}$, gdzie $\mathfrak{M}_t = (\mathbf{A}_t, A_t^*)$ nazywamy matrycę $\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t = (\prod\limits_{t\in T} \mathbf{A}_t, \prod\limits_{t\in T} A_t^*)$.

Zachodzą następujące fakty:

- $E(\prod_{t\in T} \mathfrak{M}_t) = \bigcap\{E(\mathfrak{M}_t) : t \in T\}$.

- Dla każdego $X \subseteq S$: $\overrightarrow{\prod_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X) = \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$, o ile $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_t)$; w przeciwnym przypadku $\overrightarrow{\prod_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X) = S$.

Szczególną rolę pełnią tzw. matryce Lindenbauma. Dla dowolnych $R \subseteq \mathbb{R}_S$ oraz $X \subseteq S$ matrycę:

$$\mathfrak{M}^{R,X} = (\mathbf{S}, C_R(X))$$

nazywamy ***matrycą Lindenbauma*** dla systemu (R, X).

Zachodzą następujące fakty:

- $E(\mathfrak{M}^{R,X}) = \{\alpha : Sb(\alpha) \subseteq C_R(X)\}$.
- Jeśli $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$, to $E(\mathfrak{M}^{R,X}) = C_R(X)$.

Matrycy Lindenbauma nie należy mylić z algebrą Lindenbauma-Tarskiego. Jeśli (R, X) jest logiką zdaniową nad standardowym językiem $\mathbf{S}_2 = (S_2, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg)$, to definiujemy relację: $\alpha \sim_{R,X} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \in C_R(X)$. Przy odpowiednich założeniach o (R, X) relacja $\sim_{R,X}$ jest kongruencją matrycy Lindenbauma $\mathfrak{M}^{R,X}$. Wtedy algebrę ilorazową $\mathbf{S}_2/\sim_{R,X} = (S_2/\sim_{R,X}, \dashv, \cup, \cap, -)$ nazywamy ***algebrą Lindenbauma-Tarskiego*** systemu (R, X). Operacje tej algebry są zdefiniowane wzorami:

- $[\alpha]_{\sim_{R,X}} \cup [\beta]_{\sim_{R,X}} = [\alpha \vee \beta]_{\sim_{R,X}}$
- $[\alpha]_{\sim_{R,X}} \cap [\beta]_{\sim_{R,X}} = [\alpha \wedge \beta]_{\sim_{R,X}}$
- $[\alpha]_{\sim_{R,X}} \dashv [\beta]_{\sim_{R,X}} = [\alpha \rightarrow \beta]_{\sim_{R,X}}$
- $-[\alpha]_{\sim_{R,X}} = [\neg\alpha]_{\sim_{R,X}}$.

W kracie $(S_2/\sim_{R,X}, \cup, \cap)$ mamy porządek kratowy: $[\alpha]_{\sim_{R,X}} \leqslant [\beta]_{\sim_{R,X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \rightarrow \beta \in C_R(X)$. Przy stosownych założeniach, krata ta ma zero i jedynkę.

1.9.4. Adekwatność

Niech (R, X) będzie systemem logiki zdaniowej, a $\mathfrak{M}$ matrycą logiczną podobną do algebry języka tego systemu. Jeżeli $E(\mathfrak{M}) = C_R(X) = C_{R,X}(\emptyset)$, to mówimy, że matryca $\mathfrak{M}$ jest ***(słabo) adekwatna*** dla (R, X).

Zachodzi następujący fakt:

- Dla każdej logiki zdaniowej (R, X) takiej, że $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq$ Struct istnieje matryca $\mathfrak{M}$ taka, że: $C_R(X) = E(\mathfrak{M})$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq N(\mathfrak{M})$.

Mogłoby się wydawać, że fakt powyższy czyni pytanie o istnienie semantyki dla dowolnych rachunków zdaniowych całkiem trywialnym: dla każdego rachunku (R, X) takiego, że $r_* \in \text{Adm}(R, X)$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq \text{Struct}$ zachodzi $C_R(X) = E(\mathfrak{M}^{R,X})$, gdzie $\mathfrak{M}^{R,X}$ jest matrycą Lindenbauma dla (R, X). Tak jednak nie jest: poszukujemy nie ***całkiem dowolnych*** semantyk dla rachunków zdaniowych, lecz raczej semantyk, spełniających pewne określone warunki. Dla przykładu, wiemy, iż:

- $\mathfrak{M}_2$ jest minimalną matrycą adekwatną dla logiki klasycznej.
- Logika modalna (R_{0a*}, A_{S5}) nie ma żadnej skończonej matrycy adekwatnej. Istnieje jednak dla niej nieskończona matryca adekwatna (matryca Wajsberga).
- Istnieją matryce skończone, które nie są skończenie aksjomatyzowalne (wyniki Wojtylaka i Pałasińskiej).
- Skończenie wartościowe wielowartościowe logiki Łukasiewicza mają skończone matryce słabo adekwatne.
- Nieskończenie wartościowa logika Łukasiewicza ma nieskończoną matrycę słabo adekwatną.

Jeśli $C_R(X) = E(\mathfrak{M})$, to:

- $\text{Adm}(R, X) = V(\mathfrak{M})$
- $\text{Der}(R, X) \subseteq V(\mathfrak{M})$
- $N(\mathfrak{M}) \subseteq \text{Adm}(R, X)$.

Mówimy, że matryca $\mathfrak{M}$ jest ***silnie adekwatna*** dla logiki (R, X) (lub dla operacji konsekwencji $C_{R,X}$), gdy dla wszystkich $Y \subseteq S$:

$$C_R(X \cup Y) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}(Y).$$

Wprost z definicji wynika, że $\mathfrak{M}$ jest silnie adekwatna dla logiki (R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy $N(\mathfrak{M}) = \text{Der}(R, X)$.

Niech X_0 będzie zbiorem następujących formuł:

- $p \to p$
- $(p \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s))$
- $(q \to s) \to ((p \to q) \to (p \to s))$
- $((p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)$
- $(p \wedge q) \to p$
- $(p \wedge q) \to q$
- $(p \to q) \to ((p \to s) \to (p \to (q \wedge s)))$

- $p \to (p \vee q)$
- $q \to (p \vee q)$
- $(p \to s) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$.

Zachodzi wtedy następujący fakt (S_1 to zbiór formuł czysto implikacyjnych):

- Jeśli (R, X) jest systemem niezmienniczym nad $\mathbf{S}_1$ takim, że $r_0 \in \mathrm{Der}(R, X)$ oraz $X_0 \subseteq C_R(X)$, to istnieje matryca $\mathfrak{M}$ silnie adekwatna dla (R, X).

O matrycach silnie adekwatnych dla różnych systemów logicznych wiadomo np., że:

- Nie istnieją matryce silnie adekwatne dla systemów modalnych $S1$–$S3$ Lewisa.
- Matryca $\mathfrak{M}_2$ jest silnie adekwatna dla logiki klasycznej.
- Istnieje matryca silnie adekwatna dla systemu modalnego $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$ (różna od wspomnianej wcześniej matrycy Wajsberga).

Dla celów tej notatki nie jest potrzebne podawanie innych jeszcze rodzajów adekwatności, rozważanych w literaturze przedmiotu.

1.9.5. Filtr-konsekwencja

Zdefiniujmy następujące dwie operacje konsekwencji:

- Zbiór $FC_i(X)$, dla $X \subseteq S_2$ niech będzie zbiorem tych wszystkich formuł $\alpha \in S_2$, które w każdej algebrze Heytinga $\mathbf{A}$ spełniają następujący warunek dla wszystkich $v : At \to A$:

$$h^v(\alpha) \in \mathbb{F}(h^v(X)).$$

- Zbiór $FC_2(X)$, dla $X \subseteq S_2$ niech będzie zbiorem tych wszystkich formuł $\alpha \in S_2$, które w każdej algebrze Boole'a $\mathbf{A}$ spełniają następujący warunek dla wszystkich $v : At \to A$:

$$h^v(\alpha) \in \mathbb{F}(h^v(X)).$$

Dla FC równego FC_i lub FC_2 zachodzą wtedy następujące fakty:

- $X \subseteq FC(X)$.
- Jeśli $X \subseteq Y$, to $FC(X) \subseteq FC(Y)$.
- $FC(FC(X)) \subseteq FC(X)$.
- $h^e(FC(X)) \subseteq FC(h^e(X))$ dla wszystkich $e : At \to S$.
- $FC(X) \subseteq \bigcup\{FC(Y) : Y \in Fin(X)\}$.

- Jeśli $\beta \in FC(X)$, to $(\alpha \to \beta) \in FC(X)$.
- $\beta \in FC(X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \to \beta) \in FC(X)$.
- Jeśli $\alpha, \alpha \to \beta \in FC(X)$, to $\beta \in FC(X)$.
- $Sb(FC(\emptyset)) \subseteq FC(\emptyset)$.

Przy pomocy operacji FC_i oraz FC_2 udowodnić można twierdzenia o zupełności dla, odpowiednio, logiki intuicjonistycznej oraz logiki klasycznej.

Niech $(R_0, Sb(A_{int}))$ będzie logiką intuicjonistyczną. Przypominamy, że filtr-konsekwencja FC_i zdefiniowana jest warunkiem:

- $\alpha \in FC_i(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \overrightarrow{\mathbf{A}}(X)$, dla każdej algebry Heytinga $\mathbf{A}$.

Zachodzą następujące fakty:

- $A_{int} \subseteq FC_i(\emptyset)$.
- $C_{R_0}(Sb(A_{int}) \cup X) = FC_i(X)$ dla wszystkich $X \subseteq S_2$.
- Dla dowolnych $\alpha \in S_2$ oraz $X \subseteq S_2$: $\alpha \in C_{R_{0*}}(A_{int} \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej algebry Heytinga $\mathbf{A}$, $X \subseteq E(\mathbf{A})$ implikuje $\alpha \in E(\mathbf{A})$.
- Dla dowolnej $\alpha \in S_2$: $\alpha \in C_{R_{0*}}(A_{int})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej skończonej algebry Heytinga $\mathbf{A}$, $\alpha \in E(\mathbf{A})$.
- $C_{R_{0*}}(A_{int}) = \bigcap\{E(\mathbf{J}_n) : n \geqslant 1\}$, gdzie $\mathbf{J}_n$ są algebrami Jaśkowskiego.
- Dla każdego skończonego $X \subseteq S_2$: $C_{R_0}(Sb(A) \cup X) = \bigcap\{\overrightarrow{\mathbf{J}_n} : n \geqslant 1\}$.

Z kolei, zajmijmy się systemem logiki klasycznej $(R_0, Sb(A_2))$ i filtr-konsekwencją FC_2. Zachodzą następujące fakty:

- Zbiór $FC_2(\emptyset)$ wszystkich tautologii Boolowskich jest zbiorem tych wszystkich formuł $\alpha \in S_2$, które w każdej algebrze Boole'a $\mathbf{B}$ i dla każdego wartościowania $v : At \to B$ spełniają warunek:

$$h^v(\alpha) = \mathbf{1}_B.$$

- $A_2 \subseteq FC_2(\emptyset)$.
- $C_{R_0}(Sb(A_2) \cup X) = FC_2(X)$ dla wszystkich $X \subseteq S_2$.
- $C_{R_0}(Sb(A_2) \cup X) = \overrightarrow{\mathbf{B}_2}(X)$ dla wszystkich $X \subseteq S_2$.

1.10. Różne pojęcia zupełności rachunków zdaniowych

Podane wyżej przykładowe twierdzenia o pełności logik zdaniowych (tu: intuicjonistycznej oraz klasycznej) nie wyczerpują całości problematyki związanej z zupełnością systemów logiki zdaniowej. Wiele dalszych problemów dotyczy np.: uogólnionej zupełności, zupełności w sensie Posta, strukturalnej zupełności, itd. Bardzo wyrywkowo podamy kilka znanych rezultatów w tej dziedzinie.

1.10.1. Uogólniona zupełność

Niech $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_m)$ będzie algebrą języka zdaniowego z przeliczalnym zbiorem zmiennych. Niech $\Gamma \subseteq S$. Dla dowolnych $A \subseteq S$ oraz $R \subseteq \mathbb{R}_S$ definiujemy:

- $(R, A) \in \Gamma$-Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy Adm$(R, A) \cap$ Struct$(\Gamma) \subseteq$ Der(R, A). Jeśli $(R, A) \in \Gamma$-Cpl, to mówimy, że (R, A) jest ***Γ-zupełny***.
- $(R, A) \in \Gamma$-Max wtedy i tylko wtedy, gdy $(R, A) \in$ Inv(Γ) oraz nie istnieje system $(R_1, A_1) \in$ Inv(Γ) taki, że $(R, A) \prec (R_1, A_1)$. Jeśli $(R, A) \in \Gamma$-Max, to mówimy, że (R, A) jest ***Γ-maksymalny***.

Powyższe pojęcia wyrazić można również w terminach operacji konsekwencji:

- $C \in \Gamma$-CPL wtedy i tylko wtedy, gdy ADM$(C) \cap$ Struct$(\Gamma) \subseteq$ DER(C).
- $C \in \Gamma$-MAX wtedy i tylko wtedy, gdy $C(\emptyset) = S$ lub C jest elementem maksymalnym w rodzinie wszystkich niesprzecznych Γ-strukturalnych operacji konsekwencji nad S.

Zachodzą następujące fakty:

- Γ-Max $\subseteq \Gamma$-Cpl $\cap$ Inv(Γ)
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv(Γ), to:
    1. $(R, A) \in \Gamma$-Max wtedy i tylko wtedy, gdy $(R \cup \{r\}, A) \notin$ Cns, dla wszystkich $r \in$ Struct$(\Gamma) -$ Der(R, A).
    2. $(R, A) \in \Gamma$-Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy $(R \cup \{r\}, A) \notin$ Cns, dla wszystkich $r \in$ Struct$(\Gamma) \cap$ Adm$(R, A) -$ Der(R, A).
- Jeśli $r_* | \Gamma \in$ Adm(R, A) oraz $\emptyset \neq C_R(A) \neq S$, to następujące warunki są równoważne:
    1. Der$(R, A) \cap$ Struct$(\Gamma) = V(\mathfrak{M}) \cap$ Struct(Γ).
    2. $(R, A) \in \Gamma$-Cpl oraz $E(\mathfrak{M}) = C_R(A)$.
- Jeśli $E(\mathfrak{M}) = C_R(A)$, to następujące warunki są równoważne:

1. $\mathrm{Der}(R, A) \cap \mathrm{Struct}(\Gamma) = V(\mathfrak{M}) \cap \mathrm{Struct}(\Gamma)$.
2. $(R, A) \in \Gamma$-Cpl.

