

Imię i Nazwisko:

GRUPA: I

1. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRZ jest *semantycznie* niesprzeczny:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg\delta\}.$$

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę β z następującego zbioru formuł:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \rightarrow \beta) \vee \lambda, \lambda \rightarrow (\gamma \vee \beta)\}.$$

3. Ustal, dowolną poprawną metodą, czy następujący sylogizm jest poprawny:

Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste. Żaden Sierściasty nie jest Myszasty. A zatem wśród Sierściastych nie ma Pierzastego.

4. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny:

$$\{\forall x \forall y ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)), \exists x (P(x) \wedge Q(x)), \neg \exists x (P(x) \wedge R(x, x))\}.$$

5. Sformułuj:

- (a) Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost w KRZ.
- (b) Prawo komutacji w KRZ.
- (c) Definicję formuły tablicowo wyprowadzalnej w KRP.

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

Imię i Nazwisko:

GRUPA: II

1. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRZ jest *semantycznie* niesprzeczny:

$$\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \beta, \delta, \alpha \vee \gamma\}.$$

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę λ z następującego zbioru formuł:

$$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \lambda, \delta \vee \alpha\}.$$

3. Ustal, dowolną poprawną metodą, czy następujący sylogizm jest poprawny:

Wszystkie Myszaste są Pierzaste. Wśród Sierściastych jest Myszasty. A zatem żaden Sierściasty nie jest Pierzasty.

4. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny:

$$\{\forall x\forall y ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)), \exists x (P(x) \wedge Q(x)), \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x, x))\}.$$

5. Sformułuj:

- (a) Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji wprost w KRZ.
- (b) Prawo *modus tollendo tollens* w KRZ.
- (c) Definicję zbioru tablicowo sprzecznego w KRP.

PISZ WYRAŹNIE.

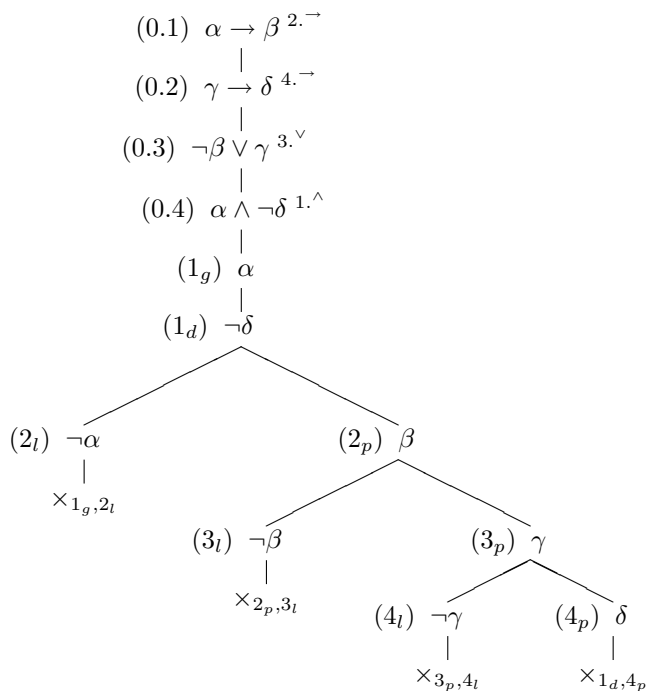
JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

Rozwiązania

GRUPA: I

1. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od podanych formuł. Odpowiada to przyjęciu założenia, że istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie te formuły przyjmują wartość 1.



Tablica jest zamknięta, a więc nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie podane formuły mają wartość 1. Stąd, tworzą one zbiór semantycznie sprzeczny.

Inna metoda rozwiązania tego zadania to:

- przeprowadzenie dowodu założeniowego, pokazującego, iż podany zbiór formuł jest *syntaktycznie* sprzeczny
- skorzystanie z twierdzenia o pełności metody założeniowej w KRZ.

