LOGIKA MATEMATYCZNA (22–23)

KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW: DOWODY ZAŁOŻENIOWE

Kolejną z omawianych operacji konsekwencji w KRP jest konsekwencja ***założeniowa***. Znajomość materiału z tego wykładu nie będzie wymagana na egzaminie.

22.1. Reguły pierwotne

Można na różne sposoby dobierać reguły pierwotne systemu założeniowego KRP. W tym wykładzie wykorzystamy zestaw reguł pochodzący z prac Borkowskiego i Słupeckiego.

22.1.1. Reguły

REGUŁY DOTYCZĄCE SPÓJNIKÓW PRAWDZIWOŚCIOWYCH:

- (RO) ***Reguła odrywania***. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

  W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \ \ \alpha}{\beta}.$$

- (DK) ***Reguła dołączania koniunkcji***. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \ \ \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) ***Reguła opuszczania koniunkcji***. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

- (DA) ***Reguła dołączania alternatywy***. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

- (OA) ***Reguła opuszczania alternatywy***. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu wolno dołączyć pozostały człon tej alternatywy.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha}.$$

- (DR) ***Reguła dołączania równoważności***. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \ \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) ***Reguła opuszczania równoważności***. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

REGUŁY DOTYCZĄCE KWANTYFIKATORÓW:

- ***Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego*** O$\forall$.

$$\frac{\forall x\ \alpha}{\alpha(x/t)}.$$

- ***Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego*** O$\exists$.

$$\frac{\exists x\ \alpha}{\alpha(x/t(x_1,\ldots,x_n))},$$

  gdzie $t(x_1,\ldots,x_n)$ jest stałą indywiduową zależną od wszystkich zmiennych wolnych $x_1,\ldots,x_n$ formuły $\exists x\ \alpha$.

- ***Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego*** D$\forall$.

$$\frac{\alpha}{\forall x\ \alpha},$$

  pod warunkiem, że x nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu.

- ***Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego*** D$\exists$.

$$\frac{\alpha(x/t)}{\exists x\ \alpha}.$$

Uwaga. Reguły dotyczące kwantyfikatorów obwarowane są następującymi zastrzeżeniami:

- W wyrażeniach $\alpha(x/t)$ zakłada się, że term t jest podstawialny za zmienną x do formuły α.
- Przy każdym zastosowaniu reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$ należy używać ***nowej*** stałej, nie występującej dotąd w dowodzie. Stała ta nie może ponadto wystąpić w dowodzonej tezie.

Oznaczmy zbiór powyższych reguł przez sb.

Przypominamy, że każda formuła α (zarówno języka KRZ, jak i języka KRP) może być uważana za formułę postaci:

$$(\bigstar) \quad (\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots)),$$

dla pewnego n. Jeśli spójnikiem głównym w α nie jest implikacja, to za α bierzemy formułę β_1.

Dowody założeniowe w KRP są przeprowadzane podobnie jak dowody założeniowe w KRZ: dowód formuły ($\bigstar$) uznajemy za zakończony, jeśli z założeń $\beta_1,\ldots,\beta_n$ można otrzymać formułę γ przy użyciu podanych reguł dowodowych. Przy tym, zachowują ważność wszystkie techniki dowodowe objaśnione dla KRZ:

- dowody wprost
- dowody nie wprost
- dowody z dodatkowymi założeniami
- dowody rozgałęzione.

22.1.2. Komentarz dotyczący stosowalności reguł

Warunki, którymi obwarowane są poszczególne reguły wymagają komentarza.

(1) Reguła **D**$\forall$ ***opuszczania kwantyfikatora generalnego.***
Przykładami zastosowania tej reguły są, m.in.:

$$\frac{\forall x\ P(x)}{P(x)} \qquad \frac{\forall x\ P(x)}{P(y)} \qquad \frac{\forall x\ P(x)}{P(a)}$$

gdzie a jest stałą indywidualną.

Intuicje związane z tą regułą oddaje się czasem mówiąc, że: skoro ***każdy*** przedmiot ma jakąś własność (lub: ***wszystkie*** przedmioty mają jakąś własność), to również ***dowolny*** (***określony, ustalony***) przedmiot ma tę własność. Dla przykładu: skoro wszyscy są śmiertelni, to Żyd Wieczny Tułacz jest śmiertelny.

(2) Reguła **D**$\exists$ ***opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego.***
Przykładami zastosowania tej reguły są, m.in.:

$$\frac{\exists x\ P(x,y,z)}{P(a_{y,z},y,z)} \qquad \frac{\exists x \forall y\ P(x,y,z)}{\forall y\ P(a_z,y,z)} \qquad \frac{\exists x \forall y \exists z\ P(x,y,z)}{\forall y \exists z\ P(a,y,z)},$$

gdzie a jest dowolną stałą indywidualną, stała $a_{y,z}$ jest stałą zależną od zmiennych y oraz z, natomiast stała a_z jest stałą zależną od zmiennej z.