Dla każdego $X \subseteq S$ niech:

- $(P, \alpha) \in \Gamma - r_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $(h^{e_n} \circ \ldots \circ h^{e_1})(P) \subseteq X)$, to $(h^{e_n} \circ \ldots \circ h^{e_1})(\alpha) \in X$, dla $n \geqslant 0$ oraz $e_1, \ldots, e_n : At \to \Gamma$.

Wtedy następujące warunki sa równoważne:

- $(R, A) \in \Gamma$-Cpl.
- $\Gamma - r_{C_R(A)} \in \mathrm{Der}(R, A)$.

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $(R, A) \in \mathrm{Inv}(\Gamma)$, to następujące warunki są równoważne:
  1. $(R, A) \in \Gamma$-Cpl.
  2. Jeśli $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$, to $(R_1, A_1) \preceq (R, A)$, dla wszystkich $(R_1, A_1) \in \mathrm{Inv}(\Gamma)$.
- Następujące warunki są równoważne:
  1. $(R, A) \in \Gamma$-Cpl.
  2. Jeśli $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$, to $(R_1, A_1) \preceq (R, A)$, dla wszystkich $A_1 \subseteq S$ oraz $R_1 \subseteq \mathrm{Struct}(\Gamma)$.
- Niech $(R, A) \in \mathrm{Inv}(\Gamma)$. Wtedy:
  1. $(R, A) \in \Gamma$-Max wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $(R \cup \{r\}, A) \in \mathrm{Cns}$, to $\mathrm{Adm}(R \cup \{r\}, A) \cap \mathrm{Struct}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Der}(R, A)$ dla wszystkich $r \in \mathbb{R}_S$.
  2. Jeśli $(R, A) \in \Gamma$-Max, to $C_R(Sb_\Gamma(\{\alpha\}) \cup A) = S$ dla każdej $\alpha \notin C_R(A)$.
- Następujące warunki są równoważne:
  1. $(R, A) \in \Gamma$-Max.
  2. $(R, A) \in \Gamma\text{-Cpl} \cap \mathrm{Inv}(\Gamma)$ oraz $(R \cup \{r_* | \Gamma\}, A) \in \emptyset$-Cpl.
- Jeśli $C \in \mathrm{STRUCT}(\Gamma)$, to:
  1. $C \in \Gamma$-MAX wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $r \in \mathrm{Struct}(\Gamma)$: jeśli $r \notin \mathrm{DER}(C)$, to $C \cup C_r \notin \mathrm{CNS}$. [Tutaj stosujemy oznaczenie: $C_r(X) = C_{\{r\}}(X)$.]
  2. $C \in \Gamma$-MAX wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $r \in \mathrm{Struct}(\Gamma)$: jeśli $r \in \mathrm{ADM}(C) - \mathrm{DER}(C)$, to $C \cup C_r \notin \mathrm{CNS}$.

- Dla każdego $(R, A) \in$ Cns istnieje $(R_1, A_1) \in \Gamma$-Cpl taki, że $(R, A) \preceq (R_1, A_1) \in$ Cns.
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv(Γ)$\cap$Cns oraz $(R \cup \{r_* | \Gamma\}, A) \in$ Comp, to istnieje $(R_1, A_1) \in \Gamma$-Max taki, że $(R, A) \preceq (R_1, A_1) \in$ Cns.

Z dwóch ostatnich z powyższych twierdzeń widzimy zatem, że:

- Dowolny niesprzeczny system (R, A) można rozszerzyć do systemu Γ-zupełnego. Wystarczy bowiem wziąć: $R_1 =$ Adm(R, A) oraz $A_1 = A$.
- Dowolny zwarty system (R, A) można rozszerzyć do systemu Γ-maksymalnego. Przypominamy, że $(R, A) \in$ Comp, gdy dla każdego $Y \subseteq S$ istnieje $X \in Fin(Y)$ taki, że jeśli $C_R(A \cup Y) = S$, to $C_R(A \cup X) = S$.

Ponadto, system (R_1, A_1), o którym mowa w przedostatnim z powyższych twierdzeń ma następujące własności:

- $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$.
- Jeśli $(R, A) \in \Gamma$-Cpl, to $(R_1, A_1) \approx (R, A)$.
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv(Γ), to $(R_1, A_1) \in$ Inv(Γ)
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv(Γ) oraz $(R \cup \{r_* | \Gamma\}, A) \in \emptyset$-Cpl, to $(R_1, A_1) \in \Gamma$-Max.
- $(R_1, A_1) \notin \Gamma$-Max dla pewnego $(R, A) \in$ Inv(Γ) i pewnego $\Gamma \subseteq S$.

1.10.2. Zupełność w sensie Posta

Przypomnijmy:

- $(R, A) \in$ Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy $C_R(A \cup \{\alpha\}) = S$ dla wszystkich $\alpha \notin C_R(A)$
- $(R, A) \in \emptyset$-Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy Adm$(R, A) \subseteq$ Der(R, A)
- $(R, A) \in$ Max wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $(R_1, A_1) \in$ Cns, nie zachodzi $(R, A) \prec (R_1, A_1)$.

Zachodzą następujące fakty:

- $\emptyset$-Cpl = Cpl = Max.
- $(R, A) \in$ Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy $(R \cup \{r\}, A) \notin$ Cns, dla wszystkich $r \notin$ Der(R, A).
- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą logiczną oraz $\emptyset \neq C_R(A) \neq S$, to:
    1. Der$(R, A) = V(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E(\mathfrak{M}) = C_R(A)$ oraz $(R, A) \in$ Cpl.

2. Jeśli $E(\mathfrak{M}) = C_R(A)$, to $(R, A) \in$ Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Der}(R, A) = V(\mathfrak{M})$.

- Jeśli $r_* \in \mathrm{Adm}(R, A)$, to $\mathrm{Der}(R, A) = V(\mathfrak{M}^{R,A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(R, A) \in$ Cpl.

- Dla każdego $(R, A) \in$ Cns istnieje $(R_1, A_1) \in$ Cns $\cap$ Cpl taki, że $(R, A) \prec (R_1, A_1)$. Tak więc, każdy niesprzeczny system logiczny (R, A) może zostać rozszerzony do systemu niesprzecznego i Post-zupełnego. Przy tym, rozszerzenie (R_1, A_1) ma następujące własności:

  1. $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$.
  2. Jeśli $(R, A) \in$ Cpl, to $(R, A) \approx (R_1, A_1)$.

- Jeśli $(R, A) \in$ Comp oraz $C_R(A \cup X) \neq S$, to istnieje $Y \subseteq S$ taki, że:

  1. $C_R(A \cup X) \subseteq C_R(A \cup Y) \neq S$
  2. $C_R(A \cup Y) = Y$
  3. $C_R(A \cup Y \cup \{\alpha\}) = S$ dla wszystkich $\alpha \notin Y$.

Dla dowolnego (R, X) definiujemy rodzinę $\mathcal{L}(R, X)$ ***nadzbiorów Lindenbauma*** dla $C_R(X)$:

- $\mathcal{L}(R, X) = \{Y : X \subseteq Y = C_R(Y) \neq S \wedge (\forall \alpha \notin Y)\, C_R(Y \cup \{\alpha\}) = S\}$.

Dla każdego $Y \in \mathcal{L}(R, X)$ system (R, Y) jest wyznaczony jednoznacznie. Wtedy oczywiście $(R, Y) \in$ Cns $\cap$ Cpl. System (R, Y) nazywamy w takim przypadku ***nadsystemem Lindenbauma*** dla systemu (R, X).

Wprowadzimy pewne miary stopnia niezupełności oraz stopnia maksymalności systemów logicznych.

- Przez (globalny) ***stopień niezupełności*** systemu (R, A) rozumiemy moc rodziny:

$$\{\mathrm{Der}(R \cup R', A \cup A') : A' \subseteq S \wedge R' \subseteq \mathbb{R}_S\}.$$

- Jeśli w definicji powyższej ograniczymy się do systemów $(R', A') \in$ Inv, to otrzymujemy ***stopień maksymalności*** systemu $(R, A) \in$ Inv.

- Dla strukturalnych operacji konsekwencji C, przez ***stopień maksymalności*** C rozumiemy moc rodziny $\{C' \in \mathrm{Struct} : C \leqslant C'\}$.

- ***Stopniem zupełności*** systemu (R, A) nazywamy liczbę kardynalną $dc(R, A)$ równą mocy rodziny:

$$\{C_R(A \cup X) : X \subseteq S\}.$$

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą skończoną, to $dc(\overrightarrow{\mathfrak{M}} \circ Sb) < \aleph_0$.

- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą funkcyjnie zupełną, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}}\circ Sb \in$ CPL, czyli $dc(\overrightarrow{\mathfrak{M}}\circ Sb) \leqslant 2$.

Dla logik finitystycznych (które niekoniecznie są zwarte) zachodzi następujące twierdzenie Łosia-Lindenbauma-Assera:

- Jeśli C_{RA} jest finitystyczna oraz $\alpha \notin C_R(A \cup X)$, to istnieje $Y \subseteq S$ taki, że:

  1. $C_R(A \cup X) \subseteq Y = C_R(A \cup Y)$ oraz $\alpha \notin Y$
  2. $\alpha \in C_R(A \cup Y \cup \{\beta\})$ dla wszystkich $\beta \notin C_R(A \cup Y)$.

Dla dowolnej $\alpha \in S$ niech:

- $\mathcal{L}^\alpha(R, A) = \{Y : X \subseteq C_R(Y) = Y \wedge \alpha \notin Y \wedge (\forall\beta \notin Y)\ \alpha \in C_R(Y \cup \{\beta\})\}$.

Każdy element rodziny $\mathcal{L}^\alpha(R, A)$ nazywamy ***α-relatywnym nadzbiorem Lindenbauma*** dla systemu (R, A).

Twierdzenie Łosia-Lindenbauma-Assera przyjmuje zatem następującą postać (gdy rozważamy jedynie reguły wnioskowania o skończonych zbiorach przesłanek):

- Dla każdej $\alpha \notin C_R(A)$: $\mathcal{L}^\alpha(R, A) \neq \emptyset$.

Ustalmy własności logiki klasycznej, jeśli chodzi o wprowadzone wyżej pojęcia. Przypomnijmy, że Cn_2 jest operacją konsekwencji wyznaczoną przez niezmienniczą wersję logiki klasycznej $R_0, Sb(A_2)$, czyli:

$$Cn_2(X) = C_{R_0}(Sb(A_2) \cup X).$$

Zachodzą (jak wiadomo z elementarnego kursu logiki) następujące fakty, dla każdego $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$:

- $\alpha \in Cn_2(X \cup \{\beta\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\beta \to \alpha) \in Cn_2(X)$.
- $Cn_2(X \cup \{\neg\alpha\}) \neq S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \notin Cn_2(X)$.
- $Cn_2(X \cup \{\alpha\}) \neq S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg\alpha \notin Cn_2(X)$.

Z pomocą powyższych faktów dokonać można szeregu dalszych ustaleń, np.:

- $(R_0, Sb(A_2) \cup X) \in$ Cns wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in S_2$ taka, że nie zachodzi: $\alpha, \neg\alpha \in Cn_2(X)$.
- $(R_0, Sb(A_2) \cup X) \in$ Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\alpha \in S_2$: albo $\alpha \in Cn_2(X)$, albo $\neg\alpha \in Cn_2(X)$.
- $\mathcal{L}^\alpha(R_0, Sb(A_2)) \subseteq \mathcal{L}(R_0, Sb(A_2))$.
- Jeśli $\alpha \notin Cn_2(X)$, to istnieje zbiór $Y \subseteq S_2$ taki, że:

  1. $Cn_2(X) \subseteq Y = Cn_2(Y)$ oraz $\alpha \notin Cn_2(Y)$
  2. $Cn_2(Y) \cup \{\beta\} = S_2$ dla wszystkich $\beta \notin Y$.

- Dla wszystkich $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha \in S_2$:
    1. Jeśli $\alpha \notin Cn_2(X)$, to istnieje $Y \in \mathcal{L}(R_0, Sb(A_2))$ taki, że $X \subseteq Y$ oraz $\alpha \notin Y$.
    2. $Cn_2(X) = \bigcap\{Y \subseteq S_2 : X \subseteq Y \in \mathcal{L}(R_0, Sb(A_2))\}$.
- Dla każdego $Y \in \mathcal{L}(R_0, Sb(A_2))$:
    1. $\alpha \rightarrow \beta \in Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $\alpha \in Y$, to $\beta \in Y$.
    2. $\alpha \vee \beta \in Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $\alpha \in Y$ lub $\beta \in Y$.
    3. $\alpha \wedge \beta \in Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ oraz $\beta \in Y$.
    4. $\neg\alpha \in Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \notin Y$.
- $A_2 \subseteq E(\mathfrak{M}_2)$ oraz $r_0 \in N(\mathfrak{M}_2)$.
- $Cn_2(X) \neq S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_2)$, dla wszystkich $X \subseteq S_2$.
- Dla wszystkich $X \subseteq S_2$: $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_2)$, dla każdego $Y \in Fin(X)$.
- $C_{R_0}(Sb(A_2)) = C_{R_{0*}}(A_2) = E(\mathfrak{M}_2)$.
- $\mathrm{Der}(R_0, Sb(A_2)) = N(\mathfrak{M}_2)$.
- $\mathrm{Der}(R_{0*}, A_2) = \mathrm{Adm}(R_0, Sb(A_2)) = \mathrm{Adm}(R_{0*}, A_2)$.
- $C_{R_0}(Sb(A_2) \cup X) = \overrightarrow{\mathfrak{M}_2}(X)$, dla wszystkich $X \subseteq S_2$.
- $(R_{0*}, A_2) \in \mathrm{Cpl}$.
- $dc(R_0, Sb(A_2)) = \mathfrak{c}$. W konsekwencji, stopień zupełności dowolnej logiki słabszej od $(R_0, Sb(A_2))$ także jest równy kontinuum.

1.10.3. Jednoznaczność rozszerzeń Lindenbauma

Interesują nas systemy logiczne (R, A) takie, dla których rodzina $\mathcal{L}(R, X)$ zawiera dokładnie jeden element. Zdefiniujmy:

- $(R, X) \in \mathcal{T}(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}(R, X) = \{M\}$, dla $M \subseteq S$.