Pokazujemy, że $\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest syntaktycznie sprzeczny:

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\gamma \rightarrow \delta$ założenie
3. $\neg\beta \vee \gamma$ założenie
4. $\alpha \wedge \neg\delta$ założenie
5. α OK: 4
6. $\neg\delta$ OK: 4
7. β RO: 1,5
8. $\neg\gamma$ MT: 2,6
9. $\neg\beta$ OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Z twierdzenia o pełności metody założeniowej wiadomo, że zbiór formuł języka KRZ jest syntaktycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest semantycznie sprzeczny.

Jeszcze inna metoda rozwiązania tego zadania to odwołanie się do definicji semantycznej niesprzeczności. Przypuszczamy, że wszystkie podane formuły mają wartość 1 przy co najmniej jednym wartościowaniu V zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwa przypadki:

- przypuszczenie to zostanie potwierdzone — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny;
- przypuszczenie to doprowadzi do sprzeczności, a więc trzeba będzie je odrzucić — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

Przypuśćmy zatem, że dla pewnego wartościowania V mamy:

- (1) $V(\alpha \rightarrow \beta) = 1$
- (2) $V(\gamma \rightarrow \delta) = 1$
- (3) $V(\neg\beta \vee \gamma) = 1$
- (4) $V(\alpha \wedge \neg\delta) = 1$

Wtedy musiałyby być:

- (5) $V(\alpha) = 1$ (na mocy (4))
- (6) $V(\neg\delta) = 1$ (na mocy (4))
- (7) $V(\delta) = 0$ (na mocy (6))
- (8) $V(\gamma) = 0$ (na mocy (2), (7))
- (9) $V(\beta) = 1$ (na mocy (1), (5))
- (10) $V(\neg\beta) = 1$ (na mocy (3), (8))
- (11) $V(\beta) = 0$ (na mocy (10))
- (12) sprzeczność: (9), (11).

A zatem nie istnieje wartościowanie V spełniające warunki (1)–(4). Badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

2. Aby pokazać, że:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \rightarrow \beta) \vee \lambda, \lambda \rightarrow (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta$$

budujemy dowód założeniowy wprost:

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 2. | $\neg\gamma \wedge \neg\delta$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \vee \lambda$ | założenie |
| 4. | $\lambda \rightarrow (\gamma \vee \beta)$ | założenie |
| 5. | $\neg\gamma$ | OK: 2 |
| 6. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | MT: 1,5 |
| 7. | λ | OA: 3,6 |
| 8. | $\gamma \vee \beta$ | RO: 4,7 |
| 9. | β | OA: 8,5. |

3. Podamy dwie metody rozwiązania:

- A. z wykorzystaniem diagramów Venna
- B. z wykorzystaniem tablic analitycznych.

W obu metodach będziemy stosowali te same oznaczenia:

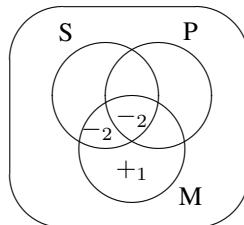
- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $S(x)$ — x jest Sierściasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty.

Nasz sylogizm jest oparty na następującej regule wnioskowania:

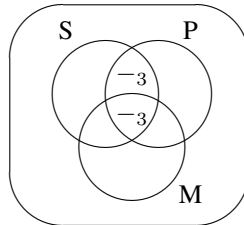
$$\frac{\neg\forall x (M(x) \rightarrow P(x)) \quad \neg\exists x (S(x) \wedge M(x))}{\neg\exists x (S(x) \wedge P(x))}$$

Metoda A. **Diagramy Venna.**

Rysujemy diagram dla przesłanek, zaznaczając minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste (najpierw zaznaczamy obszary puste!), indeksy odnoszą się do pierwszej i drugiej przesłanki, odpowiednio:



Teraz rysujemy diagram dla wniosku:



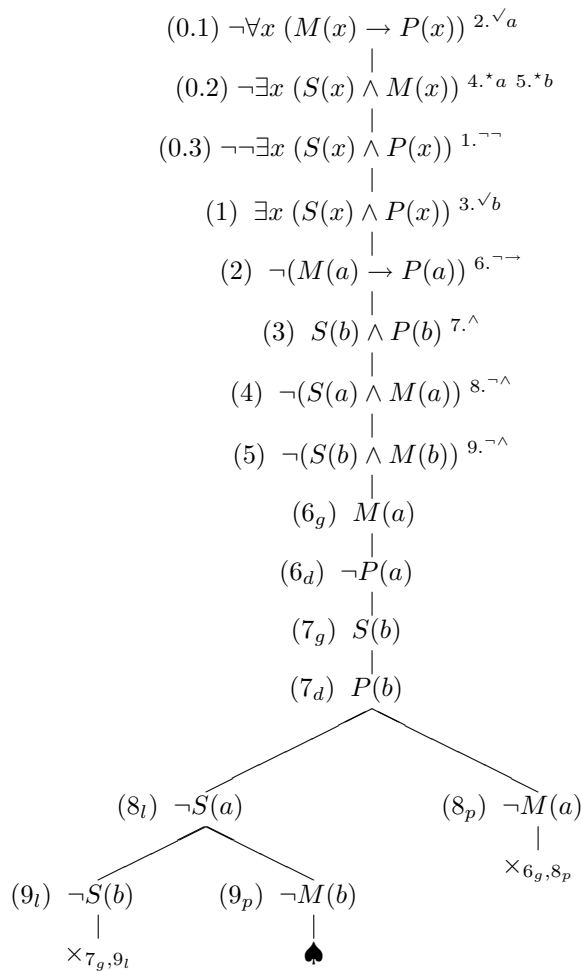
Z porównania obu rysunków jest widoczne, że rozważana reguła wnioskowania jest zawodna: obszar $S \cap P \cap M'$ zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, nie jest tak oznaczony na diagramie przesłanek. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Sylogizm nie jest poprawny.

Metoda B. **Tablice analityczne.**

Aby sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

$$\frac{\neg \forall x (M(x) \rightarrow P(x)) \quad \neg \exists x (S(x) \wedge M(x))}{\neg \exists x (S(x) \wedge P(x))}$$

jest niezawodna budujemy tablicę analityczną, zaczynającą się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



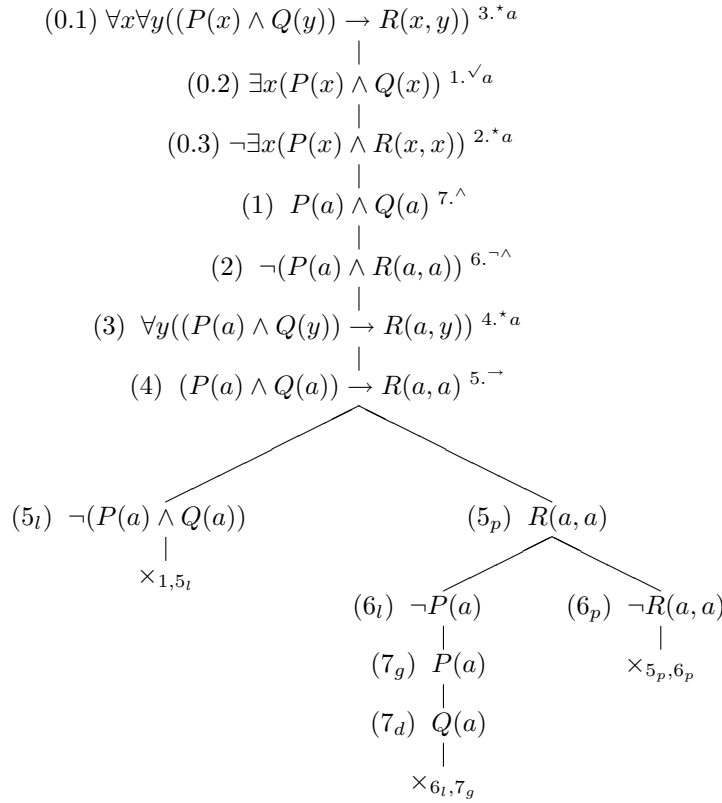
Tablica nie jest zamknięta. Reguła zawodna. Interpretacja, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

\spadesuit	S	P	M
a	-	-	+
b	+	+	-

4. Aby sprawdzić, czy zbiór formuł języka KRP:

$$\{\forall x \forall y ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)), \exists x (P(x) \wedge Q(x)), \neg \exists x (P(x) \wedge R(x, x))\}$$

jest semantycznie niesprzeczny, zbudujemy tablicę analityczną, rozpoczynając się od tych formuł (odpowiada to przyjęciu założenia, że wszystkie te formuły są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji):



Tablica zamknięta. Nie istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są prawdziwe. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

5.

