# R O Z D Z I A Ł   I I

## *Gramatyki bezkontekstowe*

Przypomnijmy, że gramatykami bezkontekstowymi nazywamy wszystkie gramatyki o regułach produkcji kształtu $A \to P$, gdzie $P \in (V_N \cup V_T)^*$, zaś $A \in V_N$.

### 1. Gramatyki $\lambda$-wolne

**Twierdzenie 2.1.**

Każda gramatyka bezkontekstowa G jest równoważna pewnej gramatyce bezkontekstowej G' takiej, że wszystkie prawe strony w regułach produkcji w G' są różne od $\lambda$, za wyjątkiem, gdy $\lambda \in L(G)$, lecz wówczas reguła $S' \to \lambda$ jest jedyną regułą z prawą stroną równą $\lambda$, zaś S' nie pojawia się po prawej stronie w żadnej z pozostałych reguł produkcji.

**Idea twierdzenia.**

Twierdzenie to orzeka równoważność dowolnej gramatyki bezkontekstowej z pewną gramatyką kontekstową o kontekstach (tak prawym, jak i lewym) pustych. W związku z powyższym, każdą gramatykę bezkontekstową można przedstawić jako gramatykę kontekstową. W ten sposób, z twierdzenia tego oraz z definicji gramatyk typu 1 i 2, otrzymujemy następujący wniosek:

**Wniosek.**

Każda gramatyka bezkontekstowa jest zarazem gramatyką kontekstową. □

Wnosimy stąd dalej, że $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$, co przy zauważonym w poprzednim rozdziale $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_0$ oraz $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$ daje nam, że $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$.

**Dowód twierdzenia.**

Niech $G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$. Oznaczmy przez U zbiór tych elementów z $V_N$, z których (nie koniecznie bezpośrednio) można wyprowadzić $\lambda$. Zbiór taki jest oczywiście skończony (ze względu na skończoność alfabetu $V_N$). Definicję zbioru U można zapisać formalnie w postaci następującej równoważności dla $X \in V_N$: $X \overset{*}{\underset{G}{\to}} \lambda$ witw, gdy $X \in U$ (tj. U składa się wyłącznie z tych wszystkich nieterminałów, z których można wyprowadzić $\lambda$). Otrzymujemy stąd, że: $\lambda \in L(G)$ witw, gdy $S \in U$.

Tworzymy nową gramatykę $G' = \langle V_N, V_T, S, F' \rangle$ z nowymi regułami produkcji F'. Do F' zaliczamy <u>każdą</u> regułę produkcji postaci $X \to P'$, gdzie $P' \neq \lambda$, gdy istnieje

$P \in (V_N \cup V_T)^*$ takie, że $\ulcorner X \to P \urcorner \in F$, a P' powstaje z P przez wymazanie pewnej (dowolnej) liczby symboli należących do U. I tak np., gdy $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in U$, a $\ulcorner X \to Q_1A_1Q_2A_2 \ldots A_{n-1}Q_n \urcorner \in F$, to gdy z reguły tej usuniemy wszystkie symbole należące do U, to otrzymamy regułę $\ulcorner X \to Q_1Q_2 \ldots Q_n \urcorner \in F'$, a gdy usuniemy tylko pierwszy z nich, to otrzymamy $\ulcorner X \to Q_1Q_2A_2 \ldots A_{n-1}Q_n \urcorner \in F'$. Tak zdefiniowana gramatyka G' generuje język $L(G') = L(G) \setminus \{\lambda\}$. Zatem G' nie generuje $\lambda$, a po prawej stronie reguł produkcji $\lambda$ nie występuje, co daje tezę dla przypadku gdy $\lambda \notin L(G)$.

Pokażemy, że rzeczywiście $L(G') = L(G) \setminus \{\lambda\}$ (tj., że $L(G') = L(G)$, bo $L(G) \setminus \{\lambda\} = L(G)$ gdy $\lambda \notin L(G)$).

a) $L(G') \subseteq L(G) \setminus \{\lambda\}$, bo:

każda reguła produkcji $\ulcorner X \to P' \urcorner \in F'$ działająca w G', w G może być zastąpiona regułą $\ulcorner X \to P \urcorner \in F$ oraz zbiorem reguł postaci $\ulcorner Z \to \lambda \urcorner \in F$, gdzie $Z \in V_N$ i zarazem $Z \in U$ (tj. w sumie $Z \in V_N \cap U = U$).

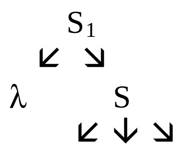
b) Pokażemy, że również $L(G) \setminus \{\lambda\} \subseteq L(G')$.

W tym celu wykażemy, że dowolne słowo z $L(G) \setminus \{\lambda\}$ jest zarazem słowem języka generowanego przez gramatykę G', tj. (zważywszy, że $G' = \langle V_N, V_T, S, F' \rangle$), że można je otrzymać stosując reguły F' przy nie zmienionych $V_N$, $V_T$ i S. W tym celu, przy jego derywacji stosujemy te reguły z F', które nie powodują późniejszego stosowania reguł postaci $X \to \lambda$ (reguły takie w F' zawsze istnieją, bo do F' zaliczyliśmy wszystkie reguły, które można otrzymać z F, stosując w ich prawych stronach <u>wszelkich możliwych kombinacji wykreśleń</u> symboli należących do U).

Rozpatrzmy zatem jeszcze przypadek, gdy $\lambda \in L(G)$.

Tworzymy gramatykę $G_1$: $G_1 = \langle V_N \cup \{S_1\}, V_T, S_1, F' \cup \{S_1 \to S, S_1 \to \lambda\} \rangle$.

Jest to gramatyka typu 1, gdy G ma produkować $\lambda$. Wyrażenie puste $\lambda$ możemy bowiem wyprodukować tylko z symbolu początkowego $S_1$, a pozostałe wyrażenia generowane przez tę gramatykę dadzą się wyprowadzić z S, i to (co już wcześniej wykazaliśmy) przy pomocy reguł F' o wymaganym kształcie reguł gramatyk kontekstowych (patrz rys. 2.1).




Rys. 2.1.

W tym przypadku również $L(G_1) = L(G)$, bo

$$L(G_1) = L(G') \cup \{\lambda\} = (L(G) \setminus \{\lambda\}) \cup \{\lambda\} = L(G),$$

gdzie ostatnią równość otrzymaliśmy z założenia, że $\lambda \in L(G)$. □

**Wniosek.**

Problem „$\lambda \in L(G)$" jest rozstrzygalny dla gramatyk typu 2 i 3.

**Uzasadnienie.**

Wystarczy, że pokażemy to dla gramatyk bezkontekstowych, bo każda gramatyka regularna jest gramatyką bezkontekstową. Dla dowolnej zaś gramatyki bezkontekstowej sprawdzamy, czy po sprowadzeniu jej do postaci gramatyki kontekstowej (co zawsze jest wykonalne na mocy powyższego twierdzenia), istnieje w niej reguła produkcji kształtu $S_1 \to \lambda$ (gdy odpowiedź jest pozytywna - to $\lambda \in L(G)$, a gdy odpowiedź jest negatywna - to $\lambda \notin L(G)$). □

Język L(G) nazywamy $\lambda$-wolnym witw, gdy $\lambda \notin L(G)$, zaś gramatykę nazywamy $\lambda$-wolną, jeśli $\lambda$ nie występuje po prawej stronie w żadnej z jej reguł produkcji.

**Wniosek (z twierdzenia).**

Dla każdej gramatyki rzędu 2, można efektywnie skonstruować gramatykę G' rzędu 2, która jest $\lambda$-wolna i taka, że $L(G') = L(G) \setminus \{\lambda\}$.

**Uzasadnienie.**

Gramatykę G' konstruujemy zgodnie z twierdzeniem, a następnie usuwamy z niej regułę $S_1 \to \lambda$ (gdzie $S_1$ jest jej symbolem początkowym). □

## 2. Postać normalna Chomsky'ego

Mówimy, że bezkontekstowa gramatyka G jest w postaci normalnej Chomsky'ego witw, gdy wszystkie reguły produkcji w G mają postać:

1) $X \to a$, gdzie $X \in V_N$, zaś $a \in V_T$ albo

2) $X \to YZ$, gdzie $X,Y,Z \in V_N$.

**Twierdzenie 2.2 (twierdzenie o postaci normalnej Chomsky'ego).**

Dla każdej bezkontekstowej $\lambda$-wolnej gramatyki G, istnieje równoważna jej gramatyka bezkontekstowa w postaci normalnej Chomsky'ego.

**Dowód.**

Dla każdej gramatyki bezkontekstowej $G = \langle V_N, V_T, S, F\rangle$, istnieje równoważna jej gramatyka bezkontekstowa $G' = \langle V_N', V_T, S, F'\rangle$ o regułach produkcji postaci:

1) $X \to a$, gdzie $X \in V_N'$, zaś $a \in V_T$ (są to reguły końcowe),

2) $X \to P$, gdzie $X \in V_N'$, a $P \in (V_N')^*$ (są to reguły rozszerzające).

