KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW:

SEMANTYKA

(LOGIKA MATEMATYCZNA: WYKŁADY 16, 17)

SEMESTR LETNI 2007–2008

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

LOGIKA MATEMATYCZNA (16–17)

KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW:

SEMANTYKA

Rozpoczynamy prezentację KLASYCZNEGO RACHUNKU PREDYKATÓW (KRP). W tym i następnym wykładzie omówimy:

- składnię i semantykę języka KRP
- tautologie oraz wynikanie logiczne w KRP
- język KRP jako standard w konstrukcji języków teorii naukowych.

Kolejne wykłady dotyczące KRP poświęcone będą różnym operacjom konsekwencji:

- tablicowej
- aksjomatycznej
- założeniowej
- rezolucyjnej
- gentzenowskiej.

Pokażemy, że wszystkie te operacje konsekwencji są trafne i pełne. Jedna z podstawowych różnic między KRP a omówionym wcześniej KRZ polega na tym, że KRP ***nie jest*** rozstrzygalny: nie istnieje algorytm, pozwalający rozstrzygać o dowolnej formule języka KRP czy jest ona prawem (tautologią) tego rachunku. KRP jest jedynie ***pół-rozstrzygalny***: jeśli jakaś formuła języka KRZ ***jest*** tautologią KRP, to fakt ten można poświadczyć za pomocą metody algorytmicznej (bazującej na którejś z wymienionych wyżej operacji konsekwencji).

16.1. Składnia języka KRP

16.1.1. Alfabet języka KRP

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — ***zmienne indywiduowe***,

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathcal{N})$ — ***predykaty***,

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathcal{N})$ — ***symbole funkcyjne***,

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — ***stałe indywiduowe***,

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — ***stałe logiczne***,

$\Sigma_6 = \{\ ,\ ,\ (\ ,\ )\}$ — ***symbole pomocnicze***.

Stosujemy następującą terminologię:

- $P_i^{n_i}$ nazywamy n_i-***argumentowym predykatem***,
- $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j-***argumentowym symbolem funkcyjnym***,
- symbol $\forall$ nazywamy ***kwantyfikatorem generalnym***,
- symbol $\exists$ nazywamy ***kwantyfikatorem egzystencjalnym***,
- symbole: $\wedge$ (***koniunkcja***), $\vee$ (***alternatywa***), $\rightarrow$ (***implikacja***), $\neg$ (***negacja***) i $\equiv$ (***równoważność***) znane są z wykładu semestru zimowego,
- symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy ***sygnaturą***. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathcal{N}$ (= zbiór wszystkich liczb naturalnych).

Wyrażeniem języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka. Interesują nas jednak nie dowolne ciągi symboli języka KRP, lecz jedynie niektóre, o budowie składniowej dopuszczającej sensowne interpretacje.

16.1.2. Termy języka KRP

Definicja ***termu*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;

(ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

(iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy ***termami bazowymi***.

16.1.3. Formuły języka KRP

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami.

Definicja ***formuły*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) każda formuła atomowa jest formułą;

(ii) jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;

(iii) jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;

(iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy ***zasięgiem*** odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest ***na tym miejscu związana***, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n.

Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona ***na tym miejscu wolna w*** α.

Mówimy, że x_n jest ***zmienną wolną w*** α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Mówimy, że term t jest ***podstawialny*** za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w t.

Jeśli t jest podstawialny za x_i do α, to żadna zmienna występująca w t nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α.

W szczególności, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i w α, jeżeli po podstawieniu x_j w miejscach wolnych wystąpień x_i w α, zmienna x_j nie stanie się na tych miejscach związana w α.

Tak więc, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_j nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x_i.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy ***zdaniami*** (języka KRP).

Definicja operacji $S(t, x, A)$ ***podstawiania termu*** t ***za zmienną*** x_i (w dowolnym termie A lub formule A języka KRP) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
- $S(t, x_i, f_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest termem $f_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, P_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest formułą $P_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

Ćwiczenie. Wzorując się na powyższej definicji, podaj definicję operacji **podstawiania zmiennej za zmienną w formule.**

16.2. Semantyka języka KRP

16.2.1. Interpretacje

Nazwiemy ***interpretacją języka o sygnaturze*** σ dowolny układ $\langle M, \sigma, \triangle \rangle$, gdzie M jest niepustym zbiorem, a $\triangle$ funkcją (***funkcją denotacji***) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywiduowej a_k element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową $\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;
- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową $\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \to M$.

Wtedy ***strukturami relacyjnymi sygnatury*** σ są dowolne układy $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy uniwersum $\mathfrak{M}$.

Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ jest strukturą relacyjną, to czasem wygodnie jest używać następujących oznaczeń:

- $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, czyli dla oznaczenia zbioru M;
- $\triangle^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury $\mathfrak{M}$.

16.2.2. Wartościowania

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n \rangle$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = \langle w_n \rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Jeśli t jest termem sygnatury σ, a $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = \langle w_i \rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to ***wartość termu*** t ***w strukturze*** $\langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ ***przy wartościowaniu*** w, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie (zobacz niżej, twierdzenie 16.2.5.1.).

16.2.3. Spełnianie

Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ będzie strukturą relacyjną sygnatury σ, w wartościowaniem w M, a α formułą sygnatury σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***spełniania formuły*** α ***w strukturze*** $\mathfrak{M}$ ***przez wartościowanie*** w ma następującą postać indukcyjną:

$\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}));$$

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;

$\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;

$\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \equiv (\beta)$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła α jest ***prawdziwa w*** $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$. Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$. Mówimy, że zdanie α jest ***fałszywe*** w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ono prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

16.2.4. Tautologie i wynikanie logiczne

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$. Mówimy, że α ***wynika logicznie*** z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X ***wynika logicznie*** (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \models_{krp} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$

Uwaga terminologiczna. W polskiej literaturze przedmiotu terminów ***struktura relacyjna***, ***system relacyjny*** oraz ***struktura algebraiczna*** używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o ***algebrach***, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych, ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych ***czystych***.

Uwaga notacyjna. W dalszym ciągu będziemy czasem używać pewnych, powszechnie stosowanych, uproszczeń notacyjnych. Omówione zostaną one podczas wykładu. W tym miejscu zwróćmy natomiast uwagę na różne konteksty użycia symbolu „$\models$” i na znaczenia odnośnych wyrażeń zawierających ten symbol (tu X i Y są dowolnymi zbiorami formuł języka KRP, α dowolną formułą tego języka, $\mathfrak{M}$ dowolną strukturą relacyjną (ustalonej sygnatury), a w dowolnym wartościowaniem):

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich w.
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego w.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich w: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.
- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Z podanych wyżej równoważności będziemy często korzystać.

16.2.5. Kilka prostych własności pojęć semantycznych

Wyrazimy teraz precyzyjnie intuicyjne sformułowania:

- wartość termu w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tego termu
- spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły.

Własności te zostaną wykorzystane w dowodach dalszych twierdzeń.

TWIERDZENIE 16.2.5.1.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t, to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy termu t.

Niech t będzie pojedynczą zmienną, np. x_i. Wtedy założenie twierdzenia głosi, że $w_i = v_i$. Mamy więc:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(x_i) = w_i = v_i = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_i).$$

Jeśli t jest nazwą indywiduową a_i, to mamy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(a_i) = \triangle(a_i) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(a_i).$$

Niech założenie indukcyjne zachodzi dla termów $t_1, \ldots, t_n$ oraz niech t będzie termem $f_i(t_1, \ldots, t_n)$. Skoro wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t, to dla każdego termu t_j (gdzie $j \leqslant n$) wartościowania te nie różnią się także na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w t_j. Na mocy założenia indukcyjnego mamy zatem dla wszystkich $j \leqslant n$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_j) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j).$$

Zachodzą wtedy równości:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_i)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_n)) = \triangle(f_i)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

Następne twierdzenie wykorzystuje operację podstawiania termu za zmienną (w termie).

TWIERDZENIE 16.2.5.2.

Jeżeli $w = \langle w_n \rangle$ i $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ oraz:

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy termu t'.

Niech t' będzie zmienną x_k. Możliwe są dwa przypadki:

- $k = i$
- $k \neq i$.

Jeśli $k = i$, to $S(t, x_i, t') = S(t, x_i, x_k) = t$. Mamy wtedy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = v_i = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_i) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Jeśli $k \neq i$, to $S(t, x_i, t') = S(t, x_i, x_k)$, a $S(t, x_i, x_k)$ jest, z definicji, zmienną x_k. Mamy wtedy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(x_k) = w_k = v_k = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Niech teraz t' będzie nazwą indywiduową a_k. Wtedy $S(t, x_i, t')$ jest stałą a_k. Otrzymujemy stąd:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(a_k) = \triangle(a_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(a_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Wreszcie, niech $t_1, \ldots, t_n$ będą dowolnymi termami, dla których, na mocy założenia indukcyjnego, twierdzenie zachodzi. Mamy więc dla wszystkich $j \leqslant n$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_j)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j).$$

Musimy pokazać, że twierdzenie zachodzi także dla termu złożonego t' postaci $f_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie f_k jest dowolnym n-argumentowym symbolem funkcyjnym. Mamy następujący ciąg równości:

- $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) =$
- $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, f_k(t_1, \ldots, t_n))) =$
- $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(f_k(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))) =$
- $\triangle(f_k)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_1)), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_n))) =$
- $\triangle(f_k)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n)) =$
- $\triangle_v^{\mathfrak{M}}(f_k(t_1, \ldots, t_n)) =$
- $\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t')$.

Następne twierdzenie dotyczy formuł oraz relacji spełniania (formuł w strukturach przez wartościowania).

TWIERDZENIE 16.2.5.3.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy α.

Niech α będzie formułą atomową postaci $P_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie P_k jest predykatem n-argumentowym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α (a więc ze wskaźnikami ***dowolnych*** zmiennych występujących w $P_k(t_1, \ldots, t_n)$), to dla każdego wskaźnika $i \leqslant n$, wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t_i. Korzystając z twierdzenia 16.2.5.1., otrzymujemy stąd, że dla wszystkich $i \leqslant n$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_i) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_i).$$

Z definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w P_k(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v P_k(t_1, \ldots, t_n)$.

Niech teraz α_1 i α_2 będą dowolnymi formułami, dla których (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł: $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ oraz $\neg\alpha_1$.

1. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \wedge \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

2. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \vee \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \vee \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

3. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \to \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \to \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

4. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \equiv \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

5. Niech α będzie formułą $\neg\alpha_1$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \neg\alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz β będzie formułą, dla której (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że zachodzi ona również dla formuł $\forall x_i\ \beta$ oraz $\exists x_i\ \beta$.

6. Niech α będzie formułą $\forall x_i\ \beta$. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to dla dowolnego elementu m należącego do uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ ciągi:

$$\langle w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, m, v_{i+1}, \ldots \rangle$$

nie różnią się na miejscach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w formule β. Mamy więc:

$$\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta.$$

Na mocy powyższego, korzystając z definicji relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \forall x_i\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

7. Niech α będzie formułą $\exists x_i\ \beta$. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to dla dowolnego elementu m należącego do uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ ciągi:

$$\langle w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, m, v_{i+1}, \ldots \rangle$$

nie różnią się na miejscach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w formule β. Mamy więc:

$$\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta.$$

Na mocy powyższego, korzystając z definicji relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \exists x_i\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

TWIERDZENIE 16.2.5.4.

Jeżeli α jest zdaniem, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są dowolnymi wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Ponieważ w α nie ma zmiennych wolnych, więc wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ oczywiście nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w α. Teza twierdzenia wynika zatem z twierdzenia poprzedniego.

TWIERDZENIE 16.2.5.5.

Jeśli α jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:

- (1) Istnieje wartościowanie $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ takie, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- (2) Dla każdego wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

DOWÓD.

(1) $\Rightarrow$ (2). Jeśli co najmniej jedno wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełnia zdanie α, to, na mocy poprzedniego twierdzenia, dowolne inne wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełnia zdanie α.

(2) $\Rightarrow$ (1). Ponieważ, z definicji, uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$ jest niepuste, więc istnieje co najmniej jedno wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$. Jeżeli zatem wszystkie wartościowania w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełniają α, to istnieje wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, które spełnia α.

TWIERDZENIE 16.2.5.6.

Jeśli t jest termem podstawialnym za zmienną x_i do α, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ oraz

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem α.

Niech α będzie formułą atomową postaci $P_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie P_k jest predykatem n-argumentowym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami. Na mocy twierdzenia 16.2.5.2. mamy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_j)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j),$$

dla wszystkich $j \leqslant n$. Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, P_k(t_1, \ldots, t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w P_k(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_n)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v P_k(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz α_1 i α_2 będą dowolnymi formułami, dla których (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł: $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ oraz $\neg\alpha_1$.

1. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \wedge S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ oraz $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \wedge \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

2. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \vee \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \vee S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ lub $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \vee \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

3. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \rightarrow S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$, to $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

4. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \equiv S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \equiv \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

5. Niech α będzie formułą $\neg\alpha_1$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \neg\alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \neg\alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz β będzie formułą, dla której (na mocy założenia indukcyjnego) teza twierdzenia zachodzi. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł $\forall x_j\ \beta$ oraz $\exists x_j\ \beta$.

6. Niech α będzie formułą $\forall x_j\ \beta$. Załóżmy, że dla formuły β twierdzenie zachodzi. Niech t będzie termem podstawialnym za x_i do α. Należy rozważyć dwa przypadki:

- (a) x_i nie jest wolna w α
- (b) x_i jest wolna w α.

W przypadku (a) $S(t, x_i, \alpha)$ jest formułą α, a więc mamy wtedy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

W przypadku (b) mamy: $i \neq j$, a stąd następujące formuły są identyczne:

- $S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ \beta)$
- $\forall x_j\ S(t, x_i, \beta)$.

Ponieważ term t jest podstawialny za zmienną x_i do formuły α, więc t jest też oczywiście podstawialny za x_i do formuły β. Tak więc, założenie indukcyjne przybiera postać:

Dla każdego wartościowania $u = \langle u_n \rangle$: $\mathfrak{M} \models_u \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}} \beta$.

Dla wyjaśnienia: wartościowanie $u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}$ powstaje z wartościowania $u = \langle u_n \rangle$ przez zastąpienie elementu u_i wartością $\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)$.

Ponieważ t jest podstawialny za x_i do α i x_i jest wolna w α, więc w α nie występuje zmienna x_j. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.1., mamy dla dowolnego elementu m uniwersum struktury $\mathfrak{M}$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t).$$

Dla uniknięcia stosowania bardzo złożonych indeksów, przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$w(j, i, m, t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$w^*(j, i, m, t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Tak więc:

- $w(j, i, m, t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_{w_i^m}^{\mathfrak{M}}(t)$
- $w^*(j, i, m, t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$.

Uwzględniając powyższe oraz definicję relacji spełniania otrzymujemy następujący ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_j\ S(t, x_i, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} S(t, x_i \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w^*(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_{w_i^{\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \forall x_j\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

7. Niech α będzie formułą $\exists x_j\ \beta$. Załóżmy, że dla formuły β twierdzenie zachodzi. Niech t będzie termem podstawialnym za x_i do α. Należy rozważyć dwa przypadki:

- (a) x_i nie jest wolna w α
- (b) x_i jest wolna w α.

W przypadku (a) $S(t, x_i, \alpha)$ jest formułą α, a więc mamy wtedy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

W przypadku (b) mamy: $i \neq j$, a stąd następujące formuły są identyczne:

- $S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ \beta)$
- $\forall x_j\ S(t, x_i, \beta)$.

Ponieważ term t jest podstawialny za zmienną x_i do formuły α, więc t jest też oczywiście podstawialny za x_i do formuły β. Tak więc, założenie indukcyjne przybiera postać:

Dla każdego wartościowania $u = \langle u_n \rangle$: $\mathfrak{M} \models_u \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}} \beta$.

Dla wyjaśnienia: wartościowanie $u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}$ powstaje z wartościowania $u = \langle u_n \rangle$ przez zastąpienie elementu u_i wartością $\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)$.

Ponieważ t jest podstawialny za x_i do α i x_i jest wolna w α, więc w α nie występuje zmienna x_j. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.1., mamy dla dowolnego elementu m uniwersum struktury $\mathfrak{M}$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t).$$

Tak jak poprzednio, dla uniknięcia stosowania bardzo złożonych indeksów, przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$w(j, i, m, t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$w^*(j, i, m, t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Tak więc:

- $w(j, i, m, t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_{w_i^m}^{\mathfrak{M}}(t)$
- $w^*(j, i, m, t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$.

Uwzględniając powyższe oraz definicję relacji spełniania otrzymujemy następujący ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_j\ S(t, x_i, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} S(t, x_i \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w^*(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_{w_i^{\triangle}{}^{\mathfrak{M}}_{w}(t)} \exists x_j\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

To kończy dowód twierdzenia.

Podane wyżej twierdzenia miały charakter pomocniczy. Kolejne twierdzenie podaje pewne własności relacji $\models$.

TWIERDZENIE 16.2.5.7.

Relacja $\models_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\models_{krp}$ jest zwrotna: $X \models_{krp} X$ dla każdego X.
- (2) $\models_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Y \models_{krp} Z$, to $X \models_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.
- (3) $\models_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krp} Y$.
- (4) $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP.

DOWÓD.

(1). Wynika wprost z definicji.

(2). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y i Z takie, że $X \models_{krp} Y$ i $Y \models_{krp} Z$ ale $X \not\models_{krp} Z$. Skoro $X \not\models_{krp} Z$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ i $\mathfrak{M} \not\models_w Z$. Ponieważ $X \models_{krp} Y$ oraz $\mathfrak{M} \models_w X$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$. Ponieważ $Y \models_{krp} Z$ oraz $\mathfrak{M} \models_w Y$, więc $\mathfrak{M} \models_w Z$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: relacja $\models_{krp}$ jest przechodnia.

(3). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y oraz Z takie, że: $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, lecz $Z \not\models_{krp} Y$. Skoro $Z \not\models_{krp} Y$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w Z$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w Y$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w Z$, to każdy element zbioru Z jest spełniony przez w w $\mathfrak{M}$. Ponieważ $X \subseteq Z$, więc również każdy element zbioru X jest spełniony przez w w $\mathfrak{M}$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \models_w X$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $X \models_{krp} Y$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: relacja $\models$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu.

(4). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y oraz Z takie, że $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, lecz $X \not\models_{krp} Z$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w Z$. Skoro $X \models_{krp} Y$ oraz $\mathfrak{M} \models_w X$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$. Z definicji, jeśli $\mathfrak{M} \models_w Y$, to wszystkie elementy zbioru Y są spełnione przez w w $\mathfrak{M}$. Ponieważ $Z \subseteq Y$, więc również wszystkie elementy Z są spełnione przez w w $\mathfrak{M}$, czyli $\mathfrak{M} \models_w Z$ i otrzymujemy sprzeczność. Trzeba więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: relacja $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu.

(5). Wynika z definicji tautologii KRP. Zauważmy, że zbiór pusty $\emptyset$ jest prawdziwy w każdej interpretacji.

Pokażemy teraz, że następujące formuły są tautologiami KRP. Formuły te są szczególnie ważne, jako iż mogą one stanowić (jak się przekonamy w wykładach 20–21) aksjomatykę dla KRP.

TWIERDZENIE 16.2.5.8.

Niech α, β oraz γ będą dowolnymi tautologiami KRP. Wtedy tautologiami KRP są również wszystkie formuły postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- (A14) $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

DOWÓD.

Dowody wszystkich punktów przeprowadza się metodą nie wprost.

(A1). Przypuśćmy, że (A1) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \nvDash_w (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$. Dalej, mamy: $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \alpha \to \gamma$. Wreszcie: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \models_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \models_w \gamma$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A1) jest tautologią KRP.

(A2). Przypuśćmy, że (A2) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \nvDash_w (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \alpha \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A2) jest tautologią KRP.

(A3). Przypuśćmy, że (A3) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \nvDash_w \alpha \to (\beta \to \alpha).$$

Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \beta \to \alpha$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \alpha$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A3) jest tautologią KRP.

(A4). Przypuśćmy, że (A4) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \nvDash_w (\alpha \wedge \beta) \to \alpha.$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash_w \alpha$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A4) jest tautologią KRP.

(A5). Przypuśćmy, że (A5) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \nvDash_w (\alpha \wedge \beta) \to \beta.$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A5) jest tautologią KRP.

(A6). Przypuśćmy, że (A6) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))).$$

Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))$. Dalej, mamy stąd, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$. To z kolei oznacza, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta \wedge \gamma$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \gamma$, to $\mathfrak{M} \models_w \beta \wedge \gamma$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A6) jest tautologią KRP.

(A7). Przypuśćmy, że (A7) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to (\alpha \vee \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A7) jest tautologią KRP.

(A8). Przypuśćmy, że (A8) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \beta \to (\alpha \vee \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A8) jest tautologią KRP.

(A9). Przypuśćmy, że (A9) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta)).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta)$. To oznacza, że: $\mathfrak{M} \models_w \gamma \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \vee \gamma) \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy:

- skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$
- skoro $\mathfrak{M} \models_w \gamma \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \gamma$.

Z powyższego, znowu na mocy definicji relacji $\models$, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \gamma$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A9) jest tautologią KRP.

(A10). Przypuśćmy, że (A10) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność z warunkiem definicyjnym dla spełniania formuły $\alpha \equiv \beta$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A10) jest tautologią KRP.

(A11). Przypuśćmy, że (A11) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta \to \alpha$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z warunkiem definicyjnym dla spełniania formuły $\alpha \equiv \beta$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A11) jest tautologią KRP.

(A12). Przypuśćmy, że (A12) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)$. Dalej, mamy: $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \equiv \beta$. Warunek $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \equiv \beta$ oznacza, że zachodzi alternatywa:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ ***lub***
- $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

To z kolei jest alternatywą warunków:

- (i) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$ ***lub***
- (ii) $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$.

Jednak warunek (i) jest sprzeczny z tym, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$, a warunek (ii) jest sprzeczny z tym, że $\mathfrak{M} \models_w \beta \rightarrow \alpha$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A12) jest tautologią KRP.

(A13). Przypuśćmy, że (A13) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$. Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A13) jest tautologią KRP.

(A14). Załóżmy, że t jest podstawialny za x_n w α i przypuśćmy, że $\forall x_n\ \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha).$$

Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w S(t, x_n, \alpha)$. Ponieważ t jest podstawialny za x_n w α, więc (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.) otrzymujemy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Dalej, skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ \alpha$, to dla każdego elementu a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ zachodzi: $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. W szczególności, dla $a = \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)$ otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$, co daje sprzeczność z poprzednimi ustaleniami. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A14) jest tautologią KRP.

(A15). Załóżmy, że t jest podstawialny za x_n w α i przypuśćmy, że $S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n\ \alpha$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_m S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n\ \alpha.$$

Mamy stąd: $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_n, \alpha)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha$. Ponieważ t jest podstawialny za x_n w α, więc (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.) otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha$, to nie istnieje element a w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. Ale, jak przed chwilą pokazaliśmy, dla elementu $a = \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)$ (który oczywiście jest elementem uniwersum struktury $\mathfrak{M}$) zachodzi: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A15) jest tautologią KRP.

(A16). Załóżmy, że x_n nie jest zmienną wolną w α i przypuśćmy, że $\forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n\ \beta)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n\ \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \forall x_n\ \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ \beta$. Oznacza to, że istnieje element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_n^a} \beta$. Z definicji relacji $\models$, skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta)$, to $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} (\alpha \rightarrow \beta)$. Z założenia, x_n nie jest zmienną wolną w α, skoro więc $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to także $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ (na mocy twierdzenia 16.2.5.3.). Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} (\alpha \rightarrow \beta)$, to również $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A16) jest tautologią KRP.

(A17). Załóżmy, że x_n nie jest zmienną wolną w β i przypuśćmy, że $\forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n\ \alpha \rightarrow \beta)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n\ \alpha \rightarrow \beta).$$

Wtedy $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha \rightarrow \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha \rightarrow \beta$, to $\mathfrak{M} \models \exists x_n\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: istnieje element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta)$, to także $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha \rightarrow \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha \rightarrow \beta$, to $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$. Z założenia,

x_n nie jest zmienną wolną formuły β. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.3., skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$, to również $\mathfrak{M} \models_w \beta$, i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A17) jest tautologią KRP.

Komentarza wymagają warunki umieszczone w punktach (A14)–(A17). Podamy mianowicie przykłady wskazujące, że jeśli warunki te nie są spełnione, to odnośne formuły nie są tautologiami KRP.

1. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której

$$\forall x_n\ \alpha \rightarrow S(t, x_n, \alpha)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\exists x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\exists x_m\ P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_n \exists x_m\ P(x_n, x_m)\ \rightarrow\ \exists x_m\ P(x_m, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

2. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której

$$S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n\ \alpha$$

nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\forall x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\forall x_m P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_m P(x_m, x_m)\ \rightarrow\ \exists x_n \forall x_m P(x_n, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

3. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w α i dla których

$$\forall x_n\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n\ \beta)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły α. Formuła (A16) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n\ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n)\ \rightarrow\ \forall x_n\ Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n. Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 0$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n)\ \rightarrow\ \forall x_n\ Q(x_n))$.

4. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w β i dla których

$$\forall x_n \ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n \ \alpha \to \beta)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły β. Formuła (A17) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n \ (P(x_n) \to Q(x_n)) \to (\exists x_n \ P(x_n) \to Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n. Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 1$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n \ (P(x_n) \to Q(x_n)) \to (\exists x_n \ P(x_n) \to Q(x_n))$.

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \to \beta, \ \ \alpha}{\beta}$$

jest znana z wykładów semestru zimowego. Zdefiniujemy teraz jeszcze jedną regułę wnioskowania.

DEFINICJA 16.2.5.1.

Przez ***regułę generalizacji*** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n \ \alpha}.$$

Tak jak w przypadku KRZ, mówimy, że reguła (o schemacie) (X, α) ***zachowuje własność bycia tautologią***, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami, to również α jest tautologią.

TWIERDZENIE 16.2.5.9.

Reguła odrywania i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią.

DOWÓD.

1. REGUŁA ODRYWANIA.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że formuły $\alpha \to \beta$ oraz α są tautologiami KRP, i przypuśćmy, że β nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \beta$. Ponieważ $\alpha \to \beta$ oraz α są tautologiami KRP, więc $\mathfrak{M} \models \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models \alpha$. Stąd, na mocy definicji relacji $\models$, otrzymujemy $\mathfrak{M} \models \beta$, sprzeczność. Poczynione przypuszczenie należy zatem odrzucić. Ostatecznie: reguła odrywania zachowuje tautologiczność.

2. REGUŁA GENERALIZACJI.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że α jest tautologią KRP i przypuśćmy, że $\forall x_n \ \alpha$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\forall x_n \ \alpha$ nie jest prawdziwa w $\mathfrak{M}$. Z definicji relacji spełniania, istnieje wtedy element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w^a_n} \alpha$ dla pewnego wartościowania $\langle w_i \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$. Jednak α jest, z założenia, tautologią KRP, więc $\mathfrak{M} \models_{w^a_n} \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: reguła generalizacji zachowuje tautologiczność.

Bezpośrednim wnioskiem z powyższych twierdzeń jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 16.2.5.10.

Schematy tautologii KRZ są schematami tautologii KRP.

DOWÓD.

Każdy schemat aksjomatów KRZ jest schematem tautologii KRP (na mocy twierdzenia 16.2.5.5.). Reguła odrywania zachowuje tautologiczność (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.). Stąd wynika teza obecnego twierdzenia.

Można rozważać wiele dalszych reguł wnioskowania w KRP. W szczególności, punkty (A14)–(A17) twierdzenia 16.2.5.5. mogą sugerować rozpatrzenie następujących reguł:

- (R14)
  $$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
  o ile term t jest podstawialny za x_n w α.
- (R15)
  $$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$
  o ile term t jest podstawialny za x_n w α.
- (R16)
  $$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
  o ile x_n nie jest wolna w α.
- (R17)
  $$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\exists x_n\ \alpha \to \beta},$$
  o ile x_n nie jest wolna w β.

Z twierdzenia o dedukcji wprost, które udowodnimy za chwilę, będzie wynikało, że reguły (R14)–(R17) są wszystkie regułami niezawodnymi.

Przypominamy, że reguła $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna***, wtedy i tylko wtedy, gdy z przesłanek dowolnego sekwentu tej reguły wynika logicznie wniosek tego sekwentu. W przypadku KRP definicja ta przyjmuje postać następującą.

DEFINICJA 16.2.5.2. ***Reguła niezawodna w KRP.***

Niech $\mathcal{R}$ będzie regułą wnioskowania w KRP. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna*** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \mathcal{R}$ zachodzi: $X \models_{krp} \alpha$.

Podobnie jak reguły (RO), (RG), (R14)–(R17) również następująca ***reguła podstawiania*** jest regułą niezawodną w KRP:

- (RS)
  $$\frac{\alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
  o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

Rozważmy jeszcze pewne (pouczające) przykłady. Więcej przykładów (zarówno elementarnych, jak i bardziej zaawansowanych podajemy niżej, w Ćwiczeniach).

PRZYKŁAD 16.2.5.1.

Niech w sygnaturze rozważanego języka będzie dwuargumentowy predykat $\prec$. Niech interpretacją tego predykatu w zbiorze wszystkich liczb naturalnych będzie relacja $<$ mniejszości. Zastanówmy się, jakie wartościowania (czyli ciągi liczb naturalnych) spełniają każdą z podanych niżej formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1\ (x_1 \prec x_2)$.

Wartościowania to nieskończone ciągi liczb naturalnych. Niech w_i oznacza i-ty element ciągu w. Rozważmy, jakie ciągi spełniają każdą z podanych formuł.

Formuła (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi w, dla których: $w_1 < w_2$.

Formuła (2) jest spełniona przez takie ciągi w, które różnią się od ciągów spełniających formułę (1) co najwyżej na drugim miejscu. Ponieważ dla dowolnej liczby w_1 możemy znaleźć liczbę c taką, że $w_1 < c$, więc formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi liczb naturalnych.

Formuły (3) nie spełnia ***żaden*** ciąg. Przypuśćmy bowiem, że jakieś wartościowanie w spełnia (3). Wtedy ***każdy*** ciąg v różniący się od w na pierwszym miejscu (tj. taki, że $w_1 \neq v_1$) musiałby spełniać formułę (1). Ale np. ciąg stały $\langle w_2, w_2, w_2, \ldots \rangle$ nie spełnia formuły (1) — sprzeczność. Nie ma zatem ciągu spełniającego (3).

Jakiś ciąg w spełnia formułę (4), gdy każdy ciąg v otrzymany z w przez zastąpienie w_1 ***dowolną*** liczbą naturalną spełnia formułę (2). Ale formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi. Zatem również formułę (4) spełniają ***wszystkie*** ciągi.

Ponieważ ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (3), więc również ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (5) (bo ciągi spełniające (5) miałyby się różnić od jakiegoś ciągu spełniającego (3) co najwyżej na drugim miejscu).

PRZYKŁAD 16.2.5.2.

Niech N będzie predykatem jednoarumentowym, S jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a $\bigcirc$ stałą. Nadto, niech $\doteq$ będzie predykatem dwuargumentowym. Zamiast $\doteq (t_1, t_2)$, dla termów t_1 oraz t_2 piszemy: $t_1 \doteq t_2$. Rozważmy następujące zdania:

- $N(\bigcirc)$
- $\forall x\ \neg(\bigcirc \doteq S(x))$
- $\forall x\ (N(x) \rightarrow N(S(x)))$
- $\forall x \forall y\ (S(x) \doteq S(y)\ \rightarrow\ x \doteq y)$
- $\forall x\ (x \doteq x)$
- $\forall x \forall y\ (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$
- $\forall x \forall y\ ((N(x) \wedge x \doteq y) \rightarrow N(y))$
- $\forall x \forall y\ (x \doteq y \rightarrow S(x) \doteq S(y))$.

Wtedy modelem powyższego zbioru zdań będzie każda struktura $\mathfrak{M}$ o uniwersum M oraz następującej interpretacji stałej $\bigcirc$, symbolu funkcyjnego S, predykatu N oraz predykatu $\doteq$:

- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0;
- S denotuję funkcję następnika, tj. $S(t)$ oznacza liczbę o jeden większą liczby oznaczanej przez t;
- predykat N denotuje własność „być liczbą naturalną";
- predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$.

Proszę podumać nad następującym pytaniem: czy w takim modelu $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest zdanie: $\forall x\ N(x)$? Oczywiście, dla dowolnego modelu $\mathfrak{N}$ powyższego zbioru zdań, denotacja predykatu N w $\mathfrak{N}$ będzie zbiorem nieskończonym. Ale czy musi to być zbiór pokrywający się z całym uniwersum modelu?

PRZYKŁAD 16.2.5.3.

Rozważmy następujące formuły, zawierające predykat dwuargumentowy R:

- $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$ (R jest przechodni)
- $\forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ (R jest asymetryczny)
- $\forall x \exists y\ R(x,y)$ (R jest serialny).

Wtedy każda interpretacja, w której prawdziwe są powyższe zdania, ma uniwersum nieskończone.

16.3. Twierdzenia o dedukcji

TWIERDZENIE 16.3.1. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta.$$

DOWÓD.

Dowody implikacji: prostej i odwrotnej przeprowadzimy metodą nie wprost.

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \beta$. Mamy stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$.

Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M}_w \models \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$. Stąd oraz z założenia $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$ otrzymujemy, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$, co jest sprzeczne z poczynionym przypuszczeniem. Musimy więc przypuszczenie to odrzucić. Ostatecznie: $X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \beta$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \beta$. Ale, ponieważ $X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w X$, więc $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Trzeba zatem odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$.

TWIERDZENIE 16.3.2. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

DOWÓD.

Dowody implikacji: prostej i odwrotnej przeprowadzimy w każdym przypadku metodą nie wprost.

RÓWNOWAŻNOŚĆ (a).

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \neg\alpha$. Skoro $X \not\models_{krp} \alpha$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Tak więc, $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$. Z założenia mamy $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, a więc gdy $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w \{\beta, \neg\beta\}$. To jednak oznacza sprzeczność, bo implikuje, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Tak więc, musimy odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \models_{krp} \neg\alpha$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \neg\alpha$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Skoro $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \{\beta, \neg\beta\}$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, więc $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Dalej, mamy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, to nie zachodzi $X \models_{krp} \neg\alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem $X \models_{krp} \neg\alpha$. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie: $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

RÓWNOWAŻNOŚĆ (b).

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \alpha$. Skoro $X \not\models_{krp} \neg\alpha$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$. Tak więc, $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$. Z założenia mamy $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, a więc gdy $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w \{\beta, \neg\beta\}$. To jednak oznacza sprzeczność, bo implikuje, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Tak więc, musimy odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \models_{krp} \alpha$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \alpha$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\neg\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Skoro $X \cup \{\neg\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \{\beta, \neg\beta\}$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models X_w \cup \{\neg\alpha\}$, więc $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models \neg\alpha$. Dalej, mamy $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$, to nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem $X \models_{krp} \alpha$. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie: $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

16.4. Język KRP w zastosowaniach

Klasyczny Rachunek Predykatów wyznacza pewien standard logiczny. Rozumiemy przez to m.in. dwie rzeczy:

- ważne teorie naukowe formułowane są w języku KRP (lub mogą zostać „przetłumaczone” na język KRP);
- argumentacje przeprowadzane w językach etnicznych mogą być rekonstruowane w KRP.

Tym dwom problemom poświęcone są uwagi w dwóch punktach następnych.

16.4.1. Teorie elementarne

Podamy aksjomatyki dwóch ważnych teorii elementarnych:

- ***teorii mnogości Zermelo-Fraenkla***
- ***teorii algebr Boole'a***.

Są to teorie fundamentalne dla wielu działów matematyki. Całą współczesną matematykę można ugruntować na bazie teorii mnogości. Z kolei, algebry Boole'a (i inne, podobne do nich struktury) są nie tylko bardzo ważnym rodzajem struktur algebraicznych, ale również znajdują wszechobecne zastosowania (np. w ***każdym*** komputerze „pracuje” algebra Boole'a bramek logicznych).

16.4.1.1. Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla

Jest to teoria w języku KRP z identycznością. Jedyną stałą pozalogiczną tej teorii jest dwuargumentowy predykat $\in$. Formułę $x \in y$ czytamy: x jest elementem y.

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI ZF.

Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u \; (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.
Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z \; (z \in y \leftrightarrow \exists u \; (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z \; (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists u \; (u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n))$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x \; (\exists y \; (y \in x \wedge \neg \exists z \; (z \in y)) \wedge \forall y \; (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u \; (u \in z \leftrightarrow u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:

$\forall u (\forall x \forall y \forall z \; (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v \; (v \in w \leftrightarrow \exists x \; (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x (\exists u \; (u \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z \; (z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1, \; x_3 \in x_2, \; x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć ***Aksjomat wyboru***:

$\forall x ((\forall y \; (y \in x \rightarrow \exists z \; (z \in y)) \wedge \forall y \forall u \; (y \in x \wedge u \in x \rightarrow y = u \vee \neg \exists v \; (v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w (\forall y \; (y \in x \rightarrow \exists z \; (z \in y \wedge z \in w \wedge \forall v \; (v \in y \wedge v \in w \rightarrow v = z)))))$

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany ZFC.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także *aksjomaty dla identyczności*:

- $\forall x \; (x = x)$

- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge x \in z \rightarrow y \in z))$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge z \in x \rightarrow z \in y))$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: *nieskończony* i *przeliczalny* należą do *metajęzyka*.

Fundamentalne znaczenie teorii mnogości dla współczesnej matematyki polega m.in. na tym, że wszystkie konstrukcje matematyczne wyrazić można za pomocą pojęcia zbioru oraz relacji należenia elementu do zbioru.

* * *

Teoria mnogości jest także zakładana w ***metajęzyku***, w którym mówimy o systemach logicznych, w tym oczywiście także o KRZ oraz KRP.

16.4.1.2. Teoria algebr Boole'a

Znajdowanie analogii między różnymi twierdzeniami to szczególna umiejętność.[1] Możesz posiąść tę umiejętność, nawet na (stosunkowo niskim) poziomie elementarza logicznego. Z pewnością zauważyłaś, że jest odpowiedniość między pewnymi prawami KRZ a niektórymi prawami rachunku zbiorów.

Dla teorii algebr Boole'a podać można różne (równoważne) aksjomatyki. Ograniczymy się do dwóch aksjomatyk oraz jednej definicji algebr Boole'a (przez częściowe porządki).

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: PIERWSZA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$

$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B_1^1: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B_1^2: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

[1] Jeszcze ciekawsza jest umiejętność znajdowania analogii między różnymi analogiami, jak twierdzą matematycy.

B_1^3: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxplus(y,z)) = \boxplus(\boxplus(x,y),z))$

B_1^4: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxtimes(y,z)) = \boxtimes(\boxtimes(x,y),z))$

B_1^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x,y),y) = y)$

B_1^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x,y),y) = y)$

B_1^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y,z)) = \boxtimes(\boxplus(x,y), \boxplus(x,z)))$

B_1^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y,z)) = \boxplus(\boxtimes(x,y), \boxtimes(x,z)))$

B_1^9: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y)$

B_1^{10}: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y)$.

Prostymi konsekwencjami tych aksjomatów są np.:

- $\forall x\ (\boxplus(x,x) = x)$
- $\forall x\ (\boxtimes(x,x) = x)$
- $\forall x \forall y\ ((\boxplus(x,y) = \boxplus(x, \boxminus(x)) \wedge \boxtimes(x,y) = \boxtimes(x, \boxtimes(x))) \rightarrow y = \boxminus(x))$.

Niech ich wyprowadzenia będą ćwiczeniem dla czytelniczek. Jako wskazówkę podajemy ciąg równości dla pierwszych dwóch rozważanych wyżej przypadków:

$$x = \boxplus(x, \boxtimes(x,y)) = \boxtimes(\boxplus(x,x), \boxplus(x,y)) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxplus(x,y)), \boxtimes(x, \boxplus(x,y))) = \boxplus(x,x)$$

$$x = \boxtimes(x, \boxplus(x,y)) = \boxplus(\boxtimes(x,x), \boxtimes(x,y)) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxtimes(x,y)), \boxplus(x, \boxtimes(x,y))) = \boxtimes(x,x).$$

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: DRUGA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);
- stałą indywiduową $\triangledown$, nazywającą *jedynkę* (element największy) algebry;
- stałą indywiduową $\vartriangle$, nazywającą *zero* (element najmniejszy) algebry.

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x,z) = \boxplus(y,z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x,z) = \boxtimes(y,z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z,x) = \boxplus(z,y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z,x) = \boxtimes(z,y))$

$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Uwaga. Naprawdę potrzebne są tylko dwa pierwsze z tych aksjomatów. Pozostałe można wyprowadzić z innych aksjomatów teorii algebr Boole'a.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B_2^1: $\forall x\ (\boxplus(x, \triangle) = x)$

B_2^2: $\forall x\ (\boxtimes(x, \triangledown) = x)$

B_2^3: $\forall x\ (\boxplus(x, \boxminus(x)) = \triangledown)$

B_2^4: $\forall x\ (\boxtimes(x, \boxminus(x)) = \triangle)$

B_2^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B_2^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

B_2^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$

B_2^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$.

DEFINICJA ALGEBR BOOLE'A PRZEZ CZĘŚCIOWE PORZĄDKI.

Niech U będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym częściowo przez relację $\prec$. Przypominamy, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

- element $a \in A$ nazywamy *elementem maksymalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:
  $\forall x\ ((x \in a \wedge x \prec a) \rightarrow x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem minimalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:
  $\forall x\ ((x \in a \wedge a \prec x) \rightarrow x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem największym* w A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem najmniejszym* w A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *kresem dolnym* zbioru A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *najmniejszym kresem górnym* zbioru A, jeśli a jest elementem najmniejszym zbioru wszystkich kresów górnych zbioru A;
- element $a \in U$ jest *największym kresem dolnym* zbioru A, jeśli a jest elementem największym zbioru wszystkich kresów dolnych zbioru A.

Mówimy, że $\langle U, \prec\rangle$ jest ***kratą***, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in U$ istnieją: najmniejszy kres górny oraz największy kres dolny zbioru $\{x, y\}$. Ponieważ elementy te są wyznaczone jednoznacznie, więc możemy przyjąć oznaczenia:

- $\boxtimes(x, y)$ — dla największego kresu dolnego zbioru $\{x, y\}$;
- $\boxplus(x, y)$ — dla najmniejszego kresu górnego zbioru $\{x, y\}$.

Krata $\langle U, \prec\rangle$ jest ***dystrybutywna***, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in U$ zachodzą warunki:

- $\forall x \forall y \forall z\ \boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z))$

- $\forall x \forall y \forall z \ \boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z))$.

Kratę dystrybutywną $\langle U, \prec\rangle$ nazywamy ***algebrą Boole'a***, jeśli dla dowolnego elementu $x \in U$ istnieje jego *dopełnienie*, tj. element $\boxminus(x)$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y \ \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y$
- $\forall x \forall y \ \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y$.

Z każdego z podanych wyżej układów aksjomatów dla teorii algebr Boole'a można wywieść wszystkie warunki charakteryzujące algebry Boole'a jako określone przed chwilą struktury uporządkowane, a także na odwrót: z charakterystyki porządkowej algebr Boole'a można wyprowadzić każdą z omawianych wcześniej aksjomatyk.

Uwaga o standardowej notacji. Dla operacji w algebrach Boole'a używa się zwykle standardowych oznaczeń:

- $\cup$ — dla kresu górnego (także: $\vee$);
- $\cap$ — dla kresu dolnego (także: $\wedge$);
- $-$ — dla operacji dopełnienia (także: $'$).

Powyżej celowo nie używaliśmy standardowej notacji. Niech będzie prostym ćwiczeniem dla Czytelniczek zapisanie podanych aksjomatyk teorii algebr Boole'a w notacjach standardowych. Wykonanie tego ćwiczenia nagrodzone zostanie iluminacją: stwierdzisz, że przecież gdzieś już to widziałaś!

Przykłady algebr Boole'a.

- Wszystkie ***podzbiory dowolnego zbioru*** U wraz z operacjami teoriomnogościowymi: sumy (kres górny), iloczynu (kres dolny), dopełnienia (do U), zbiorem U jako jedynką oraz zbiorem pustym $\emptyset$ jako zerem tworzą algebrę Boole'a.
- **Algebra wartości logicznych.** Tabliczki prawdziwościowe funktorów odpowiadających spójnikom zdaniowym pokazują, że w zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ można wprowadzić strukturę algebry Boole'a. Zerem tej algebry jest 0, jej jedynką jest 1. Kres dolny odpowiada koniunkcji, kres górny alternatywie (nierozłącznej), a operacja dopełnienia odpowiada negacji.
- **Algebra zdarzeń.** Przestrzeń zdarzeń jest algebrą Boole'a. Jest to, rzecz jasna, szczególny przypadek pierwszego z rozważanych przykładów. Zdarzenia są zbiorami (zdarzeń elementarnych), a koniunkcji i alternatywie zdarzeń odpowiadają operacje teoriomnogościowe na zbiorach zdarzeń elementarnych; zdarzeniu przeciwnemu do danego zdarzenia odpowiada dopełnienie teoriomnogościowe tego zdarzenia.
- **Kraty pojęć.** Ten przykład wykorzystuje kilka pojęć algebraicznych, których tu nie objaśniamy. Jest on przeznaczony dla tych czytelniczek, które są już trochę oswojone z algebrą, lub też takich, które — zżerane zdrową ambicją — zechcą odnaleźć owe pojęcia w jakimś podręczniku. Dodajmy, że algebry z tego przykładu mają ciekawe zastosowania, także lingwistyczne — np. w opisie zależności semantycznych w leksykonie.

Kontekstem nazwiemy dowolny układ postaci (G, M, I), gdzie G (ogół rozważanych obiektów) i M (ogół rozważanych cech) są zbiorami, a I relacją o dziedzinie G oraz przeciwdziedzinie M. Wyrażenie gIm czytajmy: obiekt g ma cechę m. Można czynić dalsze założenia o tego typu układach; w tym miejscu przywoływanie ich jest nieistotne. Zdefiniujmy dwa operatory na rodzinach zbiorów obiektów i cech:

$\rhd(A) = \{m \in M \ : \ (\forall g) \ [g \in A \to gIm]\}$

$\lhd(B) = \{g \in G \ : \ (\forall m) \ [m \in B \to gIm]\}$

Para $(\rhd, \lhd)$ jest odpowiedniością Galois. Dla dowolnego kontekstu (G, M, I) nazwiemy ***pojęciem formalnym*** tego kontekstu każdą parę (A, B) taką, że:

$$A \subseteq G,\ B \subseteq M,\ \rhd(A) = B,\ \lhd(B) = A.$$

Ekstensją pojęcia formalnego (A, B) jest A, jego ***intensją*** jest B. Rodzinę wszystkich pojęć formalnych kontekstu (G, M, I) oznaczmy przez $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Rodzina ta jest częściowo uporządkowana przez relację $\prec$:

$(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 \subseteq A_2$ (co jest równoważne temu, że $B_2 \subseteq B_1$).

Podstawowe dla rozważanej problematyki twierdzenie wysłowić można następująco (zob. Bernhard Ganter, Rudolf Wille *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999, str. 20; upraszczam nieco notację; wszystkie potrzebne do zrozumienia twierdzenia pojęcia znaleźć można w dowolnym solidnym podręczniku teorii krat; stosujemy też standardowe niedomówienia algebraiczne):

Twierdzenie.

Krata pojęć $\mathfrak{B}(G, M, I)$ jest kratą zupełną, w której kresy zdefiniowane są równościami:

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = (\bigcap_{t \in T} A_t, \rhd(\lhd(\bigcup_{t \in T} B_t)))$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = (\lhd(\rhd(\bigcup_{t \in T} A_t)), \bigcap_{t \in T} B_t).$$

Krata zupełna $\boldsymbol{V}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania $\gamma : G \to V$ oraz $\mu : M \to V$ takie, że $\gamma(G)$ jest supremum-gęsty w $\boldsymbol{V}$, $\mu(M)$ jest infimum-gęsty w $\boldsymbol{V}$ oraz gIm jest równoważne z $\gamma g \leqslant \mu m$ dla wszystkich $g \in G$ i wszystkich $m \in M$. W szczególności, $\boldsymbol{V} \cong \mathfrak{B}(V, V, \leqslant)$. Mamy tu oczywiście: $\boldsymbol{V} = (V, \leqslant)$.

Jak pisze jeden z autorów znanego Państwu *Wstępu do językoznawstwa* na stronie 14, teoria algebr Boole'a jest ***powszechnie znana***. Mam jednak nadzieję, że przypomnieniem tych kilku pojęć nikogo nie uraziłem.

16.4.2. Język KRP a języki etniczne

Czy „przekłady" z języka KRP na języki etniczne (i na odwrót) są możliwe? A jeśli niemożliwe są wierne, „globalne" przekłady, to jaka część języka etnicznego ma swój przekład na język KRP? Poniżej ograniczymy się tylko do bardzo ogólnych uwag dotyczących zależności między językiem KRP a językami etnicznymi. Będą to przy tym uwagi raczej dogmatyczne. Więcej na ten temat: np. w wykładzie SEMIOTYKA LOGICZNA przewidzianym w programie studiów JĘZYKOZNAWSTWA I NAUK O INFORMACJI na roku czwartym.

Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi. Wszystko, co daje się wyrazić, jest wyrażalne w językach etnicznych. Pomijając niuanse gramatyczne oraz zasoby słownikowe (które zawsze można uzupełniać), wszystkie języki etniczne są zasadniczo ***równoważne***, jeśli chodzi o treści w nich wyrażalne.

Język Klasycznego Rachunku Zdań jest tworem o wiele młodszym niż poszczególne języki etniczne — liczy sobie zaledwie dwa i pół tysiąca lat. Z kolei, język Klasycznego Rachunku Predykatów liczy sobie niewiele więcej niż sto lat. Inspiracje do zbudowania języka KRP były po części logiczne, po części matematyczne.

Język KRP nadaje się do „mówienia" o bardzo szerokiej klasie struktur: o układach złożonych z ***dowolnego*** zbioru przedmiotów oraz określonych między tymi przedmiotami relacjach. Dla większości zastosowań, język KRP (a więc także jego dobrze określona semantyka) jest całkowicie wystarczający. W szczególności, ponieważ w języku tym sformułować można teorię mnogości (która stanowi podstawę dla całej matematyki), znakomita większość rozważań matematycznych jest wyrażalna w (stosownych fragmentach) języka KRP.

Czasami podkreśla się fakt, że formalizacja klasycznego pojęcia prawdy (podana przez Tarskiego, w terminach relacji spełniania omówionej wyżej) nie jest adekwatna np. dla zdań z różnego rodzaju modalnościami (aletycznymi, deontycznymi, epistemicznymi, itd.). Tak oczywiście jest, należy jednak zwrócić uwagę, że dla każdej z odpowiednich logik nieklasycznych (np. modalnych) formułuje się dobrze określone pojęcie spełniania i prawdy. Przy tym, w metajęzyku opisu korzysta się z teorii mnogości, a więc także z KRP. Podobne uwagi można sformułować pod adresem innych logik: np. wielowartościowych, temporalnych, itd.

Zwraca się również uwagę, że wiele fenomenów języków etnicznych (np. okazjonalność, wyrażenia abstrakcyjne wymagające kwantyfikacji wyższych rzędów, elipsa, metafory, idiomy, presupozycje, implikatury, performatywy, konstrukcje intensjonalne w ogólności, akty mowy, mowa zależna, itd.) wymyka się opisowi z bezpośrednim zastosowaniem semantyki KRP. Także w tych przypadkach, stosowne ujęcia metalogiczne korzystają jednak, w ostatecznym rozrachunku, z teorii mnogości oraz KRP.

Wreszcie, podkreśla się zasadniczą różnicę między językami etnicznymi a językami sztucznymi: w językach etnicznych nie występują w sposób wyraźny ***zmienne*** (zdaniowe lub nazwowe). Ten fakt jednak nie przesądza, iż ***przekłady*** z języków etnicznych na języki sztuczne (i na odwrót), zachowujące własności znaczeniowe, są niemożliwe. W istocie, istnieje wiele rozbudowanych systemów formalnych, w których takie przekłady się proponuje.

Czyżby więc, mimo wszystkich tych (i ewentualnie dalszych) zastrzeżeń, istnienie ***globalnego*** „przekładu" wszelkich wyrażeń dowolnego języka etnicznego na język KRP, z zachowaniem wszystkich własności semantycznych, było przesądzone? Sądzimy, że nie. Tylko wybrane rodzaje wyrażeń (zdań) języków etnicznych można „rozumnie" przekładać na język KRP. Aby taki przekład był sensowny, muszą być spełnione, m.in. następujące warunki:

- rozważane wyrażenia muszą mieć porządnie określone ***kategorie syntaktyczne*** (odpowiadające predykatom, nazwom, funktorom różnych rodzajów);
- trzeba się ograniczyć jedynie do funkcji ***informacyjnej*** (deskryptywnej) wyrażeń, pomijając (pierwszorzędowe w przypadku języków etnicznych) funkcje ***pragmatyczne***, np. funkcję ***perswazyjną***;
- należy się ograniczyć do wyrażeń, a nie ***wypowiedzi***, w przypadku tych drugich istotną rolę odgrywają ich ***konteksty***, a to zmusza do wykroczenia poza klasyczne (w terminach relacji spełniania dla KRP) rozumienie prawdziwości.

„Przekłady" w drugą stronę (tj. z języka KRP na języki etniczne) są oczywiście o wiele łatwiejsze. Jednak również w tym przypadku napotykamy na pewne trudności („przekłady" pewnych kontrukcji logicznych źle „współżyją" gramatycznie, jeśli użyć tej niejasnej metafory).

Tak więc, dla przykładu, nie sprawia najmniejszych trudności dokonanie „przekładu" z języka polskiego na język KRP zdań poniższej postaci, w których jest jasne, co przełoży się na predykat, co na nazwę, z jakimi rodzajami kwantyfikacji mamy do czynienia, itd.:

- Jan zdradził Klaudię z Cecylią.
- Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- Kto śpi, nie grzeszy.

Podobnie, nietrudno znaleźć różnice znaczeniowe w podanych niżej parach wyrażeń:

1.	Umarł i dostał jakiś order.	Dostał jakiś order i umarł.
2.	Umarł bo dostał jakiś order.	Dostał jakiś order bo umarł.
3.	Umarł więc dostał jakiś order.	Dostał jakiś order więc umarł.
4.	Umarł chociaż dostał jakiś order.	Dostał jakiś order chociaż umarł.
5.	Umarł gdy dostał jakiś order.	Dostał jakiś order gdy umarł.
6.	Umarł mimo że dostał jakiś order.	Dostał jakiś order mimo że umarł.
7.	Nie dość, że umarł, to dostał jakiś order.	Nie dość, że dostał jakiś order, to umarł.

Drobnym problemem może okazać się oddanie tych różnic znaczeniowych w „przekładach" tych wyrażeń na język KRP.

Nie poświęcamy w tych wykładach specjalnej uwagi problemom znajdowania tego rodzaju przekładów z powodów, które zostały już przedstawione w semestrze zimowym: skoro otrzymałaś Świadectwo Dojrzałości, to należy przypuszczać, że sprawnie posługujesz się językiem polskim, w Czytaniu ze Zrozumieniem, analizie składniowej wypowiedzi, itd. Kto jednak łaknie tego typu ćwiczeń, znajdzie je w wielu powszechnie dostępnych podręcznikach i zbiorach zadań.

Pozwólmy sobie, dla relaksu, przywołać w tym miejscu garść wyrażeń o wymowie (w naszym mniemaniu) zabawnej. Komizm jest tu wynikiem różnorakich czynników, np.: błędów składniowych i semantycznych, elipsy, wieloznaczności, różnego rodzaju implikaturom, itd. Można, dla rozrywki, próbować znaleźć „przekłady" podanych wyrażeń na język KRP.

- Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem, po kościele — przed kościołem.
- Nad rzeką dziewczę doiło krowę, a w wodzie odbijało się odwrotnie.
- Jan zakopał skarb razem z teściową.
- Mimo starań lekarzy pacjent wyzdrowiał.
- Po wielu staraniach lekarzy pacjent zmarł.
- Popieramy program partii (tu wPiSz nazwę partii), oparty na przeświadczeniu o własnej słuszności.
- Cała wspólnota dziękuje chórowi parafialnemu, który na okres wakacji zaprzestał swojej działalności.
- Wieś była samowystarczalna: kobiety dostarczały mleka, mięsa i skór.
- Zachowanie dzieci dalece odbiega od rzeczywistości.
- Temperatura w kraju zależy od termometru.
- Chory więzień nie dość, że nie był leczony, musiał jeszcze niekiedy umierać.
- Nie chcę, ale muszę.
- Mam swoje zdanie w tej sprawie, ale się z nim nie zgadzam.
- Kara śmierci ma charakter nieodwracalny.
- Na mordy carów państwa Europy patrzyły złym okiem.
- W XVI wieku uprawiano wiele roślin, których jeszcze nie znano.
- Dzięki seppuku Japończycy mogli pokazać swoje prawdziwe wnętrze.
- Emilia Plater była pułkownikiem o kobiecych piersiach widocznych spod munduru.
- Wietrzenie skał jest pojęciem czysto teoretycznym, bo wszystkie dawno wywietrzały.
- Meduza żyje w jelicie grubym człowieka, więc jest pożytecznym szkodnikiem.
- Beethoven był głuchy, ale przynajmniej widział co komponował.
- Jontek na swoim zegarze w chałupie znalazł wskazówki do życia.
- Harfa jest podobna do łabędzia, tylko gorzej pływa.
- Jeśli podzielimy graniastosłup wzdłuż przekątnej podstawy, to otrzymamy dwie trumny.
- Prostokąt różni się od kwadratu tym, że raz jest wyższy a raz szerszy.
- Przez uderzenia pędzlem malarz uzyskuje smutek na twarzy modelki.
- Gdyby stopniały lodowce, to Wielka Brytania byłaby cała zalana, a Polska chyba też, ale kilka dni później.
- Po bitwie na polu grunwaldzkim zostało więcej trupów niż przyszło.
- Polana jest to forma lasu bez lasu.

- Janko Muzykant ledwie zipał, ale zipał.
- Słowacki na swoim pogrzebie widział tylko garstkę najbliższych przyjaciół.
- Po ogłoszeniu 10 przykazań Mojżesz uznał je za nieżyciowe i rzucił w przepaść.
- Kaj i Gerda nie byli ani siostrą ani bratem, tylko rodzeństwem.
- W puszczy żyje dużo drapieżników, które mogą człowieka pożreć, zadusić i zostawić.
- Całymi dniami pił po nocach.
- Na skutek żałoby swojej matki, Iwona urodziła się w pięć lat po śmierci ojca.
- Andromaka była wdową, jakiej wielu mężów mogło sobie życzyć.
- We wsi panowała ciemnota a także wójt.
- Autor w tym wierszu ukazuje nam swoje wnętrze i mówi, że jest mu niedobrze.
- Wiatr wiał tak silny, że powywracał dzwony na lewą stronę.
- Spróchniały ząb czasu dotknął go swoim palcem.
- Ludzie pierwotni, gdy chcieli rozpalić ogień musieli pocierać krzemieniem o krzemień, a pod spód podkładali stare gazety.
- *Bogurodzica* śpiewana była często na rozpoczęcie bitwy pod Grunwaldem.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie zarabiał więcej od średniej krajowej.
- „Ruchu nie ma" — rzekł Parmenides i odszedł.
- Nie znał zupełnie niczego.
- W moim zestawie pojęć nie ma pojęcia grzechu, a więc nie mogę grzeszyć.
- Przypuszczam, że sto lat temu nie było mnie (jeszcze/już) na świecie.
- Beata jest wierna wszystkim swoim narzeczonym.
- Nie ulegaj przesądom, bo to przynosi pecha.
- Każdy rzekomy przestępca jest przestępcą.
- Oskarżenie ministra okazało się bezpodstawne.
- Będzie tak dobrze, że gorzej już nie będzie.
- Wszyscy nie zapłacili.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie robił to, na co ma ochotę. A jeśli nie, to go do tego zmusimy.
- Kobiety i mężczyźni mają takie same prawa przy podejmowaniu i rozwiązywaniu umowy o pracę.
- Wyjątek potwierdza regułę.
- Dzięki swemu kalectwu nie może biedak dostać pracy.
- Z okazji śmierci męża ślemy wyrazy głębokiego współczucia.
- W związku ze śmiercią mojej matki proszę o wypłacenie mi ekwiwalentu pieniężnego.
- Małżeństwo to zalegalizowana prostytucja.
- Wolny jest ten, kto nie siedzi w więzieniu.

- Kapitał to ta część bogactwa, którą poświęca się, by pomnożyć swe bogactwo.
- Mąż stanu to polityk nieżyjący od piętnastu lat.
- Demokracja to ustrój, w którym możesz mówić to co myślisz, nawet wtedy, kiedy nie myślisz.
- Sprawiedliwe jest to, co leży w interesie silniejszego.
- Potrafię się oprzeć wszystkiemu, z wyjątkiem pokusy.
- Nietoperze są ssakami, bo nie mają piór. :)
- Założę się, że nie ma się o co zakładać.
- Jeśli zalegalizujemy eutanazję, to rozwiążemy problem braku pieniędzy na emerytury.
- Jeśli zalegalizujemy aborcję, to rozwiążemy problem przeludnienia.
- Lepsze jutro było wczoraj.
- W teorii nie ma różnicy między teorią a praktyką. W praktyce jest.
- „Nie strzelajcie, towarzysze" — powiedział Majakowski na chwilę przed swoim urzędowo stwierdzonym samobójstwem.
- „Nie ma reguły bez wyjątków" jest regułą bez wyjątków.
- Raz ladacznica, zawsze ladacznica.
- Kiedy ktoś mówi, że chodzi o zasady, a nie o pieniądze, to wiadomo,że chodzi o pieniądze.
- Uczciwy polityk to ten, który, gdy raz został kupiony, pozostaje takim na zawsze.
- Ekonomista to ekspert, który będzie wiedział jutro, dlaczego rzeczy, które przepowiedział wczoraj, nie sprawdziły się dzisiaj.
- Zamiast wiary w pieniądze, inwestuj w wiarę.
- W kapitalizmie człowiek wykorzystuje człowieka. W komunizmie odwrotnie.
- Oddać życie za przekonania teologiczne jest najgorszym użytkiem, jakie człowiek może z życia uczynić.
- Pieniądze ma się po to, aby ich nie mieć.
- W piekle diabeł jest postacią pozytywną.
- Wiem, skąd legenda o bogactwie żydowskim. Żydzi płacą za wszystko.
- Pieniądze ułatwiają znoszenie ubóstwa.
- Polityka to bezkrwawa wojna, a wojna to polityka i rozlew krwi.
- W wolnym kraju każdy może wygłaszać własne zdanie i nikt nie musi tego słuchać.
- Istnieje cenzor, który cenzoruje teksty dokładnie tych autorów, którzy nie stosują autocenzury.
- **Hegel.** Człowiek uczy się z historii, że człowiek niczego nie uczy się z historii.
- **Kamień.** Istota wszechmogąca może stworzyć kamień, którego nie może podnieść.
- **Teodycea.** Istnienie zła na świecie jest w zgodzie z miłosierdziem bożym.
- **Hempel.** Obserwowanie żółtych liści dostarcza konfirmacji, że wszystkie kruki są czarne.
- **Berry.** Najmniejsza liczba naturalna niedefiniowalna przez mniej niż 30 słów jest definiowalna przez mniej niż 30 słów.

- **Achilles.** Jeśli Żółw znajduje się w odległości np. 1m od Achillesa, to Achilles nigdy go nie dogoni.
- **Moment śmierci.** Jeśli żyjemy, to śmierci nie ma. Jeśli nie żyjemy, to nie ma życia. Moment śmierci nie może należeć ani do życia, ani do śmierci.
- **Moore.** „Byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę."
- **Quine.** Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to Pingwiny rządzą światem.
- **Tezeusz.** Jeśli każdy element Statku został co najmniej raz zastąpiony nowym, to czy mamy do czynienia wciąż z tym samym Statkiem?
- **Ograniczenia kontroli.** Nigdy nie możemy być pozbawieni kontroli, bowiem niepodleganie czyjejkolwiek kontroli oznacza samokontrolę.
- **Rzymskie.** Dla zachowania pokoju przygotowuj się do wojny.
- **Nihilizm.** Jeśli prawda nie istnieje, to stwierdzenie „Prawda nie istnieje" jest prawdą.
- **Wszechmoc.** Co się stanie, gdy pocisk, który przebija wszystko trafi w tarczę, której nic nie może przebić?
- **Piosenka ontologiczna.** „To, co się dzieje, naprawdę nie istnieje, więc nie warto mieć niczego, tylko karmić zmysły."
- **Niemożliwa odpowiedź.** Śpisz? Tak.
- **Stopnie nicości.** A im bardziej Puchatek zaglądał do środka, tym bardziej Prosiaczka tam nie było.
- **Sceptycyzm.** Nic nie jest poznawalne.
- **Solipsyzm.** Jestem solipsystą i dziwi mnie to, że inni nie są.
- Piotr głosi tolerancję dla nietolerancji.
- Piotr głosi nietolerancję dla tolerancji.
- Piotr głosi nietolerancję dla nietolerancji.
- *Panie doktorze, cierpię na chroniczne niezdecydowanie, ale pewna tego nie jestem.*
- Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?
- Powoli zaczynamy się spieszyć.

17. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

17.1. Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- (a) $\forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ (Q(x) \wedge R(x,y)))$
- (b) $\exists x\ (P(x) \wedge \forall z\ (Q(z) \rightarrow R(x,z)))$
- (c) $\exists x\ (P(x) \wedge \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x,y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α, gdzie:

- (a) t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z\ (P(y,z) \rightarrow Q(x))$; x jest jedyną zmienną w termie t;
- (b) t jest postaci $g(x,y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z\ (P(x,y) \rightarrow Q(z))$; x i y są jedynymi zmiennymi w termie t;
- (c) t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall x \exists y\ (P(x) \vee Q(y))$; t jest termem bazowym.

17.1.3. Podaj wartość $S(t,x,t')$ dla:

- (a) t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- (b) t postaci $f(x, f(x,x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x,y))$;
- (c) t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a,a)$; $g(a,a)$ jest termem bazowym.

17.1.4. Podaj wartość $S(t,x,\alpha)$ dla:

- (a) t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x,z))$;
- (b) t postaci $f(x,y)$ oraz α postaci $\forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x,z))$;
- (c) t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x,x))$.

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- (a) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f;
- (b) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g;
- (c) utworzonych z jednej zmiennej x, jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g.

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniami języka KRP:

- (a) $\forall x \exists y \forall z\ (P(x,y,z) \rightarrow Q(x,x,x))$
- (b) $\exists x\ ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y\ (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- (c) $\forall x \exists y\ (P(f(y),x) \wedge Q(x, f(y)))$.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \ldots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum $\mathfrak{M}$ o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\exists x_1\ (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (b) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (c) α postaci $\exists x_1\ (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (d) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.2. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- (b) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- (c) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \wedge z \prec y)$
- (b) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (z \prec x \wedge z \prec y)$
- (c) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości $\leqslant$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $\leqslant$. Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$?

17.2.4. Niech $\mathfrak{N}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i następnika „+1” oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- $\oplus$ denotuje operację dodawania
- $\otimes$ denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- $\prec$ denotuje relację mniejszości
- $\doteq$ denotuje relację identyczności
- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest podzielna bez reszty przez y
- (b) x jest liczbą pierwszą
- (c) x i y są względnie pierwsze
- (d) x jest sumą dwóch kwadratów
- (e) x jest większa od każdego podzielnika y
- (f) x nie jest następnikiem żadnego podzielnika y
- (g) x jest liczbą parzystą
- (h) x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z
- (i) x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{N}$:

- (a) Istnieje największa liczba pierwsza.
- (b) Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- (c) Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- (d) Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika.
- (e) Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi: $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
- (f) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- (g) Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech $\mathfrak{L}$ będzie nieskończonym zbiorem L częściowo uporządkowanym przez relację $\sqsubseteq$. Oznacza to, że relacja $\sqsubseteq$ jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja $\sqsubset$ będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$. Niech predykat $\ll$ denotuje relację $\sqsubseteq$, a predykat $\prec$ relację $\sqsubset$.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- (b) x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- (c) x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (d) x jest elementem $\sqsubseteq$-największym (x jest następnikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (e) x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{L}$:

- (a) Porządek $\sqsubseteq$ jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- (b) Porządek $\sqsubset$ jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji $\sqsubset$ oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji $\sqsubset$ istnieje element $\sqsubset$-pośredni).

- (c) Porządek $\sqsubset$ jest dyskretny (każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik), ma także bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik)).
- (d) Porządek $\sqsubset$ nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- (e) Istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) Istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.
- (i) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Niech teraz $\mathfrak{L}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja $\sqsubseteq$ będzie inkluzją, a $\sqsubset$ inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w $\mathfrak{L}$?

17.3. Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- (a) $(\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
- (c) $\forall x \exists y\ P(y, x) \rightarrow \exists y \forall x\ P(y, x)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\exists x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \beta)$
- (b) $(\alpha \vee \forall x\ \beta) \rightarrow \forall x\ (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α.
- (c) $\forall x\ (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \forall x\ (\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następująca formuła jest prawdziwa w każdej strukturze skończonej, ale nie jest tautologią KRP:

- (a) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y, dla:

- (a) $X = \{\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta),\ \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)\}, Y = \{\forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)\}$
- (b) $X = \{\forall x\ \alpha,\ \forall x\ \beta\}, Y = \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta),\ \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$.

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:

- (a) $X = \{\forall x \exists y\ P(x, y),\ \exists x\ P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\ P(x, x)$
- (b) $X = \{\exists x\ P(x),\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$.

17.5. Teoria mnogości

Uwaga. Słuchacze tych wykładów mają za sobą kurs WSTĘPU DO MATEMATYKI, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- (a) x jest funkcją różnowartościową z y na z.
- (b) Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- (c) Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- (a) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z)$
- (b) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \in y \wedge y \neq z) \rightarrow x \notin z)$
- (c) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \subseteq y \wedge y \in z) \rightarrow x \notin z)$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- (a) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \rightarrow x \cap z = \emptyset)$
- (b) $\forall x \forall y \ (x = x \cap y \rightarrow x \subseteq y)$
- (c) Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

17.5.4. Udowodnij, że:

- (a) operacje sumy $\cup$ oraz różnicy $-$ można zdefiniować w terminach operacji: $\cap$ oraz różnicy symetrycznej $\div$;
- (b) operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ oraz różnicy $-$.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- (a) Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S, a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R. Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R, czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- (b) Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X.
- (c) Złożenie $R_1 \circ SR_2$ relacji równoważności R_1 oraz R_2 jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- (a) Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y.
- (b) Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- (c) Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- (a) Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- (b) Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedynki.
- (c) Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a (w drugiej aksjomatyce):

- (a) Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y.
- (b) Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y.

17.6.4. Niech $\mathbb{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- (a) Czy zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem, czy ideałem algebry $\mathfrak{B}$?
- (b) Czy algebra $\mathfrak{B}$ zawiera jakieś atomy lub koatomy?

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenie języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- (a) Są wstrętne prawdy i piękne fałsze.
- (b) Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę.
- (c) Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- (d) Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- (e) Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- (a) $\forall x\ ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x))$; $P(x)$ — x wdycha opary rtęci, $Q(x)$ — x kona, rzężąc, pocąc się i mocząc, $R(x)$ — x świruje jarząbka.

- (b) $\forall x\ (P(x) \rightarrow (\exists x \forall y\ (Q(x,y) \rightarrow \exists x\ \neg R(x))))$; $P(x)$ — x jest bezrobotny, $Q(x,y)$ — x jest bogatszy od y, $R(x)$ — x jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.
- (c) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5\ ((M(x_1,x_2,x_3) \wedge M(x_4,x_3,x_5)) \rightarrow \exists x_6\ (M(x_1,x_6,x_4 \wedge M(x_5,x_2,x_6)$; $M(x,y,z)$ — y leży między x oraz z, przy czym nie jest wykluczone, iż y jest identyczny z x lub y jest identyczny z z.

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- (a) Żaden papież nie był kobietą.
- (b) Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- (c) Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- (d) Prawdy wieczne są odwieczne.
- (e) Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.

Rozwiązania ćwiczeń

17.1. Język KRP

17.1.1.

- (a) Pierwsze z lewej wystąpienie y jest wolne w tej formule. Zmienna y jest zmienną wolną tej formuły.
- (b) Ta formuła nie zawiera zmiennych wolnych.
- (c) Zmienna y jest jedyną zmienną wolną tej formuły.

17.1.2.

- (a) Tak. Żadna zmienna występująca w termie $f(x)$ nie stanie się związana po podstawieniu tego termu do rozważanej formuły.
- (b) Nie. Po wstawieniu termu $g(x,y)$ do formuły $\forall y \forall z\ (P(x,y) \rightarrow Q(z))$ zmienna y występująca w tym termie staje się związana w rozważanej formule.
- (c) Tak. Term $f(a)$ nie zawiera zmiennych wolnych, a więc jest podstawialny do każdej formuły.

17.1.3.

- (a) $S(f(a), x, g(x, f(x)))$ jest termem $g(f(a), f(f(a)))$.
- (b) $S(f(x, f(x,x)), x, g(x, g(x,y)))$ jest termem $g(f(x, f(x,x)), g(f(x, f(x,x)), y)))$.
- (c) Nie można dokonać podstawienia. Term $g(a,a)$ nie zawiera zmiennej x.

17.1.4.

- (a) $S(y, x, \forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x,z)))$ jest formułą $\forall x \exists z\ (P(y) \rightarrow Q(y,z))$.

- (b) $S(f(x,y), x, \forall x \exists z \; (P(x) \rightarrow Q(x,z)))$ jest formułą $\forall x \exists z \; (P(f(x,y)) \rightarrow Q(f(x), z))$. Zauważ, że zmienna x stała się związana po podstawieniu!
- (c) $S(g(x, f(y)), x, P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x,x))$ jest formułą:
  $P(g(x, f(y))) \rightarrow Q(f(g(x, f(y))), g(g(x, f(y)), g(x, f(y))))$.

17.1.5.

- (a) Jest to zbiór: $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\}$.
- (b) Jest to zbiór: $\{x, g(x,x), g(x, g(x,x)), g(g(x,x), x), \ldots\}$.
- (c) Jest to zbiór:
  $\{x, t, g(x,x), g(t,t), g(x,t), g(t,x)\} \cup$
  $\{g(x, g(x,x)), g(x, g(t,t)), g(x, g(x,t)), g(x, g(t,x))\} \cup$
  $\{g(t, g(x,x)), g(t, g(t,t)), g(t, g(x,t)), g(t, g(t,x))\} \cup \ldots$.

17.1.6.

- (a) Tak, jest zdaniem.
- (b) Pierwszy człon koniunkcji zawiera wolne wystąpienie zmiennej y, a więc rozważana formuła nie jest zdaniem.
- (c) Tak, jest zdaniem.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1.

- (a) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden jej człon. Wystarczy teraz zauważyć, że ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, ponieważ ciąg $w' = \langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$.
- (b) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ co najmniej jeden jej człon. Ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej alternatywy: ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 1, 0, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy zatem, że ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ żadnego z członów rozważanej alternatywy. W konsekwencji, alternatywa ta nie jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ przez ciąg w.
- (c) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami egzystencjalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_1 \; x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 0: ciąg $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej koniunkcji: ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_2 \; x_1 \prec x_2$ wtedy

i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 2: ciąg $\langle 1, 2, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Ponieważ ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ oba człony koniunkcji, spełnia też w strukturze $\mathfrak{M}$ całą koniunkcję.

- (d) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami generalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną. Jednak np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy więc, że ciąg w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$, czyli pierwszego członu rozważanej koniunkcji. Nie spełnia zatem również całej koniunkcji. Szukanie odpowiedzi na pytanie, czy ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon rozważanej koniunkcji (a nietrudno pokazać, że nie spełnia) nie jest już potrzebne.

17.2.2.

- (a) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest alternatywą, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden człon tej alternatywy. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej alternatywy. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają alternatywę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę:

$$\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1).$$

- (b) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest koniunkcją, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa człony tej koniunkcji. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej koniunkcji. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają koniunkcję $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$.

- (c) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa: (1) w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1 (x_1 \prec x_2)$ ***lub*** (2) w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_2 (x_1 \prec x_2)$. Punkt (1) oznacza, że nie dla wszystkich wartościowań $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ wartościowanie w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Istotnie, tak właśnie jest: np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Ponieważ zachodzi jeden (pierwszy) z członów alternatywy (1) ***lub*** (2), więc zachodzi cała ta alternatywa. Oznacza to, że ***dowolne*** wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3.

Najpierw rozważamy przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację mniejszości $<$.

- (a) Rozpatrywana formuła stwierdza, że między każdymi dwiema liczbami naturalnymi istnieje liczba „pośrednia" (w sensie porządku $<$). Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ np. między liczbami 1 i 2 nie ma żadnej liczby naturalnej n takiej, że $1 < n$ oraz $n < 2$.

- (b) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba mniejsza od nich obu. Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ nie istnie np. liczba mniejsza od liczb 0 oraz 1.

- (c) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba większa od nich obu. Formuła ta jest więc prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$: dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n np. liczba $m + n + 1$ jest większa zarówno od m, jak i od n.

UWAGA. W powyższej interpretacji nie mamy możliwości stwierdzania, że rozważane liczby naturalne są różne (nie dysponujemy predykatem identyczności).

Rozważamy teraz przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację niewiększości $\leqslant$.

- (a) Rozpatrywana formuła jest fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$: np. dla liczb 3 oraz 2 nie istnieje liczba n taka, że $3 \leqslant n$ oraz $n \leqslant 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $k \leqslant m$, jak i $k \leqslant n$.
- (c) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $m \leqslant k$, jak i $n \leqslant k$.

17.2.4.

A) W przypadku predykatu $\doteq$ będziemy pisać $t_1 \doteq t_2$ zamiast $\doteq (t_1, t_2)$. Podobnie, w przypadku predykatu $\prec$ będziemy pisać $t_1 \prec t_2$ zamiast $\prec (t_1, t_2)$. Niech ponadto predykat $\preceq$ będzie zdefiniowany warunkiem: $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \prec y$ lub $x \doteq y$. [Oznacza to, że wyrażenie $x \preceq y$ jest skrótem dla wyrażenia $x \prec y \vee x \doteq y$.]

- (a) $\exists z\ (x \doteq \otimes(y, z))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $div(x, y)$. Formułę $div(x, y)$ czytamy zatem: x jest podzielna się bez reszty przez y.
- (b) $\forall y\ (y \preceq x \rightarrow ((y \doteq S(\bigcirc) \vee y \doteq x)) \vee \neg div(x, y))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $pr(x)$. Formułę $pr(x)$ czytamy zatem: x jest liczbą pierwszą.
- (c) $\forall z\ ((\neg z \doteq S(\bigcirc) \wedge (z \preceq x \wedge z \preceq y)) \rightarrow \neg(div(x, z) \wedge div(y, z)))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $rp(x, y)$. Formułę $rp(x, y)$ czytamy zatem: x oraz y są względnie pierwsze.
- (d) $\exists y \exists z\ (x \doteq \oplus(\otimes(y, y), \otimes(z, z)))$. Formuła ta stwierdza, że x jest suma dwóch kwadratów.
- (e) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow z \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest większa od każdego podzielnika y.
- (f) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow \neg x \doteq s(z))$. Formuła ta stwierdza, że liczba x nie jest następnikiem żadnego podzielnika liczby y.
- (g) $\exists z\ (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z))$. Formuła ta stwierdza, że x jest liczbą parzystą.
- (h) $div(y, x) \wedge div(z, x) \wedge \forall u\ ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z.
- (i) $div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u\ ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)$. Formuła ta stwierdza, że x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B)

- (a) $\exists x\ (pr(x) \wedge \forall y\ (pr(y) \rightarrow y \preceq x))$. To zdanie stwierdza, że istnieje największa liczba pierwsza. Jest ono fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.
- (b) Tego nie można napisać w języku KRP. „Bardzo dużo" jest wyrażeniem niejasnym znaczeniowo. W języku KRP rozważanej sygnatury można zapisać np. to, że dla każdej liczby pierwszej istnieje większa od niej liczba pierwsza (por. punkt (a) powyżej). Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- (c) $\forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\ (x \doteq \oplus(\otimes(y_1, y_1), \oplus(\otimes(y_2, y_2), \oplus(\otimes(y_3, y_3), \otimes(y_4, y_4)))))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$.
- (d) $\forall x \forall v \forall y \forall z\ (((div(x, y) \wedge div(x, z) \wedge \forall u\ ((div(u, y) \wedge div(u, z)) \rightarrow x \preceq u)) \wedge (div(y, v) \wedge div(z, v) \wedge \forall u\ ((div(y, u) \wedge div(z, u)) \rightarrow u \preceq v))) \rightarrow x \prec v)$. Ta formuła stwierdza, że najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika. Jest ona fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (e) Zapiszmy najpierw formułę $R(x)$ wyrażającą fakt, że $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\oplus(\otimes(S(S(S(\bigcirc))), \otimes(x, x)), \oplus(\otimes(S(S(\bigcirc)), x), S(\bigcirc))) \doteq \bigcirc.$$

  Napiszemy teraz, że istnieją dokładnie dwie liczby, dla których zachodzi $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \; ((R(x_1) \wedge R(x_2)) \wedge \forall y \; (R(y) \to (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2))).$$

  To zdanie jest fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (f) $\forall x \forall y \forall z \; (\otimes(\oplus(x, y), z) \doteq \oplus(\otimes(x, z), \otimes(y, z)))$. To zdanie wyraża (prawostronną) rozdzielność dodawania względem mnożenia. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$. Podobnie zapisujemy lewostronną rozdzielność dodawania względem mnożenia (Ćwiczenie: zapisz).

- (g) $\forall x \; (\exists z \; (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z)) \to \exists u \exists v \; ((pr(u) \wedge pr(v)) \wedge x \doteq \oplus(u, v)))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. W chwili, gdy pisane są te słowa, nie wiadomo, czy to zdanie jest prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$. Jest to tzw. ***hipoteza Goldbacha***.

17.2.5.

A)

- (a) $\neg \exists y \; (\neg y \doteq x \wedge y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym.
- (b) $\neg \exists y \; (\neg y \doteq x \wedge x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym.
- (c) $\forall y \; (x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym.
- (d) $\forall y \; (y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-największym.
- (e) $\neg y \ll x \wedge \neg x \ll x$. Formuła ta stwierdza, że x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B)

- (a) Trzeba zapisać, że predykat $\ll$ denotuje relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną:
  $\forall x \; (x \ll x)$
  $\forall x \forall y \forall z \; ((x \ll y \wedge y \ll z) \to x \ll z)$
  $\forall x \forall y \; ((x \ll y \wedge y \ll x) \to x \doteq y)$
  $\forall x \forall y \; (\neg x \doteq y \to (x \ll y \vee y \ll x))$.
  Koniunkcja tych formuł stwierdza, że $\sqsubseteq$ (czyli denotacja predykatu $\ll$) jest liniowym porządkiem.
- (b) $\exists x \exists y \; (\neg x \doteq y \wedge x \prec y) \wedge \forall x \forall y \exists z \; (x \prec y \to (x \prec z \wedge z \prec y))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem gęstym.
- (c) $\forall x \; (\exists y \; x \prec y \to \neg \exists z \; (x \prec z \wedge z \prec y)) \wedge \forall x \; (\exists y \; x \prec y \to \neg \exists z \; (y \prec z \wedge z \prec x))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem dyskretnym: każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik) ma też bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik).
- (d) Koniunkcja zaprzeczeń formuł z (b) i (c) powyżej stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) nie jest ani porządkiem gęstym, ani porządkiem dyskretnym.
- (e) $\exists x \exists y \; (\neg x \ll y \wedge \neg y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) $\forall x \forall y \exists z \; (z \ll x \wedge z \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) $\forall x \forall y \exists z \; (x \ll z \wedge y \ll z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) $\exists x \exists y \; (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.

- (i) $\forall x \forall y \exists z\ (z \prec x \land z \prec y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \land y \prec z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Dla każdego z powyższych zdań znaleźć można zbiór częściowo uporządkowany, w którym zdanie to jest fałszywe. Innymi słowy, zdania te nie są prawdziwe o wszystkich zbiorach częściowo uporządkowanych.

Jeśli L jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, a relacja $\sqsubseteq$ jest relacją inkluzji i relacja $\sqsubset$ jest relacją inkluzji właściwej, to w strukturze $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$:

- (a) Nie jest prawdziwe. Inkluzja nie jest porządkiem liniowym w L.
- (b) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa nie jest porządkiem gęstym w rozważanym zbiorze. Dla przykładu, nie istnieje zbiór A taki, że $\{1, 2\} \subset A$ oraz $A \subset \{1, 2, 3\}$.
- (c) Jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa jest porządkiem dyskretnym w rozważanym zbiorze.
- (d) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej: zobacz punkty (b) i (c) powyżej.
- (e) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subseteq B$ ani $B \subseteq A$.
- (f) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$.
- (g) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \subseteq A \cup B$ oraz $B \subseteq A \cup B$.
- (h) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subset B$ ani $B \subset A$.
- (i) Nie jest prawdziwe. Zbiór pusty $\emptyset$ oraz dowolny zbiór niepusty A nie mają wspólnego $\subset$-poprzednika.
- (j) Nie jest prawdziwe. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz dowolny jego podzbiór A nie mają wspólnego $\subset$-następnika.

17.3. Tautologie KRP

17.3.1.

- (a) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:
  - być liczbą podzielną przez 2
  - być liczbą podzielną przez 4.

  Wtedy:
  - Poprzednik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Jeśli wszystkie liczby są podzielne przez 2, to wszystkie liczby są podzielne przez 4.* Ta implikacja jest prawdziwa w rozważanej interpretacji, ponieważ ma fałszywy poprzednik.
  - Następnik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Każda liczba podzielna przez 2 jest też podzielna przez 4.* Ta implikacja jest fałszywa w rozważanej interpretacji, ponieważ np. liczba 2 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 4.
- (b) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:
  - być liczbą parzystą

– być liczbą nieparzystą.

Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta).

- (c) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacja predykatu P będzie relacją „być następnikiem". Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (każda liczba ma następnik), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, będąca następnikiem wszystkich liczb naturalnych).

17.3.2. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ \alpha \ \rightarrow\ \exists x\ \beta$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \exists x\ \beta$. Stąd istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x\ \beta$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$). Na mocy definicji relacji spełniania oznacza to, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$.

  Na mocy $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \alpha$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$.

  Założenie $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ oznacza, że dla pewnego $m_0 \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$.

  Ponieważ dla wszystkich $m \in M$ mamy $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$, więc mamy także w szczególności: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$.

  Ponieważ reguła odrywania jest niezawodna, z powyższego otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$, co jest sprzeczne z otrzymanym poprzednio $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologią KRP.

- (b) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Załóżmy, że x nie jest zmienną wolną w α. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \alpha \vee \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Oznacza to, że istnieje wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$). Na mocy definicji relacji spełniania istnieje element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \vee \beta$. Stąd, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$.

  Z założenia, $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że zachodzi alternatywa:

  – (1) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***lub***
  – (2) $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \beta$.

  Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

  Jeśli zachodzi (1), to — ponieważ x nie jest zmienną wolną formuły α — na mocy twierdzenia 16.2.5.3., $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Ale $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$, na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost. Stąd przypadek (1) jest wykluczony.

  Jeśli zachodzi (2), to $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$ dla wszystkich $m \in M$, na mocy definicji relacji spełniania. W szczególności zatem: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, również przypadek (2) został wykluczony.

  Przypuszczenie dowodu nie wprost należy zatem odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologia KRP.

- (c) Wystarczy zauważyć, że formuły $\alpha \rightarrow \neg\beta$ oraz $\beta \rightarrow \neg\alpha$ są semantycznie równoważne, co widoczne jest stąd, że tautologiami KRZ są:

  – $\alpha \rightarrow \neg\beta\ \equiv\ \neg\alpha \vee \neg\beta$
  – $\beta \rightarrow \neg\alpha\ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$
  – $\neg\alpha \vee \neg\beta\ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$.

Formuły semantycznie równoważne spełniane są przez dokładnie te same wartościowania.

17.3.3.

- (a) Trzeba pokazać, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich strukturach skończonych, ale nie jest prawdziwa w co najmniej jednej strukturze nieskończonej.

  Po pierwsze, pokażemy, że jeśli podana formuła jest fałszywa w jakiejś strukturze $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, gdzie relacja R jest denotacją predykatu P, to zbiór M jest nieskończony. Stąd oczywiście wynika, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich modelach skończonych.

  Jeśli $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ ((P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3)) \to (P(x_1, x_1) \to P(x_2, x_1)))$ jest fałszywa w $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, to istnieje funkcja $f : M \to M$ taka, że:

  - dla każdego $m \in M$ zachodzi $R(m, m)$
  - dla żadnego $m \in M$ nie zachodzi $R(f(m), m)$
  - dla każdych $m, n \in M$ mamy: jeśli $R(f(m), n)$, to $R(m, n)$.

  Weźmy dowolny element $m \in M$. Konstruujemy ciąg $\langle m_i \rangle$ w sposób następujący:

  - $m_0 = m$
  - $m_{i+1} = f(m_i)$.

  Niech $i < j$. Mamy wtedy:

  - zachodzi $R(m_i, m_{j-1})$
  - nie zachodzi $R(m_j, m_{j-1})$,

  co oznacza, że $m_i \neq m_j$. Tak więc, ciąg $\langle m_i \rangle$ jest różnowartościowy. Stąd zbiór M jest nieskończony.

  Po drugie, zauważmy, że rozważana formuła nie jest prawdziwa w strukturze nieskończonej $\mathfrak{M}$, której uniwersum stanowią wszystkie liczby naturalne, a denotacją predykatu P jest relacja niewiększości $\leqslant$.

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$. Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \to \beta)$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \to \gamma)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \to \gamma)$. Stąd, dla pewnego wartościowania w mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \to \gamma)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \to \gamma$.

  Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \to \beta)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha \to \beta$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \to \beta$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \to \gamma)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta \to \gamma$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \to \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \to \gamma$, to oczywiście także $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \to \gamma$, ponieważ reguła sylogizmu hipotetycznego jest regułą niezawodną. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, zachodzi wynikanie logiczne: $X \models_{krp} Y$.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.

  Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta), \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$. Zachodzi zatem alternatywa:

  - (1) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ ***lub***

– (2) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$.

Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

Jeśli zachodzi (1), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \wedge \beta)$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \wedge \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem przypadek (1) został wykluczony.

Jeśli zachodzi (2), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \vee \beta)$. Stąd: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie), a zatem również przypadek (2) został wykluczony.

Ostatecznie, przypuszczenie dowodu nie wprost należy odrzucić. Zachodzi wynikanie logiczne $X \models_{krp} Y$.

17.4.2.

- (a) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P w tym zbiorze. Niech:

  – $M = \{1, 2, 3\}$
  – $\Delta_{\mathfrak{M}}(P) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

- (b) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P oraz $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ predykatu Q w tym zbiorze. Niech:

  – M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych
  – $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych
  – $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

17.5. Teoria mnogości

17.5.1. Definicje wszystkich rozpatrywanych pojęć muszą być sformułowane jedynie w terminach relacji $\in$ oraz relacji identyczności $=$.

- (a) Definiujemy najpierw pojęcia: singletonu, pary nieuporządkowanej i pary uporządkowanej:

$$x = \{y\} \ \equiv\ \forall z(z \in x \equiv z = y)$$

$$x = \{y, z\} \ \equiv\ \forall u(u \in x \equiv (u = y \vee u = z))$$

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Predykat „być funkcją” ma następującą definicję:

$$\mathrm{Fn}(x) \ \equiv\ (\forall y(y \in x \rightarrow \exists u \exists v(y = \langle u, v\rangle)) \wedge \forall y \forall u \forall v((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle y, v\rangle \in x) \rightarrow u = v)).$$

Definiujemy pojęcia dziedziny i przeciwdziedziny:

$$y = \delta(x) \ \equiv\ \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle z, u\rangle \in x))$$

$$y = \rho(x) \;\equiv\; \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle u, z\rangle \in x)).$$

Definiujemy własność „być funkcją różnowartościową”:

$$\mathrm{In}(x) \;\equiv\; \mathrm{Fn}(x) \wedge \forall y \forall z \forall u \forall v(((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle z, v\rangle \in x) \wedge u = v) \rightarrow y = z).$$

Wreszcie, własność „być funkcją różnowartościową z y na z” definiujemy następująco:

$$\mathrm{Bi}(x, y, z) \;\equiv\; \mathrm{In}(x) \wedge (\delta(x) = y \wedge \rho(x) = z).$$

- (b) Definiujemy relacje inkluzji oraz inkluzji właściwej:

$$x \subseteq y \;\equiv\; \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$

$$x \subset y \;\equiv\; x \subseteq y \wedge \neg x = y.$$

Definiujemy własność „być zbiorem potęgowym zbioru x”:

$$y = \wp(x) \;\equiv\; \forall z(z \in y \equiv z \subseteq x).$$

Fakt, że zbiory y oraz z są równoliczne ma zapis następujący:

$$\exists x \; \mathrm{Bi}(x, y, z).$$

Wtedy twierdzenie Cantora, głoszące, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów otrzymuje zapis następujący:

$$\neg \exists x \exists y \; \mathrm{Bi}(x, y, \wp(y)).$$

- (c) Definiujemy zbiór pusty oraz operację sumy zbiorów:

$$x = \emptyset \;\equiv\; \forall y \neg y \in x$$

$$z = x \cup y \;\equiv\; \forall u(u \in z \equiv (u \in x \vee u \in y)).$$

Definiujemy liczby porządkowe oraz graniczne liczby porządkowe:

$$\mathrm{Ord}(x) \;\equiv\; (\forall y \forall z((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in x) \wedge \forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x) \rightarrow (z \in y \vee y = z \vee y \in z)))$$

$$\mathrm{Lim}(x) \;\equiv\; ((\mathrm{Ord}(x) \wedge \neg x = \emptyset) \wedge \forall y \neg x = y \cup \{x\}).$$

Definiujemy najmniejszą graniczną liczbę porządkową ω:

$$x = \omega \;\equiv\; (\mathrm{Lim}(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg \mathrm{Lim}(y))).$$

Definiujemy własność „być zbiorem przeliczalnym”:

$$\mathrm{Ctb}(x) \;\equiv\; \exists y \; \mathrm{Bi}(y, x, \omega).$$

Definiujemy własność „być zbiorem nieskończonym”:

$$\mathrm{Inf}(x) \;\equiv\; \exists y \exists z \; (z \in \wp(x) \wedge \mathrm{Bi}(y, x, z)).$$

Wreszcie, definiujemy własność „być zbiorem nieprzeliczalnym”:

$$\mathrm{Uct}(x) \;\equiv\; \mathrm{Inf}(x) \wedge \neg \; \mathrm{Ctb}(x).$$

Zdanie *Istnieje zbiór nieprzeliczalny* ma zatem postać:

$$\exists x \; \mathrm{Uct}(x).$$

Zwróćmy uwagę, że w definicji własności „być zbiorem nieprzeliczalnym” piszemy, że nie istnieje funkcja ustalająca równoliczność pewnych zbiorów.

17.5.2.

- (a) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
  - $C = \{\{\{1, 2\}, 3\}, 4\}$.

  Mamy wtedy: $A \in B$, $B \in C$ oraz $A \notin C$.

- (b) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
  - $C = \{\{1, 2\}, 4\}$.

  Mamy wtedy: $A \in B$, $B \neq C$ oraz $A \in C$.

- (c) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \subseteq B$, $B \in C$ oraz $A \in C$.

17.5.3.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A, B oraz C takie, że:
  - $A \subseteq B$
  - $B \cap C = \emptyset$
  - $A \cap C \neq \emptyset$.

  Z ostatniej nierówności otrzymujemy, że istnieje $x \in A \cap C$, czyli $x \in A$ oraz $x \in C$. Skoro $A \subseteq B$, to $x \in B$. Ponieważ $B \cap C = \emptyset$, to $x \notin C$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to $A \cap C = \emptyset$, dla dowolnych zbiorów A, B oraz C.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A oraz B takie, że:
  - $A = A \cap B$
  - $A \nsubseteq B$.

  Z drugiego z powyższych warunków otrzymujemy, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \notin B$. Stąd i z warunku pierwszego, skoro $x \in A$ oraz $A = A \cap B$, to $x \in A \cap B$, czyli także $x \in B$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A = A \cap B$, to $A \subseteq B$, dla dowolnych zbiorów A oraz B.

- (c) Dla dowodu, że produkt kartezjański dowolnej niepustej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ zbiorów niepustych jest niepusty wystarczy skorzystać z pewnika wyboru: wybieramy po jednym elemencie a_i z każdego ze zbiorów A_i. Wtedy ciąg $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ jest elementem produktu kartezjańskiego rodziny $\{A_i : i \in I\}$.

17.5.4.

- (a) Przypominamy, że różnica symetryczna zbiorów A i B zdefiniowana jest wzorem:

$$A \div B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

  Operacja ta jest łączna, tzn.: $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$, można więc pisać $A \div B \div C$ w miejsce $A \div (B \div C)$ lub $(A \div B) \div C$. Mamy:

  - $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$
  - $A - B = A \div (A \cap B)$.

- (b) Niech zbiór C otrzymany będzie ze zbiorów A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$. Liczbę zastosowań operacji $\cap$ i $-$ potrzebnych do otrzymania C z A i B nazwiemy *wysokością* zbioru C. Przez indukcję po wysokości zbioru C pokażemy, że C jest podzbiorem albo A albo B.

  Jeśli wysokość C wynosi 0, to $C = A$ lub $C = B$ i twierdzenie jest udowodnione.

  Niech C ma wysokość $n+1$ i załóżmy, że twierdzenie zostało udowodnione dla wszystkich zbiorów o mniejszej wysokości. Wtedy $C = D \cap E$ lub $C = D - E$ dla pewnych zbiorów D i E, których wysokość jest mniejsza niż $n + 1$.

  W obu przypadkach $C \subseteq D$, a z założenia indukcyjnego D jest podzbiorem albo A, albo B. Zatem również C jest podzbiorem albo A, albo B.

  Tak więc, z A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$ otrzymać można tylko podzbiory A lub podzbiory B. Ale $A \cup B$ nie zawsze jest podzbiorem A lub podzbiorem B. Stąd, operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ i różnicy $-$.

17.5.5.

- (a) Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

  - $x(R \circ S)^{-1}y$
  - $y(R \circ S)x$
  - $\exists z\ (yRz \wedge zSx)$
  - $\exists z\ (zSx \wedge yRz)$
  - $\exists z\ (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
  - $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

  Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

- (b) Jeśli R jest relacją identyczności, to oczywiście jest relacją równoważności, a także jest częściowym porządkiem (bo jest zwrotna i przechodnia, a następnik implikacji charakteryzującej warunek antysymetrii jest zawsze spełniony, więc R jest również antysymetryczna).

  Z drugiej strony, skoro R jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem, to ponieważ R jest zarazem symetryczna i antysymetryczna, to dla dowolnych x oraz y, z $R(x, y)$ otrzymujemy $x = y$. Ponieważ R jest w dodatku zwrotna, więc R musi być relacją identyczności.

- (c) Przypominamy, że:

  - operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
  - jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R, R_1 i R_2
  - relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
  - relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
  - jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.

Niech teraz R_1 i R_2 będą relacjami równoważności.
Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.
Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.
Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.
Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1.

- (a) $\boxminus(\boxplus(x, y)) \doteq \boxtimes(\boxminus(x), \boxminus(y))$.
- (b) Zbiór I elementów algebry Boole'a jest jej ideałem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \wedge y \in I) \rightarrow \boxplus(x, y) \in I)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \wedge y \leqslant x) \rightarrow y \in I)$.
- (c) Zbiór F elementów algebry Boole'a jest jej filtrem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \wedge y \in F) \rightarrow \boxtimes(x, y) \in F)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \wedge x \leqslant y) \rightarrow y \in F)$.

17.6.2. Niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ wraz z operacjami:

- $\boxplus(x, y) = \max\{x, y\}$
- $\boxtimes(x, y) = \min\{x, y\}$
- $\boxminus(x) = 1 - x$,

gdzie jedynką algebry jest 1, a jej zerem jest 0. Wtedy:

- (a) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera atomów.
- (b) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera koatomów.
- (c) Porządek algebry $\mathfrak{B}$ jest liniowy.

17.6.3.

- (a) Przez różnicę elementów x oraz y rozumiemy element $\boxtimes(x, \boxminus(y))$. Oto dowód (w drugiej aksjomatyce), że kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y, czyli że zachodzi: $\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$:

1.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \boxplus(y, \boxminus(y)))$	aksjomat B_2^7
2.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \triangle)$	1, aksjomat B_2^1
3.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(y, x)$	2, aksjomat B_2^2
4.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(x, y)$	3, aksjomat B_2^6
5.	$\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$	4, symetryczność identyczności.

- (b) Mamy pokazać, że dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y, czyli że: $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

  Po pierwsze, przypomnijmy, że następujące warunki są równoważne:

  - (1) $\boxtimes(x, y) = x$
  - (2) $\boxplus(x, y) = y$.

  Po drugie, zauważmy, że zachodzi implikacja:

  (3) jeśli $\boxtimes(x, z) = \triangle$ oraz $\boxplus(x, z) = \triangledown$, to $z = \boxminus(x)$.

  Istotnie, następujące dwa ciągi równości, wraz z (1) oraz (2) uzasadniają (3):

$$z = \boxplus(\triangle, z) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), z) = \boxtimes(\boxplus(x, z), \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\triangledown, \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\boxminus(x), z).$$

$$z = \boxtimes(\triangledown, z) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), z) = \boxplus(\boxtimes(x, z), \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\triangle, \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\boxminus(x), z).$$

  Pokażemy teraz, że:

  - (4) $\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \triangle$
  - (5) $\boxplus(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \triangledown$.

  Wtedy, na mocy (3), (4) oraz (5) otrzymamy poszukiwaną równość $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

  Dowód (4) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(x)), \boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxminus(y))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(y, x), \boxminus(x)), \boxtimes(x, \boxtimes(y, \boxminus(y)))) = \\
&\boxplus(\boxtimes(y, \boxtimes(x, \boxminus(x))), \boxtimes(x, \triangle)) = \boxplus(\boxtimes(y, \triangle), \triangle) = \\
&\boxplus(\triangle, \triangle) = \\
&\triangle.
\end{aligned}$$

  Dowód (5) jest następującym ciągiem równości:

$$\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x, y), \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(x, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y)))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(\boxplus(x, \boxminus(x)), \boxminus(y)), \boxplus(y, \boxplus(\boxminus(y), \boxminus(x)))) = \\
&\boxtimes(\boxplus(\triangledown, \boxminus(y)), \boxplus(\boxplus(y, \boxminus(y)), \boxminus(x))) = \\
&\boxtimes(\triangledown, \boxplus(\triangledown, \boxminus(x))) = \\
&\boxtimes(\triangledown, \triangledown) = \\
&\triangledown.
\end{aligned}$$

17.6.4.

- (a) Zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem rozważanej algebry.
- (b) Atomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory jednoelementowe. Koatomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory, których dopełnienia są jednoelementowe.

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1.

- (a) Wybieramy predykaty:
  - $P(x)$ — x jest prawdą
  - $F(x)$ — x jest fałszem
  - $B(x)$ — x jest piękne
  - $U(x)$ — x jest wstrętne.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Są wstrętne prawdy i piękne fałsze* jest następująca:

  $$\exists x\ (U(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (B(x) \wedge F(x)).$$

- (b) Wybieramy predykaty:
  - $K(x)$ — x jest kobietą
  - $M(x)$ — x jest mężczyzną
  - $N(x)$ — x może nawiązać umowę o pracę
  - $R(x)$ — x może rozwiązać umowę o pracę.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę* jest następująca:

  $$\forall x\ ((K(x) \vee M(x)) \rightarrow (N(x) \wedge R(x))).$$

  Zwróć uwagę, że w powyższym przykładzie słowu „i” odpowiada alternatywa, a słowu „lub” odpowiada koniunkcja.

- (c) Mamy tu następujące predykaty:
  - $P(x, y, u, v)$ — z x do y jest dalej niż z u do v
  - $Q(x)$ — x jest miejscowością
  - $R(x, y)$ — x jest niewiększa od y
  - $S(x)$ — x jest wioską w Japonii.

  Mamy ponadto dwie stałe indywiduowe: a — denotującą Kutno oraz b — denotującą Paryż. Struktura składniowa zdania *Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii* jest zatem następująca:

  $$\forall x \forall y\ (((Q(x) \wedge S(y)) \wedge \forall z\ (S(z) \rightarrow R(y, z))) \rightarrow P(a, x, b, y)).$$

- (d) Mamy tu jeden predykat dwuargumentowy: $P(x, y)$ — x myśli o y. Mamy ponadto jedną stałą indywiduową a, której denotacją jest wypowiadający rozważane zdanie. Trzeba również użyć predykatu identyczności $\doteq$. Struktura składniowa zdania *Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie* jest zatem następująca:

  $$\forall x \forall y\ (P(x, y) \rightarrow x \doteq y) \wedge P(a, a).$$

- (e) Załóżmy, że predykatem istotnym dla rekonstrukcji budowy składniowej tego zdania jest:

  – $P(x, y, z, t)$ — x ufa y w sprawie z w czasie t.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa* jest następująca:

$$\neg\exists x\exists y\exists z\exists t\ P(x, y, z, t).$$

  Można też proponować inne rekonstrukcje logiczne tego zdania, wprowadzając dodatkowo predykaty dla oznaczania własności: „być momentem", „być sprawą", „być osobą", itd. W istocie, nie zawsze jest jasne, kiedy w języku naturalnym mamy do czynienia z predykatem prostym („nierozkładalnym" na inne predykaty).

17.7.2.

- (a) *Ktokolwiek nie kona, rzężąc, pocąc się i mocząc przy wdychaniu oparów rtęci, ten świruje jarząbka.*
- (b) *Jeśli wszyscy są bezrobotni, to o ile ktoś jest bogatszy od wszystkich, to co najmniej jedna osoba nie jest odpowiedzialna za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.*
- (c) *Dla dowolnych pięciu (punktów), jeśli Drugi leży między Pierwszym a Trzecim, a Trzeci leży między Czwartym a Piątym, to istnieje Szósty, leżący między Pierwszym a Czwartym taki, że Drugi leży między Piątym a Szóstym.*

17.7.3.

- (a) To nie jest prawda logiczna. Nie jest to też prawda faktualna. Jak dotąd, (co najmniej) jeden z papieży był kobietą.
- (b) Najpierw trzeba ustalić semantykę zwrotu *dawno, dawno temu*. Może to oznaczać np. milion lat temu, albo sto lat temu, itp. Może też oznaczać np. rok przed twoim urodzeniem — zauważ, że rok przed twoim urodzeniem to dla ciebie przeszłość *nieskończenie* odległa, podobnie jak minuta po twoim zgonie będzie dla ciebie przyszłością nieskończenie odległą. Dość żartów. Niech *dawno, dawno temu* znaczy np. *milion lat i dwa tygodnie* temu. Po pierwsze, wiadomo, że istnieją liczby niewymierne, a więc nie wszystkie liczby są wymierne. Po drugie *istnienie* liczb jest niezależne od czasu. Tak więc, rozważane zdanie nie jest ani prawdą logiczną, ani prawdą faktualną. Oczywiście inaczej rzecz się ma np. ze zdaniem stwierdzającym, że *3000 lat temu sądzono, że wszystkie liczby są wymierne*. To zdanie zawiera jednak modalność (doksastyczną) i jego analiza wykracza poza Elementarz Logiczny.
- (c) Ta koniunkcja jest fałszem logicznym, choć każdy z jej członów z osobna może być prawdą faktualną. Nikt nie jest (biologicznie) starszy od własnej matki.
- (d) Przypomnijmy:

  – ODWIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie wcześniejszym t'.*
  – WIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie późniejszym t'.*

  Tak więc, zdanie *Prawdy wieczne są odwieczne* nie jest prawdą logiczną. Łatwo zbudować zdanie, wyrażające prawdę wieczną, która nie jest odwieczna.
- (e) Temu zdaniu nie można przypisać wartości logicznej. Termin *lekko spłaszczony* nie jest terminem ostrym.

Wykorzystywana literatura

Batóg, T.: *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003 (strony 109–112 oraz 238–261).

Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L.: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004 (strony 85–89 oraz 95–96, a zwłaszcza przypis tłumacza na stronach 87–88).

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl