Metalogika (4)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Paradygmat semantyczny

Kolejne, po algebraicznym, ujęcie metalogiki to rozważanie systemów logicznych jako par złożonych z języka oraz (aksjomatycznie określonej) relacji spełniania. Klasyczne przykłady logik abstrakcyjnych rozważanych w tym ujęciu to m.in.:

- logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami;
- logiki infinitarne.

W tym wykładzie podamy definicję logik abstrakcyjnych i nieco przykładów. Wykład następny, w zależności od życzeń słuchaczy, będzie dotyczył:

- Twierdzeń Lindströma, lub
- zastosowań uogólnionych kwantyfikatorów (w lingwistyce).

Czym są stałe logiczne?

Do stałych logicznych logiki klasycznej zaliczamy:

- funktory prawdziwościowe;
- kwantyfikatory;
- (czasami) predykat identyczności.

- Naturalne jest jednak rozważanie systemów logicznych, w których występują inne jeszcze symbole traktowane jako stałe logiczne.
- Należy wtedy ustalić denotacje tych symboli.
- Dodanie nowych stałych logicznych (do języka logiki klasycznej) może zwiększyć „moc wyrażania" otrzymanej logiki.

Definicje

Przez ***logikę abstrakcyjną*** rozumiemy każdą parę uporządkowaną $\mathcal{L} = (L, \models^{\mathcal{L}})$, spełniającą następujące warunki:

- L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór $L(\sigma)$, zwany zbiorem ***σ-zdań*** logiki $\mathcal{L}$. [Uwaga: w niektórych przypadkach trzeba rozważać *klasy* zamiast zbiorów.]
- Jeśli $\sigma \subseteq \tau$, to $L(\sigma) \subseteq L(\tau)$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to dla pewnej σ mamy: $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$.
- *Warunek izomorfizmu.* Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ oraz $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.
- *Warunek reduktu.* Jeśli $\tau \subseteq \sigma$, $\varphi \in L(\sigma)$ oraz $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau \models^{\mathcal{L}} \varphi$

Definicje

Przypominamy, że $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ jest τ-reduktem struktury $\mathfrak{A}$, czyli strukturą powstającą z $\mathfrak{A}$ poprzez uwzględnienie tylko interpretacji wszystkich symboli z τ (a więc, gdy $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\tau \subseteq \sigma$, to w $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ uwzględniamy tylko interpretacje symboli z τ, pomijając interpretacje symboli z $\sigma - \tau$).

Dla dowolnej logiki abstrakcyjnej $\mathcal{L}$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ niech:
$Mod^\sigma_\mathcal{L}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma \text{ oraz } \mathfrak{A} \models^\mathcal{L} \varphi\}$
(jeśli σ będzie jasna z kontekstu, będziemy pisać $Mod_\mathcal{L}(\varphi)$).

Niech $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oznacza logikę pierwszego rzędu. W tym przypadku funkcja L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór wszystkich zdań pierwszego rzędu w których występują symbole z σ. Dla logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ będziemy używali relacji $\models$, bez indeksu, pokrywającej się z relacją spełniania znaną z wykładu *Semantyka KRP*.

Moc wyrażania logiki

Używaliśmy dotąd w sposób nieformalny wyrażenia: „logika $\mathcal{L}_1$ ma mniejszą moc wyrażania niż logika $\mathcal{L}_2$”. Można mu nadać precyzyjny sens (w terminach semantycznych):

- Piszemy $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej sygnatury σ oraz każdego $\varphi \in L_1(\sigma)$ istnieje $\psi \in L_2(\sigma)$ takie, że: $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_1}(\varphi) = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_2}(\psi)$. Mówimy wtedy, że $\mathcal{L}_1$ ma ***moc wyrażania nie większą niż*** $\mathcal{L}_2$.
- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$, ale nie zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_2$ ma ***moc wyrażania większą niż*** $\mathcal{L}_1$.
- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ oraz zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_1$ mają ***taką samą moc wyrażania***.

Logiki abstrakcyjne

W tym wykładzie ograniczamy się do przykładów. W wykładzie następnym podane zostaną niektóre podstawowe własności logik abstrakcyjnych (wykorzystywane m.in. w Twierdzeniach Lindströma).

Interesujące są nie całkiem ogólne logiki abstrakcyjne, lecz raczej te, o których składni możemy coś przesądzić. W szczególności, zwykle rozważa się logiki o dobrych własnościach Boolowskich (rozważane niżej przykłady mają te własności).

Ograniczymy się do wybranych własności semantycznych.

Trochę historii

Andrzej Mostowski rozważał w 1957 roku tzw. *kwantyfikatory numeryczne* Q_α, gdzie α jest liczbą porządkową. Znaczenie formuły $Q_\alpha x\varphi(x)$ określa się następująco:

- $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{M}) : \mathfrak{M} \models \varphi(x)[a]\}$ ma moc nie mniejszą od $\aleph_\alpha$.

W szczególności, Q_0 jest kwantyfikatorem, za pomocą którego wyrazić można pojęcia: *nieskończenie wiele* oraz *skończenie wiele*, ponieważ formuła $Q_0 x\varphi(x)$ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $dom(\mathfrak{M})$ istnieje co najmniej $\aleph_0$ obiektów, spełniających formułę $\varphi(x)$. Jak pamiętamy z elementarnego kursu logiki, pojęć tych nie można wyrazić w klasycznej logice pierwszego rzędu.

Trochę historii

Mostowski formułuje pewne warunki, które muszą być spełnione, aby tak wprowadzone pojęcie miało porządną (i zamierzoną) semantykę. Do warunków takich należy to, że jeśli $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x \varphi(x)$ oraz struktury $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ są izomorficzne, to zachodzi również $\mathfrak{N} \models Q_\alpha x \varphi(x)$. Odpowiada to intuicjom związanym z kwantyfikatorem (numerycznym): ma on charakteryzować jedynie *liczbę* obiektów, nie przesądzając niczego o ich jakości.