G' tworzymy identycznie, jak to miało miejsce w dowodzie I twierdzenia o postaci normalnej (u nas oczywiście $P \in (V_N')^+$, bo rozważana gramatyka bezkontekstowa jest $\lambda$ - wolna). Z tak otrzymanej gramatyki G' możemy otrzymać gramatykę $G'' = \langle V_N'', V_T, S, F''\rangle$ zastępując każdą z reguł produkcji F' postaci $X \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ (gdzie $n \geq 3$) ciągiem reguł:

$$
\begin{array}{l}
X \to Y_1 Z_1 \\
\qquad Z_1 \to Y_2 Z_2 \\
\qquad\qquad Z_2 \to Y_3 Z_3 \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad Z_{n-3} \to Y_{n-2} Z_{n-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Z_{n-2} \to Y_{n-1} Y_n,
\end{array}
$$

gdzie symbole $Z_1, \ldots, Z_{n-2}$ są nowymi (nie występującymi nigdzie wcześniej) symbolami nieterminalnymi. W G'' każda z reguł produkcji F'' przyjmuje jedną z następujących postaci: $X \to a$,

$$X \to Y,$$

$$X \to YZ,$$

gdzie $X, Y, Z \in V_N''$, zaś $a \in V_T$. Zauważmy, że gramatyki G, G' i G'' są sobie równoważne, a w G'' (w stosunku do pożądanej gramatyki w postaci normalnej Chomsky'ego) nadmiarowe są jedynie reguły postaci $X \to Y$, gdzie $X, Y \in V_N''$. Celem wyzbycia się ich, dla każdego $X \in V_N''$, przez U(X) oznaczmy zbiór tych wszystkich nieterminałów, z których można wyprowadzić X jedynie za pomocą reguł postaci $P \to Q$ (gdzie $P, Q \in V_N''$), dodatkowo powiększony o zbiór jednoelementowy $\{X\}$.

Wprost z definicji U(X) otrzymujemy też, że:

jeśli $X, Y \in V_N''$, to $Y \overset{*}{\underset{G}{\to}} X$ witw, gdy $Y \in U(X)$.

Mając tak przygotowany grunt, w gramatyce G'' możemy wyeliminować wszystkie reguły z F'' postaci $X \to Y$ (gdzie $X, Y \in V''$), otrzymując tym samym gramatykę G''' z następującymi nowymi regułami produkcji F''':

1) $\ulcorner X \to a \urcorner \in F'''$, jeśli $\exists_{A \in V_{N''}}: (X \in U(A) \wedge \ulcorner A \to a \urcorner \in F'')$,

2) $\ulcorner X \to YZ \urcorner \in F'''$, jeśli $\exists_{A \in V_{N''}}: (X \in U(A) \wedge \ulcorner A \to YZ \urcorner \in F'')$.

Reguły te można zobrazować następującymi diagramami:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $V \to Z \to Y \to X \to a$ | - reguły F'' | $V \to Z \to Y \to X \to UV$ | - reguły F'' |
| | - reguły F''' | | - reguły F''' |

Diagram 2.1. Diagram 2.2.

Oczywiście, $G'' \equiv G'''$, a zatem (ponieważ zachodzi $G \equiv G''$) otrzymujemy stąd, że $G \equiv G'''$, tj. że $L(G) = L(G''')$. □

Niech G będzie dowolną (a więc nie koniecznie $\lambda$-wolną) gramatyką bezkontekstową, a $G_1$ niech będzie równoważną jej gramatyką z twierdzenia 2.1, w której jednak wszystkie reguły (z wyjątkiem reguł $S' \to \lambda$ i $S' \to S$) wchodzące w skład gramatyki G' o symbolu początkowym S', będą w postaci normalnej Chomsky'ego (gramatykę G' możemy doprowadzić do postaci normalnej Chomsky'ego na mocy tw. 2.2). O tak określonej gramatyce $G_1$ będziemy mówić, że jest ona w *rozszerzonej postaci normalnej Chomsky'ego*. Jeśli dodatkowo utożsamimy w niej symbole S i S', to wówczas otrzymamy ją w tzw. *Uproszczonej rozszerzonej postaci normalnej Chomsky'ego*.

**Twierdzenie 2.3.**

Dla każdej gramatyki bezkontekstowej G, problem przynależności dowolnego słowa P, „$P \in L(G)$”, jest rozstrzygalny.

**Dowód.**

Niech $G_1$ będzie gramatyką równoważną gramatyce bezkontekstowej G, przedstawioną w rozszerzonej postaci normalnej Chomsky'ego.

Gdy $P = \lambda$, to to, czy $\lambda \in L(G)$ zależy od tego, czy reguła $S' \to \lambda$ istnieje w $G_1$, czy też nie (gdy TAK - to TAK, a gdy NIE - to NIE).

Rozpatrzmy więc sytuację, gdy $P \neq \lambda$. Wówczas w derywacji słowa P, reguły produkcji postaci $X \to a$ są stosowane dokładnie $|P|$ razy, reguły produkcji postaci $X \to YZ$ - dokładnie $|P| - 1$ razy i jeszcze reguła produkcji $S' \to S$ jeden raz. Zatem długość całej derywacji wynosi $2\,|P|$. Tak więc, mając przedstawioną gramatykę G' w postaci normalnej Chomsky'ego, produkujemy w niej wszystkie możliwe derywacje o długości $2\,|P|$. Jeżeli którakolwiek z nich wyprodukuje słowo P, to będzie znaczyć, że $P \in L(G)$ (w przeciwnym razie $P \notin L(G)$). □

**Wniosek.**

Dla dowolnego skończonego języka L' i dla dowolnej bezkontekstowej gramatyki G, gdy $L = L(G)$, to problemy:

1) „$L' \subseteq L$”,

2) „$L \cap L' = \varnothing$”

są rozstrzygalne.

**Uzasadnienie.**

1) Ponieważ możemy rozstrzygnąć, czy każde ze słów języka L' jest słowem języka L (na mocy poprzedniego twierdzenia oraz ze skończoności języka L') - zatem możemy tym samym rozstrzygnąć, czy $L' \subseteq L$, czy też nie.
2) Problem ten możemy rozstrzygnąć sprawdzając (na mocy poprzedniego twierdzenia), czy którekolwiek ze słów skończonego języka L' jest słowem języka L (wówczas $L \cap L' \neq \emptyset$, a w przeciwnym przypadku $L \cap L' = \emptyset$). □

## 3. Drzewa derywacji

Drzewa derywacji gramatyk bezkontekstowych oznaczać będziemy za pomocą grafów. Ich w i e r z c h o ł k i oznaczać będą symbole, a k r a w ę d z i e - reguły produkcji. Rozpatrzmy to na konkretnym przykładzie.

**Przykład 2.1.**

Niech $G = \langle\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, S, F\rangle$,

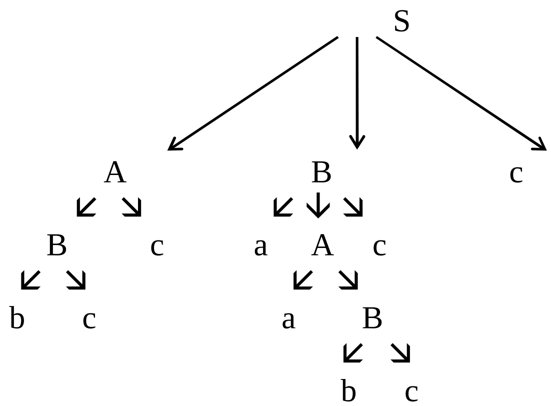
gdzie $F = \{S \rightarrow ABc, A \rightarrow aB, B \rightarrow aAc, A \rightarrow Bc, B \rightarrow bc\}$.

Rozpatrzmy derywację:

$S \rightarrow A\underline{B}c \rightarrow \underline{A}aAcc \rightarrow Bca\underline{A}cc \rightarrow \underline{B}caaBcc \rightarrow bccaa\underline{B}cc \rightarrow bccaabccc$

(podkreśleniem zaznaczono dodatkowo poprzedniki reguł produkcji, które będą stosowane w następnym kroku derywacji).

Derywację tę przedstawiamy w następujący graficzny sposób:




Rys 2.2. □

Graficzną reprezentacją derywacji jest więc skierowane drzewo, zwane d r z e w e m d e r y w a c j i. S, będące jego k o r z e n i e m, charakteryzuje się dwoma następującymi własnościami:

1) S nie jest końcem żadnej z jego krawędzi,

2) istnieje dokładnie jedna ścieżka skierowana z S do dowolnego z jego wierzchołków (przez ścieżkę skierowaną rozumiemy tu ciąg kolejnych wierzchołków branych zgodnie z kierunkiem strzałek reprezentujących reguły produkcji).

Długością drzewa (skierowanego) nazywamy długość najdłuższej jego ścieżki (skierowanej).

Tak określone drzewo derywacji wcale nie określa porządku derywacji. Z traktującą o tym problematyką wieloznaczności i jednoznaczności wywodu, szerzej zapoznamy się w 6. paragrafie tego rozdziału.

## 4. Rozstrzygalność problemów. Twierdzenie o pompowaniu

Jak już wiemy, dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej G, rozstrzygalne są następujące problemy:

1) problem przynależności słowa pustego $\lambda$: „$\lambda \in L(G)$” (wn. z tw. 2.1),

2) problem przynależności dowolnego słowa P: „$P \in L(G)$” (tw. 2.3).

Ponadto, dla dowolnego skończonego języka L', gdy L = L(G), to rozstrzygalne są następujące problemy:

3) „$L' \subseteq L$”,

4) „$L \cap L' = \varnothing$”.

„1)” jest oczywiście szczególnym przypadkiem „2)”.

Mając dodatkowo zdefiniowane drzewa derywacji gramatyk bezkontekstowych, możemy zająć się jeszcze zbadaniem rozstrzygalności innych problemów dla gramatyk bezkontekstowych. Podstawowym jest tutaj następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.4.**

Dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej G, problem „$L(G) = \varnothing$”, jest rozstrzygalny.

**Dowód.**

Niech $G = \langle V_N, V_T, S, F\rangle$, a $G' = \langle V_N, V_T, S, F'\rangle$ niech będzie równoważną jej gramatyką z twierdzenia 2.1.

1) Gdy w F' występuje reguła $S \to \lambda$, to problem pustości języka L(G) jest rozstrzygalny (bowiem $\lambda \in L(G') = L(G)$, więc $L(G) \neq \varnothing$).