Podobnie jak w metodzie tablic analitycznych, każde zastosowanie reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego każe wprowadzić ***nową*** stałą indywidualną.

(3) Reguła **O**$\forall$ ***dołączania kwantyfikatora generalnego.***
Przykładem zastosowania tej reguły jest:

$$\frac{P(x)}{\forall x\ P(x)}$$

gdzie P jest predykatem jednoargumentowym

Stosowanie tej reguły w dowodach założeniowych obwarowane jest warunkiem: zmienna, którą wiążemy kwantyfikatorem we wniosku reguły nie może występować jako zmienna wolna w ***założeniach*** dowodu.

(4) Reguła **O**$\exists$ ***dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego.***
Przykładami zastosowania tej reguły są, m.in.:

$$\frac{P(x)}{\forall x\ P(x)} \qquad \frac{P(y)}{\forall x\ P(x)} \qquad \frac{P(a)}{\forall x\ P(x)}$$

gdzie a jest stałą indywidualną.

Intuicje związane ze stosowaniem reguły oddaje się czasem, mówiąc: skoro jakaś własność przysługuje **konkretnemu, ustalonemu** przedmiotowi, to przysługuje ona ***co najmniej jednemu*** przedmiotowi.

UWAGA. W rozważanych w tym wykładzie dowodach i przykładach spotkamy jedynie dość proste zastosowania powyższych reguł. W szczególności, nie będzie konieczności wprowadzania stałych zależnych od zmiennych, jak wymaga tego reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego.

22.2. Konsekwencja założeniowa

22.2.1. Definicje: dowód założeniowy, teza, reguła wyprowadzalna, zbiór sprzeczny, konsekwencja założeniowa

Mówimy, że:

- Formuła α posiada ***dowód założeniowy*** w oparciu o reguły ze zbioru sb z założeń ze (skończonego) zbioru formuł X, jeśli α można otrzymać z formuł zbioru X poprzez stosowanie reguł ze zbioru sb. Piszemy w takim przypadku $X \vdash_{sb} \alpha$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{sb} \alpha$. Jeśli $X \vdash_{sb} \alpha$, to mówimy, że α jest ***wyprowadzalna*** ze zbioru X.
- Formuła α jest ***tezą*** systemu założeniowego opartego na regułach ze zbioru sb, gdy α jest wyprowadzalna ze zbioru pustego, tj. wtedy, gdy $\emptyset \vdash_{sb} \alpha$.
- Reguła $\mathcal{R}$ jest regułą ***wyprowadzalną*** (***wtórną***) w systemie opartym na regułach ze zbioru sb wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{sb} \alpha$ dla każdego sekwentu (X, α) należącego do reguły $\mathcal{R}$.
- Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) ***sprzeczny*** w systemie opartym na regułach ze zbioru sb wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{sb} \alpha$ oraz $X \vdash_{sb} \neg\alpha$.

Uwaga. Powyższa charakterystyka relacji $\vdash_{sb}$ nie jest definicją w pełni precyzyjną. Dla uzyskania pełnej poprawności powinniśmy postępować tak, jak w przypadku określenia relacji $\vdash_{jas}$ dla KRZ (zobacz wykłady dot. tej problematyki). Niech będzie ćwiczeniem dla słuchaczy podanie pełnej, poprawnej definicji relacji $\vdash_{sb}$.

Uwaga. Jeśli $\emptyset \vdash_{sb} \alpha$ (czyli gdy α jest tezą), to nie oznacza to, że w dowodzie założeniowym formuły α nie czynimy żadnych założeń. Podobnie jak w KRZ, gdy α jest postaci

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots)),$$

to założeniami dowodu są formuły $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Gdy α nie jest formułą implikacyjną, to dowód rozpoczynamy od założenia nie wprost: $\neg\alpha$.

Operację C_{sb} ***konsekwencji założeniowej*** w KRP opartej na regułach pierwotnych ze zbioru sb definiujemy następująco dla dowolnego zbioru formuł X języka KRP:

$$C_{sb}(X) = \{\alpha : X \vdash_{sb} \alpha\}.$$

Tak określona operacja C_{sb} ma własności (C1)–(C4) z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

TWIERDZENIE 22.2.1.

Relacja konsekwencji założeniowej $\vdash_{sb}$ ma następujące własności:

- (1) $\vdash_{sb}$ jest zwrotna: $X \vdash_{sb} X$ dla każdego X.
- (2) $\vdash_{sb}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{sb} Y$ oraz $Y \vdash_{sb} Z$, to $X \vdash_{sb} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.
- (3) $\vdash_{sb}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \vdash_{sb} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{sb} Y$.
- (4) $\vdash_{sb}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \vdash_{sb} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{sb} Z$.
- (5) $\emptyset \vdash_{sb} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą systemu założeniowego KRP.

Dowód tego twierdzenia, analogiczny do dowodu odpowiedniego twierdzenia w KRZ, pozostawiamy jako ćwiczenie.