Jeśli $(R, X) \in \mathcal{T}$ dla pewnego $M \neq S$, to mówimy, że (R, X) ma ***własność Tarskiego***.

Podamy pewne informacje dotyczące rozszerzeń Lindenbauma w przypadku:

- logiki intuicjinistycznej
- logik wielowartościowych Łukasiewicza.

Wprowadźmy oznaczenie: $Z_2 = C_{R_{0*}}(A_2)$.

Przypominamy, że C^{int} jest operacją konsekwencji generowaną przez niezmienniczą wersję logiki intuicjonistycznej $(R_0, Sb(A_{int}))$. Mamy wtedy:

- $(\alpha \to \beta) \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_i(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.
- $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \neq S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg\alpha \notin C^{int}(X)$.

Dla logiki intuicjonistycznej zachodzą następujące fakty:

- $(R_0, Sb(A_{int}) \cup X) \in$ Cns wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in S_2$ taka, że nie zachodzi: $\alpha, \neg\alpha \in C^{int}(X)$.
- $(R_0, Sb(A_{int}) \cup X) \in$ Cpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\alpha \in S_2$: albo $\alpha \in Cn^{int}(X)$, albo $\neg\alpha \in C^{int}(X)$.
- $\mathcal{L}(R_0, Sb(A_{int})) = \mathcal{L}(R_0, Sb(A_2))$.
- $\mathcal{L}(R_{0*}, A_2) = \mathcal{L}(R_{0*}, A_{int}) = \{Z_2\}$.
- Jeśli $Y \in \mathcal{L}^{\beta}(R_{0*}, A_{int})$, to następujące warunki są równoważne:
  1. $(R_0, Y) \notin$ Cpl
  2. $((\beta \to \alpha) \to \beta) \in Y$, dla pewnej $\alpha \in S_2$.
- Jeśli $p_0 \to p_0 \in X$ oraz $\alpha \notin C_{R_0}(Sb(X))$, to zbiór $\mathcal{L}^{\alpha}(R_0, Sb(X))$ ma moc kontinuum.
- $dc(R_{0*}, A_{int}) = \mathfrak{c}$.

Z kolei, dla wielowartościowych logik Łukasiewicza zachodzą następujące fakty:

- $\mathcal{L}(R_{0*}, \text{Ł}_\infty) = \mathcal{L}(R_{0*}, \text{Ł}_m) = \mathcal{L}(R_{0*}, A_2) = \{Z_2\}$.
- $dc(R_{0*}, \text{Ł}_m) \leqslant 2^{k-1} + 1$, gdzie k jest liczbą podzielników $m - 1$.

Można w pełnej ogólności rozstrzygnąć problem istnienia R_{0*}-systemów, mających własność Tarskiego. Pomijamy w niniejszej notatce odnośne twierdzenia.

1.10.4. Strukturalna zupełność

Strukturalna zupełność jest pewnym szczególnym przypadkiem Γ-zupełności, a mianowicie takim, dla którego $\Gamma = S$. Zdefiniujmy:

- $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy Adm$(R, A) \cap$ Struct $\subseteq$ Der(R, A). Jeśli $(R, A) \in$ SCpl, to mówimy, że system (R, A) jest ***strukturalnie zupełny***.

Zachodzą następujące fakty:

- $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $R_1 \subseteq$ Struct oraz wszystkich $A_1 \subseteq S$: jeśli $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$, to $(R_1, A_1) \preceq (R, A)$.
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv, to: $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $(R_1, A_1) \in$ Inv: jeśli $C_R(A) = C_{R_1}(A_1)$, to $(R_1, A_1) \preceq (R, A)$.
- Jeśli $C \in$ STRUCT, to $C \in$ SCPL wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $C_1 \in$ STRUCT: jeśli $C(\emptyset) = C_1(\emptyset)$, to $C_1 \leqslant C$.
- Jeśli $r_* \in$ Adm(R, A) oraz $\emptyset \neq C_R(A) \neq S$, to następujące warunki są równoważne:
  1. Der$(R, A) \cap$ Struct $= V(\mathfrak{M}) \cap$ Struct
  2. $C_R(A) = E(\mathfrak{M})$ oraz $(R, A) \in$ SCpl.
- Jeśli $C_R(A) = E(\mathfrak{M})$, to następujące warunki są równoważne:
  1. $(R, A) \in$ SCpl
  2. $V(\mathfrak{M}) \cap$ Struct $\subseteq$ Der(R, A).
- Każdy system niesprzeczny (R, A) można niesprzecznie rozszerzyć do pewnego systemu strukturalnie zupełnego (R_1, A_1).
- Niech $(R, A) \in$ Inv oraz $C_R(A \cup Z_2) \subseteq Z_2$. Wtedy: jeśli $(R \cup \{r_*\}, A) \in$ SCpl, to $(R \cup \{r_*\}, A) \in \mathcal{T}(Z_2)$.
- $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy $r_{C_R(A)} \in$ Der(R, A).
- $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy $N(\mathfrak{M}^{R,A}) \subseteq$ Der(R, A).
- $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{\mathfrak{M}^{R,A}}(X) \subseteq C_{R,A}(X)$, dla wszystkich $X \subseteq S$.
- Jeśli $(R, A) \in$ Inv, to:
  1. $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy $N(\mathfrak{M}^{R,A}) =$ Der(R, A).
  2. $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $X \subseteq S$: $\overrightarrow{\mathfrak{M}^{R,A}}(X) = C_R(A \cup X)$.
  3. (Przy założeniu, że wszystkie reguły mają tylko skończone zbiory przesłanek.) $(R, A) \in$ SCpl wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $X \in Fin(S)$: $\overrightarrow{\mathfrak{M}^{R,A}}(X) = C_R(A \cup X)$.
- Niech (R, A) będzie systemem niezmienniczym takim, że $C_{R,A}$ jest finitystyczna. Wtedy następujące warunki są równoważne:
  1. $(R, A) \in$ SCpl
  2. Dla każdej $\psi \in S$ oraz każdego $Y \in \mathcal{L}^{\psi}(R, A)$ istnieje endomorfizm $h : S \to S$ taki, że $Y = h^{-1}(C_R(A))$.

- Niech (R, A) będzie systemem niezmienniczym. Jeśli $(R, A) \in$ SCpl, to dla każdego $Y \in \mathcal{L}(R, A)$ istnieje odwzorowanie $e : At :\to S$ takie, że $Y = h^{e^{-1}}(C_R(A))$.

Dla systemów: logiki klasycznej, logiki intuicjonistycznej, logik wielowartościowych Łukasiewicza oraz logik modalnych zachodzą następujące fakty dotyczące własności strukturalnej zupełności:

- $(R_0, Sb(A_2)) \in$ SCpl.
- $(R_{0*}, A_{int}) \notin$ SCpl.
- Niektóre fragmenty logiki intuicjonistycznej są jednak strukturalnie zupełne: np. fragment $(R_0, Sb(A_{int}^{\to,\wedge,\neg}))$.
- $(R_0, Sb(Ł_n)) \in$ SCpl, dla każdej $n > 2$.
- $(R_{0*}, Ł_n) \in$ SCpl, dla każdej $n \geqslant 2$.
- $(R_{0*a}, A_{S5}) \in$ SCpl.
- $(R_{0a}, Sb(A_{S5})) \notin$ SCpl.

1.11. C-definiowalność

Wiadomo, że Cn_2 jest najmniejszą operacją konsekwencji C spełniającą następujące warunki:

- (T0) Jeśli $X \subseteq C(X)$, to $Y \cup C(X) \subseteq C(Y)$
- (T1) $C(\{\alpha, \neg\alpha\}) = S_2$ oraz $C(\{\alpha\}) \cap C(\{\neg\alpha\}) = C(\emptyset)$
- (T2) $\alpha \to \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in C(X \cup \{\alpha\})$
- (T3) $C(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C(X \cup \{\alpha\}) \cap C(X \cup \{\beta\})$
- (T4) $C(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C(X \cup \{\alpha, \beta\})$.

Wiadomo też, że Cn_2 jest jedyną niesprzeczną oraz strukturalną operacją konsekwencji spełniającą te warunki.

Powyższa charakterystyka nie jest jednakże zadowalająca: poszczególne warunki nie są jednorodne. Chcielibyśmy mieć (oprócz (T0), który ustala, że C jest operacją konsekwencji) zestaw warunków o postaci:

- $\alpha \S \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...

gdzie $\S \in \{\neg, \to, \vee, \wedge\}$, a po prawej stronie równoważności występuje warunek, charakteryzujący poszczególny spójnik przez operację konsekwencji.

Okazuje się, że dla pewnych logik możliwe jest podanie tego typu jednorodnych warunków. Nie jest tak jednak w przypadku logiki klasycznej Cn_2.

Dla przykładu, wiadomo, że operacja konsekwencji intuicjonistycznej Cn^{int} jest najmniejszą operacją konsekwencji spełniającą następujące warunki (H):

- (H1) $\neg\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_2 \subseteq C(X \cup \{\alpha\})$
- (H2) $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\beta\}) \subseteq C(X \cup \{\alpha\})$
- (H3) $\alpha \vee \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\alpha\}) \cap C(X \cup \{\beta\}) \subseteq C(X)$
- (H4) $\alpha \wedge \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\alpha\}) \cup C(X \cup \{\beta\}) \subseteq C(X)$.

Rozważmy następujący zbiór warunków (D):

- (D1) $\neg\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\alpha\}) = S_2$
- (D2) $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\alpha, \neg\beta\}) = S_2$
- (D3) $\alpha \vee \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}) = S_2$
- (D4) $\alpha \wedge \beta \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(X \cup \{\neg\alpha\}) \cap C(X \cup \{\neg\beta\}) = S_2$.

Klasyczna konsekwencja Cn_2 oczywiście spełnia te warunki. Zauważmy jednak, że:

- Jeśli C spełnia (D), to każde aksjomatyczne rozszerzenie C także spełnia (D). A zatem (D) nie wyznaczają C jednoznacznie.
- Jednak najmniejsza operacja C spełniająca warunki (D) (czyli przekrój wszystkich operacji C, spełniających (D)) jest wyznaczona jednoznacznie i jest: strukturalna oraz finitystyczna.
- Jeśli C spełnia (D), to $Sb(A_2) \subseteq C(\emptyset)$.

Najmniejsza operacja spełniająca (D) (oznaczana przez C_D) jest wyznaczona przez aksjomaty $Sb(A_2)$ oraz następujące reguły wnioskowania:

$$r_{01} : \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \neg\beta}{\neg\beta}$$

$$r_{02} : \frac{\alpha, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{\beta \rightarrow \gamma}$$

$$r_{03} : \frac{\alpha, \alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)}{\beta \vee \gamma}$$

$$r_{04} : \frac{\alpha, \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)}{\beta \wedge \gamma}$$

$$r_1 : \frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}.$$

Ponieważ reguły C_D są niezawodne klasycznie, więc $C_D(X) \subseteq Cn_2(X)$ dla wszystkich X. Ponadto, dla wszystkich $X \subseteq S_2$:

- $C_D(X) = S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn_2(X) = S_2$.

- $\alpha \in C_D(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Cn_2(X)$, dla $\alpha \notin At$.
- $\alpha \in C_D(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in X$, dla $\alpha \in At$ oraz $Cn_2(X) \neq S_2$.

Mamy zatem $C_D \leqslant Cn_2$, lecz nierówność odwrotna nie zachodzi. Mamy jedynie: $C_D(\emptyset) = C_{R_{0*}}(A_2)$.

Tak więc, logika C_D jest słabsza od logiki klasycznej. Jej spójniki ***nie są*** spójnikami klasycznymi, co widać z następującego faktu.

Rozważmy matrycę logiczną $\mathfrak{M}_D$ zbudowaną na zbiorze $\{1, 2, 3\}$ z 3 jako jedynym elementem wyróżnionym oraz następującą interpretacją spójników:

$\rightarrow$	1	2	3
1	3	3	3
2	1	3	3
3	1	3	3

$\vee$	1	2	3
1	1	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

$\wedge$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	3	3
3	1	3	3

$\neg$	
1	3
2	1
3	1

Wtedy konsekwencja C_D jest dokładnie konsekwencją matrycową $\overrightarrow{\mathfrak{M}_D}$.

Logika C_D jest tzw. ***logiką progową***. Zachodzi mianowicie następujący fakt:

- Jeśli C jest niesprzeczną strukturalną operacją konsekwencji oraz $C_D < C$, to $C = Cn_2$.

Tak więc, klasyczna operacja konsekwencji Cn_2 jest jedynym właściwym niesprzecznym i strukturalnym rozszerzeniem C_D.

Można wykazać, że same reguły r_{0i} (wraz z A_2), bez reguły r_1, nie aksjomatyzują C_D. Niech mianowicie $\mathfrak{M}_1$ będzie matrycą na zbiorze $\{1, 3\}$, z 3 jako jedynym elementem wyróżnionym i niech:

- $\neg x = 3$
- $f(x, y) = 3$ dla $f \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$.

Wtedy: wszystkie aksjomaty $Sb(A_2)$ są prawdziwe w $\mathfrak{M}_1$ oraz reguły r_{0i} są niezawodne w $\mathfrak{M}_1$, ale r_1 nie jest niezawodna w $\mathfrak{M}_1$. Ponadto, konsekwencja wyznaczona przez te reguły (oraz $Sb(A_2)$) pokrywa się z przekrojem konsekwencji matrycowych $\overrightarrow{\mathfrak{M}_1} \cap \overrightarrow{\mathfrak{M}_2}$, gdzie $\mathfrak{M}_2$ jest matrycą klasyczną. Zależności między omawianymi konsekwencjami są następujące (tu C_{inc} jest konsekwencją sprzeczną):

- $\overrightarrow{\mathfrak{M}_1} \cap \overrightarrow{\mathfrak{M}_2} < C_D < Cn_2 < C_{inc}$
- $\overrightarrow{\mathfrak{M}_1} \cap \overrightarrow{\mathfrak{M}_2} < \overrightarrow{\mathfrak{M}_1} < C_{inc}$
- konsekwencja $\overrightarrow{\mathfrak{M}_1}$ jest $\leqslant$-nieporównywalna ani z C_D, ani z Cn_2.

Wreszcie, $\mathfrak{M}_D$ jest podmatrycą $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ oraz zachodzi:

- $\overrightarrow{\mathfrak{M}_D} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2}$.