2) Rozpatrzmy więc przypadek, gdy w F' nie występuje reguła $S \to \lambda$, tj. gdy gramatyka G' jest $\lambda$-wolna (czyli gdy $\lambda$ nie występuje po prawej stronie w żadnej z reguł produkcji F').

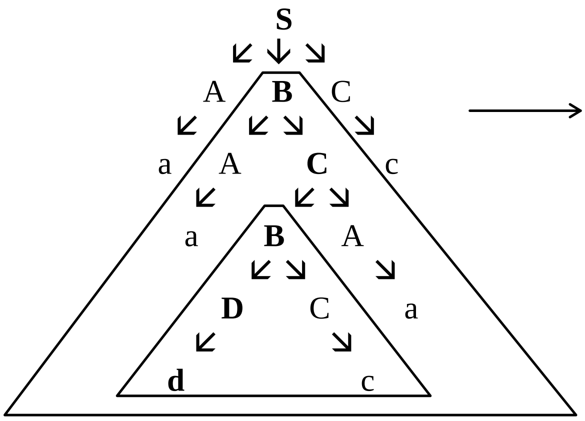
Oznaczmy przez n liczebność zbioru $V_N$ (tj. $card(V_N) = n$) oraz załóżmy, że $L(G) = L(G') \neq \varnothing$, czyli innymi słowy, że istnieje pewne słowo $P \in L(G')$.

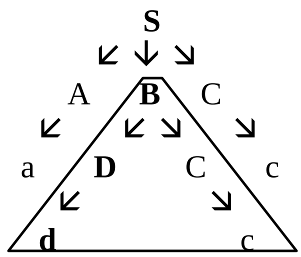
Wówczas możemy odnotować następujący **fakt**:

Jeśli najdłuższa ścieżka drzewa derywacji słowa $P \in L(G') = L(G)$ jest dłuższa niż n, to istnieje słowo $P' \in L(G') = L(G)$ takie, że najdłuższa ścieżka drzewa derywacji P' ma długość co najwyżej n.

**Uzasadnienie faktu.**

Niech najdłuższa ścieżka drzewa derywacji słowa P ma długość co najmniej n+1, tj. składa się z co najmniej n+2 wierzchołków. Wśród nich dokładnie jeden (ostatni) jest terminalny, zatem nieterminalnych jest tam co najmniej n+1 wierzchołków. Ponieważ jednak $card(V_N) = n$, więc co najmniej jeden z nich w ścieżce musiał się powtórzyć. Możemy więc zastąpić pewne poddrzewo jego poddrzewem właściwym wyznaczonym przez wierzchołek o tej samej nazwie (patrz rys. 2.3).




Tu rozpatrywaną ścieżką jest S, B, C, B, D, d. Poddrzewo wyznaczone przez pierwsze B z tej ścieżki, zastąpiliśmy poddrzewem wyznaczonym przez drugie B z tej ścieżki.

Rys. 2.3.

W wyniku tej operacji, otrzymujemy krótsze drzewo wywodu krótszego słowa języka L(G) = L(G'). Operację tę kontynuujemy tak długo, aż otrzymamy drzewo o długości każdej ścieżki co najwyżej n (zawsze jest to wykonalne). □ (uzasadnienia)

Pokazaliśmy więc, że język L(G') jest niepusty witw, gdy posiada słowo o drzewie derywacji długości co najwyżej n. Możemy więc zastosować następującą procedurę badania niepustości $\lambda$-wolnego języka L(G') (=L(G)), generowanego przez gramatykę bezkontekstową G'.

Bierzemy korzeń drzewa S. Do niego stosujemy wszystkie możliwe reguły produkcji. Sprawdzamy, czy w którymś z przypadków otrzymaliśmy same terminały. Gdy TAK - to język jest niepusty. Z kolei gdy NIE - to w każdym z przypadków istnieje pewien nieterminał. Wówczas do wszystkich z nich stosujemy wszystkie możliwe reguły produkcji, itd. Krok ten powtarzamy co najwyżej n razy. Jeśli w tym czasie nie uda nam się otrzymać żadnego słowa utworzonego nad $V_T$, to język L(G') = L(G) jest pusty (w przeciwnym przypadku - jest on niepusty). Świadczy to o rozstrzygalności problemu pustości języka L(G). □ (dowodu)

Symbol nieterminalny X w gramatyce bezkontekstowej G nazywamy p a s y w - n y m (lub równoważnie: n i e c z y n n y m) witw, gdy nie da się w niej wyprowadzić z tego symbolu żadnego słowa końcowego (tj. utworzonego jedynie z terminałów). W przeciwnym przypadku, X nazywamy symbolem a k t y w n y m w tej gramatyce.

Symbol $X \in V_N \cup V_T$ nazywamy zaś n i e o s i ą g a l n y m, jeżeli nie występuje on w żadnym stanie wyprowadzalnym w gramatyce G z symbolu początkowego S. W przeciwnym przypadku nazywamy go symbolem o s i ą g a l n y m.

Niech X będzie nowym symbolem początkowym w gramatyce $G_X = <V_N, V_T, X, F>$ o tych samych alfabetach i regułach, co gramatyka $G = <V_N, V_T, S, F>$. Zatem X jest pasywny (w G) witw, gdy $L(G) = \varnothing$. Ponieważ zaś problem „$L(G) = \varnothing$" (na mocy poprzedniego twierdzenia) jest rozstrzygalny dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej G, a $G_X$ jest gramatyką bezkontekstową, otrzymujemy stąd następujący wniosek:

**Wniosek.**

Problem pasywności symbolu nieterminalnego w gramatyce bezkontekstowej G jest rozstrzygalny. □

Zajmijmy się jeszcze badaniem osiągalności symbolu $X \in V_N \cup V_T$.

Gdy X = S, to problem ten jest rozstrzygalny (bo tak określone X jest oczywiście osiągalne). Niech więc $X \neq S$. Ze zbioru F z $G = <V_N, V_T, S, F>$ usuwamy wszystkie te reguły produkcji, które po lewej stronie zawierają symbol X (nie interesuje nas bowiem, czy z X można coś wyprowadzić, lecz czy w ogóle można dojść do X), otrzymując tym samym reguły produkcji $F_1$. Konstruujemy nową gramatykę bezkontekstową:

$$G_x^{\lambda} = <\underbrace{(V_N \cup V_T) \setminus \{X\}}_{\text{nowe nieterminały}},\ \underset{\text{nowy terminał}}{\underset{\downarrow}{\{X\}}},\ S,\ \underbrace{F_1 \cup \{Y \to \lambda, \text{ o ile } Y \in (V_N \cup V_T) \setminus \{X\}\}}_{\text{nowe reguły produkcji}}>$$

Ze względu na swój alfabet terminalny, gramatyka ta może produkować jedynie: $\varnothing$, $\lambda$ i $X^i$ (dla $i \geq 1$). $L(G_X^{\lambda}) \neq \varnothing$, bo w $G_X^{\lambda}$ do $F_1$ dołączone są reguły produkcji postaci $Y \to \lambda$, dla każdego $Y \in (V_N \cup V_T) \setminus \{X\}$, a więc również dla Y = S; zatem $G_X^{\lambda}$ zawsze produkuje chociażby słowo puste $\lambda$. Jeżeli X jest nieosiągalny, to właśnie $L(G_X^{\lambda}) = \{\lambda\}$.

Z ostatniego wniosku z pierwszego paragrafu tego rozdziału, dla gramatyki $G_X^{\lambda}$ (jako bezkontekstowej), można efektywnie skonstruować gramatykę bezkontekstowa $G'^{\lambda}_X$, która jest $\lambda$-wolna i taka, że $L(G'^{\lambda}_X) = L(G_X^{\lambda}) \setminus \{\lambda\}$. Zatem możemy efektywnie skonstruować tak gramatykę bezkontekstową $G_X^{\lambda}$, jak i $\lambda$-wolną gramatykę bezkontekstową $G'_X{}^{\lambda}$.

Jeśli X jest nieosiągalny, to $L(G'_X{}^{\lambda}) = L(G_X^{\lambda}) \setminus \{\lambda\} = \{\lambda\} \setminus \{\lambda\} = \emptyset$. Jednak na podstawie poprzedniego twierdzenia, problem ten (tj. pustości języka $L(G_X^{\lambda})$) jest rozstrzygalny.

W sumie otrzymujemy stąd następujący wniosek:

**Wniosek.**

Problem nieosiągalności symbolu nieterminalnego w dowolnej gramatyce bezkontekstowej jest rozstrzygalny. □

Gramatykę bezkontekstową G nazywamy z r e d u k o w a n ą witw, gdy żaden z jej symboli nieterminalnych nie jest ani pasywny ani nieosiągalny.

Z powyższych wniosków otrzymujemy więc następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.5.**

Dla każdej gramatyki bezkontekstowej G, możemy efektywnie skonstruować równoważną jej bezkontekstową gramatykę zredukowaną. □

Poniżej podajemy naczelne w tym rozdziale twierdzenie.

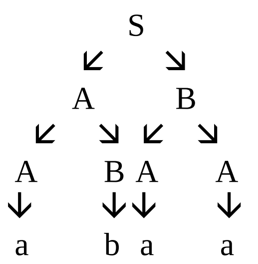
**Twierdzenie 2.6 (twierdzenie o pompowaniu).**

Niech L będzie językiem generowanym przez gramatykę bezkontekstową G o $card(V_N) = n$. Każde słowo $P \in L$ o długości większej niż $2^n$ ma wówczas postać $P = UXWYZ$, gdzie $XY \neq \lambda$, $|XWY| \leq 2^n$, a dla każdego $i \geq 0$ do L należy każde słowo postaci $UX^i\, WY^i\, Z$, gdzie $U, X, W, Y, Z \in V_T^*$ .