22.2.2. Dowody niektórych tez

Uwaga. Odróżniamy tezy i metatezy systemu założeniowego. W metatezach występują metazmienne, odpowiadajace dowolnym formułom języka KRP, w tezach występują konkretne predykaty z języka KRP. Dla przykładu:

- $\neg\forall x\ \alpha \ \equiv\ \exists x\ \neg\alpha$ jest metatezą;
- $\neg\forall x\ P(x) \ \equiv\ \exists x\ \neg P(x)$ jest tezą (co wykażemy niżej).

W podobnym sensie posługiwaliśmy się terminami „teza” i „metateza” w KRZ.

Zauważmy, że reguły pierwotne dotyczące kwantyfikatorów pozwalają na natychmiastowe wyprowadzenie m.in. następujących metatez systemu założeniowego KRP:

- (a) $\forall x\ \alpha\ \rightarrow\ \alpha(x/t)$ (o ile term t jest podstawialny w α za x)
- (b) $\alpha(x/t)\ \rightarrow\ \exists x\ \alpha$.

Ze szczególnego przypadku metatezy (b) skorzystamy w jednym z dalszych dowodów.

Pokażemy najpierw, że regułami wtórnymi są następujące reguły negowania kwantyfikatorów, bardzo użyteczne w wielu dowodach:

- ***Reguła negowania kwantyfikatora generalnego*** N$\forall$:

$$\frac{\neg\forall x\ \alpha}{\exists x\ \neg\alpha}$$

- ***Reguła negowania kwantyfikatora egzystencjalnego*** N$\exists$:

$$\frac{\neg\exists x\ \alpha}{\forall x\ \neg\alpha}$$

Obie te reguły są odwracalne, w tym sensie, że nie tylko z przesłanki można wyprowadzić wniosek, ale także z wniosku można wyprowadzić przesłankę. Udowodnimy pewne szczególne przypadki tych reguł, a mianowicie:

- ***Reguła negowania kwantyfikatora generalnego*** N$\forall$:

$$\frac{\neg\forall x\ P(x)}{\exists x\ \neg P(x)}$$

- ***Reguła negowania kwantyfikatora egzystencjalnego*** N$\exists$:

$$\frac{\neg\exists x\ P(x)}{\forall x\ \neg P(x)}$$

gdzie P jest dowolnym predykatem jednoargumentowym.

Aby to pokazać, trzeba udowodnić następujące cztery implikacje:

- (1) $\neg\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \exists x\ \neg P(x)$
- (2) $\exists x\ \neg P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall x\ P(x)$
- (3) $\neg\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ \neg P(x)$
- (4) $\forall x\ \neg P(x)\ \rightarrow\ \neg\exists x\ P(x)$.

DOWÓD IMPLIKACJI (1). $\neg\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \exists x\ \neg P(x)$

1.	$\neg\forall x\ P(x)$	założenie
2.	$\neg\exists x\ \neg P(x)$	z.d.n.
3.	$\neg P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	metateza (b)
4.	$\neg\neg P(x)$	MT: 3, 2
5.	$P(x)$	ON: 4
6.	$\forall x\ P(x)$	D$\forall$: 5
7.	$\perp$	Sprzeczność: 1, 6.

DOWÓD IMPLIKACJI (2). $\exists x\ \neg P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall x\ P(x)$

1.	$\exists x\ \neg P(x)$	założenie
2.	$\neg\neg\forall x\ P(x)$	z.d.n.
3.	$\forall x\ P(x)$	ON: 2
4.	$\neg P(a)$	O$\exists$: 1
5.	$P(a)$	O$\forall$: 3
6.	$\perp$	Sprzeczność: 4, 5.

DOWÓD IMPLIKACJI (3). $\neg\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ \neg P(x)$

1.	$\neg\exists x\ P(x)$	założenie
2.	$\neg\forall x\ \neg P(x)$	z.d.n.
3.	$\exists x\ \neg\neg P(x)$	N$\forall$: 2
4.	$\neg\neg P(a)$	O$\exists$: 3
5.	$P(a)$	ON: 4
6.	$\exists x\ P(x)$	D$\exists$: 5
7.	$\perp$	Sprzeczność: 1, 6.

DOWÓD IMPLIKACJI (4). $\forall x\ \neg P(x)\ \rightarrow\ \neg\exists x\ P(x)$

1.	$\forall x\ \neg P(x)$	założenie
2.	$\neg\neg\exists x\ P(x)$	z.d.n.
3.	$\exists x\ P(x)$	ON: 2
4.	$P(a)$	O$\exists$: 3
5.	$\neg P(a)$	O$\forall$: 1
6.	$\perp$	Sprzeczność: 4, 5.

Zwykle w wykładzie metody założeniowej podaje się dowody tez wyliczonych w poniższym twierdzeniu.

TWIERDZENIE 22.2.2.1.