Istnieje wiele wariantów systemu (D). Żaden z nich jednak nie daje poszukiwanej C-definicji logiki klasycznej, o ile operacje konsekwencji rozumiemy w sensie nadanym im przez Tarskiego. Definicje takie są możliwe, gdy zmienimy to rozumienie.

2. Paradygmat semantyczny

2.1. Logiki abstrakcyjne

Dla naszych celów wystarczająca będzie następująca definicja logiki abstrakcyjnej (albo: systemu logicznego, w sensie uogólnionym).

Przez ***logikę abstrakcyjną*** rozumiemy każdą parę uporządkowaną $\mathcal{L} = (L, \models^{\mathcal{L}})$, spełniającą następujące warunki:

- L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór $L(\sigma)$, zwany zbiorem σ-***zdań*** logiki $\mathcal{L}$. [Uwaga: w niektórych przypadkach trzeba rozważać *klasy* zamiast zbiorów.]
- Jeśli $\sigma \subseteq \tau$, to $L(\sigma) \subseteq L(\tau)$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to dla pewnego σ mamy: $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$.
- WARUNEK IZOMORFIZMU. Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ oraz $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.
- WARUNEK REDUKTU. Jeśli $\tau \subseteq \sigma$, $\varphi \in L(\sigma)$ oraz $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau \models^{\mathcal{L}} \varphi$

Przypominamy, że $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ jest τ-reduktem struktury $\mathfrak{A}$, czyli strukturą powstającą z $\mathfrak{A}$ poprzez uwzględnienie tylko interpretacji wszystkich symboli z τ (a więc, gdy $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\tau \subseteq \sigma$, to w $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ uwzględniamy tylko interpretacje symboli z τ, pomijając interpretacje symboli z $\sigma - \tau$).

Dla dowolnej logiki abstrakcyjnej $\mathcal{L}$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ miech:

$$Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma \wedge \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$$

(jeśli σ będzie jasne z kontekstu, będziemy pisać $Mod_{\mathcal{L}}(\varphi)$).

Niech $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oznacza logikę pierwszego rzędu. W tym przypadku funkcja L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór wszystkich zdań pierwszego rzędu w których występują symbole z σ. Dla logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ będziemy używali relacji $\models$, bez indeksu, pokrywającej się z relacją spełniania znaną z wykładu *Semantyka KRP*.

„Moc wyrażania" poszczególnych logik abstrakcyjnych definiowana jest w terminach semantycznych:

- Piszemy $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej sygnatury σ oraz każdego $\varphi \in L_1(\sigma)$ istnieje $\psi \in L_2(\sigma)$ taka, że: $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_1}(\varphi) = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_2}(\psi)$. Mówimy wtedy, że $\mathcal{L}_1$ ma ***moc wyrażania nie większą niż*** $\mathcal{L}_2$.
- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$, ale nie zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_2$ ma ***moc wyrażania większą niż*** $\mathcal{L}_1$.
- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ oraz zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_1$ mają ***taką samą moc wyrażania***.

Spośród wszystkich logik abstrakcyjnych wyróżnimy klasę logik regularnych, spełniających pewne naturalne warunki.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma ***własność spójników Boolowskich***, gdy:

- Dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$:

  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.

- Dla każdej σ oraz każdych $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$:

  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ lub $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, to będziemy używać oznaczeń, odpowiednio, $\neg\varphi$ oraz $\varphi \vee \psi$ dla formuły χ, o której mowa powyżej. W podobny sposób określamy też pozostałe spójniki Boolowskie logiki $\mathcal{L}$. Jest to oczywiście uproszczenie notacyjne: dla pełnej poprawności trzeba byłoby używać np. symboli $\neg^{\mathcal{L}}$, $\vee^{\mathcal{L}}$, itd.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma ***własność relatywizacji***, gdy dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ oraz każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje $\psi \in L(\sigma \cup \{U\})$ takie, że: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz wszystkich σ-domkniętych podzbiorów $U^A \subseteq A = dom(\mathfrak{A})$. Tutaj $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ jest podstrukturą $\mathfrak{A}$ o uniwersum U^A. Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji, to niech φ^U oznacza formułę ψ, o której mowa w powyższej definicji.

$* * *$

Przed sformułowaniem następnej własności logik abstrakcyjnych potrzebne będzie przypomnienie pewnych faktów z semantyki KRP.

Przypomnijmy, że dla dowolnej σ, dowolnego zbioru zdań Φ z $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oraz symboli: n-argumentowego predykatu P, n-argumentowego symbolu funkcyjnego F oraz stałej indywidualnej c takich, że $P \notin \sigma$, $F \notin \sigma$ oraz $c \notin \sigma$ mówimy, że:

- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}))$ jest σ-definicją P w Φ;

- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1} \forall v_n (F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n))$ jest σ-definicją F w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_n \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$;

- formuła $\forall v_0 (c = v_0 \equiv \varphi(v_0))$ jest σ-definicją c w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_0 \varphi(v_0)$.

Jeśli Δ jest zbiorem σ-definicji dla predykatów $P \in \tau - \sigma$, symboli funkcyjnych $F \in \tau - \sigma$ oraz stałych indywidualnych $c \in \tau - \sigma$, to dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ takiej, że $\mathfrak{A} \models \Phi$ istnieje dokładnie jedna struktura $\mathfrak{A}^\Delta \in Str_{\tau - \sigma}$ taka, że $\mathfrak{A}^\Delta \upharpoonright \sigma = \mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{A}^\Delta \models \Delta$.

Rozważamy teraz sygnatury σ^Δ takie, że $\sigma \subseteq \sigma^\Delta$ oraz Δ jest zbiorem σ-definicji symboli z $\sigma^\Delta - \sigma$.

Niech Φ będzie zbiorem zdań sygnatury σ. Wtedy każdej formule ψ o n zmiennych wolnych można przyporządkować formułę ψ^Δ taką, że:

- Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma, \mathfrak{A} \models \Phi$ oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, to: $\mathfrak{A}^\Delta \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \psi^\Delta[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

- $\Phi \cup \Delta \models \psi \equiv \psi^\Delta$.

W konsekwencji, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}^\Delta \equiv \mathfrak{B}^\Delta$.

Powyższe fakty pozwalają na przejście od dowolnych sygnatur do sygnatur czysto relacyjnych, tj. takich, które zawierają jedynie predykaty. Inaczej mówiąc, możemy każdy n-argumentowy symbol funkcyjny f zamienić na $n+1$-argumentowy symbol relacyjny (predykat) F oraz każdą stałą indywidualną c zastąpić jednoargumentowym predykatem C. Niech σ^r oznacza sygnaturę w ten sposób utworzoną z sygnatury σ. Każdej strukturze $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ przyporządkowujemy wtedy strukturę $\mathfrak{A}^r$ określoną w sposób następujący:

- $A^r = dom(\mathfrak{A}^r) = A = dom(\mathfrak{A})$;

- dla predykatów $P \in \sigma$ niech: interpretacja P w $\mathfrak{A}^r$ będzie identyczna z interpretacją P w $\mathfrak{A}$;

- dla n-argumentowego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma$ niech $F^{\mathfrak{A}^r}$ będzie wykresem funkcji $f^\mathfrak{A}$, czyli $F^{\mathfrak{A}^r}(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

  $f^\mathfrak{A}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_n$;

- dla stałej indywidualnej $c \in \sigma$, niech $C^{\mathfrak{A}^r}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^\mathfrak{A} = a$.

Dla każdej formuły ψ o n zmiennych wolnych w języku o sygnaturze σ istnieje wtedy formuła ψ^r w języku o sygnaturze σ^r taka, że dla wszystkich $\mathfrak{A}$ oraz wszystkich $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models \psi^r[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

W konsekwencji, dla dowolnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$.

Te wiadomości wystarczają do sformułowania następnej własności logik abstrakcyjnych.

* * *

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ***dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne***, gdy dla dowolnej σ:

- dla każdej $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\psi \in L(\sigma^r)$ taka, że dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \models_\mathcal{L} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models_\mathcal{L} \psi$.

Jeśli logika $\mathcal{L}$ ma powyższą własność, to formułę ψ istniejącą na mocy definicji wyżej będziemy oznaczać przez φ^r.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***regularna***, gdy:

- $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich;

- $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji;

- $\mathcal{L}$ dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne.

Następujące pojęcia przenosimy z KRP na wypadek logik abstrakcyjnych:

- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy ***spełnialnym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zbiór $\Phi \subseteq L(\sigma)$ nazywamy ***spełnialnym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $\bigcap_{\varphi \in \Phi} Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy ***prawdziwym*** w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}} = Str_{\sigma}$;
- piszemy $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, gdy każdy $\mathcal{L}$-model wszystkich zdań z Φ jest także $\mathcal{L}$-modelem φ (czyli gdy $Mod(\Phi) = \bigcap\{Mod(\psi) : \psi \in \Phi\} \subseteq Mod(\varphi)$).

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ ma własność:

- ***Löwenheima-Skolema***, gdy każde zdanie $\mathcal{L}$-spełnialne ma model przeliczalny.
- ***zwartości***, gdy dla dowolnego $\Phi \subseteq L(\sigma)$, jeśli każdy skończony podzbiór zbioru Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny, to Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny.

2.2. Algebraiczna charakteryzacja elementarnej równoważności

Jest rzeczą ważną (oraz interesującą), że pojęcia semantyczne możemy charakteryzować w terminach matematycznych. W szczególności, okazuje się, że podstawowe pojęcia semantyczne mogą zostać scharakteryzowane w (prostych) terminach algebraicznych.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$. Mówimy, że f jest ***częściowym izomorfizmem*** $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, gdy:

- f jest injekcją o dziedzinie $dom(f)$ zawartej w $dom(\mathfrak{A})$ oraz zbiorze wartości $rng(f)$ zawartym w $dom(\mathfrak{B})$
- dla dowolnego n-argumentowego predykatu $P \in \sigma$ oraz dowolnych elementów $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $P^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$;
- dla dowolnego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $F \in \sigma$ oraz dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $F^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})) = f(a)$;
- dla dowolnej stałej indywidualnej $c \in \sigma$ oraz $a \in dom(f)$: $c^{\mathfrak{A}} = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^{\mathfrak{B}} = f(a)$.

Przez $Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.

Gdy σ jest czysto relacyjna oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, $b_0, \ldots, b_{n-1} \in dom(\mathfrak{B})$, oraz $f \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jest taki, że $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $i < n$, to dla każdej formuły atomowej ψ o n zmiennych wolnych zachodzi: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}]$.

Pojedyncze częściowe izomorfizmy nie zachowują jednak (w powyższym sensie) *dowolnych* formuł. Jak się okaże, dopiero pewne *rodziny* częściowych izomorfizmów pozwalają o takim zachowywaniu dowolnych formuł przesądzać, a tym samym rodziny takie pozwalają scharakteryzować elementarną równoważność struktur relacyjnych.

Będziemy identyfikować odwzorowania z ich (teorio-mnogościowymi) wykresami, czyli odwzorowanie f identyfikujemy z wykresem $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$.

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***skończenie izomorficzne***, gdy istnieje ciąg $(I_n)_{n\in\omega}$ o następujących własnościach:

- Każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina $(I_n)_{n\in\omega}$ ma powyższe własności, to piszemy: $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***częściowo izomorficzne***, gdy istnieje zbiór I taki, że:

- I jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $b \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina I ma powyższe własności, to piszemy: $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ jest skończona, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są co najwyżej przeliczalne, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Charakterystykę elementarnej równoważności, która nie odwołuje się do własności języka podaje TWIERDZENIE FRAÏSSÉ'GO:

- Dla dowolnej skończonej σ oraz $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Przypomnijmy pojęcie ***kwantyfikatorowego rzędu formuły***:

- $qr(\varphi) = 0$, gdy φ jest atomowa;
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$

- $qr(\varphi \vee \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$ (podobnie dla innych funktorów dwuargumentowych);
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Powiemy, że struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***m*-izomorficzne**, gdy istnieje ciąg $I_0, \ldots, I_m$ niepustych zbiorów częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ taki, że:

- Jeśli $n+1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $n+1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli $I_0, \ldots, I_m$ jest ciągiem o powyższych własnościach, to piszemy $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

W dowodzie twierdzenia Fraïssé'go wykorzystujemy następujące fakty:

- Niech $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Wtedy dla każdej formuły φ o k zmiennych wolnych: jeśli $qr(\varphi) \leqslant n$, $f \in I_n$ oraz $a_0, \ldots a_{k-1} \in dom(f)$:

  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{k-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), \ldots f(a_{k-1})]$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.
- Dla każdych n i r istnieje tylko skończenie wiele klas równoważności względem relacji równoważności logicznej w zbiorze wszystkich formuł o r zmiennych wolnych i o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant n$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$, to $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
- Niech σ będzie skończona i czysto relacyjna. Wtedy dla każdych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ następujące warunki są równoważne:
  1. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
  2. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.

2.3. Twierdzenia Lindströma

W tym punkcie rozważamy logiki regularne $\mathcal{L}$ takie, że $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Pokażemy m.in., że $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ jest $\leqslant$-maksymalną logiką o wybranych naturalnych własnościach.

Jeśli φ jest zdaniem $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ sygnatury σ, to przez φ^* będziemy oznaczać zdanie z $\mathcal{L}$ o tych samych modelach, co φ, czyli takie, że $Mod^\sigma_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod^\sigma_{\mathcal{L}}(\varphi^*)$. Dla zbioru Φ zdań języka $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ (ustalonej sygnatury σ) niech $\Phi^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Phi\}$.

I Twierdzenie Lindströma

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia Lindströma udowodnimy kilka lematów potrzebnych w tym dowodzie. Dowód twierdzenia Lindströma nie jest całkiem prosty — można go rozłożyć na części i śledzić uważnie każdą z tych części, a potem uświadomić sobie, jak składają się one w całość.

LEMAT 1.

Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta oraz $\Phi \cup \{\varphi\}$ jest zbiorem zdań logiki $\mathcal{L}$ sygnatury σ takim, że $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to istnieje skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$.

DOWÓD.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, istnieje formuła $\neg\varphi$. Dokładniej, powinniśmy pisać np.: $\neg_{\mathcal{L}}\varphi$, ale ponieważ istotne dalej będą jedynie własności semantyczne logiki, upraszczamy ten pedantyczny zapis.