**Dowód.**

Niech $G = \langle V_N, V_T, S, F\rangle$, a $G' = \langle V_N, V_T, S, F'\rangle$ niech będzie równoważną jej gramatyką z twierdzenia 2.1. Wszystkie jej reguły (za wyjątkiem reguły $S \to \lambda$) można przedstawić w postaci normalnej Chomsky’ego (tj. jedynie w postaci $X \to a$ lub $X \to YZ$, gdzie $a \in V_T$, zaś $X,Y,Z \in V_N$ ).

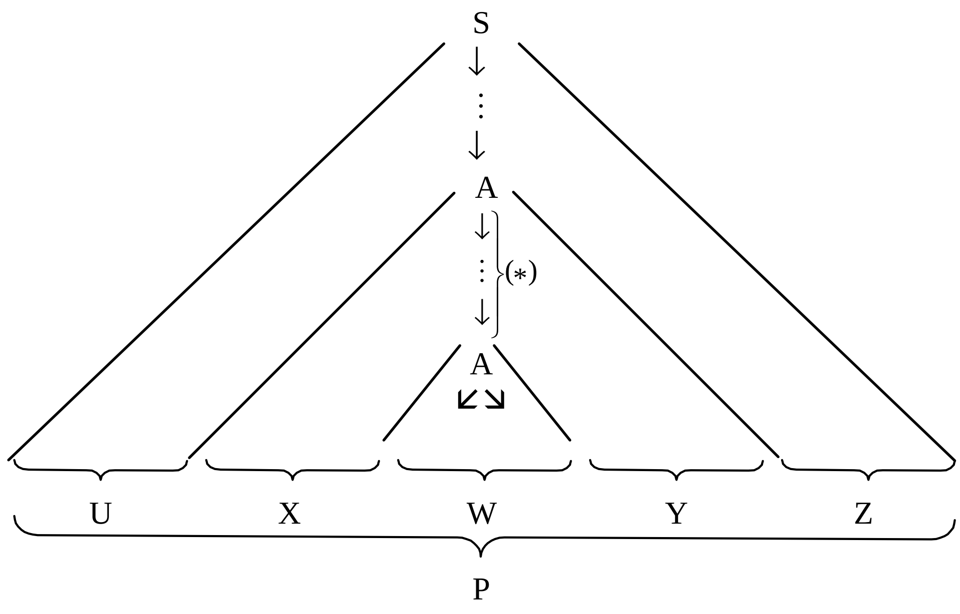
Jeśli $P \in L(G)$ i $|P| > 2^n$, to najdłuższa ścieżka w drzewie derywacji P musi być dłuższa niż n+1 (bo w przeciwnym przypadku, w najlepszym razie gdyby wszystkie były równe n+1, to otrzymalibyśmy sytuację, jak na rys. 2.4, a więc |P| była by zaledwie równa $2^n$).




Rys. 2.4.

Zatem ścieżka ta musi mieć długość co najmniej n+2, a nie licząc pierwszej produkcji od symbolu początkowego - co najmniej n+1.

Rozpatrzmy w niej ostatnie n+1 krawędzi (jest to możliwe na mocy poprzedniego zadania). Wyznaczona przez nie ścieżka składa się z n+2 wierzchołków, wśród których ostatni jest symbolem terminalnym. Zatem pozostałe z nich - to n+1 symboli nieterminalnych, a ponieważ $card(V_N) = n$, więc wśród nich co najmniej jeden musiał się powtórzyć. Niech np. będzie to symbol $A \in V_N$. Mamy więc sytuację jak na rys. 2.5.

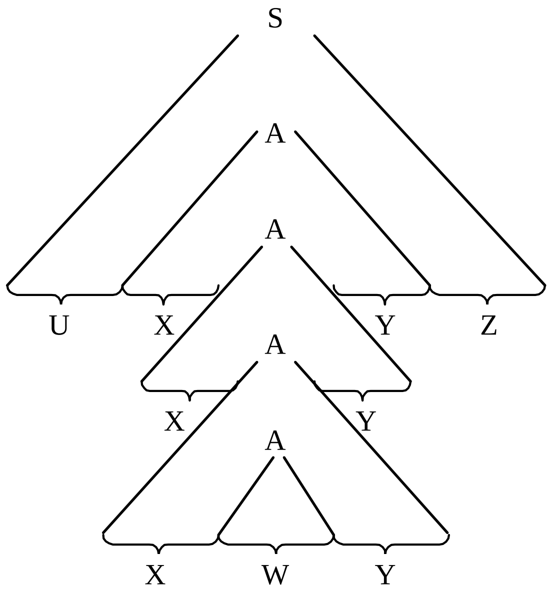



Rys. 2.5.

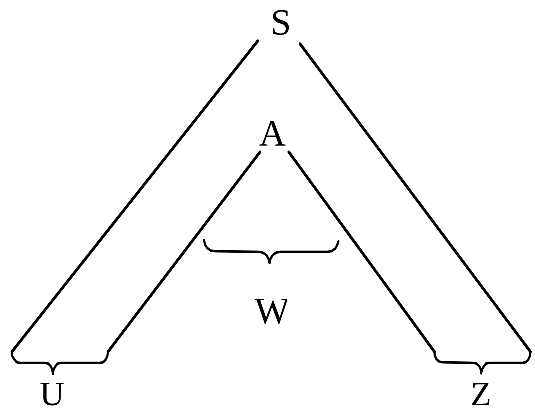
Ciąg reguł produkcji (∗) można powtórzyć, otrzymując zastąpienie W na XWY. Operację tę można kontynuować, w wyniku czego otrzymamy słowa $UX^iWY^iZ \in L(G)$ dla każdego $i \geq 1$ (właśnie ta operacja nazywana jest pompowaniem). W ten sposób, przez prostą indukcję, możemy pokazać, że jeżeli $P = UX^iWY^iZ$, to $\forall_{i \geq 1}\ P \in L(G)$.

Postać P = UWZ otrzymamy, gdy usuniemy ciąg reguł (∗) (da to nam tezę dla i = 0).

Obydwie te sytuacje przedstawiono na rys. 2.6 i 2.7.




Rys.2.6.




Rys. 2.7.

Po lewej stronie przedstawiono derywację słowa $UX^3WY^3Z$, a po prawej stronie - słowa $UX^0WY^0Z = UWZ$.

Ponieważ XWY powstawało z A, a z konstrukcji najdłuższa ścieżka o początku w A ma długość co najwyżej n+1 (tj. składa się ona z co najwyżej n+2 wierzchołków, wśród których ostatni jest symbolem terminalnym, a pozostałe z nich - to co najwyżej n+1 symboli nieterminalnych) - zatem $|XWY| \leq 2^n$. Nadto $XY \neq \lambda$ (tj. $X \neq \lambda$ lub $Y \neq \lambda$), bo chociażby pierwsza reguła produkcji z korzenia A poddrzewa wyprowadzenia wyrażenia XWY ma postać $A \to CD$ (gdzie C, D - pewne nieterminały). □

**Wniosek 1.**

Istnieją języki nie będące językami bezkontekstowymi.

**Dowód.**

Jak to podaliśmy w przykładzie 1.5, język $L(G) = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$ jest generowany przez gramatykę $G = \langle\{a, b, c\}, \{S, X, Y\}, S, F\rangle$, gdzie $F = \{S \to abc, S \to aXbc, Xb \to bX, Xc \to Ybc, bY \to Yb, aY \to aaX, aY \to aa\}$.

Z kształtu reguł produkcji gramatyki G wnioskujemy, że jest to język typu 0 (nawiasem mówiąc, jak się później przekonamy w ramach wniosku z twierdzenia 5.1, jest to właściwie język typu 1, tj. kontekstowy). Obecnie pokażemy, że nie jest to język bezkontekstowy, tj. że nie może być on generowany przez gramatykę bezkontekstową. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że jest on właśnie generowany przez pewną gramatykę bezkontekstowa G'. Wówczas jednak stosuje się do niego twierdzenie o pompowaniu, na mocy którego otrzymujemy, że skoro zawiera on słowo $a^k b^k c^k$ dla pewnego $k \geq 1$, więc musiałyby należeć do niego także wszystkie słowa postaci $UX^iWY^iZ$ (dla każdego $i \geq 0$), gdzie U,X,W,Y,Z byłyby pewnymi kolejnymi kawałkami słowa $a^k b^k c^k$. Jakkolwiek jednak będziemy dzielić słowo $a^k b^k c^k$

na pięć kolejnych części U,X,W,Y,Z, to po „napompowaniu” tego słowa okaże się, że otrzymamy słowo nie będące postaci $a^n b^n c^n$, co daje nam sprzeczność. Rzeczywiście:

– gdy np. przyjmiemy X=a (prawe) i Y=c (lewe), to już
– po pojedynczym napompowaniu (tj. dla i=2) otrzymamy słowo $a^{n+1}\ b^n\ c^{n+1}$, tj. o złej postaci;
– gdy zaś przyjmiemy np. $X=a^p b^q$, a $Y=b^q c^p$, to też już po pojedynczym napompowaniu otrzymamy słowo $a^{n-p}a^p b^q a^p b^p b^{n-2q} b^q c^p b^q c^p c^{n-p} = a^n b^q a^p b^q c^p b^q c^n$, a więc również o niewłaściwej postaci.

Po chwili zastanowienia przekonamy się, że do niewłaściwej postaci będziemy dochodzić przy dowolnym (a więc każdym) podziale słowa $a^k b^k c^k$ na pięć kolejnych części U,X,W,Y,Z. □

Zajmijmy się jeszcze problemem generowania przez gramatykę kontekstowa języka nieskończonego. Z twierdzenia o pompowaniu otrzymujemy następujący wniosek:

**Wniosek 2.**

Dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej G, problem „L(G) jest nieskończony” jest rozstrzygalny.