Niech P i Q będą predykatami jednoargumentowymi, R predykatem dwuargumentowym, a α formułą nie zawierającą wolnych wystąpień zmiennej x. Następujące formuły są tezami systemu założeniowego KRP:

- (1) $\forall x\ P(x)\ \equiv\ \neg\exists x\ \neg P(x)$
- (2) $\exists x\ P(x)\ \equiv\ \neg\forall x\ \neg P(x)$
- (3) $\neg\forall x\ P(x)\ \equiv\ \exists x\ \neg P(x)$
- (4) $\neg\exists x\ P(x)\ \equiv\ \forall x\ \neg P(x)$
- (5) $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \equiv\ (\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$
- (6) $\exists x\ (P(x) \vee Q(x))\ \equiv\ (\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$
- (7) $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \rightarrow\ (\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x))$
- (8) $(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))\ \rightarrow\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$
- (9) $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x))$
- (10) $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\ \rightarrow\ (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$
- (11) $\forall x\ (P(x) \equiv Q(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \equiv \forall x\ Q(x))$
- (12) $\forall x\ (P(x) \equiv Q(x))\ \rightarrow\ (\exists x\ P(x) \equiv \exists x\ Q(x))$
- (13) $\forall x\ (\alpha \vee P(x))\ \equiv\ (\alpha \vee \forall x\ P(x))$
- (14) $\exists x\ (\alpha \wedge P(x))\ \equiv\ (\alpha \wedge \exists x\ P(x))$
- (15) $\forall x\ (\alpha \rightarrow P(x))\ \equiv\ (\alpha \rightarrow \forall x\ P(x))$
- (16) $\exists x\ (\alpha \rightarrow P(x))\ \equiv\ (\alpha \rightarrow \exists x\ P(x))$
- (17) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \alpha)\ \equiv\ (\exists x\ P(x) \rightarrow \alpha)$
- (18) $\exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)\ \equiv\ (\forall x\ P(x) \rightarrow \alpha)$
- (19) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \alpha)\ \equiv\ \forall x\ (P(x) \rightarrow \alpha)$
- (20) $\exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)\ \equiv\ \exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)$

- (21) $\exists x \forall y\ R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\ R(x,y)$

DOWÓD.

Dowody (1) i (2) podaliśmy powyżej. (3) i (4) otrzymujemy z (1) i (2) oraz prawa kontrapozycji z KRZ.

Z tez (5)–(12) udowodnimy, dla przykładu (8) i (10), dowody pozostałych tez z tej grupy niech stanowią ćwiczenie.

DOWÓD (8). $(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)) \ \rightarrow\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$

1.	$\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$	założenie
1.1.	$\forall x\ P(x)$	zał. dod.
1.2.	$P(a)$	O∀: 1.1.
1.3.	$P(a) \vee Q(a)$	DA: 1.2.
1.4.	$\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$	D∀: 1.3.
2.	$\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$	1.1.⇒1.4.
2.1.	$\forall x\ Q(x)$	zał. dod.
2.2.	$Q(a)$	O∀: 2.1.
2.3.	$P(a) \vee Q(a)$	DA: 2.2.
2.4.	$\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$	D∀: 2.3.
3.	$\forall x\ Q(x) \rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$	2.1.⇒2.4.
4.		1, 2, 3, dow. rozg.

DOWÓD (10). $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \ \rightarrow\ (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	założenie
2.	$\exists x\ P(x)$	założenie
3.	$P(a)$	O∃: 2
4.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	O∀: 1
5.	$Q(a)$	RO: 4, 3
6.	$\exists x\ Q(x)$	D∃: 5.

Z tez (13)–(20) udowodnimy, dla przykładu (18), dowody pozostałych tez z tej grupy niech stanowią ćwiczenie. Na dowód (18) składają się dowody implikacji prostej i odwrotnej:

- (18a) $\exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \rightarrow \alpha)$
- (18b) $(\forall x\ P(x) \rightarrow \alpha) \ \rightarrow\ \exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)$

DOWÓD (18A).

1.	$\exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)$	założenie
2.	$\forall x\ P(x)$	założenie
3.	$P(a) \rightarrow \alpha$	O∃: 1
4.	$P(a)$	O∀: 2
5.	α	RO: 3, 4.

DOWÓD (18B).

1.	$\forall x\ P(x) \rightarrow \alpha$	założenie
1.1.	$\neg\alpha$	zał. dod.
1.2.	$\neg\forall x\ P(x)$	MT: 1, 1.1.
1.3.	$\exists x\ \neg P(x)$	N∀: 1.2.
1.4.	$\neg P(a)$	O∃: 1.3.
2.	$\neg\alpha \rightarrow \neg P(a)$	1.1.⇒1.4.
3.	$P(a) \rightarrow \alpha$	prawo kontrapozycji: 2
4.	$\exists x\ (P(x) \rightarrow \alpha)$	D∃: 3.