Skoro $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to zbiór $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Na mocy zwartości $\mathcal{L}$, istnieje skończony podzbiór $\Phi_0 \subseteq$ taki, że $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Wtedy jednak $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$, co kończy dowód lematu 1.

LEMAT 2.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta oraz $\psi \in L(\sigma)$. Wtedy istnieje skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: jeśli $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

DOWÓD.

Ograniczymy się do przypadku, gdy σ jest czysto relacyjna (tylko taki przypadek będzie nam później potrzebny).

Wybierzmy nowe symbole jednoargumentowe (predykaty): U, V oraz jednoargumentowy symbol funkcyjny f. Zbudujemy teraz zbiór Φ zdań w sygnaturze $\sigma \cup \{U, V, f\}$, „mówiących”, że f jest izomorfizmem podstruktury generowanej przez U w podstrukturę generowaną przez V. Elementami Φ są:

- $\exists x\, U(x)$
- $\exists x\, V(x)$
- $\forall x\, (U(x) \to V(f(x)))$
- $\forall y\, (V(y) \to \exists x\, (U(x) \wedge f(x) = y))$
- $\forall x \forall y\, ((U(x) \wedge V(y) \wedge f(x) = f(y)) \to x = y)$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, ((U(x_1) \wedge \ldots \wedge U(x_n)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(f(x_1), \ldots, f(x_n)))$

(ostatni z warunków zapisujemy dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma$). Używamy tu symbolu $=$ dla *predykatu* identyczności; nie należy go oczywiście mylić z symbolem $=$ używanym dla *relacji* identyczności w metajęzyku.

Wtedy zachodzi:

(1) $\quad \Phi^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Udowodnimy (1). Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ jest taka, że $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \Phi^*$ (czyli $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models \Phi$), to: U^A oraz V^A są niepuste, a $f^A \restriction U^A$ jest izomorfizmem $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ na $[V^A]^{\mathfrak{A}}$. Przypominamy, że stosujemy następujące konwencje notacyjne:

- A oznacza $dom(\mathfrak{A})$
- U^A oznacza interpretację predykatu U w A
- $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ oznacza podstrukturę struktury $\mathfrak{A}$, której uniwersum jest zbiór U^A i której relacje otrzymujemy z relacji w $\mathfrak{A}$, ograniczając je do U^A.

Na mocy własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych) mamy: $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[V^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji (zobacz: definicja logik regularnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathfrak{A}, V^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^V$. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich (zobacz: definicja logik regularnych) oraz własność reduktów (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U \equiv \psi^V$. To kończy dowód warunku (1).

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ otrzymujemy skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że:

(2) $\quad \Phi_0^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ Φ składa się ze zdań pierwszego rzędu, możemy wybrać skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że Φ_0 składa się z σ_0-zdań (czyli zdań z języka o sygnaturze σ_0). Pokażemy, że σ_0 spełnia tezę lematu 2.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ i niech $\pi : \mathfrak{A} \restriction \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma_0$. Możemy założyć, że dziedziny tych struktur, czyli A i B są rozłączne: $A \cap B = \emptyset$. Gdyby tak nie było, to wzięlibyśmy izomorficzną kopię $\mathfrak{B}$ o uniwersum rozłącznym zA, korzystając z własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych).

Zdefiniujemy strukturę $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \in Str_{\sigma \cup \{U,V,f\}}$. Uniwersum tej struktury to $C = A \cup B$. Jej relacje (i jedną funkcję) definiujemy następująco:

- $R^C = R^A \cup R^B$ dla $R \in \sigma$ [uwaga: σ jest czysto relacyjna]
- $U^C = A$
- $V^C = B$
- f^C definiujemy tak, aby $f^C \restriction U^C = \pi$.

Wtedy $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C)$ jest modelem Φ_0, a więc mamy także:

$$(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} \Phi_0^*.$$

Na mocy (2) dostajemy: $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ $[U^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$, więc (skoro $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich oraz relatywizacji): $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód lematu 2.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$. Powiemy, że $\mathfrak{A}$ jest ***$\mathcal{L}$-równoważna*** z $\mathfrak{B}$, gdy dla każdego σ-zdania ψ z $\mathcal{L}$: $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są $\mathcal{L}$-równoważne, to piszemy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$. Relacja elementarnej równoważności pokrywa się z relacją $\mathcal{L}_{\omega\omega}$-równoważności i będzie, jak dotychczas oznaczana przez $\equiv$.

LEMAT 3.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Jeśli każde dwie elementarnie równoważne struktury są także $\mathcal{L}$-równoważne, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

DOWÓD.

Ponieważ $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$ (co zakładaliśmy na początku rozważań w całym tym punkcie), więc musimy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$, czyli że dla każdego σ oraz każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje σ-zdanie pierwszego rzędu φ takie, że $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi) = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.

Niech ψ będzie zdaniem spełnialnym. W przeciwnym przypadku możemy wziąć za φ np. zdanie $\forall x \ \neg x = x$ i teza lematu będzie trywialnie spełniona.

Twierdzimy, że:

(1) Dla każdej $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ istnieje σ-zdanie $\varphi_{\mathfrak{A}} \in L(\sigma)$ takie, że $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi^*_{\mathfrak{A}} \models \psi$.

Dowód (1) przeprowadzimy metodą wprost. Niech $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. Wtedy zachodzi: $Th(\mathfrak{A})^* \models^{\mathcal{L}} \psi$. Jest tak, ponieważ jeśli $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} Th(\mathfrak{A})^*$, czyli $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$, to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Z założenia mamy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$, a więc $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ istnieje liczba r oraz zdania $\varphi_0, \ldots, \varphi_r \in Th(\mathfrak{A})$ takie, że $\{\varphi^*_0, \ldots, \varphi^*_r\} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Niech $\varphi_{\mathfrak{A}}$ będzie koniunkcją $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r$. Wtedy $\varphi_{\mathfrak{A}} \in Th(\mathfrak{A})$, czyli $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi^*_{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód (1).

Na mocy (1) otrzymujemy teraz:

(2) $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = \bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)} Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}})$.

Pokażemy, że istnieją $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ takie, iż:

(3) $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0})$.

W przeciwnym przypadku (tj. gdyby (3) miało nie zachodzić), dla każdej skończonej liczby modeli $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ mielibyśmy:

$Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \subsetneqq Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.

Wtedy każdy skończony podzbiór zbioru $\{\neg\psi\} \cup \{\neg\varphi^*_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)\}$ byłby spełnialny, a więc na mocy zwartości $\mathcal{L}$ cały ten zbiór byłby spełnialny, co daje sprzeczność z (2).

Na mocy (3) otrzymujemy:

$Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_n}) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})$.

Dla φ o postaci $\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n}$ zachodzi zatem $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. To kończy dowód lematu 3.

I TWIERDZENIE LINDSTRÖMA.

Niech $\mathcal{L}$ będzie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta i ma własność Löwenheima-Skolema, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

DOWÓD.

Wystarczy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Ponadto, na mocy lematu 3 wystarczy pokazać, że dla wszystkich σ:

($\bigstar$) Dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Możemy przy tym ograniczyć się do sygnatur relacyjnych σ, z następującego powodu. Jeśli ($\bigstar$) zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ, to gdy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ przechodzimy do σ^r, $\mathfrak{A}^r$ oraz $\mathfrak{B}^r$ i otrzymujemy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$. Teraz $(\bigstar)$ zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ^r i mamy: $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$. Na mocy własności zamiany symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych na predykaty (zobacz: definicja logiki regularnej), dla dowolnego $\psi \in L(\sigma)$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$
- $\mathfrak{A}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$
- $\mathfrak{B}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$ (ponieważ $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$)
- $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$,

a zatem zachodzi $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Dowód $(\bigstar)$ dla sygnatur relacyjnych σ poprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ oraz pewnej $\psi \in L(\sigma)$:

(1) $\quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$

(jak pamiętamy, powinniśmy właściwie pisać np. $\neg_{\mathcal{L}}$; korzystamy z tego, że $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich).

Wybieramy ψ spełniającą (1) oraz (na mocy lematu 2) skończoną sygnaturę $\sigma_0 \subseteq \sigma$. Wtedy „znaczenie ψ zależy tylko od skończenie wielu symboli".

Skoro $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to oczywiście także $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \equiv \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, więc na mocy twierdzenia Fraïssé'go struktury $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$ są skończenie izomorficzne. Otrzymujemy zatem, dla *odpowiedniego* $(I_n)_{n\in\omega}$:

(2) $\quad (I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0, \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Istota dowodu zasadza się w tym, aby otrzymać teraz (na mocy własności zwartości oraz własności Löwenheima-Skolema) struktury ***przeliczalne*** $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ takie, że:

(3) $\quad \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0, \mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Gdy otrzymamy (3), to twierdzenie będzie udowodnione: ponieważ przeliczalne częściowo izomorficzne struktury $\mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0$ są izomorficzne, a zatem, na mocy wyboru σ_0 mamy: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \psi$, a to jest sprzeczność z (3). Trzeba zatem odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost warunku $(\bigstar)$ i twierdzenie zachodzi.

Trzeba więc jedynie udowodnić (3). Dowód może sprawiać wrażenie nieco zawiłego. Będziemy, intuicyjnie mówiąc, podawać „opis" warunku (2) w logice $\mathcal{L}$.

Możemy założyć, że A i B, czyli dziedziny struktur $\mathfrak{A}$ i, odpowiednio, $\mathfrak{B}$, są rozłączne. Pamiętajmy także, że sygnatura σ jest czysto relacyjna.

Tworzymy sygnaturę σ^+ dodając do σ nowe symbole:

- jednoargumentowy symbol funkcyjny f
- jednoargumentowe predykaty P, U, V
- dwuargumentowe predykaty $<, I$
- trójargumentowy predykat G.

Zbudujemy strukturę $\mathfrak{C} \in Str_{\sigma^+}$, której uniwersum C będzie zawierało uniwersa struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, a także (jako elementy) wszystkie częściowe izomorfizmy I_n. W ten sposób $\mathcal{L}$ „opisze" skończoną izomorficzność $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$.

Niech zatem:

- (a) $C = A \cup B \cup \omega \cup \bigcup_{n\in\omega} I_n$
- (b) $U^C = A$ oraz $[U^C]^{\mathfrak{C}\upharpoonright\sigma_0} = \mathfrak{A}$
- (c) $V^C = B$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C}\upharpoonright\sigma_0} = \mathfrak{B}$
- (d) $<^C$ jest naturalnym porządkiem w ω, a $f^C \upharpoonright \omega$ jest funkcją poprzednika, czyli $f^C(n+1) = n$, a $f^C(0) = 0$
- (e) $P^C = \bigcup_{n\in\omega} I_n$
- (f) $I^C(n,p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in \omega$ oraz $p \in I_n$
- (g) $G^C(p,a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^C(p)$, $a \in dom(p)$ oraz $p(a) = b$.

Teraz zbudujemy koniunkcję χ skończenie wielu poniższych zdań (i)–(viii) z $L(\sigma^+)$, dla której $\mathfrak{C}$ będzie modelem.

- (i) $\forall p\ (P(p) \rightarrow \forall x \forall y\ (G(p,x,y) \rightarrow (U(x) \wedge V(y))))$
- (ii) $\forall p\ (P(p) \rightarrow \forall x \forall y \forall u \forall v\ ((G(p,x,y) \wedge G(p,u,v)) \rightarrow (x = u \wedge y = v)))$
- (iii) $\forall p\ (P(p) \rightarrow \forall x_1 \ldots x_n \forall y_1 \ldots y_n\ ((G(p,x_1,y_1) \wedge \ldots \wedge G(p,x_n,y_n)) \rightarrow (R(x_1,\ldots,x_n) \equiv R(y_1,\ldots y_n))))$

  dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma_0$
- (iv) aksjomaty częściowego porządku dla $<$ oraz fakt,że pole $<$ jest uporządkowane przez $<$ wraz z funkcją poprzednika f:

  $\forall x\ (\exists y\ (y < x) \rightarrow (f(x) < x \wedge \neg\exists z\ (f(x) < z \wedge z < x)))$
- (v) $\forall x\ (\exists y\ (x < y \vee y < x) \rightarrow \exists p\ (P(p) \wedge I(x,p)))$

  (czyli: jeśli x jest w polu $<$, to $I_x = \{p : P(p) \wedge I(x,p)\} \neq \emptyset$)
- (vi) $\forall x \forall p \forall u\ ((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge U(u)) \rightarrow \exists q \exists v\ (I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p,x',y') \rightarrow G(q,x',y'))))$

  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w przód")
- (vii) $\forall x \forall p \forall v\ ((f(x) < x \wedge I(x,p) \wedge V(v)) \rightarrow \exists q \exists u\ (I(f(x),q) \wedge G(q,u,v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p,x',y') \rightarrow G(q,x',y'))))$

  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w tył")
- (viii) $\exists x\ U(x) \wedge \exists y\ V(y) \wedge \psi^U \wedge (\neg\psi)^V$

  (pamiętamy, że $U^C = A$, $V^C = B$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ i $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$).

Uwaga: tu (i wcześniej) używamy predykatu identyczności $=$, którego nie należy mylić z (metajezykowym) symbolem relacji identyczności $=$.

Na mocy (i)–(iii), G opisuje wykres częściowego izomorfizmu z σ_0-podstruktury generowanej przez U w σ_0-podstrukturę generowaną przez V.

Wybieramy nową stałą indywidualną c. Termy $c, f(c), f(f(c)), \ldots$ będziemy oznaczać $f^0c, f^1c, f^2c, \ldots$. Niech $\Psi = \{\chi\} \cup \{f^{n+1}c < f^n; n \in \omega\}$. Każdy skończony podzbiór zbioru Ψ ma model, a mianowicie model $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}, c^{C'})$, gdzie $c^{C'}$ jest wystarczająco dużą liczbą naturalną. Na mocy zwartości logiki $\mathcal{L}$ istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla całego zbioru Ψ. Zbiór D zawiera nieskończony ciąg $<^D$-zstępujący, a mianowicie: $\ldots (f^2c)^D <^D (f^1c)^D <^D c^D$. Potrzebujemy *przeliczalnego* modelu o tej własności. Nie możemy jednak skorzystać bezpośrednio z własności Löwenheima-Skolema, bo dotyczy ona tylko *pojedynczych* zdań, a zbiór Ψ jest *nieskończonym* zbiorem zdań.

Rozszerzamy teraz sygnaturę $\sigma^+ \cup \{c\}$ o nowy jednoargumentowy predykat Q. Niech ϑ będzie $(\sigma^+ \cup \{c, Q\})$-zdaniem:

$$Q(c) \wedge \forall x\ (Q(x) \rightarrow (f(x) < x \wedge Q(f(x))))$$

(widać, że Q jest podzbiorem pola $<$: Q zawiera c i każdy element Q ma bezpośredni poprzednik, który także należy do Q).

Niech $Q^D = \{(f^nc)^D : n \in \omega\}$. Wtedy $(\mathfrak{D}, c^D, Q^D) \models^{\mathcal{L}} \chi \wedge \vartheta$.

Ponieważ $\chi \wedge \vartheta$ jest spełnialna, więc na mocy własności Löwenheima-Skolema istnieje (co najwyżej) przeliczalny model $(\mathfrak{E}, c^E, Q^E)$ dla $\chi \wedge \vartheta$.

Skoro w $\mathfrak{E}$ zachodzi (viii), to $U^E \neq \emptyset$ oraz $V^E \neq \emptyset$. Ponieważ σ jest relacyjna, więc U^E oraz V^E są uniwersami podstruktur. Niech:

- $\mathfrak{A}' = [U^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$
- $\mathfrak{B}' = [V^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$.

Pokażemy, że (co najwyżej) przeliczalne struktury $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ spełniają (3).

Na mocy (viii) mamy: $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ oraz $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} (\neg\psi)^V$, a stąd otrzymujemy (na mocy własności relatywizacji):

(4) $\quad \mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi, \quad \mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Z warunków (i)–(iii) wiemy, że każdy $p \in P^E$ odpowiada częściowemu izomorfizmowi z $\mathfrak{A}' \restriction \sigma_0$ w $\mathfrak{B}' \restriction \sigma_0$ (będziemy każdy taki częściowy izomorfizm oznaczać przez p).

Ponieważ $(\mathfrak{E}, c^E, Q^E) \models \vartheta$, więc dla każdego $n \in \omega$ element $e_n = (f^nc)^E$ należy do Q^E oraz elementy e_n tworzą ciąg zstępujący:

$$\ldots e_3 <^E e_2 <^E e_1 <^E e_0.$$

Niech $I = \{p : \text{ istnieje } n \text{ taka, że } I^E(e_n, p)\}$. Na mocy (v) otrzymujemy, że $I \neq \emptyset$. Na mocy (vi) oraz (vii) otrzymujemy, że I ma własność rozszerzania w przód i w tył.

Dostajemy zatem:

(5) $\quad I : \mathfrak{A}' \restriction \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \restriction \sigma_0.$

Teraz (4) i (5) dają łącznie (3). Tym samym, dowód I twierdzenia Lindströma jest zakończony.

Udowodnimy jeszcze dwa lematy, który będą potrzebne w dowodzie II twierdzenia Lindströma.

LEMAT 4.

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta i niech ma własność Löwenheima-Skolema. Niech wreszcie σ_0 będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, c stałą indywidualną spoza σ_0 oraz ψ niech będzie σ_0-zdaniem logiki $\mathcal{L}$. Niech dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ takie, że:

($\bigstar$) $\quad \mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m, \mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Wtedy istnieje σ_1-zdanie χ_1, gdzie $\sigma_0 \cup \{<, c\} \subseteq \sigma_1$ oraz σ_1 jest skończona, takie, że:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi_1$, to $(A, <^A)$ jest częściowym porządkiem, a c^A elementem A o skończonej liczbie $<^A$-poprzedników.
- (b) Dla każdego $m \in \omega$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \chi_1$ oraz c^A ma co najmniej m $<^A$-poprzedników.

DOWÓD.

W oznaczeniach poprzedniego dowodu, niech $\sigma = \sigma_0$, $\sigma_1 = \sigma^+ \cup \{c\}$ oraz χ_1 niech będzie koniunkcją χ i zdania stwierdzającego, że c leży w polu $<$.

Najpierw udowodnimy (b). Niech dla danego $m \in \omega$ struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ spełniają ($\bigstar$) oraz niech $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A}_m \cong \mathfrak{B}_m$.

Definiujemy $\mathfrak{C}$ tak, jak w dowodzie I twierdzenia Lindströma, z następującymi modyfikacjami:

- (i) $<^C$ jest naturalnym porządkiem na $\{0, 1, \ldots, m\}$
- (ii) $P^C = \bigcup\limits_{n \leqslant m} I_n$.

Niech $c^C = m$. Wtedy $(\mathfrak{C}, c^C)$ spełnia (b).

Dla dowodu (nie wprost) (a), przypuśćmy, że istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla χ_1, w którym c^D ma nieskończenie wiele $<^D$-poprzedników. Tak jak w dowodzie I twierdzenia Lindströma, z $(\mathfrak{D}, c^D)$ otrzymujemy dwie *izomorficzne* struktury $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ takie, że: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$. To daje sprzeczność (izomorficzne modele muszą spełniać dokładnie te same zdania), a więc przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba odrzucić. Tym samym dowód (a) oraz całego lematu jest zakończony.

LEMAT 5.

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną. Jeśli dla $\psi \in L(\sigma)$ nie istnieje zdanie pierwszego rzędu o tych samych modelach, co ψ, to dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

($\bigstar$) $\quad \mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m, \mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

DOWÓD.

Załóżmy, że ψ jest spełnialna. W przeciwnym przypadku, teza lematu spełniona jest trywialnie: $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\exists v\ \neg v = v)$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnego $m \in \omega$ oraz wszystkich struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$:

(1) jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ będą wszystkimi nierównoważnymi logicznie zdaniami pierwszego rzędu o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$. Pamiętamy, że jeśli σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, to istnieje tylko skończenie wiele takich nierównoważnych logicznie formuł (dowodzimy tego faktu w KRP, przez indukcję po złożoności formuł). Wtedy:

(2) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $0 \leqslant i \leqslant k$ mamy: $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_i$.

Dla $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ niech $\varphi_{\mathfrak{A}}$ będzie koniunkcją wszystkich zdań ze zbioru:

$$\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \varphi_i\} \cup \{\neg\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \neg\varphi_i\}.$$

Na mocy (2) mamy wtedy, dla dowolnej $\mathfrak{B}$:

(3) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$.

Niech φ będzie alternatywą (skończenie wielu!) zdań $\varphi_{\mathfrak{A}}$, dla których zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi$, czyli φ jest zdaniem:

(4) $\bigvee\{\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma \wedge \mathfrak{A} \models \psi\}$.

Pokażemy, że:

(5) $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi)$

i uzyskamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Jeśli $\mathfrak{B}$ jest modelem ψ, to $\varphi_{\mathfrak{B}}$ należy do alternatywy (4) (jest jednym z jej członów). Ponieważ $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}$, więc $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Jeśli, z drugiej strony, $\mathfrak{B} \models \varphi$, to (na mocy (4)) istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$. Na mocy (3) mamy wtedy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, a na mocy (1) mamy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Mamy stąd sprzeczność, gdyż równoważność: $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$ oznacza, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(varphi)$. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost musimy odrzucić, co kończy dowód lematu 5.

II Twierdzenie Lindströma

Przed sformułowaniem II twierdzenia Lindströma trzeba wprowadzić kilka pojęć, których twierdzenie to dotyczy. Zakładamy, że czytelnik ma podstawowe wiadomości dotyczące elementarnej teorii rekursji, a więc że zna np. pojęcie zbioru rekurencyjnego, zbioru rekurencyjnie przeliczalnego, funkcji rekurencyjnej, itp.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***efektywna***, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $L(\sigma)$ jest rekurencyjny oraz dla każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje skończona $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taka, że $\psi \in L(\sigma_0)$.

Niech logiki $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ będą efektywne. Piszemy:

- (a) $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rekurencyjna F taka, że dla każdego $\psi \in L(\sigma)$ mamy: $F(\psi) \in L'(\sigma)$ oraz $Mod^\sigma_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod^\sigma_{\mathcal{L}'}(F(\psi))$.

- (b) $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ oraz $\mathcal{L}' \leqslant_{eff} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$, to mówimy, że $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ są ***efektywnie równoważne***.

Dla przykładu:

- $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^2$, słaba logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^{w2}$, logika $\mathcal{L}(Q_1)$ (czyli logika z kwantyfikatorem „istnieje nieprzeliczalnie wiele") są efektywne
- $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ nie jest efektywna
- $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{eff} \mathcal{L}^{w2}$
- $\mathcal{L}^{w2} \leqslant_{eff} \mathcal{L}^2$.

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ jest ***efektywnie regularna***, gdy $\mathcal{L}$ jest efektywna oraz dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zachodzą następujące warunki:

- (i) istnieją funkcje rekurencyjne $\varphi \mapsto \neg\varphi$ oraz $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \vee \psi$ (i podobnie dla pozostałych spójników)
- (ii) dla każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^U$
- (iii) istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^r$ (przy tym sygnatura σ^r musi być rekurencyjna).

Niech logika $\mathcal{L}$ będzie efektywna. Mówimy, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest ***rekurencyjnie przeliczalny***, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $\{\varphi \in L(\sigma) : \emptyset \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Mówiąc, że ten ostatni zbiór jest rekurencyjnie przeliczalny mamy oczywiście na myśli to, że zbiór kodów jego elementów (uzyskanych przez jakąś funkcję rekurencyjną, czyli np. przez numerację Gödlowską) jest rekurencyjnie przeliczalny.

II TWIERDZENIE LINDSTRÖMA

Niech $\mathcal{L}$ będzie efektywnie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{eff} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema oraz zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, to $\mathcal{L}_{\omega\omega} \sim_{eff} \mathcal{L}$.

DOWÓD.

Niech $\mathcal{L}$ spełnia założenia twierdzenia. Pokażemy, że $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}_{\omega\omega}$ w dwóch krokach:

- $(*)$ Najpierw pokażemy, że spełniony jest następujący warunek:

  $(\bigstar)$ Dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ oraz każdego $\psi \in L(\sigma)$ istnieje $\varphi \in L_{\omega\omega}(\sigma)$ takie, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod(\varphi)$.
- $(**)$ Potem pokażemy, że przejście od ψ do ϕ jest efektywne.

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest efektywna, więc wystarczy rozważać skończone sygnatury rekurencyjne. Ponieważ dla $\mathcal{L}$ istnieje efektywny odpowiednik własności zastępowania symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych przez predykaty, możemy ograniczyć się do sygnatur σ czysto relacyjnych.

Niech zatem σ będzie: rekurencyjna, skończona i relacyjna.

Poprowadzimy dowód kroku $(*)$ metodą nie wprost, korzystając z lematów 4 i 5 oraz z Twierdzenia Traktenbrota.

Przypuszczamy zatem, że ($\bigstar$) nie zachodzi, czyli że $\psi \in L(\sigma)$ oraz że żadne zdanie pierwszego rzędu nie ma dokładnie tych samych modeli co ψ.

Na mocy lematu 5, dla każdej m istnieją $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

- $\mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m$
- $\mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$
- $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Spełnione są więc założenia lematu 4. Istnieją zatem: sygnatura σ_1 oraz zdanie χ_1 z tezy tego lematu.

Rozszerzamy σ_1 przez dodanie jednoargumentowego predykatu W i rozważamy zdanie $\vartheta \in L(\sigma_1 \cup \{W\})$ o następującej postaci:

$$\chi_1 \wedge \exists x\, W(x) \wedge \forall x\, (W(x) \to x < c).$$

Na mocy własności zdania χ_1 mamy wtedy:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\}}$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$, to zbiór W^A jest niepusty i skończony.
- (b) Dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ oraz W^A ma dokładnie m elementów.

Tak więc, jeśli $\mathfrak{A}$ przebiega wszystkie modele ϑ, to W^A przebiega wszystkie (niepuste) zbiory skończone (pamiętajmy, że wszystkie rozważane logiki mają własność izomorfizmu).

Z powyższych warunków (a) i (b) otrzymamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Na mocy twierdzenia Traktenbrota istnieje rekurencyjna i skończona sygnatura σ_2 taka, że zbiór wszystkich σ_2-zdań prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (tej sygnatury) nie jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

Możemy założyć, że σ_2 jest czysto relacyjna i rozłączna z $\sigma_1 \cup \{W\}$.

Niech F będzie odwzorowaniem rekurencyjnym $\varphi \mapsto F(\varphi)$, ze zbioru $L(\sigma_2)$ w $L(\sigma_2)$ taką, że $Mod(\varphi) = Mod(F(\varphi))$. Wtedy dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma_2)$:

- ($\blacklozenge$) φ jest prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych (sygnatury σ_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\models^{\mathcal{L}} \vartheta \to (F(\varphi))^W$.

Aby udowodnić równoważność ($\blacklozenge$), trzeba dowieść implikacji prostej oraz odwrotnej.

$\Rightarrow$ Niech φ będzie prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych oraz $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2}$ będzie taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$. Na mocy (a), W^A jest niepusty i skończony, a więc $[W^A]^{\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_2} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, a stąd $[W^A]^{\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_2} \models^{\mathcal{L}} F(\varphi)$. Wtedy $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_2 \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$.

$\Leftarrow$ Na mocy (b), dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ i W^A ma dokładnie m elementów. Stąd $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$, czyli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi^W$. W konsekwencji, $[^A]^{\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_2} \models \varphi$.

To kończy dowód (♦), a tym samym dowód kroku $(*)$.

Przechodzimy do dowodu kroku $(**)$. Niech $g^{\sigma}_{\mathcal{L}}$ będzie funkcją rekurencyjną, przypisującą numery (np. numery Gödlowskie) zdaniom logiki $\mathcal{L}$, czyli zdaniom ustalonej sygnatury rekurencyjnej σ. Na mocy faktu, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ istnieje dwuargumentowa relacja rekurencyjna, powiedzmy R, taka, że dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma)$:

- $\models^{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists m\ R(m, g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi))$.

Ustalmy wyliczenie $\langle \psi_n : n \in \omega \rangle$ wszystkich σ-zdań logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ takie, że przyporządkowanie $n \mapsto g^{\sigma}_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\psi_n)$ jest rekurencyjne. Niech G będzie funkcją rekurencyjną taką, że dla σ-zdań logiki $\mathcal{L}$:

- $G(g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi)) = ((\mu\langle m, n\rangle) R(m, g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi \equiv_{\mathcal{L}} (\psi_n)^{\mathcal{L}})))_1$

(tu $\langle\rangle$ jest np. pierwotnie rekurencyjną funkcją kodującą (pary) Cantora, a $()_1$ jest pierwotnie rekurencyjną funkcją rzutu, na pierwszy argument pary; $\mu\ x\ [\ldots]$ jest efektywnym μ-operatorem, czytanym: „najmniejsze x takie, że $[\ldots]$"). Powyżej zaznaczyliśmy wyraźnie, że bierzemy spójnik równoważności z logiki $\mathcal{L}$ oraz, że rozważamy „przekład" formuły ψ_n na stosowne zdanie logiki $\mathcal{L}$.

Niech φ^* będzie formułą $\psi_{G(g^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi))}$. Wtedy rekurencyjne odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi^*$ poświadcza, że $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Dowód II twierdzenia Lindströma został tym samym zakończony.

Przypomnijmy jeszcze sformułowanie twierdzenia Traktenbrota, na które powołujemy się w powyższym dowodzie (jego dowód podajemy w *Preliminariach matematycznych*, w dziale dotyczącym matematycznych modeli obliczalności).

> TWIERDZENIE TRAKTENBROTA. Istnieje skończona sygnatura σ taka, że zbiór wszystkich zdań (języka KRP o sygnaturze σ) prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych należących do Str_{σ} nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Oprócz powyższych twierdzeń Lindströma, znaleziono cały szereg innych jeszcze twierdzeń, charakteryzujących logiki abstrakcyjne maksymalne jeśli chodzi o wybrane zestawy własności. Twierdzenia te dotyczą zarówno logik z uogólnionymi kwantyfikatorami, jak i logik infinitarnych. Także logiki wyższych rzędów mogą być oczywiście traktowane jako logiki abstrakcyjne w omówionym wyżej sensie.

2.4. Kilka przykładów

Wspominaliśmy już na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM o logikach z uogólnionymi kwantyfikatorami. Dla przypomnienia, podajmy garstkę informacji o niektórych takich logikach.

Mostowski rozważał tzw. *kwantyfikatory numeryczne* Q_α, gdzie α jest liczbą porządkową. Znaczenie formuły $Q_\alpha x\varphi(x)$ określa się następująco:

- $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{M}) : \mathfrak{M} \models \varphi(x)[a]\}$ ma moc nie mniejszą od $\aleph_\alpha$.

W szczególności, Q_0 jest kwantyfikatorem, za pomocą którego wyrazić można pojęcia: *nieskończenie wiele* oraz *skończenie wiele*, ponieważ formuła $Q_0 x\varphi(x)$ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $dom(\mathfrak{M})$ istnieje co najmniej $\aleph_0$ obiektów, spełniających formułę $\varphi(x)$. Jak pamiętamy z elementarnego kursu logiki, pojęć tych nie można wyrazić w klasycznej logice pierwszego rzędu.

Mostowski formułuje pewne warunki, które muszą być spełnione, aby tak wprowadzone pojęcie miało porządną (i zamierzoną) semantykę. Do warunków takich należy to, że jeśli $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x\varphi(x)$ oraz struktury $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ są izomorficzne, to zachodzi również $\mathfrak{N} \models Q_\alpha x\varphi(x)$. Odpowiada to intuicjom związanym z kwantyfikatorem (numerycznym): ma on charakteryzować jedynie *liczbę* obiektów, nie przesądzając niczego o ich jakości.

Kwantyfikatory numeryczne Mostowskiego rozumieć można w sposób relacyjny: kwantyfikatorem (jednoargumentowym) jest rodzina Q par zbiorów (U, X), gdzie $X \subseteq U$ oraz jeśli $(U, X) \in Q$ i $|X| = |Y|$, $|U - X| = |V - Y|$, to $(V, Y) \in Q$. Symbol $|X|$ oznacza, przypomnijmy, moc zbioru X. Dla przykładu:

$$Q_0 = \{(U, X) : |X| \geqslant \aleph_0\}.$$

Kwantyfikatory tak rozumiane mogą być traktowane jako operacje Q spełniające następujące warunki:

- Jeśli $\varphi(x, \overrightarrow{y})$ jest formułą, to formułą jest również $Qx\varphi(x, \overrightarrow{y})$.
- $\mathfrak{M} \models Qx\varphi(x, \overrightarrow{y})[b, \overrightarrow{a}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(dom(\mathfrak{M}), \{b : \mathfrak{M} \models \varphi(x, \overrightarrow{y})[b, \overrightarrow{a}]\}) \in Q.$$

Jeśli $L_{\omega\omega}$ oznacza klasyczną logikę pierwszego rzędu, to niech $L_{\omega\omega}(Q)$ oznacza jej rozszerzenie otrzymane przez dodanie tak rozumianego kwantyfikatora Q.

Mostowski udowodnił, że $L_{\omega\omega}(Q_0)$ nie jest (efektywnie) aksjomatyzowalna. Niech θ będzie zdaniem:

$$\forall x \neg Q_0 y\ (y < x)$$

języka $L_{\omega\omega}(Q_0)$ i niech Π będzie aksjomatyką arytmetyki Peana (w języku $L_{\omega\omega}$), a $\mathfrak{N}_0$ modelem standardowym tej arytmetyki. Wtedy dla każdego zdania ϕ języka $L_{\omega\omega}$ mamy:

- $\mathfrak{N}_0 \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathfrak{M}$, jeśli $\mathfrak{M} \models \Pi$, to $\mathfrak{M} \models (\theta \rightarrow \phi)$.

Ponieważ, jak wiadomo, nie ma efektywnej procedury arytmetycznej dla rozstrzygania lewej strony tej równoważności, więc nie istnieje pełna metoda dowodowa dla $L_{\omega\omega}(Q_0)$.

Postawiony przez Mostowskiego problem, czy $L_{\omega\omega}(Q_1)$ jest aksjomatyzowalna został rozwiązany przez Keislera.

Mostowski podał także teorio-modelową charakterystykę kwantyfikatorów pierwszego rzędu: dowolne rozszerzenie logiki pierwszego rzędu otrzymane przez dodanie jednoargumentowego kwantyfikatora, które spełnia warunek:

- każde zdanie, które ma model nieskończony, ma też model każdej mocy nieskończonej

jest równoważne z logiką pierwwszego rzędu.

Ujęcie Mostowskiego doczekało się wkrótce uogólnienia, w pracach Lindströma (1969), gdzie rozważa się nie tylko kwantyfikatory jednoargumentowe, lecz również wieloargumentowe. Takimi są, dla przykładu:

- KWANTYFIKATOR HÄRTIGA. $I = \{(U, X, Y) : |X| = |Y|\}$
- KWANTYFIKATOR RESCHERA. $R = \{(U, X, Y) : |X| \leqslant |Y|\}$.

Te kwantyfikatory nie mogą zostać wyrażone w formalizmie Mostowskiego. Definicja Lindströma ma, w uproszczeniu, postać następującą:

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu* $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ nazywamy dowolną n-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.

Uogólnionym kwantyfikatorom poświęciliśmy osobny wykład. W większości przypadków była mowa o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych *monadycznych* binarnych, czyli typu $\langle 1, 1 \rangle$.

Kwantyfikatory rozważane przez Mostowskiego były typu $\langle 1 \rangle$, kwantyfikatory Härtiga i Reschera są typu $\langle 1, 1 \rangle$.

W 1959 roku Henkin rozważał inne rodzaje kwantyfikatorów, różne od kwantyfikatorów numerycznych Mostowskiego.

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema).

Symbol funkcyjny f wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ (gdzie Q_i są kwantyfikatorami klasycznymi: $\forall$ oraz $\exists$) ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$. Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy *wyborów niezależnych*. Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy. Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{array}\right> \phi(x, y, u, v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych. Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

Kwantyfikator Henkina to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \;\; = \;\; & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \;\; (a, f(a), b, f(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator Q_0 Mostowskiego jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina. Pojęcie „mocy wyrażania” języka było objaśnione wcześniej

Dalszych uogólnień dokonał w latach siedemdziesiatych XX wieku Barwise. Rozważał m.in. rozgałęzione prefiksy, w których występowały uogólnione kwantyfikatory (w sensie Lindströma).

Oto jeszcze kilka dalszych kwantyfikatorów uogólnionych:

$$\begin{gathered} \forall_M = \{M\}, \\ \exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\}, \\ (\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\}, \\ (\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\}, \\ (\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Reschera)}, \\ (\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Changa)}. \end{gathered}$$

Widać zatem, że również „zwykłe” kwantyfikatory można uważać za kwantyfikatory uogólnione (co jest dość oczywiste — dobre uogólnienie powinno uwzględniać przypadki wyjściowe).

Przez L_Q oznaczać teraz będziemy język KRP z kwantyfikatorem Q. Interpretacje L_Q wyznaczone będą przez semantyczną charakterystykę Q. Dla języka L_Q z ustaloną interpretacją semantyczną Q będziemy też używać terminu „logika L_Q”. Niech $\aleph_\alpha$ będzie α-tą mocą nieskończoną (gdzie α jest liczbą porządkową). Zamiast $\aleph_0$ piszemy czasem ω. Jeśli κ, λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to przez $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy język w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej niż κ oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ. Tak więc, $L_{\omega\omega}$ to język KRP, klasycznej logiki pierwszego rzędu. Przez $L_{\infty\lambda}$ rozumiemy język, w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ.

KWANTYFIKATOR „ISTNIEJE NIESKOŃCZENIE WIELE”

Wyrażenie $Q_0 x \; \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_0 wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_0 x \; \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieskończony.

Oto niektóre własności L_{Q_0}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu.

  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$.

- W L_{Q_0} nie zachodzi górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- L_{Q_0} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_0} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_0} zachodzi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\ \alpha(x), \exists^{\geqslant 2} x\ \alpha(x), \ldots}{Q_0 x\ \alpha(x)}.$$

- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w L_{Q_0} bez modeli skończonych jest zupełna.
- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w L_{Q_0}.
- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1 \omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\ \alpha(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\ \alpha(x).$$

KWANTYFIKATOR „ISTNIEJE NIEPRZELICZALNIE WIELE”

Wyrażenie $Q_1 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieprzeliczalnie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_1 wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_1 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieprzeliczalny.

Ograniczamy się do interpretacji nieprzeliczalnych.

Tak jak w L_{Q_0} definiowalne jest pojęcie skończoności, tak w L_{Q_1} definiowalne jest pojęcie przeliczalności.

Oto niektóre własności L_{Q_1}:

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w L_{Q_1}.
- Górne twierdzenie Löwenheima-Skolema nie zachodzi w L_{Q_1}. Dolne twierdzenie LS zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_1}.

- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.

KWANTYFIKATOR CHANGA

Wyrażenie $Q_c x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje tyle x takich, że $\alpha(x)$ ile jest obiektów w całym uniwersum.

Semantyka Q_c wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_c x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ ma taką samą moc, jak zbiór $dom(\mathfrak{A})$.

Oto niektóre własności L_{Q_c}:

- W modelach mocy $\aleph_1$ kwantyfikator Q_c ma taką samą interpretację, jak kwantyfikator Q_1.
- Teoria gęstych porządków liniowych nie jest zupełna w L_{Q_c}.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_c}. [Teoria ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów $\exists$ i Q_c.]
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model, którego moc jest liczbą kardynalną następnikową, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model mocy $\aleph_0$, to ma modele każdej mocy nieskończonej.
- Niech Val_1 będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_1$ i niech Val_ω będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_\omega$. Wtedy (przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum):
    1. Val_1 oraz Val_ω są rekurencyjnie przeliczalne.
    2. $Val_1 \cap Val_\omega$ jest zbiorem wszystkich L_{Q_c}-tautologii.

KWANTYFIKATOR „JEST WIĘCEJ A NIŻ B"

Wyrażenie $Q_M x\ \alpha(x)\beta(x)$ czytamy: jest więcej x takich, że $\alpha(x)$ niż x takich, że $\beta(x)$.

Semantyka Q_M wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_M x\ \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta[a]\}$.

Oto niektóre własności L_{Q_M}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_M} z dokładnością do izomorfizmu.
- L_{Q_M} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_M} nie zachodzi: ani dolne ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, ani twierdzenie o zwartości.
- Q_0 oraz Q_c są definiowalne w L_{Q_M}.

- L_{Q_M} jest logiką o znacznej „mocy wyrażania": można w niej sformułować np. zdanie, które ma model wtedy i tylko wtedy, gdy fałszywa jest uogólniona hipoteza kontinuum.

KWANTYFIKATOR HENKINA

Wyrażenie $Q_H(x, y, u, v)\alpha(x, y, u, v)$ jest skrótem dla formuły z następującym częściowo uporządkowanym prefiksem kwantyfikatorowym:

$$\begin{matrix} \forall x \text{——} \exists y & \searrow & \\ & & \alpha(x,y,u,v) \\ \forall u \text{——} \exists v & \nearrow & \end{matrix}$$

Semantyka dla tego kwantyfikatora wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_H xyuv\ \alpha(x, y, u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje f oraz g (określone na $dom(\mathfrak{A})$ i o wartościach w $dom(\mathfrak{A})$) takie, że $\mathfrak{A} \models \alpha(x, f(x), u, g(u))$.

Oto niektóre własności L_{Q_H}:

- Kwantyfikatory Q_0, Q_c oraz Q_M są definiowalne w L_{Q_H}.
- L_{Q_H} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_H} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_H} nie zachodzi ani dolne, ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że również L_{Q_H} ma znaczną „moc wyrażania".

* * *

Niektóre z wymienionych wyżej logik (z uogólnionymi kwantyfikatorami) są uporządkowane następująco pod względem mocy wyrażania (strzałka oznacza zachodzenie relacji $\prec$):

$$\begin{matrix} & & L_{Q_0} & \rightarrow & L_I & & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & & & \\ L_{\omega\omega} & & & & & & L_{Q_M} & \rightarrow & L_H \\ & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & L_{Q_R} & \rightarrow & L_{Q_w} & & & & \end{matrix}$$

(tu I jest kwantyfikatorem Härtiga, a Q_w jest kwantyfikatorem większości **most**: $Q_w x\alpha(x)\beta(x)$ ma semantykę odpowiadającą warunkowi, że *większość* obiektów, które spełniają $\alpha(x)$, spełnia $\beta(x)$).

* * *

Na początku drugiej połowy XX wieku rozpoczęto również intensywne badania logik *infinitarnych*. Wspominaliśmy już, że pewne pojęcia są niewyrażalne w $L_{\omega\omega}$, czyli w klasycznej logice pierwszego rzędu. Są one natomiast wyrażalne w $L_{\alpha\beta}$, dla stosownie dobranych α oraz β. Przypomnijmy parę przykładów:

- w $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można model standardowy arytmetyki Peana;
- w $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można klasę wszystkich zbiorów skończonych;
- teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna;
- predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$;
- pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne (pojedynczą formułą) w $L_{\omega_1\omega_1}$.

Jak wiadomo, logiki infinitarne, w których dopuszcza się nieskończone prefiksy kwantyfikatorowe są bliższe logice drugiego rzędu, z wszelkimi tego faktu konsekwencjami, a więc, w szczególności, brakiem pełności. Dla $L_{\omega_1\omega_1}$ zachodzi twierdzenie Scotta o niedefiniowalności predykatu prawdziwości w tymże języku; definiowalność jest tu rozumiana w odpowiedni sposób, z wykorzystaniem kodowań w klasie wszystkich zbiorów dziedzicznie przeliczalnych. Wśród logik infinitarnych o skończonych prefiksach kwantyfikatorowych szczególne miejsce zajmuje $L_{\omega_1\omega}$. Zachodzi w niej twierdzenie o pełności, gdy na obecną w niej infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny. Warunek ten jest istotny: istnieje nieprzeliczalny zbiór zdań języka $L_{\omega_1\omega}$, który nie ma modelu, a którego każdy przeliczalny podzbiór ma model. Przykład ten pokazuje jednocześnie, że ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\alpha\beta}$, gdzie $\alpha \geqslant \omega_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu, jak wiadomo ze słynnego twierdzenia Scotta o izomorfizmie. Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\alpha\omega}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).

Pierwsze zastosowania infinitarnych reguł inferencji znaleźć można (w mniej lub bardziej świadomej formie) m.in. w pracach Poincarégo, Löwenheima, Carnapa (zob. też np. podręcznik Ajdukiewicza z 1928 roku). Wraz z wyborem *finitystycznego* paradygmatu logiki pierwszego rzędu reguły takie usunięte zostają z tego paradygmatu.

Dołączenie do aparatury inferencyjnej ω-reguły pozwala, jak wiadomo, przeprowadzić w przypadku pewnych teorii dowody ich zupełności. W przypadku pewnych teorii jednak nawet tak silne środki dowodowe nie wystarczają: porównajmy w tym kontekście uwagi Mostowskiego (Mostowski 1967, s. 110; w pierwszym akapicie autor odnosi się do — z góry skazanych na niepowodzenie — prób uzyskania jakiejś charakterystyki teorii mnogości przy użyciu infinitarnych metod dowodowych, w drugim — do prób mocniejszego ugruntowania teorii mnogości np. w logice drugiego rzędu):

> Wszystkie te wyniki pokazują, że teoria mnogości oparta na aksjomatyce Zermelo-Fraenkla jest niezupełna i to w bardzo silnym stopniu. Oczywiście nikt nie oczekiwał, że okaże się ona zupełna, ale też nikt zapewne nie spodziewał się, że okaże się

ona tak słaba. Dowody niezależności przeprowadzone metodą Cohena pokazują, że — w odróżnieniu od arytmetyki liczb naturalnych — nie usuniemy niezupełności wzmacniając reguły wnioskowania np. przez przyjęcie tzw. reguły ω. Niezupełność aksjomatycznej teorii mnogości porównać można raczej do niezupełności teorii grup lub ciał lub podobnych teorii algebraicznych. Nikt nie dziwi się, że te teorie są niezupełne. Ich aksjomatyki były od początku sformułowane tak, by istniały dla nich różnorodne modele. W przypadku aksjomatów teorii mnogości intencja była odmienna, ale wyniki są niemal takie same.

Istnieją próby oparcia teorii mnogości (i wielu innych teorii matematycznych) na logice drugiego rzędu. Wydaje mi się, że próby te jakkolwiek mogą przynieść ciekawe rezultaty formalne, nie doprowadzą do wyjaśnienia podstaw teorii mnogości. W logice drugiego rzędu występuje bowiem pojęcie dowolnej własności. Reguły wnioskowania i aksjomaty logiki drugiego rzędu mają charakteryzować to pojęcie. Otóż jest jasne, że pojęcie to w równym stopniu domaga się sprecyzowania, jak pojęcie zbioru. Ponieważ matematycy z zasady dopuszczają tylko własności ekstensjonalne, więc nie ma żadnej różnicy między pojęciem zbioru a pojęciem własności rozpatrywanym w logice drugiego rzędu. W ten sposób opierając teorię mnogości na logice drugiego rzędu nie wyjaśniamy pojęcia zbioru, lecz sprowadzamy je do innego, w zasadzie mu równoważnego pojęcia.

Formuły logiki pierwszego rzędu $L_{\omega\omega}$ kodować można liczbami naturalnymi lub, co na jedno wychodzi, zbiorami dziedzicznie skończonymi, tj. elementami zbioru $H(\omega)$. Z kolei, formuły logiki $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami zbioru $H(\omega_1)$, tj. zbiorami dziedzicznie przeliczalnymi. Także dowody w $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami $H(\omega_1)$.

Dowody w logice $L_{\omega_1\omega}$ mają długość przeliczalną. Można jednak podać przykład zbioru zdań Γ oraz zdania σ z tego języka takich, że $\Gamma \models \sigma$, ale nie istnieje dowód σ z Γ w $L_{\omega_1\omega}$. Zbiór Γ można dobrać w ten sposób, aby był on Σ_1 na $H(\omega_1)$.

Zbiór $H(\omega_1)$ jest domknięty na tworzenie przeliczalnych podzbiorów oraz ciągów. Jednak fakt wspomniany w poprzednim akapicie wskazuje iż, mówiąc w uproszczeniu, $H(\omega_1)$ nie jest domknięty ze względu na operację odpowiadającą kodowaniu dowodów z dowolnych Σ_1 na $H(\omega_1)$ zbiorów formuł. Naturalne jest w tej sytuacji poszukiwanie takich zbiorów A zastępujących $H(\omega_1)$, które byłyby domknięte na operacje odpowiadające kodowaniom dowodów w A oraz rozważanie tylko takich formuł, które mają kody w A. Była to jedna z motywacji do rozpatrywania tzw. dopuszczalnych fragmentów L_A logiki $L_{\omega_1\omega}$.

Barwise odkrył, że istnieją przeliczalne zbiory (*admissible sets*) $A \subseteq H(\omega_1)$, które spełniają powyższe warunki. Są to więc takie uogólnienia zbiorów dziedzicznie skończonych, na których (jako na zbiorach kodów formuł) możliwe i sensowne jest uprawianie (uogólnionej) teorii rekursji oraz teorii dowodu. Udowodnił także swoje znamienite twierdzenie o zwartości: jeśli A jest przeliczalnym zbiorem dopuszczalnym, to każdy zbiór formuł języka L_A będący Σ_1 na A, którego każdy podzbiór (będący jednocześnie elementem A) ma model, sam również ma model. Twierdzenie Barwise'a ma mnogie zastosowania, m.in. pozwala np. udowodnić, że każdy przeliczalny przechodni model dla ZFC ma właściwe rozszerzenie końcowe. Prace Barwise'a to swego rodzaju unifikacja rozważań w teorii modeli, teorii rekursji oraz teorii mnogości.

Szczególnie przydatna dla badań zbiorów dopuszczalnych okazała się wersja teorii mnogości KP zaproponowana przez Kripke'go i Platka w połowie lat sześćdziesiątych XX wieku. Jest ona teorią elementarną, ze stałą pozalogiczną $\in$, będącą pewnym osłabieniem teorii mnogości Zermelo-Fraenkla. Nie ma w niej aksjomatu zbioru potęgowego, a szczególną rolę pełnią schematy aksjomatów Δ_0-*separation* oraz Δ_0-*collection* (odpowiedniki schematów aksjomatów wyróżniania i zastępowania), w których występują formuły klasy Δ_0. Zbiory przechodnie A takie, że $(A, \in)$ jest modelem KP nazywane są *zbiorami dopuszczalnymi* (*admissible sets*). Rozważa się także teorię KPU, czyli teorię KP z atomami.

Uwagi końcowe

Powyższe notatki mają charakter ***kompilacyjny***. Przygotowano je także z myślą o pracownikach Zakładu Logiki Stosowanej UAM, dla ułatwienia im wykonywania posługi dydaktycznej w zakresie logiki. Korzystaliśmy m.in. z następujących źródeł:

- Barwise, J. Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-theoretic logics.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. 1996. *Mathematical logic.* Springer.
- Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin. [Prawie wszystkie ustalenia z punktu pierwszego pochodzą z tej pracy.]
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Stegmüller, W., Varga von Kibéd, M. 1984. *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band III: Strukturtypen der Logik. Teil C.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.

- Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. **IV**, 1–131.
- Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.

Dowody wszystkich przytoczonych twierdzeń znaleźć można w wymienionych wyżej pracach. Na razie nie ma monografii w języku polskim, która przedstawiałaby w sposób systematyczny którykolwiek ze wspomnianych wyżej paradygmatów metalogiki (algebraiczny i semantyczny).

* * *

Postawmy na zakończenie tych notatek kilka przykładowych pytań, na które ma próbować odpowiedzieć przygotowywana monografia:

1. Czy możliwa jest unifikacja obu wspomnianych paradygmatów?
2. Jakie ewentualne korzyści mogłaby przynieść?
3. Jakie są związki między matematycznymi podstawami metalogiki a czynionymi w metalogice założeniami filozoficznymi?
4. Jakie są inspiracje/motywacje dla tworzenia nowych pojęć metalogicznych?
5. Jaki jest status takich pojęć, jak np.: *stała logiczna* w obu paradygmatach?

Nie podamy w tych notatkach odpowiedzi na powyższe pytania. Ograniczymy się jedynie do kilku wskazówek. Nie są to przy tym uwagi podane w jakikolwiek systematyczny sposób, mają one na razie charakter zebranych *ad hoc* konstatacji.

1. Paradygmat algebraiczny jest rozwinięty w przypadku rachunków zdaniowych. Z kolei, paradygmat nazwany tu semantycznym, za punkt wyjścia bierze języki pierwszego rzędu. Oczywiście, paradygmat algebraiczny może być stosowany także w przypadku języków pierwszego rzędu, jak pokazuje np. prezentacja tej problematyki w *The mathematics of metamathematics*. Dla właściwego algebraicznego ujęcia systemów logicznych z kwantyfikatorami potrzebujemy jednak algebr (np. algebr Boole'a) z nieskończonymi operacjami. Wykorzystywane są w takich ujęciach np. algebry cylindryczne lub algebry kwantyfikatorowe.

   Można się zastanawiać, jakie operacje algebraiczne wyznaczane są poprzez porządek w klasie logik abstrakcyjnych (w rozumieniu punktu drugiego tych notatek).

2. W paradygmacie algebraicznym wychodzimy od operacji konsekwencji, w ustalonym języku. Reprezentacje semantyczne (semantyka matrycowa) wyznaczone są w dużym stopniu przez algebrę tego języka. Z kolei, w paradygmacie nazywanym tu semantycznym punktem wyjścia jest (aksjomatycznie charakteryzowana) relacja spełniania. Status formuł (i zdań) jest tu inny niż w paradygmacie algebraicznym: zdaniom logik abstrakcyjnych odpowiadają klasy struktur relacyjnych (modeli).

Mówiąc Humanistycznie, głęboko mętnie, unifikacja obu paradygmatów miałaby na celu wykrycie (oraz wykorzystanie) ewentualnych warunków zgodności między: przejściem od operacji konsekwencji do semantyki (w paradygmacie algebraicznym), a przejściem od relacji spełniania do operacji konsekwencji (w paradygmacie semantycznym).

3. To bardzo trudne pytanie. Zwykle w charakterze przykładu związków między czynionymi w logice (oraz metalogice) założeniami filozoficznymi a wykorzystywaną na tym obszarze matematyczną aparaturą pojęciową podaje się zależności łączące intuicjonizm (oraz różne wersje konstruktywizmu) z wybranymi dla intuicjonizmu strukturami matematycznymi (algebraicznymi, topologicznymi, itd.), w odróżnieniu od stosownej reprezentacji matematycznej dla logiki klasycznej.

   Już sama matematyczna kodyfikacja metalogiki (w każdym z omówionych wyżej paradygmatów) implikuje przyjęcie określonego stanowiska filozoficznego. Dla przykładu, trudno sobie wyobrazić, aby istniały rozumne powody dla uprawiania parakonsystentnej *metalogiki* (choć systemy *logiki* parakonsystentnej mogą mieć ważkie aplikacje).

   Osobnym problemem jest np. dopuszczanie (lub nie) możliwości stosowania w metalogice rozumowań nieefektywnych, np. używanie aksjomatu wyboru, lematu Königa, różnych form aksjomatu wyróżniania.

4. Na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM mówiliśmy już o problematyce dotyczącej wyłaniania się pojęć metalogicznych, takich jak np.: pełność, różne rodzaje zupełności, kategoryczność, zwartość. Wspominaliśmy np. o rozdzieleniu (początkowo utożsamianych) pojęć odpowiadających, w dzisiejszej terminologii, kategoryczności oraz zupełności. W tym kontekście warto również zwrócić uwagę np. na rolę niektórych twierdzeń czysto matematycznych dla ustalania paradygmatu logiki (np. twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a).

5. Twierdzenia Pogorzelskiego-Wojtylaka przytoczone w punkcie 1.11. dostarczają przykładu pokazującego, że nie istnieje charakterystyka stałych logicznych logiki klasycznej, spełniająca pewne naturalne wymogi. Jak widzieliśmy, dla logiki intuicjonistycznej taka charakterystyka istnieje. W tym kontekście ważne są też uwagi Pogorzelskiego i Wojtylaka dotyczące możliwości uzyskania pożądanych charakterystyk stałych logicznych logiki klasycznej za cenę rozszerzenia rozumienia pojęcia operacji konsekwencji.

   Wnioskiem z twierdzeń Lindströma jest m.in. to, że klasyczna logika pierwszego rzędu jest maksymalną logiką (regularną!), która nie odróżnia mocy nieskończonych i która jest zwarta. Czy z tego mamy także jakiekolwiek wnioski na temat stałych logicznych (logiki pierwszego rzędu)?