**Dowód.**

Niech G będzie gramatyką bezkontekstową. Wykażemy najpierw, że:

L(G) jest nieskończony witw, gdy $\exists\ P \in L(G)$: $2^n < |P| \leq 2 \cdot 2^n$.

1) - dowód implikacji w lewą stronę.

W dowodzie twierdzenia o pompowaniu pokazaliśmy, że zachodzi ono dla takiego P, że $|P| > 2^n$, a nadto z założenia $P \in L(G)$, więc (zgodnie z twierdzeniem o pompowaniu) - słowo to można tak podzielić na części U,X,W,Y,Z, by do L(G) należało każde słowo postaci $UX^iWY^iZ$ dla każdego $i \geq 0$. Ponieważ takich słów jest nieskończenie wiele, więc L(G) jest nieskończony.

2) - dowód implikacji w prawą stronę.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że L(G) jest nieskończony, lecz nie istnieje takie słowo $P \in L(G)$, które spełniałoby nierówność: $2^n < |P| \leq 2 \cdot 2^n$, tj. że wszystkie słowa języka L(G) mają długość co najwyżej $2^n$ lub są dłuższe niż $2 \cdot 2^n$. Ponieważ jednak słów o długości co najwyżej $2^n$ (nad skończonym alfabetem) jest jedynie skończona ilość, a język L(G) jest nieskończony, więc musi on zawierać nieskończenie wiele słów o długości większej niż $2 \cdot 2^n$. Weźmy jedno z nich i oznaczmy przez $P_1$ (takie słowo musi istnieć, w odróżnieniu od słowa o długości co najwyżej |P|, które jedynie może istnieć). Sytuację tą przedstawia diagram 2.2.

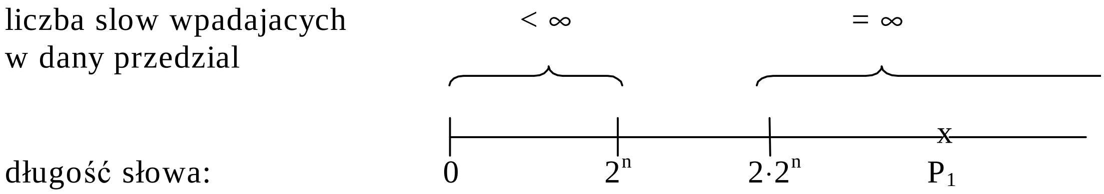
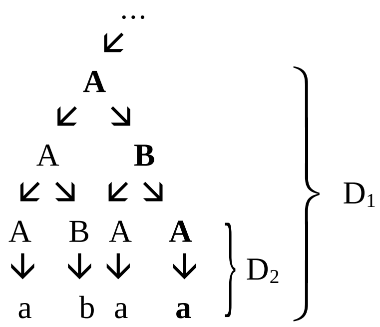



Diagram 2.2.

W ramach dowodu twierdzenia 2.4 wykazaliśmy następujący fakt:

Jeśli najdłuższa ścieżka drzewa derywacji słowa P jest dłuższa niż n (gdzie $n=card(V_N)$), to istnieje słowo $P' \in L(G') = L(G)$ takie, że najdłuższa ścieżka drzewa derywacji P' ma długość co najwyżej n.

Otrzymujemy z niego, że jeżeli słowo $P_1 \in L(G)$, to i pewne słowo $P_1'$ o długości co najwyżej $2^n$ należy do L(G). Zmodyfikujmy nieco (przez uściślenie) metodę redukcji (przedstawioną w dowodzie powyższego faktu) drzewa wywodu słowa $P_1$ do drzewa wywodu słowa $P_1'$. Dotychczas, jeśli w najdłuższej ścieżce powtórzył się kilka razy pewien symbol nieterminalny X, to w danym kroku zastępowaliśmy poddrzewo wyznaczone przez symbol X jego właściwym poddrzewem wyznaczonym również przez X. Tym razem nie będziemy jednak tego dokonywać w tak dowolny sposób. W najdłuższej ścieżce w danym kroku najpierw rozpatrzymy, który symbol, licząc od dołu, najwcześniej się powtórzy, a następnie poddrzewo wyznaczone przez drugie „od dołu" wystąpienie tego symbolu zastąpimy jego właściwym poddrzewem wyznaczonym przez pierwsze „od dołu" jego wystąpienie w tej ścieżce. W ten sposób, w każdym kroku, będziemy otrzymywać drzewo wywodu słowa o długości krótszej od poprzedniego o co najwyżej $2^n$ -1 (ten skrajny przypadek otrzymamy, gdy w drzewie wywodu, w najdłuższej ścieżce, n kolejnych od dołu symboli nieterminalnych wyczerpie cały ich alfabet, a dopiero na n+1 miejscu pojawi się pierwszy od dołu symbol tej ścieżki, a ponadto wszystkie ścieżki o wierzchołku w tym punkcie będą równej długości, jak to przedstawia rys. 2.8).




Rozpatrując pierwszą od prawej ścieżkę ABAa - zastępujemy poddrzewo $D_1$ wyznaczone przez pierwsze A tej ścieżki przez jego poddrzewo $D_2$, wyznaczone przez ostatnie A tej ścieżki. Tym samym zmniejszamy długość słowa o 4 (=$2^n$, gdzie n = card({A, B})=2) minus 1, tj. o 3. Wszystkie ścieżki brane od górnego A mają tu jednakową długość = 3.

Rys. 2.8.

W ten właśnie sposób, redukując drzewo wywodu słowa $P_1$ o długości większej niż $2 \cdot 2^n$, do drzewa wywodu słowa $P_1'$ o długości co najwyżej $2^n$, w którymś momencie będziemy mieli drzewo wywodu słowa o długości między $2^n$ a $2 \cdot 2^n$. Otrzymujemy to wprost z faktu, że przedział ten ma szerokość $2^n$, a za każdą redukcją poddrzewa drzewa wywodu do pewnego jego poddrzewa - skracamy długość słowa o co najwyżej $2^n$ -1. Ponieważ prawa strona dopiero co udowodnionej równoważności jest rozstrzygalna (na mocy tw. 2.3), więc i rozstrzygalna jest jej lewa strona, tj. rozstrzygalny jest problem nieskończoności języka generowanego przez gramatykę kontekstową. □

W ten sposób (w paragrafie tym) wykazaliśmy, że dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej G, rozstrzygalne są dodatkowo następujące problemy:

1) problem pasywności symbolu nieterminalnego,
2) problem nieosiągalności symbolu nieterminalnego,
3) problem generowania języka pustego,
4) problem generowania języka nieskończonego.

## 5. Postać normalna Greibach

Mówimy, że gramatyka bezkontekstowa G jest w *postaci normalnej Greibach* witw, gdy każda z jej reguł produkcji ma postać

$$A \rightarrow aX, \text{ gdzie } A \in V_N, a \in V_T, X \in V_N^* .$$

Oczywiście, że względu na kształt reguł produkcji, każda gramatyka w postaci normalnej Greibach jest gramatyką bezkontekstową (gdzie wymagamy, by wszystkie reguły produkcji miały postać $A \rightarrow P$, gdzie $P \in (V_N \cup V_T)^*$, zaś $A \in V_N$). O tym, jak wygląda sytuacja w drugą stronę, mówi nam następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.7 (o postaci normalnej Greibach).**

Dla każdej $\lambda$ - wolnej gramatyki bezkontekstowej G, istnieje równoważna jej gramatyka $G_1$ w postaci normalnej Greibach. □

## 6. Jednoznaczność i wieloznaczność wywodu

Jak to już stwierdziliśmy w 3. paragrafie tego rozdziału, drzewo derywacji wcale nie określa porządku derywacji. Zagadnienie to wiąże się właśnie z traktującą o tym problematyką wieloznaczności i jednoznaczności wywodu. Rozpocznijmy nasze rozważania od rozpatrzenia poniższego przykładu.

**Przykład 2.2.**

Niech $G = \langle V_N, V_T, S, F\rangle$, gdzie $V_T = \{a, b, c, +, \cdot\}$, $V_N = \{S\}$, S jest symbolem początkowym, a $F = \{S \to S+S, S \to S \cdot S, S \to a, S \to b, S \to c\}$.

Gramatyka ta generuje wszelkie ciągi postaci: a+b·c, a·b·c+b+a+c·c, ... Jeśli przyjmiemy interpretację semantyczną, traktująca a, b i c jako liczby rzeczywiste i przyporządkowującą symbolom „+” i „·” operacje odpowiednio dodawania i mnożenia tych liczb, to słowa generowane przez tę gramatykę możemy traktować jako funkcje algebraiczne trzech zmiennych. Jednoznaczność tych nazw otrzymujemy ze znanej powszechnie umowy, w myśl której mnożenie jest działaniem wiążącym mocniej od dodawania. Wówczas wyrażenie a·b+c będziemy rozumieć jako (a·b)+c, a nie jako a·(b+c). Jednak przy braku powyższej umowy nie wiemy, w jaki sposób powinniśmy je rozumieć. Podobnie, gdybyśmy założyli, że symbol „+” odpowiada nie operacji dodawania, lecz pewnej innej operacji dwuargumentowej, która nie jest łączna - nie wiedzielibyśmy, czy w wyrażeniu a+b+c chodzi o (a+b)+c, czy też o a+(b+c). Słowo to miałoby wówczas powyższe dwa znaczenia, a jego wyprowadzenie byłoby wieloznaczne. □

Rozróżniamy dwa r o d z a j e w i e l o z n a c z n o ś c i :

1) r z e c z y w i s t ą (lub równoznacznie: ś c i s ł ą ),

2) p o z o r n ą .

