Naukoznawstwo

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

3 grudnia 2009

Plan

Dzisiaj czeka nas wyprawa w głąb systemów aksjomatycznych (dedukcyjnych), podczas której omówimy ich najważniejsze własności, takie jak:

- niesprzeczność,
- niezależność aksjomatów,
- zupełność.

(Poruszane dziś zagadnienia omawiamy opierając się na podręczniku: Batóg, T., *Podstawy logiki*, Poznań, 2003.)

Systemy dedukcyjne

Na początek kilka uwag terminologicznych:

- Językiem będziemy nazywać każdy podzbiór zbioru znaków języka rachunku predykatów, zawierający: stałe logiczne, wszystkie zmienne indywiduowe, przynajmniej jeden predykat, oba nawiasy oraz ewentualnie takie znaki jak nazwy indywiduowe, symbole funkcyjne przecinek.
- Stałymi pozalogicznymi danego języka będziemy nazywać predykaty, nazwy indywiduowe oraz symbole funkcyjne.

Systemy dedukcyjne

Ufam, że pamiętają państwo co to takiego pojęcie konsekwencji i system dedukcyjny. Jednak, żeby mieć pewność, proponuję szybką powtórkę.

Pojęcie konsekwencji

Formuła zdaniowa A jest konsekwencją zbioru X formuł zdaniowych, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przynajmniej jeden dowód formuły A w oparciu o zbiór X. Zbiór wszystkich konsekwencji zbioru X będziemy oznaczać $Cn(X)$.

Systemy dedukcyjne

Pewne własności operacji konsekwencji:

- $X \subset Cn(X)$,
- $Cn(Cn(X)) \subset Cn(X)$,
- $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$,
- *Jeżeli* $X \subset Y$, to $Cn(X) \subset Cn(Y)$,
- $A \in Cn(X)$ *wtw*, gdy istnieje taki skończony zbiór Y, że $Y \subset X$ oraz $A \in Cn(Y)$ (Twierdzenie o finitystyczności operacji Cn).

Systemy dedukcyjne

Konsekwencje aksjomatów Klasycznego Rachunku Predykatów (A_{rp}) nazywa się tezami rachunku predykatów. Zbiór tych tez będziemy oznaczać literą L.

Uprawnione jest zatem stwierdzenie, że:

$$L = Cn(A_{rp})$$

Od przytoczonego powyżej pojęcia konsekwencji odróżnia się konsekwencję logiczną.

Konsekwencja logiczna

A jest konsekwencją logiczną zbioru X wtw, gdy A można wyprowadzić za pomocą reguł dowodowych ze zbioru złożonego z wszystkich aksjomatów KRP oraz formuł należących do X. Zbiór wszystkich konsekwencji logicznych zbioru X będziemy oznaczać symbolem $Cn_L(X)$.

Systemy dedukcyjne

W zapisie symbolicznym:

$$Cn_L(X) = Cn(A_{rp} \cup X).$$

Zbiór wszystkich tez KRP można określić poprzez równość:

$$Cn_L(\emptyset) = L.$$

Ponadto:

$$L \subset Cn_L(X).$$

Systemy dedukcyjne

Zbiór X formuł zdaniowych języka J nazywamy systemem dedukcyjnym (teorią) w języku J wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formuły zdaniowe języka J będące konsekwencjami logicznymi zbioru X należą do zbioru X. Elementy teorii X nazywamy twierdzeniami lub tezami tego systemu.

System dedukcyjny jest to taki zbiór X formuł zdaniowych języka J, który jest zamknięty ze względu na operację konsekwencji logicznej (Cn_L). Czyli:

$$Cn_L(X) \subset X$$

Najmniejszą teorią w J jest zawsze zbiór $Cn_L(\emptyset)$.

Systemy dedukcyjne

Teorie z identycznością

Są to teorie, które pośród stałych pozalogicznych zawierają predykat dwuargumentowy „=”, i wszystkie aksjomaty teorii identyczności (A_{id}) (poznaliśmy na ostatnich zajęciach) są twierdzeniami tych teorii.

Na przykład zbiór tez Rachunku predykatów z identycznością można przedstawić jako:

$$Cn_L(A_{id})$$

Ciekawą cechą teorii z identycznością jest możliwość wyrażenia w nich tzw. kwantyfikatorów ilościowych. Czyli zwrotów postaci:

- *Istnieje co najmniej n przedmiotów x takich, że ...*
- *Istnieje co najwyżej n przedmiotów x takich, że ...*
- *Istnieje dokładnie n przedmiotów x takich, że ...*

Systemy dedukcyjne

Jeżeli $n = 1$, to można trzy powyższe zworoty wyrazić odpowiednio przez:

- $\exists x A(x)$,
- $\forall x, y\big[A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y\big]$,
- $\exists x A(x) \wedge \forall x, y\big[A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y\big]$.

Dla $n = 2$:

- $\exists x, y\big[\neg(x = y) \wedge A(x) \wedge A(y)\big]$,
- $\forall x, y, z\big[A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z\big]$,
- $\exists x, y\big[\neg(x = y) \wedge A(x) \wedge A(y)\big] \wedge \forall x, y, z\big[A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z\big]$.

Niesprzeczność

Zbiór formuł X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje żadna taka formuła $A \in Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X)$. Natomiast, gdy taka formuła istnieje, to zbiór X jest sprzeczny.

Twierdzenie (1.1)

Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $Cn_L(X)$ jest niesprzeczny.

Zgodnie z tym twierdzeniem, jeżeli niesprzeczna jest aksjomatyka pozalogiczna teorii (X), to niesprzeczna jest cała teoria opierająca się na tej aksjomatyce.

Niesprzeczność

Twierdzenie (1.2)

Jeżeli $X \subset Y$ oraz zbiór Y jest niesprzeczny, to również zbiór X jest niesprzeczny.

- (1) Jeżeli $X \subset Y$, to $Cn_L(X) \subset Cn_L(Y)$.
- (2) Gdyby X był sprzeczny, to istniałaby taka formuła A, że $A \in Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X)$.
- (3) Wówczas mielibyśmy także $A \in Cn_L(Y)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(Y)$.
- (4) To jednak znaczyłoby, że zbiór Y jest sprzeczny, wbrew założeniom twierdzenia.

Twierdzenie (1.3)

Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przynajmniej jedna formuła zdaniowa A taka, że $A \notin Cn_L(X)$.

- (1) Zakładamy, że X jest niesprzeczny i weźmy pod uwagę dowolną formułę zdaniową A.
- (2) Skoro X jest niesprzeczne, to wynika z tego, że albo $A \notin Cn_L(X)$, albo $\ulcorner \neg A \urcorner \notin Cn_L(X)$.
- (3) Zatem przynajmniej jedna formuła na pewno nie należy do $Cn_L(X)$.

- (4) Załóżmy, iż zbiór X jest sprzeczny, wówczas istnieje taka formuła A, że $A \in Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X)$.
- (5) Z uwagi na prawo redukcji do absurdu:

  $$\ulcorner A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \urcorner \in A_{rp}$$

  Czyli:

  $$\ulcorner A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \urcorner \in Cn_L(X)$$

- (6) Po zastosowaniu inferencyjnej reguły odrywania otrzymujemy $B \in Cn_L(X)$. Co jest równoznaczne stwierdzeniu, że każda formuła należy do $Cn_L(X)$. Zatem jeżeli istnieje taka formuła która nie należy do $Cn_L(X)$, to zbiór X musi być niesprzeczny.

Niesprzeczność

Twierdzenie (1.4)

Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór zbioru X jest niesprzeczny.

- (1) Gdy X jest niesprzeczny, to każdy jego podzbiór jest niesprzeczny, tym bardziej skończony.
- (2) Jeśli X jest sprzeczny, to dla pewnego A, $A \in Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner\neg A\urcorner \in Cn_L(X)$.
- (3) Wówczas (z uwagi na finitystyczny charakter operacji konsekwencji) istnieją takie skończone zbiory Y_1 oraz Y_2, że $Y_1 \subset X, Y_2 \subset X, A \in Cn_L(Y_1)$ oraz $\ulcorner\neg A\urcorner \in Cn_L(Y_2)$.
- (4) $Y_1 \cup Y_2$ jest skończonym podzbiorem zbioru X i przy tym $A \in Cn_L(Y_1 \cup Y_2)$ oraz $\ulcorner\neg A\urcorner \in Cn_L(Y_1 \cup Y_2)$.
- (5) Zatem pewien skończony podzbiór zbioru X jest sprzeczny.

Niesprzeczność

Twierdzenie (1.5)

Jeżeli $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest nieskończonym ciągiem niesprzecznych zbiorów formuł i przy tym

$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$$

to wówczas zbiór

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots$$

jest niesprzeczny.

- (1) Załóżmy, że X jest sprzeczny, wtedy w myśl poprzedniego twierdzenia pewien skończony podzbiór Y zbioru X jest sprzeczny.
- (2) Zbiór Y można przedstawić w postaci: $Y = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Niesprzeczność

- (3) Ponieważ każda z formuł A_j należy do X, natomiast X jest sumą ciągu $X_1, X_2, X_3, \ldots$, więc A_1 należy do pewnego zbioru X_{i_1}, A_2 do pewnego X_{i_2}, ..., A_n należy do pewnego zbioru X_{i_n}.
- (4) Wzkaźniki $i_1, i_2, \ldots, i_n$ są liczbami naturalnymi i jest ich skończona ilość. W związku z tym wśród wskaźników liczba największa - i_m.
- (5) Wszystkie zbiory $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ są podzbiorami X_{i_m}.
- (6) Zatem również wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ należą do X_{i_m}, czyli $Y \subset X_{i_m}$.
- (7) Jednak Y jest sprzeczny, tym samym X_{i_m} jest sprzeczny, wbrew jednemu z założeń twierdzenia.

Niesprzeczność

Twierdzenie (1.6)

Jeżeli A jest zdaniem oraz $\ulcorner\neg A\urcorner \notin Cn_L(X)$, *to zbiór* $X \cup \{A\}$ *jest niesprzeczny.*

- (1) Załóżmy, że zbiór $X \cup \{A\}$ jest sprzeczny.
- (2) Wówczas istnieje taka formuła B, że $B \in Cn_L(X \cup \{A\})$ oraz równocześnie $\ulcorner\neg B\urcorner \in Cn_L(X \cup \{A\})$.
- (3) Ponieważ
  $\ulcorner B \to (\neg B \to B \wedge \neg B)\urcorner \in A_{rp}$
  zatem
  $\ulcorner B \wedge \neg B \in Cn_L(X \cup \{A\})$.
- (4) Na mocy twierdzenia o dedukcji:
  $\ulcorner A \to B \wedge \neg B\urcorner \in Cn_L(X)$

Niesprzeczność

- (5) Równocześnie na mocy prawa redukcji do absurdu:
  $\ulcorner(A \to B \wedge \neg B) \to \neg A\urcorner \in A_{rp}$.
- (6) Zatem:
  $\ulcorner\neg A\urcorner \in Cn_L(X)$'
  co przeczy założeniom twierdzenia.

Twierdzenie to głosi, że każdy niesprzeczny zbiór można rozszerzyć bez popadania w sprzeczność, o każde takie zdanie, którego negacja nie jest konsekwencją logiczną tego zbioru.

Dowodzenie niesprzeczności

Dowodzenie niesprzeczności nie jest prostą sprawą. Ba, przekonujące wykazanie niesprzeczności systemu bywa niezwykle trudne.
W związku z tym metodę dowodzenia niesprzeczności scharakteryzujemy jedynie ogólnikowo.

Twierdzenie (1.1.7)

Jeżeli X jest teorią w języku J_1, natomiast H jest przekształceniem zbioru X w zbiór formuł zdaniowych języka J_2 zachowującym negację, tzn. takim, że dla każdego $A \in X$

$$H(\ulcorner \neg A \urcorner) = \ulcorner \neg H(A) \urcorner,$$

i przy tym wśród wartości funkcji H (a więc w obrazie $H(X)$) nie ma formuł sprzecznych, to teoria X jest niesprzeczna.

Dowodzenie niesprzeczności

- (1) Załóżmy, że teoria X jest sprzeczna. Wówczas istnieje taka formuła A, że $A \in X$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in X$.
- (2) Ponieważ H zachowuje negację, wynika z tąd, że wśród wartości tej funkcji znajdują się formuły sprzeczne - $H(A)$ oraz $\neg H(A)$.

Dowodzenie niesprzeczności

Wykorzystywana w dowodzie niesprzeczności funkcja H często jest konstruowana, jako tzw. interpretacja w sensie syntaktycznym.

Niech J_1 i J_2 będą dowolnymi językami. Każde przyporządkowanie stałym pozalogicznym języka J_1 pewnych stałych pozalogicznych języka J_2 takie, że nazwie indywidualnej odpowiada nazwa indywidualna, predykatowi n-członowemu - predykat n-członowy oraz symbolowi funkcyjnemu n-argumentowemu - n-argumentowy symbol funkcyjny, nazywamy interpretacją w sensie syntaktycznym języka J_1 w języku J_2.

Dowodzenie niesprzeczności

Niech A będzie formułą zdaniową języka J_1, Y teorią w języku J_2 a H interpretacją języka J_1 w języku J_2. Niech $H(A)$ będzie formułą zdaniową języka J_2 powstająca z A przez zastąpienie w A wszystkich występujących w A stałych pozalogicznych przez odpowiadające im stałe pozalogiczne języka J_2. Jeśli $H(A) \in Y$, to mówimy, że H jest modelem w sensie syntaktycznym formuły A w teorii Y.
Jeżeli X jest zbiorem formuł zdaniowych języka J_1 i $H(A) \in Y$, dla każdego $A \in X$, to mówimy, że H jest modelem w sensie syntaktycznym zbioru X w teorii Y.

Niezależność aksjomatów

Formuła A jest niezależna od zbioru formuł X w dwóch przypadkach: (1) gdy $A \notin Cn_L(X)$; (2) gdy dla każdego A należącego do X: $A \notin Cn_L(X - \{A\})$.

W przypadku niezależności aksjomatów, obowiązuje to, o czym mowa w punkcie (2). Układ aksjomatów nazywamy niezależnym, gdy każdy z aksjomatów tego układu jest niezależny od zbioru wszystkich pozostałych aksjomatów układu.
Zanim scharakteryzujemy procedurę dowodzenia niezależności aksjomatów, wprowadźmy pojęcie *domknięcia uniwersalnego formuł*.

Domknięcie uniwersalne formuł jest to operacja tworzenia zdania z formuły przez związanie wszystkich zmiennych wolnych formuły kwantyfikatorem generalnym.
Domknięcie formuły A będziemy oznaczać przez $\bar{A}$.

Dowodzenie niezależności aksjomatów

Twierdzenie (2.1)

Niech A oznacza jakiś aksjomat a X - zbiór wszystkich pozostałych aksjomatów jakiejś teorii. Jeżeli zbiór $X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\}$ jest niesprzeczny, to formuła A jest niezależna od zbioru X, czyli $A \notin Cn_L(X)$.

- (1) Załóżmy, że formuła A jest zależna od zbioru X. Wówczas
  $A \in Cn_L(X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\})$
  oraz
  $\bar{A} \in Cn_L(X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\})$.
- (2) Jednakże
  $\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner \in Cn_L(X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\})$.
  Sytuacja taka wskazuje na sprzeczność $X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\}$ wbrew założeniom twierdzenia.

Dowodzenie niezależności aksjomatów

Twierdzenie (2.2)

Jeżeli teoria Y jest niesprzeczna oraz istnieje w niej model dla zbioru $X \cup \{\ulcorner \neg(\bar{A}) \urcorner\}$, *to formuła A jest niezależna od zbioru X.*

Metoda interpretacji służąca do uzyskiwania dowodów niesprzeczności może zostać wykorzystana do dowodzenia niezależności.

Zupełność

Zbiór formuł zdaniowych X języka J jest zupełny ze względu na język J wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania języka J albo $A \in Cn_L(X)$, albo $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X)$.

O zupełności możemy mówić tak w odniesieniu do systemu aksjomatów danej teorii, jak i samej teorii.
Załóżmy, że X jest układem aksjomatów pewnej teorii w jakimś języku J. Jeżeli A jest zdaniem języka J oraz $A \notin Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \notin Cn_L(X)$, to mówimy, że A jest nierozstrzygalne na gruncie aksjomatów X.

Zupełność aksjomatyki jakiejś teorii oznacza nieistnienie w niej zdań nierozstrzygalnych.

Zupełność

Zupełność jest pojęciem bardzo doniosłym, jednak nie zawsze dąży się do konstruowania teorii zupełnej. Niektóre teorie abstrakcyjne (np. algebra Boole'a) celowo konstruuje się jako systemy o niezupełnym zbiorze aksjomatów, aby nie zawężać klasy ich możliwych interpretacji.

Teorie nieabstrakcyjne, które badają pewne określone dziedziny rzeczywistości (np. teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych) powinny spełniać warunek zupełności.
Sformułowanie dla powyższych teorii aksjomatyki zupełnej oznaczałoby, że badana dziedzina została scharakteryzowana w aksjomatach w sposób kompletny.

Odkrycie Gödla

Okazuje się, że w przypadku teorii wystarczająco bogatej, by zawierała arytmetykę liczb naturalnych, warunek zupełności jest niemożliwy do spełnienia.

Zupełność

Twierdzenie (3.1)

Zbiór formuł zdaniowych X jest zupełny ze względu na dany język wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $Cn_L(X)$ jest zupełny ze względu na ten sam język.

Twierdzenie (3.2)

Jeżeli zbiór X jest niezupełny ze względu na dany język, to jest on niesprzeczny.

- (1) Z niezupełności zbioru X wynika, że istnieje zdanie A takie, że $A \notin Cn_L(X)$ i $\ulcorner \neg A \urcorner \notin Cn_L(X)$.
- (2) Na mocy twierdzenia 1.3 zbiór X jest niesprzeczny.

Zupełność

Twierdzenie (3.3)

Zbiór X jest zupełny ze względu na J wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuł A języka J, że $A \notin Cn_L(X)$, zbiór $X \cup \{A\}$ jest sprzeczny.

Twierdzenie to mówi nam, że każde rozszerzenie zbioru X o formuły niebędące jego konsekwencjami jest sprzeczne.

- (1) Zakładamy, że zbiór X jest niesprzeczny, zupełny i że $A \notin Cn_L(X)$.
- (2) W takiej sytuacji $\bar{A} \notin Cn_L(X)$.
- (3) Ponieważ zbiór X jest zupełny i $\bar{A}$ jest zdaniem, zatem $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X)$ oraz $\ulcorner \neg A \urcorner \in Cn_L(X \cup \{A\})$.

Zupełność

- (4) Z drugiej strony
  $A \in Cn_L(X \cup \{A\})$, czyli
  $\bar{A} \in Cn_L(X \cup \{A\})$.
- (5) Zatem zbiór $X \cup \{A\}$ jest sprzeczny.

Metateorie

Uprawiając daną dyscyplinę naukową, możemy przyczyniać się do jej rozwoju przez:

- Wzbogacanie teorii o nowe twierdzenia dotyczące przedmiotów, którymi teoria się zajmuje.
- Możemy również występować jako badacze, którzy formułują i uzasadniają twierdzenia. Z tym że twierdzenia te nie dotyczą przedmiotów badanych w teorii, lecz dotyczą samej teorii i jej własności.

W ten sposób z każdej teorii, czy dyscyplinie naukowej można przypisać jej *metateorię*, której przedmiotem badania jest ta pierwsza teoria.

Metateorie

Język badanej teorii nazywa się *językiem przedmiotowym*.
Język odpowiedniej metateorii - *metajęzykiem*.
Zależnie od tego jaką dyscyplinę, czy teorię badamy, możemy mówić o:

- metalogice;
- metamatematyce, a w jej obrębie na przykład o metaarytmetyce, metageometrii;
- metafilozofii, itd.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Do lat trzydziestych ubiegłego wieku uważano, że metamatematyki nie da się zaksjomatyzować i dlatego musi mieć charakter czysto intuicyjny. Jednak wybitny polski logik i matematyk Alfred Tarski pokazał, że jest to zadanie do wykonania.

Teraz przyjrzymy się jak można nadać postać aksjomatyczną metaarytmetyce.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Pierwszym krokiem jest stworzenie języka metaarytmentyki, czyli metajęzyka w stosunku do języka arytmetyki.

- Taki język musi zawierać pewną ilość stałych logicznych występujących w jęzku arytmetyki.
- Aby odróżnić język przedmiotowy od metajęzyka, stosuje się symboliczny zapis tych stałych w języku pierwszego typu i słowny w przypadku języka drugiego typu.
- Drugą grupę pojęć metajęzyka stanowią pojęcia teoriomnogościowe.
- Ponadto musimy dysponować zmiennymi, które będą reprezentować dowolne obiekty, o których mowa w metaarytmentyce.
- Trzecią grupę stałych stanowią pojęcia swoiste, ściśle związane z językiem przedmiotowym - nazwy wszystkich znaków języka przedmiotowego.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Znak języka arytetyki	Jego nazwa w metajęzyku	Odpowiednik słowny nazwy
$\neg$	*ng*	znak negacji
$\wedge$	*kn*	znak koniunkcji
$\vee$	*al*	znak alternatywy
$\rightarrow$	*im*	znak implikacji
$\leftrightarrow$	*rw*	znak równoważności
$\forall$	*kd*	kwantyfikator duży
$\exists$	*km*	kwantyfikator mały
$=$	*id*	znak identyczności

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Znak języka arytetyki	Jego nazwa w metajęzyku	Odpowiednik słowny nazwy
0	zr	znak zera
S	ns	znak następnika
$+$	dd	znak dodawania
$\cdot$	mn	znak mnożenia
(	nl	nawias lewy
)	np	nawias prawy
$x\vert$	z_1	pierwsza zmienna
$x\vert\vert$	z_2	druga zmienna
$x\vert\vert\vert$	z_3	trzecia zmienna

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Oprócz powyższych terminów w języku metaarytmetyki nazwę zbioru wszystkich wyrażeń języka arytmetyki oznaczymy przez W. Dwuargumentowy symbol funkcyjny $\cap$ będzie oznaczał operację konkatenacji. Czyli taką operację, która wykonana na dwóch wyrażeniach x i y daje wyrażenie $x \cap y$ będące wynikiem złączenia tych wyrażeń we wskazanej kolejności.

Zbiór aksjomatów metaarytmetyki składa się z trzech podzbiorów:

- aksjomaty logiczne,
- aksjomaty teoriomnogościowe (wraz z aksjomatami identyczności),
- aksjomaty swoiste metaarytmetyki.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Aksjomaty swoiste metaarytmetyki są następujące:

- (1) W jest zbiorem.
- (2) ng, kn, al, im, rw, kd, km, id, zr, ns, dd, mn, np, nl są wyrażeniami. Żadne dwa z tych czternastu nie są identyczne.
- (3) Dla wszystkich k: (i) z_k jest wyrażeniem; (ii) z_k jest różne od każdego z wyrażeń ng, kn, al, im, rw, kd, km, id, zr, ns, dd, mn, np, nl; jeżeli $k \neq l$, to z_k jest różne od z_l.
- (4) $x \cap y \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in W$ oraz $y \in W$. $x \cap y \in W$ jest różne od każdego z wyrażeń ng, kn, al, im, rw, kd, km, id, zr, ns, dd, mn, np, nl, z_k.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

- (5) Jeżeli x, y, z, t są wyrażeniami, to

$$x \cap y = z \cap t$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:
(i) $x = z$ oraz $y = t$;
(ii) istniej takie wyrażenie u, że:

$$x = z \cap u \text{ oraz } t = u \cap y$$

(iii) istnieje takie wyrażenie u, że

$$z = x \cap u \text{ oraz } y = u \cap t$$

Aksjomat ten uzasadnia prawo łączności konkatenacji.

Aksjomatyczne podsawy metateorii

- (6) (Zasada indukcji zupełnej). Dla każdego zbioru X, jeśli:
  (i) ng, kn, al, im, rw, kd, km, id, zr, ns, dd, mn, np, nl należą do X;
  (ii) Dla każdego k, $z_k \in X$;
  (iii) Dla wszystkich wyrażeń x, y: o ile $x \in X$ oraz $y \in X$, to
  $$x \cap y \in X;$$
  to wówczas zbiór X zawiera wszystkie wyrażenia, czyli $W \subset X$.

Zasada indukcji zupełnej gwarantuje, że każde wyrażenie składa się ze skończonej liczby znaków.

Aksjomatyczne podstawy metateorii

Wykorzystując zaprezentowaną aparaturę pojęciową można budować strukturalno-opisowe nazwy dowolnych wyrażeń języka arytmetyki bez pomocy cudzysłowów.

Weźmy formułę:
$\forall x| \left(\neg(x| = 0)\right)$

Nazwą takiej formuły jest wyrażenie symboliczne:

$$kd \cap z_1 \cap nl \cap ng \cap nl \cap z_1 \cap id \cap zr \cap np \cap np.$$

Chwila relaksu

No, starczy tego teoretyzowania.
Teraz trochę stretchingu intelektualnego - Państwa ulubione zagadki logiczne. Tym razem pochodzą one z książki: Smullyan, R., *Dama czy tygrys*. Warszawa 2003.

Wyprawa na Wyspę Snów

Wyspa Snów to niezwykła kraina - jej mieszkańcy mają bardzo wyraziste sny; myśli, które przeżywają w czasie snu, są naprawdę równie wyraziste, jak te na jawie. Ponadto ich życie we śnie przejawia tę samą ciągłość z nocy na noc jak ich życie na jawie z jego ciągłością z dnia na dzień. Dlatego spora grupa mieszkańców miewa problemy z rozpoznaniem, czy w danej chwili są na jawie, czy też śnią.

Wyprawa na Wyspę Snów

Otóż (jak pewnie się Państwo domyślają) każdy mieszkaniec należy do jednego z dwóch typów - jest **dzienny** lub **nocny**. Mieszkaniec dzienny ma to do siebie, że *wszystko, o czym jest przekonany, gdy jest na jawie, jest prawdziwe; wszystko zaś, o czym jest przekonany, gdy śni, jest fałszywe.* Mieszkańcy nocni przeciwnie: *wszystko, o czym są przekonani, gdy są na jawie, jest fałszywe; wszystko zaś, o czym są przekonany, gdy śnią, jest prawdziwe.*

Zagadka 1

Swego czasu jeden mieszkaniec był przekonany, że należy do typu dziennego.

- Czy można ustalić, czy jego przekonanie było trafne?
- Czy można ustalić, czy był wówczas na jawie, czy śnił?

Wyprawa na Wyspę Snów

Zagadka 2

Kiedy indziej jeden z mieszkańców był przekonany, że śni.

- Czy można ustalić, czy jego przekonanie było trafne?
- Czy można ustalić, do jakiego typu on należy?

Zagadka 3

Jest na tej wyspie małżeństwo Kulpów. W pewnej chwili pan Kulp był przekonany, że on i jego żona należą oboje do typu nacnego. W tej samej chwili pani Kulpowa była przekonana, że nie należą oboje do typu nocnego. W owym czasie, gdy żywili te przekonania, jedno z nich było na jawie, a jedno śniło.

- Które było na jawie.

Wyprawa na Wyspę Snów

W związku z tym, że dzisiejsze zajęcia upłynęły nam na rozważaniach metateoretycznych, na zakończenie proponuje rozwiązać *metazagadkę*.

Metazagadka

Kiedyś zadałem przyjacielowi zagadkę: „**Pewien mieszkaniec wyspy był swego czasu przekonany, że jest typem dziennym i jest na jawie. Kim był rzeczywiście?**” Mój przyjaciel myślał o tym przez chwilę, a następnie rzekł: „ **Nie dałeś mi wystarczającej informacji!**” Miał rację! Z kolei zadał mi pytanie: „**Czy wiesz, do jakiego typu należał ów mieszkaniec, oraz czy był na jawie, czy śnił w danej chwili?**”. Odpowiedziałem, że wiem zarówno kim jest, jak i w jakim był stanie w danej chwili. Przyjaciel zadał mi pytanie: „**Gdybyś mi powiedział, czy jest on typem dziennym, czy nocnym to czy miałbym wówczas wystarczającą informację, by ustalić czy w danej chwili był on na jawie, czy też śnił?**” Odpowiedziałem mu szczerze (tak lub nie) i to pozwoliło mu rozwiązać zadanie.
Czy ów mieszkaniec był typem dziennym, czy nocnym? Czy w owej chwili był na jawie, czy też śnił?