Metalogika (3)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Oswajanie

W tej prezentacji podajemy jedynie wybrane podstawowe pojęcia i kilka twierdzeń.

Ogólne operacje konsekwencji dostarczają algebraicznych metod umożliwiających m.in.:

- porównywanie logik;
- formułowanie różnych wersji pełności logik (np. zgodności semantyki z maszynerią inferencyjną);
- określanie stopnia (nie)zupełności logik, itp.

W dodatkach umieszczonych na stronie tych wykładów podano informacje uzupełniające.

Przypomnienie: konsekwencja wyznaczona przez reguły

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka (zdaniowego) J. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przez operację konsekwencji w J wyznaczoną przez $\mathcal{R}$ rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$. Podamy kilka własności tak ogólnie rozumianej operacji konsekwencji. Dowody twierdzeń A–C: w Dodatku 2.

Konsekwencja wyznaczona przez reguły

Rozważamy języki postaci $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\}\rangle$, gdzie:

- $\{\S_i : i \in I\}$ jest rodziną funktorów zdaniotwórczych,
- S jest (przeliczalnym) zbiorem wszystkich formuł (zdefiniowanym indukcyjnie, w ten sam sposób, jak dla KRZ, wychodząc od zbioru V zmiennych zdaniowych).

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest domknięty na wszystkie reguły ze zbioru $\mathcal{R}$: $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)(((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \Rightarrow \alpha \in X)$.

(To definicja metajęzykowa, zapisana w języku teorii mnogości).

Konsekwencja wyznaczona przez reguły

Niech $e : V \rightarrow X$ będzie dowolnym odwzorowaniem ze zbioru V zmiennych zdaniowych w jakiś zbiór formuł X. Funkcję e można jednoznacznie rozszerzyć do homomorfizmu $h^e : S \rightarrow S$ w następujący sposób:

- $h^e(p_i) = e(p_i)$
- $h^e(\S_j^1(\alpha)) = \S_j^1(h^e(\alpha))$ (dla spójników 1-argumentowych $\S_j^1$)
- $h^e(\S_j^2(\alpha, \beta)) = \S_j^2(h^e(\alpha), h^e(\beta))$ (dla spójników 2-argumentowych $\S_j^2$).

Regułę podstawiania za zmienne zdaniowe można wtedy określić następująco: α_2 powstaje z α_1 przez podstawienie (formuł ze zbioru X za zmienne zdaniowe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $e : V \rightarrow X$ taka, że $\alpha_2 = h^e(\alpha_1)$.

Konsekwencja wyznaczona przez reguły

Twierdzenie A. Relacja konsekwencji wyznaczona przez reguły $\mathcal{R}$ ma następujące własności:

- (1) Jeśli $n < m$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^m_{\mathcal{R}}(X)$.
- (2) $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$.
- (3) Jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $R \in \mathcal{R}$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
- (4) Jeśli $(P, \alpha) \in R$, $R \in \mathcal{R}$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Uwaga. Z A.(2). wynika, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest iloczynem wszystkich zbiorów zawierających X i domkniętych ze względu na reguły z $\mathcal{R}$. Zatem $C_{\mathcal{R}}(X)$ można tak właśnie definiować.

Konsekwencja wyznaczona przez reguły

Twierdzenie A. (ciąg dalszy).

- (5) $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
- (6) Jeśli $X \subseteq Y$, to $C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
- (7) Jeśli $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, to $C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
- (8) $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
- (9) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (10) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (11) Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny $\mathcal{X}$ zachodzi alternatywa $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$, to: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

Symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza moc zbioru X, a $\aleph_0$ jest mocą zbioru $\mathcal{N}$.

Reguły dopuszczalne

Zbiór *Perm*$(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł dopuszczalnych ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Twierdzenie B.
$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

Reguła R jest zatem dopuszczalna ze względu na X oraz $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na tę regułę.

Reguły wyprowadzalne

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł wyprowadzalnych ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:
$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Twierdzenie C.

- (1) $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł $\mathcal{R}'$: $C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{R\}}(X \cup Y) \subseteq C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X \cup Y)$.
- (2) $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (3) Istnieją: $\mathcal{R}$ oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.
- (4) $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (5) $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (6) $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap\{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.

Reguły strukturalne

Reguła R jest regułą strukturalną w S wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego $e : V \to S$ także sekwent $(h^e[X], h^e(\alpha))$ należy do R. Oznaczamy: $Sb(X) = \{\alpha \in S : \alpha \in h^e[X]$ dla pewnego $e : V \to S\}$.

Reguła strukturalna to zatem, intuicyjnie (i niezbyt precyzyjnie) mówiąc, reguła zawierająca wszelkie sekwenty (X, α) będące podstawieniami jakiegokolwiek sekwentu z tej reguły.

Reguły strukturalne można zapisywać schematycznie, np. regułę odrywania w postaci:

$$\frac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}.$$

Ogólne pojęcie konsekwencji

Można rozważać jeszcze ogólniejsze pojęcie konsekwencji, niezrelatywizowane do zbioru reguł $\mathcal{R}$. Niech $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$. Powiemy, że funkcja $C : 2^S \rightarrow 2^S$ jest (finitystyczną) operacją konsekwencji w J, gdy spełnione są następujące warunki, dla dowolnych $X, Y \in 2^S$:

- (C1) $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)
- (C2) jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)
- (C3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)
- (C4) $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

Całkiem ogólne operacje konsekwencji to te, spełniające (C1)–(C3). Zob. też dodatek: Katarzyna Budzyńska: Czy logika formalna opisuje dedukcyjne argumentacje?

Ogólne pojęcie konsekwencji

Ogólna (finitystyczna) relacja konsekwencji $\vdash \subseteq 2^S \times S$ w S określona jest dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ przez warunki:

- $(\vdash 1)$ $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$
- $(\vdash 2)$ jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$
- $(\vdash 3)$ jeśli $X \vdash \beta$ dla każdej $\beta \in Y$ oraz $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$
- $(\vdash 4)$ jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje Y taki, że: $Y \subseteq X$, $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ oraz $Y \vdash \alpha$.

Operacje i relacje konsekwencji są wzajemnie przez siebie definiowalne:

$$(\bigstar) \quad X \vdash \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \in C(X)$$

(tj. dla każdej $\vdash$ istnieje C taka, że $(\bigstar)$, a także dla każdej C istnieje $\vdash$ taka, że $(\bigstar)$).

Ogólne pojęcie konsekwencji

Powiemy, że operacja C_2 jest nadkonsekwencją operacji C_1 (wtedy mówimy, że C_1 jest podkonsekwencją operacji C_2 i piszemy $C_1 \preccurlyeq C_2$), gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, dla każdego $X \in 2^S$.

Relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathcal{C}_S$ wszystkich operacji konsekwencji określonych na S. Jeśli $\{C_t : t \in T\}$ jest dowolną rodziną operacji konsekwencji na S, to określamy kres dolny $\bigwedge\{C_t : t \in T\}$ oraz kres górny $\bigvee\{C_t : t \in T\}$:

- $\bigwedge\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$
- $\bigvee\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\limits_{t \in T}\{C(X) : C_t \preccurlyeq C\}$.

Układ $\langle \mathcal{C}_S; \preccurlyeq \rangle$ jest kratą zupełną, z zerem i jedynką.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Punkty stałe operacji C, tj. zbiory X, dla których zachodzi równość $C(X) = X$ nazywane są teoriami operacji C.

Każda operacja konsekwencji określona warunkami (C1)–(C4) ma następującą własność:

- $C(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y \wedge C(C(Y)) = Y\}$.

Każda ogólna relacja konsekwencji $\vdash$ określona warunkami ($\vdash$ 1)–($\vdash$ 4) ma własność:

- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap\{Y \in D_{\vdash} : X \subseteq Y\}$

gdzie $D_{\vdash} = \{X \subseteq S : \alpha \in X \equiv X \vdash \alpha\}$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Oto niektóre podstawowe własności mogące przysługiwać operatorom konsekwencji:

Konsekwencja C jest niesprzeczna, gdy $C(\emptyset) \neq S$.

Konsekwencja C jest zupełna, gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdej $\alpha \notin C(\emptyset)$.

Konsekwencja C jest maksymalna w rodzinie $\mathcal{C}_S$, gdy nie istnieje niesprzeczna konsekwencja C' taka, że $C \preccurlyeq C'$ oraz $C \neq C'$. Konsekwencje maksymalne to dokładnie wszystkie niesprzeczne konsekwencje zupełne.

Konsekwencja C jest zwarta, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: jeśli $C(X) = S$, to istnieje skończony zbiór Y taki, że $Y \subseteq X$ oraz $C(Y) = S$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Konsekwencja C jest strukturalna, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $e : V \longrightarrow S$ zachodzi inkluzja: $h^e[C(X)] \subseteq C(h^e[X])$.

Konsekwencja C (wyznaczona przez jakiś zbiór reguł) jest strukturalnie zupełna, gdy każda reguła strukturalna i dopuszczalna ze względu na C jest wyprowadzalna ze względu na C.

Złożenie $C_1 \circ C_2$ dwóch operatorów konsekwencji określone wzorem $C_1 \circ C_2(X) = C_1(C_2(X))$ nie musi być operatorem konsekwencji. Następujące warunki są równoważne:

- $C_1 \circ C_2 \in \mathcal{C}_S$
- $C_1 \circ C_2 = \bigvee\{C_1, C_2\}$
- $C_1 \circ C_2(C_1 \circ C_2(X)) \subseteq C_1 \circ C_2(X)$
- $C_2 \circ C_1 \preccurlyeq C_1 \circ C_2$.

Konsekwencja założeniowa

Omawiana w poprzednim wykładzie relacja $\vdash_{jas}$ jest relacją wyznaczoną przez (pusty zbiór aksjomatów oraz) zestaw reguł pierwotnych ze zbioru *jas*.

$X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód α w oparciu o założenia X oraz reguły ze zbioru *jas*.

Odpowiadająca jej operacja konsekwencji w KRZ to funkcja $C_{jas} : 2^S \rightarrow 2^S$ zdefiniowana wzorem:

$$C_{jas}(X) = \{\alpha \in S : X \vdash_{jas} \alpha\}.$$

Ćwiczenie. Pokaż, że C_{jas} spełnia warunki (C1)-(C4).

Patrz np.: Pogorzelski, Wojtylak 2008, Wójcicki 1984

W dodatku 1 (Dwa Paradygmaty Metalogiki) podano dalsze przykłady konsekwencji zdefiniowanych przez zestawy *aksjomatów* i *reguł pierwotnych*:

- logika klasyczna;
- logika intuicjonistyczna;
- logiki wielowartościowe;
- logika modalna S_5.

Zob. też dodatek: Andrzej Indrzejczak — Rozumowanie, argumentacja, dowód.

W ogólności, aksjomaty traktować można jako zeroprzesłankowe reguły wnioskowania. Wygodne jednak bywa rozważanie operacji konsekwencji $C^A_{\mathcal{R}}$ zdefinowanych przez zestaw reguł $\mathcal{R}$ oraz aksjomatów A: $C^A_{\mathcal{R}}(X) = C_{\mathcal{R}}(A \cup X)$.

Krata teorii

Niech C będzie operacją konsekwencji, a $X \subseteq S$ zbiorem formuł. Mówimy, że:

- X jest *C-sprzeczny*, gdy $C(X) = S$. W przeciwnym przypadku X jest *C-niesprzeczny*.
- X jest *C-zupełny*, gdy $X = C(X)$ jest maksymalnym zbiorem C-niesprzecznym.

- Niech $Th(C) = \{C(X) : X \subseteq S\}$.
- $\langle Th(C); \sqcap, \sqcup \rangle$ jest kratą (zupełną, z zerem i jedynką), gdzie:
  - $X \sqcap Y = X \cap Y$, $\bigwedge\limits_{i \in I} X_i = \bigcap\limits_{i \in I} X_i$
  - $X \sqcup Y = C(X \cup Y)$, $\bigvee\limits_{i \in I} X_i = C(\bigcup\limits_{i \in I} X_i)$

Twierdzenie Lindenbauma

Twierdzenie Lindenbauma

- Jeśli C jest zwarta, a X jest C-niesprzeczny, to istnieje C-zupełna teoria Y taka, że $X \subseteq Y$.

Tak więc, każdą teorię C-niesprzeczną można rozszerzyć do teorii C-zupełnej (wymaga to jednak zastosowania pewnika wyboru; równoważność pewnika wyboru z Twierdzeniem Lindenbauma pokazał Wojciech Dzik).

Liczba rozszerzeń zupełnych teorii niesprzecznej jest miarą jej (nie)zupełności.

Zawartość matrycy

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i \in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U; \{f_i\}_{i \in I}\rangle$ jest algebrą podobną (=tej samej sygnatury) do algebry języka $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\}\rangle$ (ze zbiorem zmiennych zdaniowych V), a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$).

Zawartością (zbiorem tautologii) matrycy $\mathfrak{M}$ jest zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł α języka J takich, że dla dowolnego $e : V \to U$ mamy $h^e(\alpha) \in D$.

Dla przykładu, zawartością matrycy:

$$\mathfrak{B}_2 = \langle \{0, 1\}; \underline{\neg}, \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \{1\}\rangle$$

jest zbiór wszystkich tautologii KRZ.

Konsekwencja matrycowa

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i \in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną. Zdefiniujmy funkcję $C_{\mathfrak{M}} : 2^S \longrightarrow 2^S$ następująco:

- $C_{\mathfrak{M}}(X)$ jest zbiorem wszystkich formuł $\alpha \in S$ takich, że dowolnego $e : V \longrightarrow U$ mamy:

$$\text{jeśli } h^e[X] \subseteq D, \text{ to } h^e(\alpha) \in D.$$

Wtedy $C_{\mathfrak{M}}$ spełnia warunki (C1)–(C4). Zachodzi: $E(\mathfrak{M}) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset)$.

Funkcję $C_{\mathfrak{M}}$ nazywamy konsekwencją matrycową (wyznaczoną przez matrycę $\mathfrak{M}$). Oznaczana ona bywa także przez $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.

Pełność względem matrycy

Operacja konsekwencji $C^A_\mathcal{R}$ (wyznaczona przez zbiór reguł $\mathcal{R}$ oraz zbiór aksjomatów A) jest:

- pełna (w sensie silnym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: $C^A_\mathcal{R}(X) = C_\mathfrak{M}(X)$;
- pełna (w sensie słabym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy: $C^A_\mathcal{R}(\emptyset) = C_\mathfrak{M}(\emptyset)$;
- jeśli $C^A_\mathcal{R}$ jest pełna względem $\mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}$ jest adekwatna względem $C^A_\mathcal{R}$.

Konsekwencja aksjomatyczna w KRZ (zob. Dwa Paradygmaty Metalogiki) jest pełna (w obu sensach) względem matrycy $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0,1\}; \underline{\neg}, \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \{1\} \rangle$.

Pełność względem matrycy

Operacja konsekwencji C jest pełna względem klasy matryc K, gdy jest pełna względem każdej matrycy należącej do K.

Matryca $\mathfrak{M}$ jest silnie adekwatna dla C, gdy $C = C_{\mathfrak{M}}$.

Niech C będzie operacją konsekwencji w $J = \langle S, \{\S_i : i \in I\}\rangle$. Wiązką Lindenbauma dla C nazywamy klasę matryc $\mathbb{L}_C$:

$$\mathbb{L}_C = \{\langle S; \{\S_i : i \in I\}, C(X)\rangle : X \subseteq S\}.$$

Matryca Lindenbauma

Matrycą Lindenbauma dla operacji $C_{\mathcal{R}}^{A}$ jest: $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^{A} = \langle S, \{\S_i : i \in I\}, C_{\mathcal{R}}^{A}(\emptyset)\rangle$.

- $E(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^{A}) = \{\alpha \in S : Sb(\alpha) \subseteq C_{\mathcal{R}}^{A}(\emptyset)\}$.
- Jeśli reguła podstawiania jest dopuszczalna dla $C_{\mathcal{R}}^{A}$, to $E(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^{A}) = C_{\mathcal{R}}^{A}(\emptyset)$.
- [Wójcicki]. Każda konsekwencja strukturalna jest pełna względem swojej wiązki Lindenbauma.

Pełność operacji konsekwencji względem matrycy Lindenbauma (wiązki Lindenbauma) nie rozwiązuje jednak całkowicie problematyki pełności. Jesteśmy zainteresowani pełnością konsekwencji np. względem: klasy matryc skończonych, klasy matryc, których algebry mają jakąś określoną strukturę (algebraiczną, topologiczną, itd.), dokładnie jednej matrycy, itd.

Czelakowski 2001, Pogorzelski,Wojtylak 2008, Wójcicki 1984

Jest nieprzebrane mnóstwo wyników dotyczących pełności logik:

- Dla systemu modalnego S_5 adekwatna jest (nieskończona) matryca Wajsberga.
- Dla logik (skończenie) wielowartościowych Łukasiewicza mamy pełność względem (skończonych) matryc Łukasiewicza.
- Nieskończenie wielowartościowa logika Łukasiewicza jest pełna względem nieskończonej matrycy (o uniwersum $[0, 1]$).
- Logika intuicjonistyczna jest pełna względem klasy wszystkich algebr Heytinga.
- Istnieją matryce skończone, których zawartość nie jest skończenie aksjomatyzowalna (P. Wojtylak, K. Pałasińska).

Dygresja: semantyka Kripkego

Strukturą Kripke'go (dla zdaniowego języka modalnego S, z operatorami $\Box$ i $\Diamond$) jest para $\langle W; R \rangle$, gdzie $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$. Modelem Kripke'go jest trójka $\langle W; R, \Vdash \rangle$, gdzie $\Vdash \subseteq W \times S$ oraz:

- $w \Vdash \neg\alpha$ dokładnie wtedy, gdy nie zachodzi $w \Vdash \alpha$;
- $w \Vdash \alpha \wedge \beta$ dokładnie wtedy, gdy $w \Vdash \alpha$ oraz $w \Vdash \beta$ (itd. dla pozostałych funktorów prawdziwościowych);
- $w \Vdash \Box\alpha$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $u \in W$: jeśli $R(w, u)$, to $u \Vdash \alpha$.

Formuła α jest prawdziwa w:

- modelu $\langle W; R, \Vdash \rangle$, gdy $w \Vdash \alpha$ dla wszystkich $w \in W$;
- strukturze $\langle W; R \rangle$, gdy jest prawdziwa w każdym modelu $\langle W; R, \Vdash \rangle$;
- klasie struktur K, gdy jest prawdziwa w każdej strukturze z K.

Dygresja: semantyka Kripkego

W to zbiór światów (punktów odniesienia), R to relacja osiągalności (dostępności). Niech:

- $Thm(K)$ = zbiór wszystkich formuł prawdziwych w K;
- $Mod(X)$ = klasa wszystkich struktur, w których prawdziwe są wszystkie formuły z X;
- X jest trafny względem K, gdy $X \subseteq Thm(K)$;
- X jest pełny względem K, gdy $Thm(K) \subseteq X$;
- X jest wyznaczony przez K, gdy $K = Mod(X)$.

W zależności od tego, jakie formalne własności ma R, otrzymujemy różne systemy logiki modalnej. Zobacz dodatki na naszej stronie:

- Robert Golblatt — Mathematical modal logic: a view of its evolution.
- Andrzej Wiśniewski — Wybrane modalne rachunki zdań.
- Andrzej Wiśniewski — Semantyka relacyjna dla normalnych modalnych rachunków zdań.

Konsekwencja odrzucająca

Niech C będzie operacją konsekwencji. Zdefiniujmy operację C^{-1} konsekwencji odrzucającej (wyznaczonej przez C) następująco:

$C^{-1}(X) = \{\alpha \in S : X \cap C(\{\alpha\}) \neq \emptyset\}$.

Wtedy C^{-1} spełnia warunki (C1)–(C4).

W myśl powyższej definicji, α jest formułą odrzuconą na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła z X jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$.

Tak więc, formuła α **nie jest** odrzucona na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy **żadna** formuła z X nie jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$.

Konsekwencja dualna

Konsekwencją dualną do konsekwencji C nazywamy funkcję ∂C określoną następująco:

$$\partial C(X) = \{\alpha \in S : (\exists Y \subseteq X)\, (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge \bigcap_{\beta \in Y} C(\{\beta\}) \subseteq C(\{\alpha\}))\}.$$

Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to operacja ∂C spełnia warunki (C1)–(C4). Ponadto, $C^{-1} \preccurlyeq \partial C$, czyli ∂C jest nadkonsekwencją C^{-1}, oraz:

- $\partial(\partial C)(\emptyset) = \bigcap_{\alpha \in S} C(\{\alpha\})$.
- $\partial C(\emptyset) = \{\alpha \in S : C(\{\alpha\}) = S\}$.
- Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to $\partial(\partial C)(X) = C(X)$.

Konsekwencja odrzucająca

Konsekwencje odrzucające możemy charakteryzować poprzez reguły odrzucania formuł. Dla przykładu, jedną z takich reguł jest reguła odrzucania przez odrywanie: jeśli uznajesz implikację oraz odrzucasz jej następnik, to odrzuć jej poprzednik.

Relacje odrzucania wyrażeń oznaczane są zwykle symbolem $\dashv$. Powyższa reguła ma zatem następujący zapis:

$$\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta, \quad \dashv \beta}{\dashv \alpha}.$$

Tak jak reguły charakteryzujące relacje wyprowadzalności $\vdash$ mają, intuicyjnie mówiąc, gwarantować, że są to relacje zachowujące prawdę, tak stosowne reguły dla relacji odrzucania $\dashv$ mają gwarantować, że są to relacje zachowujące fałsz.

Konsekwencja odrzucająca

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i \in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U; \{f_i\}_{i \in I}\rangle$ jest algebrą podobną do algebry języka $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\}\rangle$, a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$). Przez $\mathfrak{M}^*$ oznaczmy matrycę $\langle U; \{f_i\}_{i \in I}, U - D\rangle$, w której zbiorem wartości wyróżnionych jest $U - D$.

Jeśli $\mathcal{R}$ jest zbiorem reguł uznawania, a $\mathcal{R}^*$ zbiorem reguł odrzucania formuł, to zachodzenie ciągu równości:

$$C_{\mathcal{R}^*} = C_{\mathfrak{M}^*} = \partial C_{\mathcal{R}} = \partial C_{\mathfrak{M}}$$

moglibyśmy nazywać (silną) pełnością odrzucającą konsekwencji $C_{\mathcal{R}}$ i $C_{\mathcal{R}^*}$ względem matryc $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^*$.

W dodatku Lustrzana logika pokazano kłopoty Alicji z konsekwencją odrzucającą.

Operacje domknięcia

Operacje konsekwencji (warunki (C1)–(C3)) są szczególnym przypadkiem *operacji domknięcia*, ważnych w wielu działach matematyki:

- domknięcie topologiczne;
- różne typy domknięć algebraicznych;
- odpowiedniości Galois;
- $\langle \mathbb{R}; [] \rangle$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, a funkcja $[]$ zdefiniowana jest wzorem: $[r]$ = najmniejsza liczba całkowita $\geqslant r$;
- domknięcia związane z definiowalnością.

Literatura

- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logic. *Indagationes Mathematicae* **20**, 177–183.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Wójcicki, R. 1988. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.