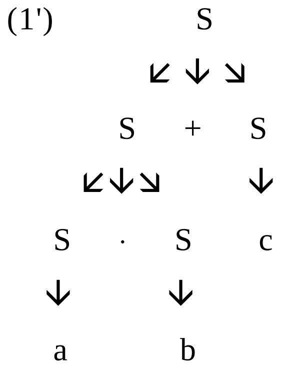
Ad 1).

Dla wyprowadzenia słowa a·b+c w gramatyce z przykładu 2.2, możemy się posłużyć m.in. jedną z następujących dwóch derywacji:

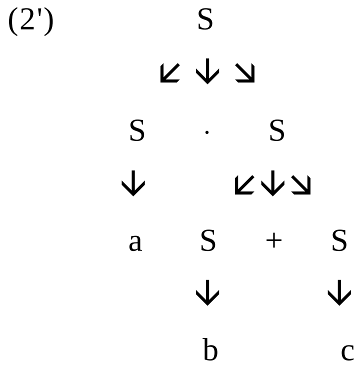
(1) $S \to S + S \to S \cdot S + S \to a \cdot S + S \to a \cdot b + S \to a \cdot b + c$,

(2) $S \to S \cdot S \to S \cdot S + S \to a \cdot S + S \to a \cdot b + S \to a \cdot b + c$.

Pierwsza z nich odpowiada wywodowi słowa o znaczeniu (a·b)+c, a druga - wywodowi słowa o znaczeniu a·(b+c). Odpowiadają im też różne drzewa wywodu:




Rys. 2.9




Rys. 2.10

Struktura wywodu okaże się równie widoczna, gdy w czasie derywacji będziemy brali w nawiasy te podsłowa, które pochodzą od wspólnej zmiennej i indeksowali je tą właśnie zmienną. Wówczas, derywacje (1) i (2) przybiorą odpowiednio postać:

(1'') $S \rightarrow [_S S + S] \rightarrow [_S[_S S \cdot S] + S] \xrightarrow{*} [_S[_S[_S a] \cdot [_S b]] + [_S c]]$,

(2'') $S \rightarrow [_S S \cdot S] \rightarrow [_S S \cdot [_S S + S]] \xrightarrow{*} [_S[_S a] \cdot [_S[_S b] + [_S c]]]$.

Słowa $[_S[_S[_S a] \cdot [_S b]] + [_S c]]$ oraz $[_S[_S a] \cdot [_S[_S b] + [_S c]]]$ nazywamy z n a c z n i k a m i f r a z o w y m i słowa a·b+c w gramatyce G.

Ad 2).

Zauważmy, że dwóm różnym wyprowadzeniom tego samego słowa odpowiadać może ten sam znacznik frazowy. Na przykład derywacja (1) ma ten sam znacznik frazowy, co następująca derywacja (3):

(3) $S \rightarrow S + S \rightarrow S \cdot S + S \rightarrow S \cdot S + c \rightarrow S \cdot b + c \rightarrow a \cdot b + c$.

Oba te wyprowadzenia odpowiadają (jednak) temu samemu znaczeniu słowa a·b+c. Mamy więc tu do czynienia jedynie z pozorną wieloznacznością.

Zauważmy, że w naszym powyższym przykładzie, różnym znacznikom frazowym odpowiadają różne znaczenia odpowiadających im słów. Podobnie jest i „w druga stronę”: różnym znaczeniom słów odpowiadają różne znaczniki frazowe. Tak więc, w przykładzie tym (w powyższej gramatyce i przy ustalonej przez nas interpretacji znaczenia słów), stopień wieloznaczności danego słowa pokrywa się z liczbą odpowiadających mu znaczników frazowych. Wniosek ten jest również na ogół prawdziwy dla innych przykładów gramatyk bezkontekstowych (o tym, że tylko „na ogół” szerzej będzie mowa pod koniec następnego paragrafu). Podobnie, jak ze znacznikami frazowymi, ma się oczywiście sprawa z równoważnymi im drzewami wywodu. Powyżej zauważyliśmy jednak (w „Ad 1”), że temu samemu zdaniu, o tym samym znaczeniu, może już odpowiadać wiele derywacji (liniowych). Tak więc tylko one niosą w sobie dodatkową informację umożliwiającą zauważyć nam pozorną wieloznaczność wywodu.

Za wieloznaczne przyjmijmy więc te gramatyki, które generują słowo o więcej niż jednym znaczniku frazowym. Gramatyki, które nie są wieloznaczne, nazywamy jednoznacznymi.

Zanim przejdziemy do rozważenia kwestii generacji dowolnego języka bezkontekstowego przez gramatykę jednoznaczną - zdefiniujmy najpierw formalnie wprowadzone już pojęcia znacznika frazowego i gramatyki wieloznacznej oraz pewne dodatkowe pojęcia pomocnicze.

Niech $G = \langle V_N, V_T, S, F\rangle$ będzie dowolną gramatyką bezkontekstową. Gramatyką pochodną gramatyki G nazywamy gramatykę $G' = \langle V_N, V_T', S, F'\rangle$, gdzie $V_T' = V_T \cup \{[_A : A \in V_N\} \cup \{]\}$ oraz $F' = \{A \to [_A x] : \ulcorner A \to x \urcorner \in F\}$. Reguły produkcji gramatyki G' powstają więc z reguł produkcji gramatyki G przez uzupełnienie ich następników nawiasami indeksowanymi symbolami stojącymi w poprzednikach. Rozpatrzmy to na przykładzie.

**Przykład 2.3.**

Dla gramatyki z przykładu 2.2, gramatyką pochodną będzie gramatyka:

$G' = \langle V_N, V_T', S, F'\rangle$, gdzie $V_T' = \{a, b, c, +, \cdot, [_S, ]\}$, $V_N = \{S\}$, a

$F' = \{S \to [_S S+S], S \to [_S S\cdot S], S \to [_S a], S \to [_S b], S \to [_S c]\}$. □

Dla każdej gramatyki G i jej gramatyki pochodnej G', niech $h: (V_T')^* \to (V_T)^*$ będzie homomorfizmem zdefiniowanym w następujący sposób:

$$h(a) = \begin{cases} a \text{ dla } a \in V_T, \\ \lambda \text{ dla } a \in V_T' \setminus V_T \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć, jeśli $y \in L(G')$, to $h(y) \in L(G)$, a z drugiej strony, dla każdego $x \in L(G)$ istnieje $y \in L(G')$ takie, że $x = h(y)$. Słowo y nazywamy znacznikiem frazowym słowa $x = h(y)$ w gramatyce G (a nie - wbrew intuicji - w gramatyce G', mimo, że y jest właśnie słowem języka L(G')!).

Tak więc, dla każdej gramatyki bezkontekstowej G i każdego słowa $x \in L(G)$, słowo to ma pewien znacznik frazowy w G. Jeśli istnieje dla gramatyki G takie słowo $x \in L(G)$, które ma w G więcej niż jeden znacznik frazowy, to gramatykę G nazywamy wieloznaczną. W przeciwnym przypadku gramatykę G nazywamy jednoznaczną. Język bezkontekstowy nazywamy jednoznacznym, gdy istnieje generująca go gramatyka jednoznaczna. Jeśli gramatyka taka nie istnieje, to język ten nazywamy *ściśle wieloznacznym*.

**Przykład 2.3 - c.d.**

Język generowany przez tę gramatykę jest jednoznaczny, bo istnieje następująca jednoznaczna gramatyka G' równoważna gramatyce G:

G' = < $V_N$, $V_T$, S, F'>, gdzie $V_N$, $V_T$, S zdefiniowane są jak w G, a

F' = {S $\rightarrow$ a+S, S $\rightarrow$ a·S, S $\rightarrow$ a,

S $\rightarrow$ b+S, S $\rightarrow$ b·S, S $\rightarrow$ b,

S $\rightarrow$ c+S, S $\rightarrow$ c·S, S $\rightarrow$ c}. □

Jednak nie dla każdej gramatyki bezkontekstowej można znaleźć równoważną jej gramatykę jednoznaczną, tzn. że istnieją języki ściśle wieloznaczne.

**Przykład 2.4.**

$L = \{a^i b^j c^i d^k : i, j, k \in N\} \cup \{a^i b^j c^k d^j : i, j, k \in N\}$ jest językiem ściśle wieloznacznym. □

Niestety, nie zawsze jednak umiemy odpowiedzieć na pytanie, czy dana gramatyka bezkontekstowa jest jednoznaczna, czy też nie. Udowodniono nawet, że nie może być przepisu pozwalającego dla dowolnej gramatyki bezkontekstowej dać odpowiedź na powyższe pytanie. Tak więc:

**Twierdzenie 2.8.**

Problem jednoznaczności gramatyki bezkontekstowej jest nierozstrzygalny. □

## 7. Semantyczne i syntaktyczne zagadnienia języka naturalnego

Na początku I rozdziału podaliśmy, że językiem L nad alfabetem V nazywamy dowolny zbiór wyrażeń nad V (tj. $L \subseteq V^*$ dla ustalonego V). W myśl tej definicji, dany język możemy dokładnie określić podając jedynie, z jakich zdań (lub słów) się on składa (przez ich wypisanie lub podanie ich kształtu). Jak widać, jest więc ona bardzo prosta i na tyle ogólna, by obejmować wszystkie języki. Ma ona jednak ten mankament, że nie ujmuje dwóch innych, jakże ważnych aspektów języka, a mianowicie jego semantyki (tj. znaczenia jego wyrażeń) i syntaktyki (tj. składni). Właśnie dzięki semantyce języka możemy przekazywać w nim pewne informacje (co, jak wiemy, jest właśnie jego funkcją). Jak się jednak wkrótce przekonamy, również syntaktyka języka odgrywa tu niepoślednią rolę.

Gdy język jest skończony i złożony z niewielkiej ilości zdań, to najłatwiej możemy go określić poprzez ich wypisanie. Gdy zaś język jest nieskończony, lub skończony, lecz o dużej liczbie zdań, to wówczas najłatwiej jest go określić stosując drugą, także już wprowadzoną przez nas w I rozdziale definicję języka, zgodnie z którą „język generowany przez gramatykę G” jest to zbiór tych wyrażeń utworzonych nad jej alfabetem terminalnym, które dają się w niej wyprowadzić z jej symbolu początkowego S. Tak określony język generowany przez gramatykę jest oczywiście językiem (tj. spełnia poprzednią definicję języka). Składa się on bowiem z wyrażeń utworzonych nad pewnym alfabetem (tu: $V_T$); jest on podzbiorem (wyznaczonym przez wyprowadzalność z S) zbioru wszystkich wyrażeń z $V_T^*$.

Do opisu zdań języka naturalnego znakomicie nadają się właśnie gramatyki bezkontekstowe. Będziemy tu więc wykorzystywać tak ich reguły derywacji, jak i metody zapisu produkcji (przy pomocy drzew i przy pomocy nawiasów znaczników frazowych). Za symbol początkowy S obierzemy frazę „<zdanie>”, a za pozostałe symbole nieterminalne - jego grupy i części oraz części mowy, także ujęte w nawiasy trójkątne. Przy ich pomocy określać będziemy strukturę (tj. syntaktykę) zdań. Symbole terminalne reprezentować będą z kolei konkretne słowa języka naturalnego, będące częściami składowymi tego zdania.

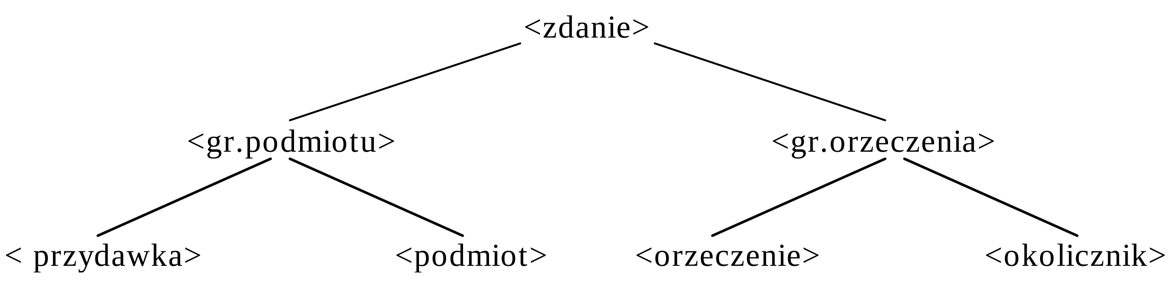
**Przykład 2.5.**

Dwa zdania języka naturalnego (polskiego lub angielskiego - do wyboru):

1) Peppermint hair plays swiftly. - Mietowe włosy grają żwawo.

2) Little children walk slowly. - Małe dzieci chodzą powoli.

mają identyczną strukturę gramatyczną, która możemy obrazowo przedstawić przy pomocy następującego drzewa wywodu:




Rys. 2.11.

Stosowaliśmy tu reguły:

<zdanie> → <gr.podmiotu> <gr.orzeczenia>,

<gr.podmiotu> → <przydawka> <podmiot>,

<gr.orzeczenia> → <orzeczenie> <okolicznik>,

które gwarantują nam uzyskanie poprawnego syntaktycznie zdania.

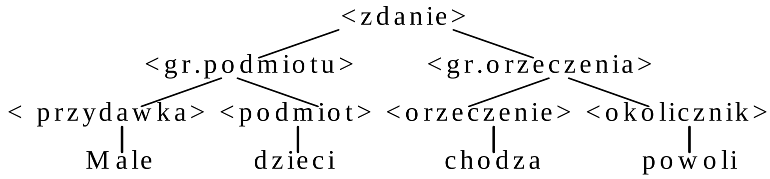
Gdy do tak otrzymanego wyrażenia zastosujemy poniższe reguły produkcji z symbolami terminalnymi to otrzymamy następujące drzewo wywodu:

<przydawka>→Małe

<podmiot> → dzieci

<orzeczenie> → chodzą

<okolicznik> → powoli




Rys. 2.12

Otrzymaliśmy zdanie zarówno poprawne gramatycznie, jak i sensowne (tj. wnoszące zrozumiałą informację).

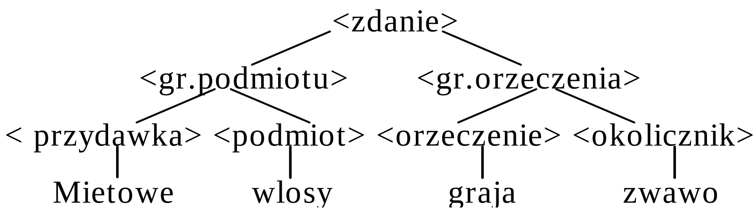
Gdy zaś wstawimy to otrzymamy:

<przydawka> → Miętowe

<podmiot> → włosy

<orzeczenie> → grają

<okolicznik> → żwawo




Rys. 2.13.

Otrzymaliśmy zdanie poprawne gramatycznie (a więc mające sens gramatyczny), nie mające jednak sensu logicznego (tj. nie niosące sensownej informacji). □

Zatem wśród zdań poprawnych syntaktycznie, mogą wystąpić zarówno zdania poprawne, jak i niepoprawne semantycznie. Tak więc same tylko reguły syntaktyczne gramatyki generatywnej nie gwarantują nam sensowności otrzymywanych poprawnych syntaktycznie zdań. Na boku odnotujmy tu jeszcze, że w literaturze pięknej zjawisko to jest niekiedy eksploatowane zupełnie rozmyślnie, j. np. ma to miejsce w poniższych strofach J. Tuwima i L. Carrolla (przekład M.Słomczyńskiego):

*W białodrzewiu jaśnie dżni słoneczno,*
*Miodzie złoci białopałem żyśnie,*
*Drzewia pełni pszczelą i pasieczną,*
*a przez liście kraśnie pęk słowiśnie.*

*Było smaszno, a jaszmije smukwijne*
*Świdrokrętnie na zegwniku wężały,*
*Peliczaple stały smutcholijne*
*I zbłąkinie rykoświstąkały.*

Oba drzewa wywodu zdań 1) i 2) z przykładu 2.5 mają identyczną strukturę. Zatem identyczną strukturę mają również ich znaczniki frazowe

([$_{\langle\text{zdanie}\rangle}$ [$_{\langle\text{gr. podmiotu}\rangle}$ <przydawka> <podmiot>] [$_{\langle\text{gr. orzeczenia}\rangle}$ <orzeczenie> <okolicznik>]])

i reguły produkcji. Różna może być jedynie kolejność wykonywania w nich poszczególnych reguł produkcji.

I tak np. dla pierwszego zdania (wykorzystując reguły produkcji):

<zdanie> → [$_{\langle\text{zdanie}\rangle}$ <gr.podmiotu> <gr.orzeczenia>],

<gr.podmiotu> → [$_{\text{<gr. podmiotu>}}$ <przydawka> <podmiot>],

<gr.orzeczenia> → [$_{\text{<gr. orzeczenia>}}$ <orzeczenie> <okolicznik>].

<przydawka> → [$_{\text{<przydawka>}}$ Małe],

<podmiot> → [$_{\text{<podmiot>}}$ dzieci],

<orzeczenie> → [$_{\text{<orzeczenie>}}$ chodzą],

<okolicznik> → [$_{\text{<okolicznik>}}$ powoli],

otrzymujemy jego znacznik frazowy w wyniku derywacji:

<zdanie> → [$_{\text{<zdanie>}}$ <gr.podmiotu> <gr.orzeczenia>] $\stackrel{*}{\rightarrow}$

$\stackrel{*}{\rightarrow}$ [$_{\text{<zdanie>}}$ [$_{\text{<gr. podmiotu>}}$ <przydawka> <podmiot>]

[$_{\text{<gr. orzeczenia>}}$ <orzeczenie> <okolicznik>]] $\stackrel{*}{\rightarrow}$

$\stackrel{*}{\rightarrow}$ [$_{\text{<zdanie>}}$ [$_{\text{<gr. podmiotu>}}$ [$_{\text{<przydawka>}}$ Małe] [$_{\text{<podmiot>}}$ dzieci]]

[$_{\text{<gr. orzeczenia>}}$ [$_{\text{<orzeczenie>}}$ chodzą] [$_{\text{<okolicznik>}}$ powoli]]].

Gdybyśmy ją dokładnie rozpisali, zobaczylibyśmy, że derywacje powyższego zdania mogą mieć wiele postaci (np. możemy stosować reguły produkcji do najbardziej na lewo leżącego nieterminału, czy też kolejnymi poziomami drzewa derywacji, poruszając się na nich np. naprzemiennie od lewej do prawej i od prawej do lewej, itp...). Mamy tu więc do czynienia z pozorną wieloznacznością wywodu.

