Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Zliczanie obiektów

- Pierwsza część wykładu poświęcona jest ustalaniu liczebności skończonych zbiorów obiektów (liczb, zbiorów, funkcji, relacji, ciągów, itd.). Przypomnimy omawiane w szkole pojęcia: permutacji, wariacji i kombinacji. Przypomnimy też parę terminów dotyczących ciągów liczbowych.
- W drugiej części pokażemy przykłady dowodów opartych na zasadzie indukcji matematycznej.
- Część trzecia jest skrótowym przypomnieniem wybranych pojęć rachunku prawdopodobieństwa.

- *Zasada szufladkowa Dirichleta*. Niech $f : X \to Y$, gdzie X ma n, zaś Y ma m elementów, przy czym $n > m$. Wtedy istnieje $y \in Y$ taki, że zbiór $\{x \in X : f(x) = y\}$ ma więcej niż jeden element.
- Jeśli n przedmiotów wkladamy do m pudełek i pudełek jest mniej niż przedmiotów, to w co najmniej jednym pudełku znajdzie się więcej niż jeden przedmiot.

- W jaki sposób udowodnić twierdzenie: *Jeśli skończony zbiór X ma n elementów, to rodzina wszystkich jego podzbiorów ma 2^n elementów*?
- Oznaczmy liczbę elementów zbioru X przez $|X|$. Innym często używanym oznaczeniem jest $\overline{\overline{X}}$.

- Mamy np.: $|\emptyset| = 0$ i $|\wp(\emptyset)| = 1$, $|\{a\}| = 1$ i $|\wp(\{a\})| = 2$, $|\{a, b\}| = 2$ i $|\wp(\{a, b\})| = 4$, $|\{a, b, c\}| = 3$ i $|\wp(\{a, b, c\})| = 8$.
- Może zatem $|\wp(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})| = 2^n$?
- Udowodnimy, że istotnie tak jest. Jeden z dowodów będzie wykorzystywał pojęcie funkcji charakterystycznej, a drugi zasadę indukcji matematycznej.

- Na ile sposobów możemy ustawić w n-elementowy ciąg różnowartościowy wszystkie elementy zbioru skończonego o n elementach?
- Inaczej mówiąc: ile jest bijekcji ze zbioru n-elementowego na ten zbiór (ile jest permutacji zbioru n-elementowego)?

- Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ustawiamy elementy zbioru X w ciąg:
- Na pierwszym miejscu można wybrać element z X na n sposobów, na drugim kolejny element na $n - 1$ sposobów, itd.
- Wszystkich takich ciągów jest zatem: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

- Liczba *permutacji* zbioru n-elementowego jest zatem równa $n!$.
- Odważni słuchacze mogą zapytać: ile jest permutacji zbioru $\mathbb{N}$?

Permutacje: przykłady

- Początkowe wartości funkcji $n!$ to: $0! = 1$, $1! = 1$, $1! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$, itd.
- Niezorientowany graf relacji pełnej na zbiorze n-elementowym zawiera $n!$ *ścieżek Hamiltona*, czyli ciągów zawierających każdy wierzchołek grafu dokładnie raz.
- Jeśli w RP jest n pomników św. Jana Pawła II, to można zaplanować $n!$ pielgrzymek, które odwiedzą każdy z pomników dokładnie raz (gdyby pomników było np. 20, to pielgrzymek byłoby 2432902008176640000).
- Jeśli σ jest permutacją uporządkowanego zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, to często zapisujemy ją jako ciąg wartości $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n))$.
- Złożenie dwóch permutacji jest permutacją. Funkcja odwrotna każdej permutacji jest permutacją. Funkcja identycznościowa jest permutacją.

- Na ile sposobów możemy ustawić w ciąg różnowartościowy n elementów ze zbioru liczącego m elementów?
- Jeśli $n > m$, to zadanie nie jest wykonalne. Zakładamy więc, że $n \leqslant m$.

- Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pierwszy element ciągu możemy wybrać na m sposobów, drugi na $m - 1$ sposobów, itd.; n-ty element możemy wybrać na $m - n + 1$ sposobów.
- Liczba n-elementowych ciągów bez powtórzeń elementów zbioru m-elementowego jest więc równa: $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$.
- Jest to liczba *wariacji bez powtórzeń* (n-elementowych ze zbioru m-elementowego). Zauważmy, że $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$.

Wariacje bez powtórzeń: przykłady

- Niech $X = \{0, 1, 2\}$. Wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń o wyrazach ze zbioru X to ciągi: $(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$ i jest ich $3 \cdot 2 = 6$.
- Podczas kolejnej rekonstrukcji rządu zwolniło się 7 miejsc ministerialnych, a partia rządząca chce koniecznie zatrudnić jako ministrów 4 swoich protegowanych (wszystko jedno, kogo w danym ministerstwie). Może to zrobić na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ sposobów.

- Liczba pięciocyfrowych haseł (przy podstawie dziesiętnej) o niepowtarzających się elementach jest równa: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.
- Wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru m-elementowego w zbiór n-elementowy ($m \leqslant n$) jest: $m \cdot (m - 1) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)$.

- Na ile sposobów możemy ustawić w ciąg (z dopuszczeniem powtórzeń elementów) n elementów ze zbioru liczącego m elementów?
- W innym sformułowniu: ile jest funkcji ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy?

- Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Jeśli $f : X \to Y$, to każdy z elementów zbioru X może przyjąć jedną z wartości ze zbioru Y: $f(x_1)$ może przyjąć jedną z m wartości, podobnie $f(x_2)$, itd.
- Funkcji $f : X \to Y$ jest zatem ogółem $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (ten iloczyn ma n czynników), czyli m^n. Liczba *wariacji z powtórzeniami* (n-elementowych ze zbioru m-elementowego) jest równa m^n.
- W szczególności, liczba funkcji charakterystycznych ze zbioru X w zbiór $\{0, 1\}$ jest równa $2^{|X|}$. Ponieważ każdej takiej funkcji odpowiada wzajemnie jednoznacznie jakiś podzbiór zbioru X, więc rodzina $\wp(X)$ ma $2^{|X|}$ elementów.

Wariacje z powtórzeniami: przykłady

- Niech $X = \{0, 1\}$. Wszystkie 3-wyrazowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru X reprezentowane są przez następujące ciągi: $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$, czyli jest ich $2^3 = 8$.
- Liczba pięciocyfrowych haseł (przy podstawie dziesiętnej) o dowolnych elementach jest równa: $10^5 = 100000$.

- Wszystkich wyników rzutu jednocześnie dwiema kostkami sześciennymi jest: $6^2 = 36$.
- Pięć różnych przedmiotów można włożyć do trzech szuflad na $3^5 = 243$ sposobów.
- Wszystkich parzystych liczb pięciocyfrowych jest: $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45000$.

- Oznaczmy liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$ przez $\binom{n}{k}$. Jaka jest wartość tej liczby?
- Pamiętamy, że k-elementowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego jest $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Zbiór k-elementowy można ustawić w ciąg na $k!$ sposobów, co oznacza, że $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$.
- Wynika z tego, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy *symbolem dwumianowym Newtona*.

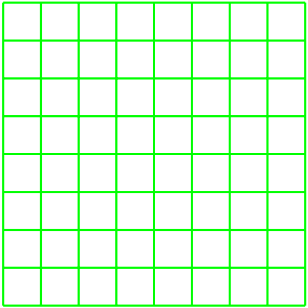
- Mamy: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

Kombinacje: przykłady

- Zauważmy związek między kombinacjami, permutacjami i wariacjami bez powtórzeń: $\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- *Lotto*. Sześć liczb ze zbioru liczb od 1 do 49 możemy wybrać na $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816$ sposobów.

- W pudełku jest 20 kulek o numerach od 1 do 20. Jest $\binom{10}{3} = 120$ możliwości wyciągnięcia z pudełka trzech kulek o numerach parzystych.
- Jeśli w grupie 10 osób każdy poda drugiemu rękę, to razem będzie $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ uścisków dłoni.

Mróweczka na Manhattanie



- Na ile sposobów Mróweczka może przejść od lewego dolnego wierzchołka do prawego górnego wierzchołka, jeśli dozwolonymi ruchami są tylko ruchy w prawo i do góry po krawędziach siatki?
- O *metryce Manhattan* powiemy na jednym z dalszych wykładów.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

- Ustawiamy symbole Newtona $\binom{n}{k}$ w trójkątnej (nieskończonej) tablicy, nazywanej *trójkątem Pascala*, której fragment pokazano powyżej.
- W każdym z poziomych wierszy stała jest liczba n, natomiast liczba k przyjmuje kolejno wartości: $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

- Powyżej podano wartości $\binom{n}{k}$ w początkowym fragmencie trójkąta Pascala.
- Zauważmy, że każdy wiersz poziomy zaczyna się i kończy liczbą 1, natomiast wartości na każdym z pozostałych miejsc są sumą wartości na dwóch miejscach bezpośrednio po lewej i prawej nad danym miejscem.

Pamiętamy ze szkoły, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y:

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

W ogólnym przypadku mamy dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y::

- *Wzór dwumianowy Newtona*: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- Zauważmy, że tworząc iloczyn n czynników $(x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$ otrzymamy sumę iloczynów o postaci $x^k y^{n-k}$: z każdego z n nawiasów wybieramy k razy x oraz $n-k$ razy y.
- Wszystkich iloczynów o tej samej postaci jest tyle, ile mamy sposobów wybrania k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego, czyli $\binom{n}{k}$. To dostarcza dowodu wzoru dwumianowego.

- Wszystkich relacji równoważności na danym zbiorze jest tyle samo, ile jest podziałów tego zbioru. Niech $S(n,k)$ (liczba Stirlinga drugiego rodzaju) oznacza liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k podzbiorów.
- Mamy: $S(n,1) = 1$ oraz $S(n,n) = 1$. Przyjmujemy $S(n,0) = 0$ dla $n > 0$ oraz $S(n,k) = 0$ dla $k > n$. Mamy: $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.
- W ogólności mamy: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$.

- Załóżmy, że zbiór n-elementowy dzielimy na k rozłącznych niepustych podzbiorów o liczebnościach n_1, $n_2, \ldots,$ n_k.
- Wtedy $S(n,k) = \sum\limits_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!\cdot k!}$.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & S(0,0) & & \\
 & & S(1,0) & S(1,1) & & \\
 & S(2,0) & S(2,1) & S(2,2) & & \\
 & S(3,0) & S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & \\
S(4,0) & S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & \\
S(5,0) & S(5,1) & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5)
\end{array}
$$

Zachęcamy słuchaczy do próby ustalenia wartości liczbowych poszczególnych miejsc w danym wierszu tej tablicy, biorąc pod uwagę wartości w wierszu powyżej danego.

Liczby Bella: $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ (liczba wszystkich podziałów zbioru n-elementowego).

- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $|a_n| \leqslant M$.
- Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy:
    1. *rosnącym*, gdy $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$
    2. *malejącym*, gdy $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$
    3. *niemalejącym*, gdy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$
    4. *nierosnącym*, gdy $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$
- Ciągi, spełniające któryś z powyższych warunków nazywamy *monotonicznymi*. Te, które spełniają któryś z pierwszych dwóch powyższych warunków nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

- Dla ustalenia czy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ jest monotoniczny, badamy wartość różnicy między jego dwoma kolejnymi wyrazami:
    - jeśli $a_{k+1} - a_k > 0$, to ciąg jest rosnący;
    - jeśli $a_{k+1} - a_k < 0$, to ciąg jest malejący.

Ciągi liczbowe: przykłady

- Ciąg wszystkich liczb pierwszych jest rosnący, ograniczony z dołu, nieograniczony z góry.
- Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny, za to jest ograniczony.
- Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$, nie jest ani monotoniczny, ani ograniczony.

- Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$, gdzie $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący oraz ograniczony.
- Ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący i ograniczony.
- Niech $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (liczby harmoniczne). Ciąg liczb harmonicznych jest rosnący i nieograniczony.

- Pewne ciągi i funkcje mogą być określone warunkami *rekurencyjnymi*: aby określić kolejny wyraz ciągu (lub kolejną wartość funkcji) trzeba brać pod uwagę poprzednie jego (jej) wartości.
- Rekurencyjna definicja funkcji polega na podaniu jej wartości dla pierwszego argumentu rozważanej dziedziny oraz przepisu, w jaki sposób otrzymać kolejne wartości z jej poprzednich wartości.

Niech $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją następnika, czyli $s(n) =$ liczba naturalna bezpośrednio następująca po n. Zakładamy, że zero nie jest następnikiem żadnej liczby i że różne liczby mają różne następniki. Możemy zdefiniować dodawanie, mnożenie, potęgowanie, silnię rekurencyjnie:

- $n + 0 = n$, $n + s(m) = s(n + m)$
- $n \cdot 0 = 0$, $n \cdot s(m) = n \cdot m + n$
- $n^0 = 1$, $n^{s(m)} = n^m \cdot n$
- $0! = 1$, $s(n)! = n! \cdot s(n)$.

Nieśmiertelne monogamiczne kazirodcze króliki

- Mamy Pierwszą Parę królików (samca i samicę). Chcemy obliczyć, ile par królików otrzymamy po n miesiącach przy założeniu, że każda para królików rodzi co miesiąc nową parę (samca i samicę), która staje się reproduktywna po miesiącu (i natychmiast z tego korzysta).
- Nadto, króliki żyją wiecznie, są monogamiczne i kazirodcze (począwszy od drugiej pary tylko brat z siostrą dają potomstwo; Pierwsza Para też kontynuuje prokreację), oraz nie ustają w rozmnażaniu. [Jest również wersja ze śmiertelnymi królikami.]

Ciąg Fibonacciego:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

Dowody, korzystające z zasady indukcji matematycznej mają postać następującą:

- *Krok początkowy*. Pokazujemy, że teza twierdzenia zachodzi dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu. Najczęściej jest to liczba 0 lub liczba 1.
- *Krok następnikowy*. Zakładamy, że teza twierdzenia zachodzi dla liczby k z rozważanego zakresu (czynimy *założenie indukcyjne*). Pokazujemy, że przy tym założeniu teza twierdzenia zachodzi dla bezpośredniego następnika tej liczby, czyli liczby $k+1$.
- *Konkluzja*. Jeśli powodzeniem zakończyły się oba powyższe kroki, to jesteśmy uprawnieni do przyjęcia, że rozważane twierdzenie zachodzi dla *wszystkich* liczb naturalnych n z rozważanego zakresu.

- Takie dowody wykorzystują *schemat aksjomatów indukcji*:
- $(\varphi(0) \wedge (\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest formułą języka arytmetyki (wyraża pewną własność liczb).

Mamy udowodnić równość: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.
Krok początkowy. Dla $k = 1$ powyższa równość sprowadza się do:
$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, co jest oczywiście prawdą.
Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.
Musimy wykazać, że badany wzór zachodzi także dla $k + 1$, czyli musimy udowodnić, że: $(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$.
Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci:
$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1$. Obliczamy tę sumę:
$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$.
Pokazaliśmy zatem, że że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k + 1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Mamy udowodnić równość: $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest liczba 1.
Krok początkowy. Ponieważ $2^1 = 2^{1+1} - 2$, więc dla $k = 1$ rozważana równość zachodzi.
Krok następnikowy. Czynimy założenie indukcyjne, że omawiany wzór zachodzi dla liczby k, czyli zakładamy, że:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.
Musimy wykazać, że: $(2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$.
Na mocy założenia indukcyjnego, lewa strona tej równości jest postaci: $2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$. Ta liczba jest oczywiście równa $2 \cdot 2^{k+1} - 2$, czyli równa $2^{k+2} - 2$.
Pokazaliśmy zatem, że jeśli rozważany wzór zachodzi dla liczby k, to zachodzi także dla liczby $k + 1$.

Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n.

Udowodnimy, że jeśli zbiór X ma n elementów, to zbiór $\wp(X)$ ma 2^n elementów, gdzie $n \geqslant 0$.
Najmniejszą liczbą z rozważanego zakresu jest 0.
Krok początkowy. Jeśli $|X| = 0$, to X jest zbiorem pustym, a $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, czyli $|\wp(\emptyset)| = 1 = 2^0$, a więc zależność zachodzi dla $k = 0$.
Krok następnikowy. Zakładamy, że $|\wp(X)| = 2^k$ dla każdego zbioru X o k elementach. Musimy udowodnić, że $|\wp(Y)| = 2^{k+1}$ dla każdego zbioru Y o $k + 1$ elementach.
Niech $a \in Y$. Wtedy $Y - \{a\}$ ma k elementów, a więc (z założenia indukcyjnego) $|\wp(Y - \{a\})| = 2^k$, czyli $|\{Z \subseteq Y : a \notin Z\}| = 2^k$.
Niech $A = \{Z \subseteq Y : a \in Z\}$ i $B = \{Z \subseteq Y : a \notin Z\}$. Wtedy $\{A, B\}$ jest podziałem $\wp(Y)$, zbiory A i B są równoliczne, a skoro $|B| = 2^k$, to także $|A| = 2^k$. Mamy zatem $|\wp(Y)| = |A| + |B| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.
Pokazaliśmy więc, że jeśli badana zależność zachodzi dla k, to zachodzi też dla $k + 1$.
Konkluzja. Na mocy zasady indukcji matematycznej, teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich zbiorów skończonych.

- Rozważamy skończony zbiór Ω *zdarzeń elementarnych*. Myślimy o zdarzeniach elementarnych jako o wynikach w jakimś doświadczeniu, np. rzucie kostką lub monetą.
- *Zdarzeniem* nazywamy dowolny podzbiór zbioru Ω.
- *Zdarzeniem pewnym* jest zbiór Ω. *Zdarzeniem niemożliwym* jest zbiór pusty.
- Skoro zdarzenia traktujemy jak zbiory, to możemy tworzyć ich sumy, iloczyny, różnice, dopełnienia.

- Jeśli zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest elementem zdarzenia $A \subseteq \Omega$, to mówimy, że zdarzenie ω jest zdarzeniem *sprzyjającym* zajściu zdarzenia A.
- Zakładamy, że rozważane doświadczenia są *powtarzalne* oraz że wyniki doświadczeń (zdarzenia elementarne) są od siebie *niezależne*.

Przykłady

- W doświadczeniu polegającym na dwukrotnym rzucie kostką sześcienną jest 36 zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{(i, j) : 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
- W doświadczeniu polegającym na wybraniu trzech osób z grupy dziesięciu osób jest $\binom{10}{3} = 120$ zdarzeń elementarnych.
- W doświadczeniu polegającym na jednoczesnym rzucie monetą oraz kostką sześcienną jest $2 \cdot 6 = 12$ zdarzeń elementarnych.

Dla skończonych przestrzeni probabilistycznych Ω *prawdopodobieństwem* (zdarzeń) nazywamy funkcję P określoną na zbiorze $\wp(\Omega)$ taką, że:

- $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \wp(\Omega)$
- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, o ile $A \cap B = \emptyset$
- $P(\Omega) = 1$

- Przy założeniu, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ jest ilorazem liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych rozważanej przestrzeni: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Mamy np.: $P(\emptyset) = 0$; $P(A) \leqslant 1$ dla każdego $A \subseteq \Omega$; $P(A') = 1 - P(A)$; $P(A) \leqslant P(B)$, o ile $A \subseteq B$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Przykłady

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że bezwzględna różnica liczby oczek na obu kostkach jest równa 4?

- $|\Omega| = 36$
- $A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\}$, $|A| = 4$
- $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że wylosowano asa lub trefla? Mamy $|\Omega| = 52$ oraz:

- B: wylosowano asa; $P(B) = \frac{4}{52}$; C: wylosowano trefla; $P(C) = \frac{13}{52}$
- $B \cap C$: wylosowano asa trefl; $P(B \cap C) = \frac{1}{52}$; $A = B \cup C$
- $P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, oznaczane przez $P(A|B)$ wyraża się wzorem: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, przy założeniu, że $P(B) > 0$.

Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że w rzucie kostką sześcienną wypadnie nieparzysta liczba oczek, pod warunkiem, że wypadło co najwyżej 5 oczek?

- $|\Omega| = 6$
- A: wypadła nieparzysta liczba oczek; $A = \{1, 3, 5\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$
- B: wypadło co najwyżej 5 oczek; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $P(B) = \frac{5}{6}$
- $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$.

- Zdarzenia A i B są *niezależne*, jeśli prawdopodobieństwo iloczynu tych zdarzeń jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw:
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

- Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest zestawem zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej Ω, to mówimy, że zdarzenia te są *niezależne* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podciągu $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$ zachodzi:
- $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.
- Zauważmy, że zdarzenia danego zestawu mogą być parami niezależne, ale cały ten zestaw może nie być niezależny.

Przykład

Rzucamy czerwoną i zieloną kostką sześcienną. Wtedy $|\Omega| = 36$.
A: suma oczek jest równa 5; $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$; $P(A) = \frac{4}{36}$.
B: na czerwonej więcej niż 2 oczka; $B = \{(i,j) : 2 < i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$; $P(B) = \frac{4 \cdot 6}{36}$.
C: na zielonej co najwyżej 3 oczka; $C = \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$; $P(C) = \frac{3 \cdot 6}{36}$.
$A \cap B = \{(3,2),(4,1)\}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$, $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{36} \cdot \frac{4 \cdot 6}{36} = \frac{2}{27}$; ponieważ $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, więc A i B nie są niezależne.
$B \cap C = \{(i,j) : i \in \{3,4,5,6\},\ j \in \{1,2,3\}\}$; $P(B \cap C) = \frac{12}{36}$; $P(B) \cdot P(C) = \frac{4 \cdot 6}{36} \cdot \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{12}{36}$; ponieważ $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, więc B i C są niezależne.

The Incompatible Food Triad. Can you find three foods such that all three do not go together (by any reasonable definition of foods "going together") but every pair of them does go together?

http://www.georgehart.com/triad.html

- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią podział przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$, to dla dowolnego zdarzenia $B \subseteq \Omega$ zachodzi równość:
- $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$.
- Powyższy wzór nazywamy wzorem na *prawdopodobieństwo całkowite*.

- Niech zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią podział przestrzeni Ω oraz $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$. Przypuśćmy, że zaszło zdarzenie B.
- Prawdopodobieństwo, że *przyczyną* zajścia zdarzenia B było zdarzenie A_i podaje *wzór Bayesa*:
- $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$.

Przykład

W sądzie okręgowym $\mathbb{A}$ pracuje 6 kobiet i 2 mężczyzn, a w sądzie okręgowym $\mathbb{B}$ pracuje 1 kobieta i 2 mężczyzn. Przy losowaniu sędziego rzucamy najpierw kostką sześcienną: jeśli wypadnie liczba oczek 1 lub 2, to losujemy z sądu $\mathbb{A}$, w przeciwnym przypadku z sądu $\mathbb{B}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana zostanie kobieta?

- A: wylosowano sąd $\mathbb{A}$; $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- B: wylosowano sąd $\mathbb{B}$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- C: wylosowano kobietę
- $P(C|A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- $P(C|B) = \frac{1}{3}$
- $P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$.

- Rozważmy doświadczenie, w którym możemy otrzymać dwa wyniki: sukces z prawdopodobieństwem p oraz porażkę z prawdopodobieństwem $1 - p$. Zakładamy, że doświadczenie jest powtarzalne, z podanymi stałymi prawdopodobieństwami i że poszczególne wyniki są niezależne.
- Wtedy prawdopodobieństwo $P(n, k, p)$, że w serii n powtórzeń doświadczenia uzyskamy dokładnie k sukcesów dane jest *wzorem Bernoulliego*: $P(n, k, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

- Z założeń wynika, że prawdopodobieństwo, iż w serii n prób odnieśliśmy k sukcesów oraz $n - k$ porażek wynosi $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.
- k sukcesów w n-elementowej serii możemy uzyskać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a więc otrzymujemy wzór Bernoulliego.

Przykłady

Strzelasz z łuku do celu, prawdopodobieństwo trafienia wynosi $\frac{1}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii pięciu strzałów:

1. nie trafisz ani razu?
2. trafisz dokładnie raz?
3. trafisz więcej niż raz?
4. trafisz co najwyżej raz?

$P(n,k,p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $p = \frac{1}{3}$, $n = 5$

1. $k = 0$: $P(5,0,\frac{1}{3}) = \binom{5}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243}$.
2. $k = 1$: $P(5,1,\frac{1}{3}) = \binom{5}{1} \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$.
3. $k => 1$: $1 - (P(5,0,\frac{1}{3}) + P(5,1,\frac{1}{3})) = \frac{131}{243}$
4. $k \leqslant 1$: $P(5,0,\frac{1}{3}) + P(5,1,\frac{1}{3}) = \frac{112}{243}$.

Myśl przekornie!

- Czy stosując zasadę indukcji matematycznej wykorzystujemy skończoną czy też nieskończoną liczbę przesłanek?
- Co to znaczy, że jeden ciąg *rośnie szybciej* od drugiego?
- Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne. Czy w rozwinięciach dziesiętnych liczb niewymiernych nie ma *żadnych* regularności? A co z zapisami w innej bazie liczbowej? A jak wyglądają *ułamki łańcuchowe* reprezentujące liczby?
- Czy każdy ciąg, który został podany przez wzór rekurencyjny może też zostać zdefiniowany przez wzór jawnie podający postać n-tego wyrazu, bez odwoływania się do wyrazów wcześniejszych? Czy to możliwe np. dla ciągu Fibonacciego?
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana cięciwa okręgu jednostkowego jest dłuższa od boku trójkąta równoramiennego wpisanego w ten okrąg?

Co musisz ZZZ (Zapamiętać-Ze-Zrozumieniem)

- Wariacje, permutacje, kombinacje.
- Trójkąt Pascala. Wzór dwumianowy. Liczby Stirlinga i Bella.
- Ciągi liczbowe: ograniczenie i rodzaje monotoniczności.
- Definiowanie ciągów i funkcji przez rekursję.
- Dowody z wykorzystaniem indukcji matematycznej.
- Skończona przestrzeń probabilistyczna.
- Prawdopodobieństwo wyznaczone przez częstość.
- Własności funkcji prawdopodobieństwa.
- Prawdopodobieństwo warunkowe.
- Niezależność zdarzeń. Prawdopodobieństwo całkowite.
- Wzór Bayesa. Schemat Bernoulliego.