DOWÓD (21). $\exists x \forall y\ R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\ R(x,y)$

1.	$\exists x \forall y\, R(x, y)$	założenie
2.	$\neg \forall y \exists x\, R(x, y)$	z.d.n.
3.	$\exists y \neg \exists x\, R(x, y)$	N∀: 2
4.	$\forall y\, R(a, y)$	O∃: 1
5.	$\neg \exists x\, R(x, b)$	O∃: 3
6.	$\forall x\, \neg R(x, b)$	N∃: 5
7.	$R(a, b)$	O∀: 4
8.	$\neg R(a, b)$	O∀: 6
9.	$\perp$	Sprzeczność: 7, 8.

22.3. Trafność i pełność konsekwencji założeniowej

Można na różne sposoby pokazać, że konsekwencja założeniowa oparta na regułach ze zbioru sb jest:

- ***trafna*** (każda teza jest tautologia KRP) oraz
- ***pełna*** (każda tautologia KRP jest tezą).

Jednym z takich sposobów jest metoda wykorzystana w tych wykładach w przypadku KRZ: pokazanie, że metoda założeniowa jest równoważna metodzie aksjomatycznej i skorzystanie z trafności i pełności metody aksjomatycznej. Można również sprowadzać trafności i pełności metody założeniowej do trafności i pełności metody tablic analitycznych. Inny jeszcze sposób to bezpośredni dowód trafności i pełności metody założeniowej.

Zauważmy, że wszystkie reguły ze zbioru sb zachowują własność bycia tautologią, o czym można się przekonać, przeprowadzając stosowne dowody (podobnie jak czyniliśmy to w wykładach dotyczących semantyki KRP).

Nie podajemy w niniejszej wersji notatek dowodów twierdzeń trafności i pełności metody założeniowej, ograniczając się jedynie do sformułowania tych twierdzeń.

22.3.1. Trafność metody założeniowej

TWIERDZENIE 22.3.1.1.

Każda teza systemu założeniowego opartego na regułach ze zbioru sb jest tautologią KRP.

22.3.2. Pełność metody założeniowej

TWIERDZENIE 22.3.2.1.

Każda tautologia KRP jest tezą systemu założeniowego opartego na regułach ze zbioru sb.

22.4. Dalsze przykłady dowodów założeniowych

Podamy teraz przykłady dowodów wyprowadzalności kilku reguł, w których występują predykaty jedno- lub więcejargumentowe.

PRZYKŁAD 22.4.1. Pokażemy, że jest regułą wtórną (tu a jest stałą):

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\, (P(x) \to \exists y\, Q(y, x)) \\ \forall x\, (Q(x, a) \to R(x, a)) \\ \forall x\, \neg R(x, a)\end{array}}{\neg P(a)}$$

Budujemy dowód:

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$	założenie
2.	$\forall x\ (Q(x,a) \rightarrow R(x,a))$	założenie
3.	$\forall x\ \neg R(x,a)$	założenie
4.	$Q(b,a) \rightarrow R(b,a)$	O∀: 2
5.	$\neg R(b,a)$	O∀: 3
6.	$\neg Q(b,a)$	MT: 4, 5
7.	$\forall y\ \neg Q(y,a)$	D∀: 6
8.	$\neg\exists y\ Q(y,a)$	N∃: 7
9.	$P(a) \rightarrow \exists y\ Q(y,a)$	O∀: 1
10.	$\neg P(a)$	MT: 9, 8.

PRZYKŁAD 22.4.2. [Carney, Sheer 1964] Pokażemy, że jest regułą wtórną:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (F(x) \rightarrow \forall y\ (G(y) \rightarrow C(x,y))) \\ \exists x\ F(x)\end{array}}{\exists y\ G(y) \rightarrow \exists y \exists x\ C(x,y)}$$

Budujemy dowód:

1.	$\forall x\ (F(x) \rightarrow \forall y\ (G(y) \rightarrow C(x,y)))$	założenie
2.	$\exists x\ F(x)$	założenie
3.	$F(a)$	O∃: 2
3.1.	$\exists y\ G(y)$	zał. dod.
3.2.	$G(b)$	O∃: 3.1.
3.3.	$F(a) \rightarrow \forall y\ (G(y) \rightarrow C(a,y))$	O∀: 1
3.4.	$\forall y\ (G(y) \rightarrow C(a,y))$	RO: 3.3., 3
3.5.	$G(b) \rightarrow C(a,b)$	O∀: 3.4.
3.6.	$C(a,b)$	RO: 3.5., 3.2.
3.7.	$\exists x\ C(x,b)$	D∃: 3.6.
3.8.	$\exists y \exists x\ C(x,y)$	D∃: 3.7.
4.	$\exists y\ G(y) \rightarrow \exists y \exists x\ C(x,y)$	3.1.⇒3.8.