- (a) **Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).**

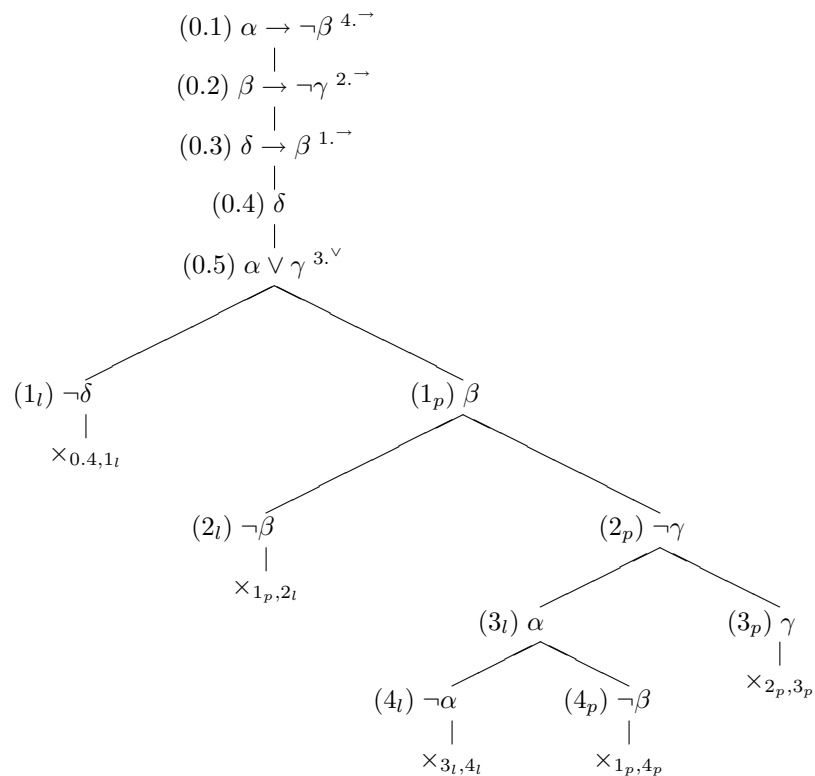
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

1. $X \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \neg\alpha$.
2. $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

- (b) **Prawo komutacji:** $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (c) **Dowodem tablicowym formuły α ze zbioru założeń S** nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S , to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest **tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa)** z S .

Jeśli α jest wyprowadzalna z pustego zbioru założeń, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$ i mówimy, że α jest **tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa)** w KRP.

1. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od podanych formuł. Odpowiada to przyjęciu założenia, że istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie te formuły przyjmują wartość 1.



Tablica jest zamknięta, a więc nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie podane formuły mają wartość 1. Stąd, tworzą one zbiór semantycznie sprzeczny.

Inna metoda rozwiązania tego zadania to:

- przeprowadzenie dowodu założeniowego, pokazującego, iż podany zbiór formuł jest *syntaktycznie* sprzeczny
- skorzystanie z twierdzenia o pełności metody założeniowej w KRZ.

Pokazujemy, że $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \beta, \delta, \alpha \vee \gamma\}$ jest *syntaktycznie* sprzeczny:

1. $\alpha \rightarrow \neg\beta$ założenie
2. $\beta \rightarrow \neg\gamma$ założenie
3. $\delta \rightarrow \beta$ założenie
4. δ założenie
5. $\alpha \vee \gamma$ założenie
6. β RO: 3,4
7. $\neg\gamma$ RO: 2,6
8. α OA: 5,7
9. $\neg\beta$ RO: 1,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9.

Z twierdzenia o pełności metody założeniowej wiadomo, że zbiór formuł języka KRZ jest syntaktycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest semantycznie sprzeczny.

Jeszcze inna metoda rozwiązania tego zadania to odwołanie się do definicji semantycznej niesprzeczności. Przypuszczamy, że wszystkie podane formuły mają wartość 1 przy co najmniej jednym wartościowaniu V zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwa przypadki:

- przypuszczenie to zostanie potwierdzone — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny;
- przypuszczenie to doprowadzi do sprzeczności, a więc trzeba będzie je odrzucić — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

Przypuśćmy zatem, że dla pewnego wartościowania V mamy:

- (1) $V(\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$
- (2) $V(\beta \rightarrow \neg\gamma) = 1$
- (3) $V(\delta \rightarrow \beta) = 1$
- (4) $V(\delta) = 1$
- (5) $V(\alpha \vee \gamma) = 1$

Wtedy musiałyby być:

- (6) $V(\beta) = 1$ (na mocy (3), (4))
- (7) $V(\neg\gamma) = 1$ (na mocy (2), (6))
- (8) $V(\gamma) = 0$ (na mocy (7))
- (9) $V(\alpha) = 1$ (na mocy (5), (8))
- (10) $V(\neg\beta) = 1$ (na mocy (1), (9))
- (11) $V(\beta) = 0$ (na mocy (10))
- (12) sprzeczność: (6), (11).

A zatem nie istnieje wartościowanie V spełniające warunki (1)–(4). Badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

2. Aby pokazać, że:

$$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \lambda, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \lambda$$

budujemy dowód założeniowy wprost:

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 2. | $\neg\delta$ | założenie |
| 3. | $(\gamma \vee \delta) \rightarrow \lambda$ | założenie |
| 4. | $\delta \vee \alpha$ | założenie |
| 5. | α | OA: 4,2 |
| 6. | $\alpha \vee \beta$ | DA: 5 |
| 7. | γ | RO: 1,6 |
| 8. | $\gamma \vee \delta$ | DA: 7 |
| 9. | λ | RO: 3,8. |

3. Podamy dwie metody rozwiązania:

- A. z wykorzystaniem diagramów Venna
- B. z wykorzystaniem tablic analitycznych.

W obu metodach będziemy stosowali te same oznaczenia:

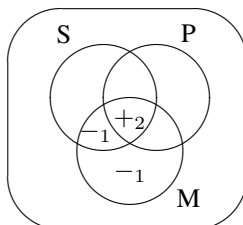
- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $S(x)$ — x jest Sierściasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty.

Nasz sylogizm jest oparty na następującej regule wnioskowania:

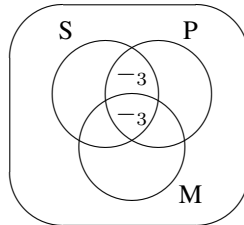
$$\frac{\forall x (M(x) \rightarrow P(x)) \quad \exists x (S(x) \wedge M(x))}{\neg\exists x (S(x) \wedge P(x))}$$

Metoda A. **Diagramy Venna.**

Rysujemy diagram dla przesłanek, zaznaczając minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste (najpierw zaznaczamy obszary puste!), indeksy odnoszą się do pierwszej i drugiej przesłanki, odpowiednio:



Teraz rysujemy diagram dla wniosku:



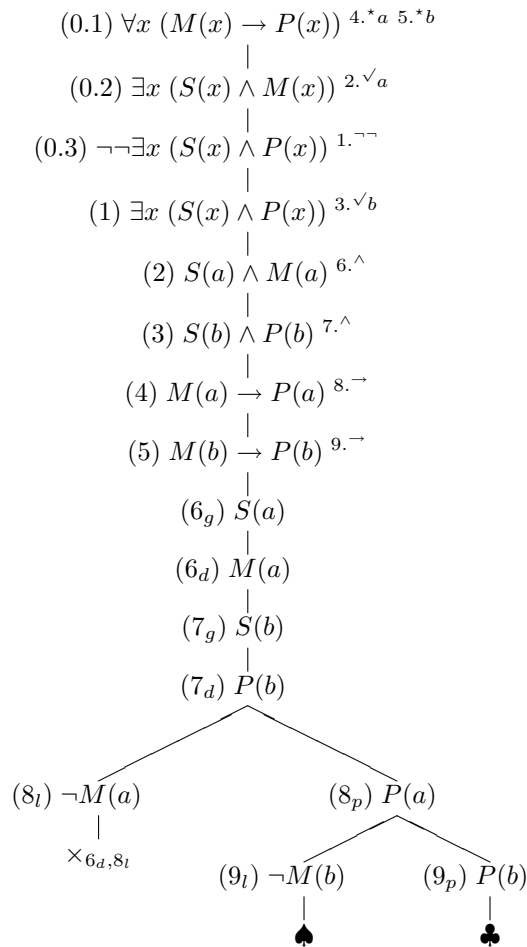
Z porównania obu rysunków jest widoczne, że rozważana reguła wnioskowania jest zawodna: obszar $S \cap P \cap M'$ zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, nie jest tak oznaczony na diagramie przesłanek. Tu ponadto obszar $S \cap P \cap M$ jest zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, a na diagramie przesłanek jako niepusty. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Sylogizm nie jest poprawny.

Metoda B. **Tablice analityczne.**

Aby sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

$$\frac{\forall x (M(x) \rightarrow P(x)) \quad \exists x (S(x) \wedge M(x))}{\neg \exists x (S(x) \wedge P(x))}$$

jest niezawodna budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest zamknięta. Reguła zawodna. Interpretacje, w których przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

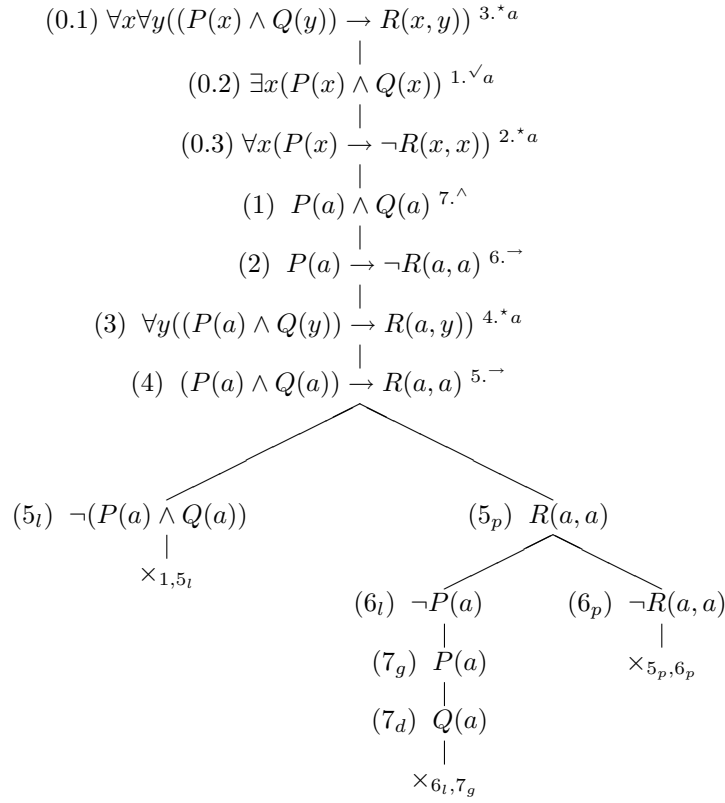
\spadesuit	S	P	M
a	+	+	+
b	+	+	-

\clubsuit	S	P	M
a	+	+	+
b	+	+	?

4. Aby sprawdzić, czy zbiór formuł języka KRP:

$$\{\forall x \forall y ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)), \exists x (P(x) \wedge Q(x)), \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x, x))\}$$

jest semantycznie niesprzeczny, zbudujemy tablicę analityczną, rozpoczynając się od tych formuł (odpowiada to przyjęciu założenia, że wszystkie te formuły są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji):



Tablica zamknięta. Nie istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są prawdziwe. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

5.

- (a) **Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna).**

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

1. Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$, to $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
2. Jeśli $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

- (b) **Modus tollendo tollens:** $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$

- (c) **Dowodem tablicowym formuły α ze zbioru założeń S** nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S , to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest *tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa)* z S .

Zbiór formuł S języka KRP jest *tablicowo sprzeczny*, gdy $S \vdash_{tab} \alpha \wedge \neg\alpha$ dla pewnego zdania α języka KRP. W przeciwnym przypadku S jest *tablicowo niesprzeczny*.