Dotychczasowe nasze podejście miało charakter typowo generatywny. Jednak do identycznych znaczników frazowych możemy dojść na drodze analitycznej, dokonując rozkładu konkretnego zdania języka naturalnego. Wówczas to po kolei otrzymujemy rozbicia:

[$_{\text{<zdanie>}}$ Małe dzieci chodzą powoli]

[$_{\text{<zdanie>}}$ [$_{\text{<gr. podmiotu>}}$ Małe dzieci] [$_{\text{<gr. orzeczenia>}}$ chodzą powoli]]

[$_{\text{<zdanie>}}$ [$_{\text{<gr. podmiotu>}}$ [$_{\text{<przydawka>}}$ Małe] [$_{\text{<podmiot>}}$ dzieci]]

[$_{\text{<gr. orzeczenia>}}$ [$_{\text{<orzeczenie>}}$ chodzą] [$_{\text{<okolicznik>}}$ powoli]]].

Zauważmy, że mając żądaną gramatykę na poziomie nieterminałów, możemy produkować więcej zdań o określonych schematach. Na dodatek, o ile dokonamy tego umiejętnie, wówczas wszystkie one będą miały nie tylko poprawną strukturę gramatyczną, lecz także określony sens logiczny. Pokazuje nam to poniższy przykład.

**Przykład 2.5 - c.d.**

Obierzmy:

- za nieterminały - wszystkie kategorie gramatyczne, występujące przy analizie powyższych dwóch zdań: <zdanie>, <gr.podmiotu>, <gr.orzeczenia>, <przydawka>, <podmiot>, <orzeczenie>, <okolicznik>;
- za terminały - dotychczasowe terminały występujące przy analizie zdania drugiego: Małe, dzieci, chodzą, powoli, oraz dodatkowo: Duże, dziewczynki, żwawo;
- symbolem początkowym jest oczywiście <zdanie>;
- a reguły produkcji F tworzą:
  - dotychczasowe reguły produkcji, określające (jednakową) strukturę wszystkich zdań i gwarantujące nam zarazem ich poprawność syntaktyczną:

    <zdanie> $\rightarrow$ <gr.podmiotu> <gr.orzeczenia>,

    <gr.podmiotu> $\rightarrow$ <przydawka> <podmiot>,

    <gr.orzeczenia> $\rightarrow$ <orzeczenie> <okolicznik>,
  - dotychczasowe reguły produkcji zawierające nieterminały, których stosowanie dawało nam zdanie poprawne semamtycznie:

    <przydawka> $\rightarrow$ Małe,

    <podmiot> $\rightarrow$ dzieci,

    <orzeczenie> $\rightarrow$ chodzą,

    <okolicznik> $\rightarrow$ powoli,
  - dodatkowe reguły produkcji zawierające pozostałe nieterminały, tak dobrane, by ich stosowanie również zawsze prowadziło do zdania poprawnego semamtycznie:

    <przydawka> $\rightarrow$ Duże,

    <podmiot> $\rightarrow$ dziewczynki,

    <okolicznik> $\rightarrow$ żwawo.

Język tej gramatyki tworzą dokładnie wszystkie poniższe zdania:

Małe dzieci chodzą powoli

Małe dzieci chodzą żwawo

Małe dziewczynki chodzą powoli

Małe dziewczynki chodzą żwawo

Duże dzieci chodzą powoli

Duże dzieci chodzą żwawo

Duże dziewczynki chodzą powoli Duże dziewczynki chodzą żwawo □

**Zadanie 2.1.** Napisz gramatykę generującą wszystkie zdania, w których:

- na pierwszym miejscu jest słowo „Jan” lub „Wojciech”,
- na drugim – „jest” lub „był”,
- na trzecim – „bardzo”,
- na czwartym (i zarazem ostatnim) – „głodny” lub „spity”.

Wypisz te zdania. □

Na koniec rozpatrzmy jeszcze zagadnienie nierozdzielności problemów semantyki (tj. znaczenia języka) od jego syntaktyki (tj. składni). W tym celu, gdybyśmy zanalizowali dowolne zdanie języka obcego posiadające dwa różne znaczniki frazowe, a przy tym zbudowane ze słów wieloznacznych, wówczas przy jego tłumaczeniu na język polski, moglibyśmy spotkać się z następującymi trudnościami:

1) Pierwszą z nich jest dylemat, które ze znaczeń słów wieloznacznych wybrać (przy danym rozkładzie gramatycznym, my oczywiście domyślamy się, o które z nich chodzi, ale dla programu komputerowego dokonującego tłumaczenia, wszystkie znaczenia tego słowa będą równoważne). Na szczęście trudność ta jest do pokonania, gdyż maszyna może po prostu wypisać oba jego znaczenia (sama nadal jednak „nie będzie wiedziała”, o które z nich chodzi).
2) Drugą trudnością jest konieczność znania drzewa wywodu. Mamy tu bowiem dwa różne drzewa wywodu (a więc i dwa różne znaczniki frazowe) odpowiadające różnym znaczeniom rozpatrywanego zdania, a więc różnym znaczeniom poszczególnych jego słów.

Wnosimy stąd, że:

1) przy zmianie syntaktyki zachodzi również zmiana semantyki rozważanego zdania
2) jak również, że (podobnie, jak to było w poprzednim paragrafie) różnym znacznikom frazowym odpowiadają różne znaczenia odpowiadających im zdań. Jednak w drugą stronę druga z dych zależności już tu nie zachodzi (ze względu na dwuznaczność wyrazów). Różnym znaczeniom zdań wcale nie muszą więc odpowiadać różne znaczniki frazowe. Zatem w przypadku takim - stopień wieloznaczności danego słowa nie pokrywa się z liczbą odpowiadających mu znaczników frazowych. W ten sposób wyjaśniliśmy, dlaczego przy omawianiu powyższych kwestii w poprzednim paragrafie poczyniliśmy zastrzeżenie „na ogół”.

Zwykle jednak, jeżeli budujemy gramatykę bezkontekstową dla języka, którego słowom przyporządkowujemy w ogóle jakieś znaczenie, to dokonujemy tego w oparciu o strukturę semantyczną (znaczeniową) tych słów i wtedy owo zastrzeżenie „na ogół” jest zbyteczne, bo wówczas rzeczywiście: stopień wieloznaczności danego słowa pokrywa się z liczbą odpowiadających mu znaczników frazowych.

**Zadanie 2.2.** Dokonaj dwóch różnych możliwych rozbiorów gramatycznych zdania „Jan je sporo soli”. Dokonaj na tym przykładzie analizy związku semantyki z syntaktyką. □

**Zadanie 2.3.** Dokonaj dwóch różnych możliwych rozbiorów gramatycznych zdania „Reks ugryzł pana Rema”. Dokonaj na tym przykładzie analizy związku semantyki z syntaktyką. □

**Zadanie 2.4.** Sam znajdź zdanie w języku polskim (istotnie różne od zdań z powyższych zadań), które ma dwa różne drzewa wywodu i odpowiadające im różne znaczenia. □

## 8. Notacja Backusa-Naura

Na koniec tego rozdziału zapoznamy się jeszcze z pewnym sposobem zapisu reguł produkcji gramatyk bezkontekstowych, możliwym że względu na ich kształt (wszystkie są typu $A \to P$, gdzie $P \in (V_N \cup V_T)^*$, zaś $A \in V_N$). Z przedstawionym dotychczas sposobem ich zapisu można się spotkać w pracach o charakterze teoretyczno-lingwistycznym i matematycznym (dlatego też właśnie znalazł się on i w tej pracy). W praktyce można jednak wykorzystywać i inną notację, zaproponowaną przez J.W.Backusa, a zastosowaną na szerszą skalę przez P.Naura (stąd też jej nazwa, oraz często przyjmowany na jej oznaczenie skrót „notacja B-N”).

Opis składni języka w notacji B-N ma postać definicji syntaktycznych, w których występują symbole nieterminalne (pełniące rolę zmiennych metajęzykowych) oraz symbole terminalne. Zmienne metajęzykowe oznacza się przy pomocy dowolnych napisów ujętych w nawiasy trójkątne „<” i „>” (jak to miało już miejsce w poprzednim paragrafie). Pozwala to oczywiście na używanie zmiennych o charakterze objaśniająco-znaczeniowym. Ponadto występujący dotychczas symbol „→” zastępuje się symbolem „:: =”.

**Przykład 2.6.**

Produkcję z przykładu 1.3 można zapisać w tej notacji m.in. następująco:

<S>:: =(<S>+<S>), <S>:: =(<S>·<S>), <S>:: =a, <S>:: =b, <S>:: =c. □

Dla skrócenia zapisu, w notacji B-N łączy się produkcje o tym samym poprzedniku w zapisie w jedną, rozdzielając następniki pionową kreską „|”.

**Przykład 2.6 - c.d.**

W danej gramatyce zapisalibyśmy to następująco:

<S> :: = (<S>+<S>) | (<S>·<S>) | a | b | c. □

W notacji tej można także stosować dalsze uproszczenia. Niekiedy w zapisie produkcji wygodniej jest posłużyć się postacią iteracyjną niż rekurencyjną (tj. taką, jaką dotychczas stosowaliśmy). W tym celu przyjmujemy, że ujęcie pewnego napisu występującego po prawej stronie znaku „::=” w nawiasy klamrowe („{„ i „}”) oznacza, że tak powstałą konstrukcję można zastąpić dowolną, skończoną liczbą powtórzeń napisu ujętego w klamry (w tym także o zerowej liczbie powtórzeń, czyli napisem pustym). Rozpatrzmy to na poniższym przykładzie:

**Przykład 2.7.**

Celem zdefiniowania symbolu nieterminalnego <ciąg cyfr> jako dowolnie długiego, skończonego, lecz niepustego ciągu zbudowanego z elementów 0, 1, ..., 9, możemy posłużyć się produkcjami:

<cyfra> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<ciąg cyfr> ::= <cyfra> | <ciąg cyfr><cyfra>,

przy czym drugą z tych produkcji (mającą postać rekurencyjną) możemy zastąpić produkcją w postaci iteracyjnej: <ciąg cyfr> :: = <cyfra> {<cyfra>}. □