PRZYKŁAD 22.4.3. [Carney, Sheer 1964] Pokażemy, że jest regułą wtórną:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \forall y\ ((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z\ C(z)) \\ \forall y \forall z\ (G(y,z) \rightarrow B(y)) \\ \exists y \exists z\ G(y,z)\end{array}}{\exists x \exists z\ (A(x) \rightarrow C(z))}$$

Budujemy dowód:

1.	$\forall x \forall y\ ((A(x) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z\ C(z))$	założenie
2.	$\forall y \forall z\ (G(y,z) \rightarrow B(y))$	założenie
3.	$\exists y \exists z\ G(y,z)$	założenie
4.	$\exists z\ G(a,z)$	O$\exists$: 3
5.	$G(a,b)$	O$\exists$: 4
6.	$\forall z\ (G(a,z) \rightarrow B(a))$	O$\forall$: 2
7.	$G(a,b) \rightarrow B(a)$	O$\forall$: 6
8.	$B(a)$	RO: 7, 5
9.	$\forall y\ ((A(c) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z\ C(z))$	O$\forall$: 1
10.	$(A(c) \wedge B(a)) \rightarrow \exists z\ C(z)$	O$\forall$: 9
10.1.	$A(c)$	zał. dod.
10.2.	$A(c) \wedge B(a)$	DK: 10.1., 8
10.3.	$\exists z\ C(z)$	RO: 10, 10.2.
10.4.	$C(d)$	O$\exists$: 10.3.
11.	$A(c) \rightarrow C(d)$	10.1.$\Rightarrow$10.4.
12.	$\exists z\ (A(c) \rightarrow C(z))$	D$\exists$: 11
13.	$\exists x \exists z\ (A(x) \rightarrow C(z))$	D$\exists$: 12.

23. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

1. Podaj dowody założeniowe następujących tez:

- (a) $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x\ \neg Q(x) \rightarrow \forall x\ \neg P(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$
- (c) $\exists x\ (A(x) \wedge \forall y\ (B(y) \rightarrow C(x,y))) \rightarrow \forall y\ (B(y) \rightarrow \exists x\ (A(x) \wedge C(x,y)))$

2. Pokaż, że:

- (a) $\{\exists x\ (P(x) \vee Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash_{sb} \exists x\ R(x)$
- (b) $\{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\} \vdash_{sb} \exists x\ (R(x) \wedge Q(x))$
- (c) $\{\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x)),\ \forall x\ (S(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\ (R(x) \rightarrow P(x))\} \vdash_{sb} \forall x\ (R(x) \rightarrow \neg S(x))$

3. Pokaż, że następujące zbiory formuł są sprzeczne:

- (a) $\{\exists x\ P(x),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$
- (b) $\{\forall x\ P(x),\ \exists x\ \neg Q(x),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\}$
- (c) $\{\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\ (Q(x) \rightarrow \exists y\ R(x,y)),\ \exists x\ P(x),\ \forall x \forall y\ \neg R(x,y)\}$

4. Wykaż, że następujące wnioskowania są dedukcyjne:

- (a) [Carney 1964: 282.] Quakers and members of Peace Movements are either deluded or they are right in their views. A man is a true Christian if and only if he is a Quaker. No true Christian is deluded. Hence Quakers are right in their views.
- (b) [Copi 1967: 120.] All radioactive substances have a very short life or have medical value. No uranium isotope which is radioactive has a very short life. Therefore if all uranium isotopes are radioactive then all uranium isotopes have medical value.

Rozwiązania ćwiczeń

1 (a). $\forall x\ (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\ \neg Q(x) \to \forall x\ \neg P(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	założenie
2.	$\exists x\ \neg Q(x)$	założenie
3.	$\neg\forall x\ \neg P(x)$	z.d.n.
4.	$\neg Q(a)$	O$\exists$: 2
5.	$P(a) \to Q(a)$	O$\forall$: 1
6.	$\neg P(a)$	MT: 5,4
7.	$\forall x\ \neg P(x)$	D$\forall$: 6
8.	$\perp$	Sprzeczność: 3, 7 .

1 (b). $(\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)) \to \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$

1.	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$	założenie
1.1.	$\exists x\ P(x)$	zał. dod.
1.2.	$P(a)$	O$\exists$: 1.1.
1.3.	$P(a) \vee Q(a)$	DA: 1.2.
1.4.	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	
2.	$\exists x\ P(x) \to \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	1.1.$\Rightarrow$1.4.
2.1.	$\exists x\ Q(x)$	zał. dod.
2.2.	$Q(a)$	O$\exists$: 2.1.
2.3.	$P(a) \vee Q(a)$	DA: 2.2.
2.4.	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	
3.	$\exists x\ Q(x) \to \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	2.1.$\Rightarrow$2.4.
4.	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	1, 2, 3, dow. rozg.

