Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Zaliczenie Poprawkowe Wykładu: 10.II.2020

Kognitywistyka UAM, 2019–2020

Imię i nazwisko: .... Zawzięta Mróweczka

1. [2 punkty] Podaj definicje warunków: symetryczności oraz asymetryczności relacji R w zbiorze X. Podaj przykład niepustej relacji na zbiorze $\{a, b, c\}$, która nie jest ani symetryczna ani asymetryczna.

2. [2 punkty] Niech $A = \{6, 12, 15\}$. Wyznacz kres górny oraz kres dolny zbioru A w zbiorze wszystkich liczb naturalnych względem relacji R określonej następująco: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli bez reszty y.

3. [3 punkty] Pokaż, podając kontrprzykład, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

4. [3 punkty] Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1}$$

5. [5 punktów] Wybierz dokładnie jedną z podanych propozycji i przeprowadź dowód:

1. Udowodnij, że jeśli skończony zbiór X ma n elementów, to rodzina $\wp(X)$ wszystkich jego podzbiorów ma 2^n elementów.
2. Udowodnij przez indukcję matematyczną: $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej $r \neq 1$.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Rozwiązania

Zawzięta Mróweczka

1. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest symetryczna w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy, to yRx. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest asymetryczna w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx.

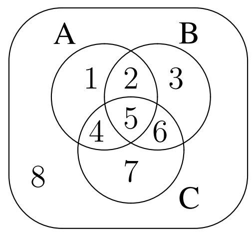
Dla uzyskania przykładu relacji R w zbiorze $\{a, b, c\}$, która nie jest ani symetryczna ani asymetryczna wystarczy zaliczyć do niej takie pary uporządkowane elementów tego zbioru, aby R zawierała pary: (x, y), (y, x) (wtedy R nie jest asymetryczna) oraz (u, v), ale nie zawierała (v, u) (wtedy R nie jest symetryczna). Dla przykładu, relacja $R = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$ nie jest ani symetryczna ani asymetryczna w zbiorze $\{a, b, c\}$.

2. Ograniczeniem dolnym zbioru $A = \{6, 12, 15\}$ w zbiorze wszystkich liczb naturalnych względem relacji R (która jest relacją podzielności bez reszty) jest każda liczba naturalna, która dzieli bez reszty każdą z liczb 6, 12, 15. Rozkładamy podane liczby na czynniki pierwsze: $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$. Każda liczba, która jest iloczynem wszystkich czynników pierwszych (oraz liczby 1), które są wspólne dla danych liczb jest ograniczeniem dolnym zbioru A względem R. Takie liczby to w tym przypadku: 1 oraz 3. Ponieważ $1R3$, więc największym ograniczeniem dolnym, czyli kresem dolnym zbioru A względem tej relacji jest liczba 3 (największy wspólny dzielnik liczb 6, 12, 15).

Ograniczeniem górnym zbioru $A = \{6, 12, 15\}$ w zbiorze wszystkich liczb naturalnych względem relacji R podzielności bez reszty jest każda liczba, która jest wielokrotnością iloczynu wspólnych czynników pierwszych (z uwzględnieniem największych krotności tych czynników) każdej z liczb 6, 12, 15. Takich ograniczeń górnych jest zatem nieskończenie wiele (np. każda liczba postaci $6^p \cdot 12^q \cdot 15^r$, gdzie p, q i r są dodatnimi liczbami naturalnymi jest takim ograniczeniem górnym). Najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A względem R, czyli kresem górnym zbioru A względem tej relacji jest liczba 60, czyli najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 6, 12, 15. Widać to wyraźnie po ustaleniu, że: $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, ponieważ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Słuchacze poznali w szkole algorytmy uzyskiwania największego wspólnego dzielnika oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb.

3. Można narysować diagram Venna dla trzech zbiorów, umieszczając jakieś elementy w każdej składowej i policzyć, czemu równa jest lewa i prawa strona rozważanej równości.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:
$A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$
$A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap C = \{4, 5\}$
$B \cap C = \{5, 6\}$
$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$
$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4, 5, 6\}$.
Widzimy zatem, że podane wyżej zbiory A, B i C nie spełniają badanej równości, a więc nie jest ona prawem rachunku zbiorów.

4. Pochodną funkcji $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ obliczamy, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji, pamiętając też, że $e^{\sqrt{x}}$ jest funkcją złożoną:

$f'(x) = (\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1})' = \frac{(e^{\sqrt{x}})'\cdot(\sqrt{x}+1)-e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'\cdot(\sqrt{x}+1)-e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)-e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1-1}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$

5.1. Udowodnij, że jeśli skończony zbiór X ma n elementów, to rodzina $\wp(X)$ wszystkich jego podzbiorów ma 2^n elementów.

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem liczby elementów zbioru X, tj. $n = |X|$. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 0.

Krok początkowy. W przypadku $k = 0$ rozważamy zbiór pusty oraz jego zbiór potęgowy. Widzimy, że $|\emptyset| = 0$, $|\wp(\emptyset)| = 1$ oraz $2^0 = 1$.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiane twierdzenie zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że dla każdego zbioru X o k elementach (*założenie indukcyjne*):

$$|\wp(X)| = 2^k.$$

Musimy wykazać, że dla dowolnego zbioru Y o $k + 1$ elementach:

$$|\wp(Y)| = 2^{k+1}.$$

Niech zatem Y będzie dowolnym zbiorem o $k + 1$ elementach. Wybieramy (dowolny, ale ustalony) element $a \in Y$. Zbiór $Y - \{a\}$ ma k elementów, zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym:

$$|\wp(Y - \{a\})| = 2^k.$$

Zauważmy, że wszystkie zbiory z rodziny $\wp(Y)$ możemy podzielić na te, do których a nie należy oraz te, do których a należy. Uzyskujemy w ten sposób podział (rozłączny i wyczerpujący) rodziny $\wp(Y)$ na dwie pod-rodziny. Odkrywamy teraz, że te rodziny są równoliczne (każdemu zbiorowi Z, który nie zawiera elementu a odpowiada dokładnie jeden zbiór $Z \cup \{a\}$). Zatem:

$$|\wp(Y)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 0$.

5.2. Udowodnij przez indukcję matematyczną: $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej $r \neq 1$. Słuchacze rozpoznali z pewnością podawany w szkole wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.
DOWÓD.

Krok początkowy. Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 1. Ponieważ dla 1 lewa strona równa jest $1 + r$, zaś prawa strona równa jest $\frac{r^{1+1}-1}{r-1} = \frac{r^2-1}{r-1} = \frac{(r+1)\cdot(r-1)}{r-1} = r + 1$ więc badana nierówność zachodzi dla liczby 1.

Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne dla $k \geqslant 1$:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^k = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}.$$

Mamy udowodnić, że przy tym założeniu zachodzi:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r - 1}.$$

Ponieważ $1 + r + r^2 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \left(1 + r + r^2 + \ldots + r^k\right) + r^{k+1}$, więc na mocy założenia indukcyjnego: $1 + r + r^2 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1}$. Obliczamy:
$\frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1+(r-1)\cdot r^{k+1}}{r-1} = \frac{r^{k+1}-1+r\cdot r^{k+1}-1\cdot r^{k+1}}{r-1} = \frac{-1+r^{k+1+1}}{r-1} = \frac{r^{(k+1)+1}-1}{r-1}$.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^k = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1},$$

to

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r - 1}.$$

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważana nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.