Kwantyfikatory numeryczne Mostowskiego rozumieć można w sposób relacyjny: kwantyfikatorem (jednoargumentowym) jest rodzina Q par zbiorów (U, X), gdzie $X \subseteq U$ oraz jeśli $(U, X) \in Q$ i $|X| = |Y|$, $|U - X| = |V - Y|$, to $(V, Y) \in Q$. Symbol $|X|$ oznacza, przypomnijmy, moc zbioru X. Dla przykładu:

$$Q_0 = \{(U, X) : |X| \geqslant \aleph_0\}.$$

Trochę historii

Mostowski udowodnił, że $L_{\omega\omega}(Q_0)$ nie jest (efektywnie) aksjomatyzowalna. Niech θ będzie zdaniem:

$$\forall x \neg Q_0 y\ (y < x)$$

języka $L_{\omega\omega}(Q_0)$ i niech Π będzie aksjomatyką arytmetyki Peana (w języku $L_{\omega\omega}$), a $\mathfrak{N}_0$ modelem standardowym tej arytmetyki. Wtedy dla każdego zdania ϕ języka $L_{\omega\omega}$ mamy:

- $\mathfrak{N}_0 \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathfrak{M}$, jeśli $\mathfrak{M} \models \Pi$, to $\mathfrak{M} \models (\theta \rightarrow \phi)$.

Ponieważ, jak wiadomo, nie ma efektywnej procedury arytmetycznej dla rozstrzygania lewej strony tej równoważności, więc nie istnieje pełna metoda dowodowa dla $L_{\omega\omega}(Q_0)$.
Postawiony przez Mostowskiego problem, czy $L_{\omega\omega}(Q_1)$ jest aksjomatyzowalna został rozwiązany przez Keislera.

Trochę historii

Mostowski podał także teorio-modelową charakterystykę kwantyfikatorów pierwszego rzędu — dowolne rozszerzenie logiki pierwszego rzędu otrzymane przez dodanie jednoargumentowego kwantyfikatora, które spełnia warunek:

- każde zdanie, które ma model nieskończony, ma też model każdej mocy nieskończonej

jest równoważne z logiką pierwszego rzędu.

Uogólnienie ujęcia Mostowskiego podano w pracach Lindströma (1966, 1969), gdzie rozważa się nie tylko kwantyfikatory jednoargumentowe, lecz również wieloargumentowe:

- (Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$* nazywamy dowolną n-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.

Trochę historii

Relacyjne ujęcie Lindströma pozwala na badanie bardzo szerokiej klasy kwantyfikatorów.

W 1959 roku Leon Henkin rozważał kwantyfikatory rozgałęzione.

Dalszych uogólnień dokonał w latach siedemdziesiątych XX wieku Jon Barwise. Rozważał m.in. rozgałęzione prefiksy, w których występowały uogólnione kwantyfikatory (w sensie Lindströma).

W dodatku Uogólnione kwantyfikatory pokazujemy niektóre zastosowania tej aparatury pojęciowej w opisie semantyki języków etnicznych.

Składnia

Przez L_Q oznaczać będziemy język KRP z kwantyfikatorem Q. Interpretacje L_Q wyznaczone będą przez semantyczną charakterystykę Q. Dla języka L_Q z ustaloną interpretacją semantyczną Q będziemy też używać terminu „logika L_Q". Niech $\aleph_\alpha$ będzie α-tą mocą nieskończoną (gdzie α jest liczbą porządkową). Zamiast $\aleph_0$ piszemy czasem ω. Jeśli κ, λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to przez $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy język w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej niż κ oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ. Tak więc, $L_{\omega\omega}$ to język KRP, klasycznej logiki pierwszego rzędu. Przez $L_{\infty\lambda}$ rozumiemy język, w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ.

Poniżej podajemy, bez zamiaru systematyczności wykładu, wybrane fakty dotyczące semantyki niektórych uogólnionych kwantyfikatorów.

Składnia języków z uogólnionymi kwantyfikatorami

Dodanie symbolu uogólnionego kwantyfikatora do języka KRP zmusza do odpowiedniej definicji zbioru formuł:

- Formuły atomowe są formułami.
- Kombinacje Boolowskie formuł są formułami.
- Formuła poprzedzona kwantyfikatorem ogólnym $\forall x$ lub szczegółowym $\exists x$ jest formułą.
- Jeśli α jest formułą, a Q symbolem uogólnionego kwantyfikatora, to $Qx\ \alpha$ jest formułą.
- Nie ma innych formuł niż te, które można otrzymać za pomocą powyższych warunków.

W przypadku kwantyfikatorów dołączanych do par formuł dokonujemy oczywistej modyfikacji tej definicji.

Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele''

Wyrażenie $Q_0 x\, \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\alpha(x)$.
Semantyka Q_0 wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_0 x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieskończony.
Oto niektóre własności L_{Q_0}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu.
  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\; y < x$.
- W L_{Q_0} nie zachodzi górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- L_{Q_0} nie jest aksjomatyzowalna.

Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele"

- W L_{Q_0} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_0} zachodzi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1}x\,\alpha(x), \exists^{\geqslant 2}x\,\alpha(x), \ldots}{Q_0 x\,\alpha(x)}.$$

- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w L_{Q_0} bez modeli skończonych jest zupełna.
- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w L_{Q_0}.
- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\,\alpha(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n}x\,\alpha(x).$$

Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele''

Wyrażenie $Q_1 x\, \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieprzeliczalnie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_1 wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_1 x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieprzeliczalny.

Ograniczamy się do interpretacji nieprzeliczalnych.
Tak jak w L_{Q_0} definiowalne jest pojęcie skończoności, tak w L_{Q_1} definiowalne jest pojęcie przeliczalności.

Oto niektóre własności L_{Q_1}:

Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele''

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w L_{Q_1}.
- Górne twierdzenie Löwenheima-Skolema nie zachodzi w L_{Q_1}. Dolne twierdzenie LS zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_1}.
- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.

Kwantyfikator Changa

Wyrażenie $Q_c x \, \alpha(x)$ czytamy: istnieje tyle x takich, że $\alpha(x)$ ile jest obiektów w całym uniwersum.
Semantyka Q_c wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_c x \, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ ma taką samą moc, jak zbiór $dom(\mathfrak{A})$.
Oto niektóre własności L_{Q_c}:

- W modelach mocy $\aleph_1$ kwantyfikator Q_c ma taką samą interpretację, jak kwantyfikator Q_1.
- Teoria gęstych porządków liniowych nie jest zupełna w L_{Q_c}.

Kwantyfikator Changa

- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_c}. [Teoria ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów $\exists$ i Q_c.]
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model, którego moc jest liczbą kardynalną następnikową, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model mocy $\aleph_0$, to ma modele każdej mocy nieskończonej.
- Niech Val_1 będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_1$ i niech Val_ω będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_\omega$. Wtedy (przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum):
    - Val_1 oraz Val_ω są rekurencyjnie przeliczalne.
    - $Val_1 \cap Val_\omega$ jest zbiorem wszystkich L_{Q_c}-tautologii.

Kwantyfikator „jest więcej A niż B''

Wyrażenie $Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ czytamy: jest więcej x takich, że $\alpha(x)$ niż x takich, że $\beta(x)$.

Semantyka Q_M wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta[a]\}$.

Oto niektóre własności L_{Q_M}:

Kwantyfikator „jest więcej A niż B"

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_M} z dokładnością do izomorfizmu.
- L_{Q_M} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_M} nie zachodzi: ani dolne ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, ani twierdzenie o zwartości.
- Q_0 oraz Q_c są definiowalne w L_{Q_M}.
- L_{Q_M} jest logiką o znacznej „mocy wyrażania": można w niej sformułować np. zdanie, które ma model wtedy i tylko wtedy, gdy fałszywa jest uogólniona hipoteza kontinuum.

Kwantyfikator Henkina

Wyrażenie $Q_H(x, y, u, v)\alpha(x, y, u, v)$ jest skrótem dla formuły z następującym częściowo uporządkowanym prefiksem kwantyfikatorowym:

$$\begin{array}{lll} \forall x \text{——} \exists y & \searrow & \\ & & \alpha(x, y, u, v) \\ \forall u \text{——} \exists v & \nearrow & \end{array}$$

Semantyka dla tego kwantyfikatora wyznaczona jest przez warunek: $\mathfrak{A} \models Q_H xyuv\, \alpha(x, y, u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje f oraz g (określone na $dom(\mathfrak{A})$ i o wartościach w $dom(\mathfrak{A})$) takie, że $\mathfrak{A} \models \alpha(x, f(x), u, g(u))$.

Oto niektóre własności L_{Q_H}:

Kwantyfikator Henkina

- Kwantyfikatory Q_0, Q_c oraz Q_M są definiowalne w L_{Q_H}.
- L_{Q_H} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_H} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_H} nie zachodzi ani dolne, ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że również L_{Q_H} ma znaczną „moc wyrażania". Rozważa się wiele innych kwantyfikatorów rozgałęzionych.

Kwantyfikatory: Härtiga i Reschera

Semantyka dla kwantyfikatora Härtiga Q_I wyznaczona jest przez warunek: $\mathfrak{A} \models Q_I x\ \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moce zbiorów

- $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha\ [a]\}$
- $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta\ [a]\}$

są równe (jest tyle samo obiektów o własności α co tych o własności β).

Semantyka dla kwantyfikatora Reschera Q_R wyznaczona jest przez warunek: $\mathfrak{A} \models Q_I x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha\ [a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \neg\alpha\ [a]\}$ (własność α ma więcej obiektów niż własność $\neg\alpha$).

Kwantyfikator większości

Semantyka dla kwantyfikatora większości Q_w wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_w x\, \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha \wedge \beta\ [a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha \wedge \neg\beta\ [a]\}$.

Formuła $Q_w x\, \alpha(x)\beta(x)$ jest zatem prawdziwa w modelu $\mathfrak{A}$ dokładnie wtedy, gdy jest więcej obiektów w $dom(\mathfrak{A})$ mających obie własności α i β od obiektów mających własność α, a nie mających własności β.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Wyrażenie $Q_m x\, \alpha(x)$ czytamy: obiekty x takie, że $\alpha(x)$ tworzą większość w uniwersum.
Aby podać rozsądną semantykę dla Q_m trzeba oczywiście nadać precyzyjne znaczenie terminowi „większość". Nie interesuje nas przy tym „lokalne" rozumienie tego terminu, czyli np. kwantyfikator większości Q_w omówiony przed chwilą. Teraz chodzi o „większości" w całym uniwersum.

Są różne możliwości ustalenia semantyki dla takiego kwantyfikatora. Podamy jedną z nich, proponowaną przez Szrejdera i Vilenkina.
Niech X będzie zbiorem niepustym i niech $\mathfrak{B}(X)$ będzie algebrą Boole'a jego (niekoniecznie wszystkich) podzbiorów taką, że $X \in \mathfrak{B}(X)$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Rodzinę $\mathbb{M}(X)$ elementów $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy ***systemem większości***, jeśli:

- (1) $\mathbb{M}(X) \neq \emptyset$
- (2) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $A \subseteq B$, to $B \in \mathbb{M}(X)$
- (3) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to dopełnienie A (w sensie algebry $\mathfrak{B}(X)$) nie należy do $\mathbb{M}(X)$.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to układ $(X, \mathbb{M}(X))$ nazywamy ***przestrzenią z większością***. Jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to A nazywamy ***większością*** w X.
Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to oczywiście:

- $\emptyset \notin \mathbb{M}(X)$, $X \in \mathbb{M}(X)$
- jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $B \in \mathbb{M}(X)$, to $A \cap B \neq \emptyset$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Przestrzenie z większością mogą być otrzymane np. wtedy, gdy na X jest zadana unormowana skończenie addytywna miara μ, dla której $\mathfrak{B}(X)$ jest rodziną zbiorów mierzalnych, a systemem większości jest podrodzina rodziny $\mathfrak{B}(X)$, której elementy mają miarę nie mniejszą od jakiegoś ustalonego progu $\tau \geqslant \frac{1}{2}$. Jednak istnieją też przestrzenie z większością, które nie mogą być przez taką miarę określone.
Pomijamy tu bardziej szczegółowy opis przestrzeni z większością. Dodajmy jedynie, że stanowią one prostą i dość adekwatną aparaturę pojęciową dla opisu np. systemów podejmowania decyzji (przez grupy ekspertów).

Przestrzenie z większością dostarczają semantyki dla ***kwantyfikatora większości*** Q_m:
$\mathfrak{A} \models Q_m x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większością w $dom(\mathfrak{A})$, dla pewnego systemu większości $\mathbb{M}(dom(\mathfrak{A}))$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Kwantyfikator Q_m może być opisany aksjomatycznie:

- $\forall x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \alpha(x)$
- $Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow \neg Q_m x\, \neg\alpha(x)$
- $\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \beta(x))$.

Można pokazać, że ta aksjomatyka jest trafna i pełna względem podanej wyżej semantyki dla Q_m.

Pierwszą pracą dotyczącą tego kwantyfikatora jest (o ile nam wiadomo): Vilenkin, N.Ya., Shreider, Yu.A. 1976. Majority spaces and „majority'' quantifier. *Semiotics and Informatics.* The Eight Volume. VINITI, Moscow.

Wzajemne zależności

Niektóre z wymienionych wyżej logik są uporządkowane następująco pod względem mocy wyrażania (strzałka oznacza zachodzenie relacji $<$):

$$\begin{tikzcd} & L_{Q_0} \arrow[r] & L_{Q_I} \arrow[dr] & & \\ L_{\omega\omega} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & L_{Q_M} \arrow[r] & L_{Q_H} \\ & L_{Q_R} \arrow[r] & L_{Q_w} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Jeśli ograniczamy się tylko do modeli skończonych, to $L_{Q_w} \sim L_{Q_M}$.

Logika L_{Q_M} jest równoważna logice z kwantyfikatorami: Q_0 ***oraz*** Q_w.

Logiki infinitarne

Gdy mówimy o logice, że jest infinitarna, to możemy mieć na myśli np. to, że:

- rozważany język dopuszcza formuły nieskończenie długie;
- dopuszcza się nieskończenie długie dowody;
- stosuje się niefinitarne reguły wnioskowania (np. ω-regułę).

Oczywiście, logiki takie mają znaczną moc wyrażania, np.:

- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można model standardowy arytmetyki Peana.
- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można klasę wszystkich zbiorów skończonych.

Trochę historii

Wedle G. H. Moore'a (Moore 1995, 109) pierwsze użycia formuł nieskończonych w logice znajdujemy u George'a Boole'a w *Mathematical Analysis of Logic* (1847), gdzie dowolne funkcje boolowskie rozwijane są w formalne szeregi MacLaurina. Także w *Laws of Thought* Boole stosuje takie konstrukcje.
W 1885 roku formuł nieskończonych używa Peirce, wprowadzając swoją symbolikę dla kwantyfikatorów:
Here ... we may use $\sum$ *for* some, *suggesting a sum, and* $\prod$ *for* all, *suggesting a product. Thus* $\sum_i x_i$ *means that* x *is true of some of the individuals denoted by* i *or* $\sum_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ *etc. In the same way,* $\prod_i x_i$ *means that* x *is true of all these individuals, or* $\prod_i x_i = x_i x_j x_k$ *etc. ...* $\sum_i x_i$ *and* $\prod_i x_i$ *are only* similar *to a sum and product; they are not strictly of that nature, because the individuals of the universe may be innumerable.*

Peirce 1885: 194–195; cytat za Moore 1995: 110.

Trochę historii

Schröder w swoim monumentalnym dziele *Vorlesungen über die Algebra der Logik* z 1885 roku również czyni użytek z nieskończenie długich formuł. Niepublikowane za życia notatki Schrödera zostały później opracowane przez E. Müllera i wydane w 1910 roku jako *Abriss der Algebra der Logik* — tam również znajdujemy stwierdzenia o równoważności formuł z kwantyfikatorami z nieskończonymi koniunkcjami i alternatywami.

W tradycji „algebraicznej" (nawiązującej do Peirce'a i Schrödera) piszą Leopold Löwenheim (1915) oraz Thoralf Skolem (1919, 1920, 1922). W swoim słynnym artykule z 1915 roku (zawierającym pierwsze wyniki ***meta***logiczne) Löwenheim używa nie tylko nieskończonych koniunkcji i alternatyw, lecz również nieskończonych prefiksów kwantyfikatorowych. Nadto, można twierdzić, że posługiwał się infinitarną regułą wnioskowania, uznając, że gdy nieskończona liczba zdań jest prawdziwa, to prawdziwa jest również formuła nieskończona, będąca ich koniunkcją.

Trochę historii

Protosystem, w którym pracował Löwenheim wykorzystywał więc środki typowe dla infinitarnej logiki drugiego rzędu. W uogólnieniach i rektyfikacjach wyników Löwenheima podanych przez Skolema, ten ostatni czynił istotny użytek z logiki infinitarnej. Ostatecznie, aparat pojęciowy, którego używał (w 1919 i 1920) traktujemy dziś jako systemy oznaczane przez $L_{\omega_1\omega}$ oraz $L_{\omega_1\omega_1}$ — mianowicie Skolem dopuszczał również rozważanie formuł (w swoich postaciach normalnych) z nieskończonymi prefiksami kwantyfikatorowymi (początek takiego prefiksu stanowiło *skończenie* wiele kwantyfikatorów generalnych, po których mogło następować przeliczalnie wiele kwantyfikatorów egzystencjalnych).

Definitywne zerwanie Skolema z logiką infinitarną to jego artykuł z 1922 roku, zawierający m.in. krytyczne uwagi o aksjomatycznym systemie teorii mnogości Zermela oraz (po raz pierwszy!) sformułowanie aksjomatyki dla teorii mnogości wyłącznie w języku pierwszego rzędu.

Trochę historii

G. H. Moore do prehistorii logiki infinitarnej (w nurcie algebraicznym) zalicza też pewne prace Hilberta i Lewisa. Hilbert początkowo (1905) korzystał z wyrażeń infinitarnych, następnie, do późnych lat dwudziestych XX wieku eliminował tego rodzaju wyrażenia, jednak w 1931 wprowadził infinitarną regułę wnioskowania.
Lewis, reprezentując formuły skwantyfikowane jako równoważne nieskończonym koniunkcjom i alternatywom miał nadto świadomość, że jego nieskończone wyrażenia mogą zawierać *nieprzeliczalnie* wiele symboli (Lewis 1918).

Również w drugiej z żywotnych w pierwszej połowie XX wieku tradycji, tj. tradycji wiązanej z *Principia Mathematica*, znajdujemy — u Russella, Wittgensteina oraz Ramseya — rozważania używające formuł nieskończonych.

Trochę historii

Obok krótkiej wzmianki o poglądach Zermela (z lat 1930–1935, dotyczących logiki infinitarnej) G. H. Moore zwraca uwagę na powstałe około roku 1940 pomysły Carnapa, Nowikowa, Boczwara dotyczące infinitarnych systemów logiki. Carnap rozważał m.in. infinitarne reguły wnioskowania. Na marginesie zauważmy, że wzmiankę o infinitarnej regule wnioskowania (dziś nazywanej ω-regułą) znajdujemy też w 1928 roku w podręczniku Kazimierza Ajdukiewicza *Główne zasady metodologji nauk i logiki formalnej*.

O propozycjach Carnapa wzmiankuje Abraham Robinson w swoich badaniach z początku lat pięćdziesiątych XX wieku (Robinson 1951). Nowikow rozważał, całkiem niezależnie od logików zachodnich, systemy z przeliczalnymi koniunkcjami oraz alternatywami w 1939 roku. Własnościami metalogicznymi tych rachunków zajmował się Boczwar. Prace Nowikowa i Boczwara nie zyskały akceptacji logików w latach czterdziestych (m.in. za sprawą negatywnych o nich opinii Churcha), zostały natomiast „zrehabilitowane" w latach osiemdziesiątych XX wieku przez Barwise'a, który metodami semantycznymi wykazał ich poprawność.

Trochę historii

W pracach dotyczących definiowalnych typów porządkowych Kuratowski używał kwantyfikatorów postaci *istnieje liczba naturalna n taka, że* $\varphi_n(x)$ (gdzie φ jest formułą języka predykatów pierwszego rzędu), stwierdzając, że wyrażenie takie jest semantycznie równoważne nieskończonej (przeliczalnej) alternatywie (Kuratowski 1937). Tarski zmodyfikował wtedy nieco to podejście Kuratowskiego, eliminując nieskończone alternatywy poprzez wprowadzenie stosownego predykatu od dwóch zmiennych: $P(x, n)$ równoważnego formule $\varphi_n(x)$.

Projekty logiki infinitarnej rozważał Helmer (1938). Brał pod uwagę formuły nieskończenie długie (dobrze uporządkowane ciągi symboli typu porządkowego mniejszego niż ω^2), nieskończenie długie „wyrażenia numeryczne" (kodowania liczb rzeczywistych); stosował zasadę indukcji i regułę odpowiadająca aksjomatowi ciągłości Dedekinda; formułował też analogon twierdzenia Gödla o niezupełności, przy czym rozważał podwójną niezupełność systemu: dedukcyjną i definicyjną. Na wstrzymanie badań logik infinitarnych (ok. roku 1940) decydujący wpływ miały, jak się powszechnie uważa, poglądy Gödla, propagującego standard (finitarnej) logiki pierwszego rzędu.

Trochę historii

O systematycznym rozwijaniu logik infinitarnych mówić można od połowy lat pięćdziesiątych XX wieku (do tego czasu nie było chyba *świadomości* tradycji takich badań). Stanowisko metodologiczne Tarskiego, jeśli chodzi o wykorzystywanie logik infinitarnych ulegało zmianom. W latach trzydziestych XX wieku, gdy formułował (klasyczne, akceptowane do dziś) matematyczne podstawy semantyki, odrzucał możliwość wykorzystywania nieskończonych formuł. Dwadzieścia lat później, między innymi właśnie z jego inicjatywy, rozpoczęły się intensywne badania logik infinitarnych. W 1957 roku Tarski cytuje pracę Jordan 1949, zaś w 1958 roku pracę Krasner 1938, jako poprzedzające jego własne badania logik infinitarnych z lat pięćdziesiątych (Moore 1995:109). Poszukiwano systemów logicznych mocniejszych od logiki pierwszego rzędu (której możliwości wyrażania pewnych ważnych, będących w powszechnym użyciu pojęć matematycznych są ograniczone), ale jednocześnie takich, które miałyby pożądane własności metalogiczne. Warto może zauważyć, że badania logik infinitarnych nie ograniczały się do rozważań dotyczących jedynie samych tych logik — dla przykładu, zostały one wykorzystane (1960) dla rozstrzygnięcia długo nierozwiązanego problemu, czy pierwsza liczba mocno nieosiągalna jest mierzalna.

Trochę historii

Rozpoczęte w połowie lat pięćdziesiątych XX wieku intensywne badania logik infinitarnych miały inspiracje przede wszystkim algebraiczne. W 1951 roku Robinson używa nieskończonych koniunkcji oraz alternatyw w pracach algebraicznych (np. aksjomat Archimedesa daje się przedstawić jako nieskończona alternatywa).

W latach pięćdziesiątych Tarski, Chang oraz Scott uzyskali dalsze (po pracach Stone'a i Loomisa) wyniki o reprezentacji algebr Boole'a. Henkin, z inspiracji Tarskiego, zajął się uogólnieniem twierdzeń o reprezentacji ω-wymiarowych algebr cylindrycznych i szukania odpowiadających im rozszerzeń logiki pierwszego rzędu. Wykorzystywał m.in. symbole relacyjne o nieskończonej liczbie argumentów. Uzyskał też pewne wyniki metalogiczne dotyczące tych logik infinitarnych. Według Moore'a (Moore 1995, strony 107 oraz 121), granicę między prehistorią a historią badań logik infinitarnych wyznaczają prace Henkin 1955 i Robinson 1957.

Trochę historii

Systematyczną prezentacją systemu logiki z nieskończenie długimi formułami zajmowała się Carol Karp, pisząc swoją rozprawę doktorską u Leona Henkina. Pod koniec lat pięćdziesiątych Tarski i Scott badali rachunki zdaniowe z koniunkcjami i alternatywami o długości mniejszej niż jakaś (dowolna) nieskończona regularna liczba kardynalna. W szczególności, uzyskali wyniki dotyczące pełności takich rachunków (Scott, Tarski 1957, 1958). Tarski rozważał też w tym czasie systemy logiki w dzisiejszej symbolice oznaczane jako $L_{\omega_1\omega_1}$.

Jedne z pierwszych ujęć monograficznych logik infinitarnych to klasyczne już książki: Karp 1964 (*Languages with expressions of infinite length*) oraz Dickmann 1975 (*Large infinitary languages*). Wielce istotna była też monografia Keisler 1971 (*Model theory for infinitary logic*). Z ważnych prac nieco późniejszych wspomnijmy monumentalną monografię pod redakcją Barwise'a i Fefermana: *Model Theoretic Logics*, 1985.

Języki infinitarne — składnia

W językach $L_{\kappa\lambda}$, gdzie κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi ($\lambda \leqslant \kappa$) dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej od κ oraz kwantyfikacje na ciągach zmiennych długości mniejszej od λ. W języku $L_{\kappa\lambda}$ mamy następujące symbole:

- symbole języka pierwszego rzędu L (ustalonej sygnatury);
- zbiór zmiennych zdaniowych Var mocy κ;
- symbol operacji $\bigwedge$ (nieskończonej koniunkcji).

Zbiór formuł języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy w dwóch etapach.

Języki infinitarne — składnia

Zbiór *preformuł* języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy indukcyjnie:

- każda formuła L jest preformułą;
- jeśli φ i ψ są preformułami, to $\varphi \wedge \psi$ oraz $\neg\psi$ są preformułami;
- jeśli Φ jest zbiorem preformuł mocy mniejszej od κ, to $\bigwedge \Phi$ jest preformułą;
- jeśli ψ jest preformułą, a $V \subseteq Var$ jest zbiorem zmiennych mocy mniejszej od λ, to $\exists X\ \psi$ jest preformułą;
- każda preformuła jest otrzymana przez powyższe warunki.

Pozostałe funktory prawdziwościowe wprowadzamy w zwykły sposób. Nadto:

- $\bigvee \Phi$ oznacza $\neg \bigwedge \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$
- $\forall X\ \psi$ oznacza $\neg\exists X\ \neg\psi$.

Języki infinitarne — składnia i semantyka

Przez *formułę* języka $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy preformułę zawierającą mniej niż λ zmiennych wolnych.

Pojęcia semantyczne dla $L_{\kappa\lambda}$ definiujemy tak jak dla L, z dodatkowymi warunkami:

- $\mathfrak{A}$ spełnia $\bigwedge \Phi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ spełnia φ przy wartościowaniu w, dla wszystkich $\varphi \in \Phi$;
- $\mathfrak{A}$ spełnia $\exists X\, \psi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ spełniający ψ oraz bijekcja między X i $\overrightarrow{a}$.

Pozostałe pojęcia semantyczne (prawdziwości, wynikania logicznego, itd.) definiujemy w standardowy sposób.

Moc wyrażania logik infinitarnych

Języki $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\lambda \geqslant \omega_1$ „zachowują się" podobnie jak języki drugiego rzędu.

Przez $L_{\infty\omega}$ rozumiemy język z koniunkcjami i alternatywami dowolnej długości oraz skończonymi prefiksami kwantyfikatorowymi.

- Zdanie $Q_0 x\, \psi(x)$ języka L_{Q_0} (istnieje nieskończenie wiele x o własności ψ) ma te same modele co następujące zdanie z $L_{\omega_1\omega}$: $\neg \bigvee\limits_{n\in\omega} \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x\, (\psi(x) \rightarrow (x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n))$.
- Pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne w $L_{\omega_1\omega_1}$ przez koniunkcję zdania charakteryzującego porządki liniowe i zdania: $(\forall x_n)_{n\in\omega} \exists x\, (\bigvee\limits_{n\in\omega} (x = x_n) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\omega} (x \leqslant x_n))$.

Moc wyrażania logik infinitarnych

- Predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (Twierdzenie Scotta).
- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.
- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\kappa\lambda}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi Lemat Interpolacyjny Craiga (nie zachodzi on w żadnej innej logice infinitarnej).

Logiki infinitarne

- Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema ma swój odpowiednik w $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast górne twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach; dokonuje się jednak podobnych do niego ustaleń, wykorzystując tzw. liczby Hanfa.
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge\Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny.
- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\kappa \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

Logiki infinitarne

Formuły logiki pierwszego rzędu $L_{\omega\omega}$ kodować można liczbami naturalnymi lub, co na jedno wychodzi, zbiorami dziedzicznie skończonymi, tj. elementami zbioru $H(\omega)$. Z kolei, formuły logiki $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami zbioru $H(\omega_1)$, tj. zbiorami dziedzicznie przeliczalnymi. Także dowody w $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami $H(\omega_1)$.

Dowody w logice $L_{\omega_1\omega}$ mają długość przeliczalną. Można jednak podać przykład zbioru zdań Γ oraz zdania σ z tego języka takich, że $\Gamma \models \sigma$, ale nie istnieje dowód σ z Γ w $L_{\omega_1\omega}$ (zob. np. Bell 2004).

Logiki infinitarne

Zbiór $H(\omega_1)$ jest domknięty na tworzenie przeliczalnych podzbiorów oraz ciągów. Jednak fakt wspomniany w poprzednim akapicie wskazuje iż, mówiąc w uproszczeniu, $H(\omega_1)$ nie jest domknięty ze względu na operację odpowiadającą kodowaniu dowodów z dowolnych Σ_1 na $H(\omega_1)$ zbiorów formuł.

Naturalne jest w tej sytuacji poszukiwanie takich zbiorów A zastępujących $H(\omega_1)$, które byłyby domknięte na operacje odpowiadające kodowaniom dowodów w A oraz rozważanie tylko takich formuł, które mają kody w A. Była to jedna z motywacji do rozpatrywania tzw. dopuszczalnych fragmentów L_A logiki $L_{\omega_1\omega}$.

Logiki infinitarne

Barwise odkrył, że istnieją przeliczalne zbiory (*admissible sets*) $A \subseteq H(\omega_1)$, które spełniają powyższe warunki. Są to więc takie uogólnienia zbiorów dziedzicznie skończonych, na których (jako na zbiorach kodów formuł) możliwe i sensowne jest uprawianie (uogólnionej) teorii rekursji oraz teorii dowodu. Udowodnił także swoje znamienite twierdzenie o zwartości: jeśli A jest przeliczalnym zbiorem dopuszczalnym, to każdy zbiór formuł języka L_A będący Σ_1 na A, którego każdy podzbiór (będący jednocześnie elementem A) ma model, sam również ma model.

Twierdzenie Barwise'a ma mnogie zastosowania, m.in. pozwala np. udowodnić, że każdy przeliczalny przechodni model dla ZFC ma właściwe rozszerzenie końcowe. Prace Barwise'a to swego rodzaju unifikacja rozważań w teorii modeli, teorii rekursji oraz teorii mnogości.

Logiki infinitarne

Szczególnie przydatna dla badań zbiorów dopuszczalnych okazała się wersja teorii mnogości KP zaproponowana przez Kripke'go i Platka w połowie lat sześćdziesiątych XX wieku. Jest ona teorią elementarną (ze stałą pozalogiczną $\in$), będącą pewnym osłabieniem teorii mnogości Zermelo-Fraenkla. Nie ma w niej aksjomatu zbioru potęgowego, a szczególną rolę pełnią schematy aksjomatów Δ_0-*separation* oraz Δ_0-*collection* (odpowiedniki schematów aksjomatów wyróżniania i zastępowania), w których występują formuły klasy Δ_0. Zbiory przechodnie A takie, że $(A, \in)$ jest modelem KP nazywane są *zbiorami dopuszczalnymi* (*admissible sets*). Rozważa się także teorię KPU, czyli teorię KP z atomami.

Kompletny wykład teorii zbiorów dopuszczalnych znaleźć można np. w klasycznej monografii Barwise 1975. Przystępne i zwięzłe omówienie (współczesnego stanu) tej teorii znajdujemy np. w Keisler, Knight 2004.

Wykorzystywana literatura

- Ajdukiewicz, K. 1928. *Główne zasady metodologji nauk i logiki formalnej.* (Skrypt autoryzowany, zredagowany przez Mojżesza Presburgera), Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.
- Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Barwise, J. 1979. On branching quantifiers in English. *Journal of Philosophical Logic* **8**, 47–80.
- Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.
- Barwise, J., Feferman, S. 1985. *Model Theoretic Logics.* Springer.
- Bell, J.L. 2004. Infinitary Logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Wykorzystywana literatura

- van Benthem, J. 1984. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic.* **49**, 443–466.
- van Benthem, J. 1986. *Essays in logical semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- van Benthem, J. 1995. Quantifiers and Inference. W: Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) *Quantifiers: logics, models and computation.*, 1–20.
- van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.
- Boole, G. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Toward a Calculus of Deductive Reasoning.* Cambridge.
- Boole, G. 1854. *An Investigation into Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* London.

Wykorzystywana literatura

- Dickmann, M.A. 1975. *Large Infinitary Languages.* North Holland, Amsterdam.
- van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.
- Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.
- Gödel, K. 1986–2003. S. Feferman *et al.* (eds.) *Kurt Gödel: Collected Works, Volume I 1986, Volume II 1990, Volume III 1995, Volume IV 2003, Volume V, 2003.* Oxford University Press, New York.
- Grattan-Guiness, I. 2000. *The search for mathematical roots 1870–1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Wykorzystywana literatura

- van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass.
- Helmer, O. 1938. Languages with expressions of infinite length. *Erkenntnis* **8**, 138–141.
- Henkin, L. 1955. The Representation Theorem for Cylindrical Algebras. *Mathematical Interpretation of Formal Systems.* North Holland, 85–97.
- Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.
- Jordan, P. 1949. Zur Axiomatik der Verknüpfungsbereiche. *Abhand. Math. Sem. Hamburg Univ.* **16**, 54–70.
- Karp, C. 1964. *Languages with Expressions of Infinite Length.* North Holland, Amsterdam.

Wykorzystywana literatura

- Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.
- Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.
- Krasner, M. 1938. Une généralisation de la notion de corps. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **5**, 475–489.
- Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.
- Kuratowski, K. 1937. Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens. *Fundamenta Mathematicae* **29**, 97–100.
- Lewis, C.S. 1918. *A Survey of Symbolic Logic.* University of California, Berkeley.

Wykorzystywana literatura

- Lindström, P. 1966. First order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria*, **32**, 186–195.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, **35**, 1–11.
- Löwenheim, L. 1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, **68**, 169–207. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.
- Malcew, A.A. 1936. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik. *Mat. Sbornik* n.s. **1**, 323–336.
- Malcew, A.A. 1941. Ob odnom obščem metodie polučenia lokalnych tieorem grupp. *Ivanovskij Gosudarstviennyj Pedagogičeskij Institut, Učennyje zapiski, Fiziko-matiematičeskije nauki* **1**, no. **1**, 3–9.
- Malcew, A.A. 1956. O priedstavlienijach modielej. *Doklady Akademii Nauk SSSR* **108**, 27–29.

Wykorzystywana literatura

- Moore, G.H. 1995. The prehistory of infinitary logic: 1885–1955. W: Maria Luisa Dalla Chiara, Kees Doets, Daniele Mundici, Johan van Benthem (eds.) *Structures and norms in science.* Volume two of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995, Kluwer Academic Publishers, 105–123.
- Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.
- Mostowski, A. 1961. Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof. W: *Infinitistic Methods, Proceedings of the symposium on foundations of mathematics, Warsaw, 2–9 September 1959.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa; Pergamon Press, New York, Oxford, London, and Paris, 141–166.

Wykorzystywana literatura

- Mostowski, A. 1965. *Thirty Years of Foundational Studies: Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964. Acta Philosophica Fennica* **XVII**, Soc. Philos. Fennica, Helsinki.
- Peirce, C.S. 1885. On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation. *American Journal of Mathematics* **7**, 180–202.
- Robinson, A. 1951. *On the Metamathematics of Algebra.* North Holland, Amsterdam.
- Robinson, A. 1957. Applications to Field Theory. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 326–331.
- Robinson, A. 1979. *Selected Papers.* H.J. Keisler *et alii* (eds.), vol. I: *Model Theory and Algebra.* Yale University Press, New Haven, Conn.

Wykorzystywana literatura

- Schröder, E. 1895. *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Vol. **3**, Leipzig.
- Schröder, E. 1910. *Abriss der Algebra der Logik*, **2**, E. Müller (Hg.), Leipzig.
- Scott, D., Tarski, A. 1957. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 83–89.
- Scott, D., Tarski, A. 1958. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Colloquium Mathematicum* **6**, 166-170.
- Shapiro, S. 1985. Second-Order Languages and Mathematical Practice. *Journal of Symbolic Logic*, **50**, 714–742. Przedruk w: Shapiro 1996.
- Shapiro, S. 1990. Second-Order Logic, Foundations, and Rules. *Journal of Philosophy*, **87**, 234–261. Przedruk w: Shapiro 1996.

Wykorzystywana literatura

- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Shapiro, S. 1999. Do Not Claim Too much: Second-order Logic and First-order Logic. *Philosophia Mathematica* Vol. **7**, 42–64.
- Shapiro, S. 2001. The "triumph" of first-order languages. W: C.A. Anderson, M. Zelëny (eds.) *Logic, Meaning and Computation.* Kluwer Academic Publishers, 219–259.
- Skolem, T. 1919. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **3**. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.

Wykorzystywana literatura

- Skolem, T. 1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskappselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **4**. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.
- Skolem, T. 1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juni 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, (Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923). Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.
- Skolem, T. 1970. *Selected Works in Logic.* Edited by Jens Erik Fenstad. Universiteitsforlaget, Oslo - Bergen - Tromsö.

Wykorzystywana literatura

- Tarski, A. 1933. Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und ω-Vollständigkeit. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **XL**, 97–112.
- Tarski, A. 1952. Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950.* vol. **1**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 705–720.
- Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.
- Taylor, R.G. 2002. Zermelo's Cantorian theory of systems of infinitely long propositions. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **8**, Number **4**, 478–515.
- Väänänen, J. 2001. Second-order logic and foundations of mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic*, **7,2**, 504–520.

Wykorzystywana literatura

- Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.
- Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. **IV**, 1–131.
- Zermelo, E. 1929. Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik. *Fundamenta Mathematicae* **14**, 339–344.
- Zermelo, E. 1935. Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme (Erste Mitteilung). *Fundamenta Mathematicae* **25**, 135–146.