1 (c). $\exists x\ (A(x) \wedge \forall y\ (B(y) \to C(x,y))) \to \forall y\ (B(y) \to \exists x\ (A(x) \wedge C(x,y)))$

1.	$\exists x\ (A(x) \wedge \forall y\ (B(y) \to C(x,y)))$	założenie
2.	$\neg\forall y\ (B(y) \to \exists x\ (A(x) \wedge C(x,y)))$	z.d.n.
3.	$\exists y\ \neg(B(y) \to \exists x\ (A(x) \wedge C(x,y)))$	N$\exists$: 2
4.	$\neg(B(a) \to \exists x\ (A(x) \wedge C(x,a)))$	O$\exists$: 3
5.	$B(a) \wedge \neg\exists x\ (A(x) \wedge C(x,a))$	NegImp: 4
6.	$B(a)$	OK: 5
7.	$\neg\exists x\ (A(x) \wedge C(x,a))$	OK: 5
8.	$\forall x\ \neg(A(x) \wedge C(x,a))$	N$\exists$: 7
9.	$A(b) \wedge \forall y\ (B(y) \to C(b,y))$	O$\exists$: 1
10.	$A(b)$	OK: 9
11.	$\forall y\ (B(y) \to C(b,y))$	OK: 9
12.	$B(a) \to C(b,a)$	O$\forall$: 11
13.	$C(b,a)$	RO: 12, 6
14.	$\neg(A(b) \wedge C(b,a))$	O$\forall$: 8
15.	$\neg A(b) \vee \neg C(b,a)$	NK: 14
16.	$\neg\neg A(b)$	DN: 10
17.	$\neg C(b,a)$	OA: 15, 16
18.	$\perp$	Sprzeczność: 13, 17.

2 (a). $\{\exists x\ (P(x) \vee Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \to R(x)),\ \forall x\ (Q(x) \to R(x))\} \vdash_{sb} \exists x\ R(x)$

1.	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	założenie
2.	$\forall x\ (P(x) \to R(x))$	założenie
3.	$\forall x\ (Q(x) \to R(x))$	założenie
4.	$P(a) \vee Q(a)$	O$\exists$: 1
5.	$P(a) \to R(a)$	O$\forall$: 2
6.	$Q(a) \to R(a)$	O$\forall$: 3
7.	$R(a)$	4, 5, 6 dow. rozg.
8.	$\exists x\ R(x)$	D$\exists$: 7.

2 (b). $\{\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x))\} \vdash_{sb} \exists x\ (R(x) \wedge Q(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	założenie
2.	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	założenie
3.	$P(a) \wedge Q(a)$	O∀: 1
4.	$P(a) \to R(a)$	O∀: 2
5.	$P(a)$	OK: 3
6.	$Q(a)$	OK: 3
7.	$R(a)$	RO: 4, 5
8.	$R(a) \wedge Q(a)$	DK: 7, 6
9.	$\exists x\ (R(x) \wedge Q(x))$	D∃: 8.

2 (c). $\{\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x)),\ \forall x\ (S(x) \to Q(x)),\ \forall x\ (R(x) \to P(x))\} \vdash_{sb} \forall x\ (R(x) \to \neg S(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	założenie
2.	$\forall x\ (S(x) \to Q(x))$	założenie
3.	$\forall x\ (R(x) \to P(x))$	założenie
4.	$P(a) \to \neg Q(a)$	O∀: 1
5.	$S(a) \to Q(a)$	O∀: 2
6.	$R(a) \to P(a)$	O∀: 3
7.	$R(a) \to \neg Q(a)$	syl. hip. 6, 4
7.1.	$R(a)$	zał. dod.
7.2.	$\neg Q(a)$	RO: 7, 7.1.
7.3.	$\neg S(a)$	MT: 5, 7.2.
8.	$R(a) \to \neg S(a)$	7.1.⇒7.3.
9.	$\forall x\ (R(x) \to \neg S(x))$	D∀: 8.

3 (a). $\{\exists x\ P(x),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))\}$

1.	$\exists x\ P(x)$	założenie
2.	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	założenie
3.	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	założenie
4.	$P(a)$	O∃: 1
5.	$P(a) \to Q(a)$	O∀: 2
6.	$P(a) \to \neg Q(a)$	O∀: 3
7.	$Q(a)$	RO: 5, 4
8.	$\neg Q(a)$	RO: 6, 4
9.	$\perp$	Sprzeczność: 7, 8.

3 (b). $\{\forall x\ P(x),\ \exists x\ \neg Q(x),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x))\}$

1.	$\forall x\ P(x)$	założenie
2.	$\exists x\ \neg Q(x)$	założenie
3.	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	założenie
4.	$\neg Q(a)$	O∃: 2
5.	$P(a)$	O∀: 1
6.	$P(a) \to Q(a)$	O∀: 3
7.	$Q(a)$	RO: 6, 5
8.	$\perp$	Sprzeczność: 4, 7.

3 (c). $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \forall x\ (Q(x) \to \exists y\ R(x,y)),\ \exists x\ P(x),\ \forall x \forall y\ \neg R(x,y)\}$

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	założenie
2.	$\forall x\ (Q(x) \rightarrow \exists y\ R(x,y))$	założenie
3.	$\exists x\ P(x)$	założenie
4.	$\forall x \forall y\ \neg R(x,y)$	założenie
5.	$P(a)$	O$\exists$: 3
6.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	O$\forall$: 1
7.	$Q(a) \rightarrow \exists y\ R(a,y)$	O$\forall$: 2
8.	$P(a) \rightarrow \exists y\ R(a,y)$	Syl. hip. 6, 7
9.	$\exists y\ R(a,y)$	RO: 8, 5
10.	$R(a,b)$	O$\exists$: 9
11.	$\forall y\ \neg R(a,y)$	O$\forall$: 4
12.	$\neg R(a,b)$	O$\forall$: 11
13.	$\bot$	Sprzeczność: 10, 12.

4 (a). Znajdujemy predykaty:

- $Q(x)$ — x is a Quaker
- $M(x)$ — x is a member of Peace Movements
- $D(x)$ — x is deluded
- $T(x)$ — x is a true Christian
- $R(x)$ — x is right in his views.

Znajdujemy schemat wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ ((Q(x) \vee M(x)) \rightarrow (D(x) \vee R(x))) \\ \forall x\ (T(x) \equiv Q(x)) \\ \forall x\ (T(x) \rightarrow \neg D(x))\end{array}}{\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))}$$

Budujemy dowód:

1.	$\forall x\ ((Q(x) \vee M(x)) \rightarrow (D(x) \vee R(x)))$	założenie
2.	$\forall x\ (T(x) \equiv Q(x))$	założenie
3.	$\forall x\ (T(x) \rightarrow \neg D(x))$	założenie
4.	$(Q(a) \vee M(a)) \rightarrow (D(a) \vee R(a))$	O$\forall$: 1
5.	$T(a) \equiv Q(a)$	O$\forall$: 2
6.	$T(a) \rightarrow \neg D(a)$	O$\forall$: 3
7.	$Q(a) \rightarrow T(a)$	OR: 5
8.	$Q(a) \rightarrow \neg D(a)$	Syl. hip. 7, 6
8.1.	$Q(a)$	zał. dod.
8.2.	$\neg D(a)$	MT: 8, 8.1.
8.3.	$Q(a) \vee M(a)$	DA: 8.1.
8.4.	$D(a) \vee R(a)$	RO: 4, 8.3.
8.5.	$R(a)$	OA: 8.4., 8.2.
9.	$Q(a) \rightarrow R(a)$	8.1.$\Rightarrow$8.5.
10.	$\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$	D$\forall$: 9.

4 (b). Znajdujemy predykaty:

- $R(x)$ — x is radioactive
- $S(x)$ — x has a very short life
- $M(x)$ — x has medical value.

Znajdujemy schemat wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (R(x) \to (S(x) \lor M(x))) \\ \forall x\ ((U(x) \land R(x)) \to \neg S(x))\end{array}}{\forall x\ (U(x) \to R(x)) \to \forall y\ (U(y) \to M(y))}$$

Budujemy dowód:

1.	$\forall x\ (R(x) \to (S(x) \lor M(x)))$	założenie
2.	$\forall x\ ((U(x) \land R(x)) \to \neg S(x))$	założenie
2.1.	$\forall x\ (U(x) \to R(x))$	zał. dod.
2.1.1.	$U(a)$	zał. dod.
2.1.2.	$U(a) \to R(a)$	O∀: 2.1.
2.1.3.	$R(a)$	RO: 2.1.2., 2.1.1.
2.1.4.	$U(a) \land R(a)$	DK: 2.1.1., 2.1.3.
2.1.5.	$(U(a) \land R(a)) \to \neg S(a)$	O∀: 2
2.1.6.	$\neg S(a)$	RO: 2.1.5., 2.1.4.
2.1.7.	$R(a) \to (S(a) \lor M(a))$	O∀: 1
2.1.8.	$S(a) \lor M(a)$	RO: 2.1.7., 2.1.3.
2.1.9.	$M(a)$	OA: 2.1.8., 2.1.6.
2.2.	$U(a) \to M(a)$	2.1.1.⇒2.1.9.
2.3.	$\forall y\ (U(y) \to M(y))$	D∀: 2.2.
3.	$\forall x\ (U(x) \to R(x)) \to \forall y\ (U(y) \to M(y))$	2.1.⇒2.3.

Wykorzystywana literatura

Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin.

Borkowski, L. 1977. *Logika formalna. Systemy logiczne. Wstęp do metalogiki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Bornat, R. 2005. *Proof and Disproof in Formal Logic. An Introduction for Programmers.* Oxford University Press, Oxford.

Carney, J.D., Sheer, R.K. 1964 *Fundamentals of Logic.* The Macmillian Company, New York; Collier-Macmilian Limited, London.

Chiswell, I., Hodges, W. 2007. *Mathematical Logic.* Oxford University Press, Oxford.

Copi, I.M. 1967. em Symbolic Logic. The Macmillian Company, New York; Collier-Macmilian Limited, London.

Malinowski, G. 2007. *Logika ogólna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Słupecki, J., Borkowski, L. 1966. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl