LOGIKA WSPÓŁCZESNA (1): KLASYCZNA LOGIKA PIERWSZEGO RZĘDU

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

Niniejszy tekst to pierwsza część notatek do pięciu wykładów dla Studium Doktoranckiego Wydziału Neofilologii UAM. Wykłady mają na celu ukazanie – w wielkim skrócie – wybranych pojęć i twierdzeń współczesnej logiki. Omawiane tematy to kolejno:

1. Klasyczna logika pierwszego rzędu
2. Wybrane logiki nieklasyczne
3. Metalogika
4. Logika w ogólnej metodologii nauk
5. Semiotyka logiczna.

Forma wykładów podyktowana jest tym, że audytorium stanowią filolodzy. Skupiamy się zatem na wprowadzeniu wybranych ważnych pojęć logicznych oraz informacjach o niektórych twierdzeniach, pomijając szczegóły dowodów formalnych.

Logika jest fenomenem kulturowym specyficznym dla cywilizacji Zachodu – w żadnym innym kręgu kulturowym rozważania logiczne nie przybrały tak rozwiniętej postaci jak właśnie na Zachodzie. W najszerszym rozumieniu tego terminu, *logika* (*logica magna*) obejmuje trzy działy:

1. logikę formalną (obecnie: matematyczną),
2. semiotykę logiczną,
3. ogólną metodologię nauk.

Pomijamy w naszym przedstawieniu aspekty historyczne, skupiając się, zgodnie z tytułem wykładów, na ustaleniach współczesnych.

Logika wyrasta z analizy rozumowań przeprowadzanych w językach etnicznych (niektórzy wolą mówić: w języku *naturalnym*, bądź w języku *potocznym*). Przekształca się później w analizę języka *nauki*. *Logika formalna*, w jej obecnej szacie matematycznej, może być traktowana jako gałąź matematyki. W istocie, jest dość ściśle powiązana z różnymi dyscyplinami matematycznymi. Analiza języka nauki oraz rozumowań w naukach przeprowadzanych stanowi trzon *ogólnej metodologii nauk*. Współczesna *semiotyka logiczna* wykorzystuje natomiast środki pojęciowe oraz metody badawcze logiki formalnej w analizie języków etnicznych.

Logika matematyczna to stosunkowo młoda dyscyplina – jej początki sięgają połowy XIX wieku, ustalenie pewnych paradygmatów to pierwsza połowa wieku XX, a bardzo intensywny rozwój i dywersyfikacja badań to druga połowa poprzedniego stulecia. W całym wieku XX logika matematyczna była inspirowana problemami samej matematyki, po części również zagadnieniami wyrosłymi z analiz filozoficznych oraz językoznawczych.

Czy mamy do czynienia z jedną logiką, czy też z wielością logik? Należy odróżniać termin *logika* oznaczający dyscyplinę naukową od terminu *logika*, rozumianego jako *system logiczny*. W tym drugim rozumieniu jest wiele logik. Czasami podaje się lapidarne określenia w rodzaju:

1. *Logika to usystematyzowany zespół niezawodnych reguł wnioskowania.*
2. *Logika to język wraz z określoną w nim operacją konsekwencji.*
3. *Logika to trójka uporządkowana* (L, C, S)*, gdzie* L *jest językiem,* C *określoną w nim operacją konsekwencji, a* S *semantyką języka* L*.*

Jak zobaczymy, operacja konsekwencji to funkcja, która każdemu zbiorowi *przesłanek* przyporządkowuje zbiór wszystkich *wniosków* z tych przesłanek. Interesujemy się przede wszystkim operacjami konsekwencji wyznaczonymi przez *niezawodne reguły wnioskowania* (ewentualnie także przyjmowane *aksjomaty*). Regułą wnioskowania jest każdy zbiór par uporządkowanych, złożonych ze zbioru formuł (przesłanek) oraz formuły (wniosku). W praktyce przyjmujemy ponadto, że rozważane reguły zbudowane są wedle pewnych ustalonych schematów, odnoszących się do kształtu (składniowego) przesłanek oraz wniosku. Wreszcie, niezawodność reguły oznacza, że *zachowuje* ona wybrane *wartości logiczne*. W popularnym sformułowaniu, wnioskując wedle niezawodnej reguły wnioskowania od prawdziwych przesłanek nie dojdziemy do fałszywego wniosku. Najczęściej rozważamy dwie wartości logiczne, którymi mogą być dowolne dwa różne przedmioty, oznaczane np. 0 oraz 1 i nazywane – jeśli ktoś lubi nazywać – odpowiednio: *fałszem* oraz *prawdą*.

Formalny charakter logiki polega m.in. na tym, że abstrahuje się od *treści* wyrażeń. Wyrażenia języków systemów logicznych zbudowane są wyłącznie ze *zmiennych* (różnych typów) oraz *stałych logicznych* (pomijając nieistotne symbole pomocnicze). Zmienne są *wartościowane*; dla przykładu:

1. *zmienne zdaniowe* za wartości przyjmować mogą 0 i 1;
2. *zmienne nazwowe* za wartości przyjmować mogą denotacje nazw ogólnych, czyli zbiory elementów (z ustalonego uniwersum);
3. *zmienne indywidualne* za wartości przyjmować mogą elementy (ustalonego uniwersum).

Możliwe jest podanie definicji stałych logicznych, ale najczęściej określa się je po prostu poprzez wyliczenie, dla każdego rozważanego systemu logicznego. Do *stałych logicznych* zaliczamy m.in.:

1. *funktory prawdziwościowe* (cztery jednoargumentowe oraz szesnaście dwuargumentowych *ekstensjonalnych* funktorów zdaniotwórczych od argumentów zdaniowych);
2. *kwantyfikatory* (ogólny, szczegółowy, tzw. kwantyfikatory uogólnione);
3. *wybrane funktory* różnych kategorii syntaktycznych – np. funktory *modalne*, *epistemiczne*, inne funktory *intensjonalne*;
4. czasem również predykat *identyczności*.

Opis *składniowy* języków systemów logicznych polega na podaniu *indukcyjnych* definicji zbiorów wyrażeń ustalonych kategorii syntaktycznych (*termów*, *formuł*). Zasada jest zawsze taka sama: ustalamy najpierw zbiór wyrażeń *prostych* danej kategorii, a potem reguły otrzymywania wyrażeń *złożonych* z wyrażeń prostszych. W ten sposób określa się każdy zbiór wyrażeń (ustalonej kategorii) jako *najmniejszy* zbiór zawierający wyrażenia proste oraz domknięty na owe reguły tworzenia wyrażeń złożonych. Wyrażenia języków systemów logicznych są *jednoznaczne składniowo*.

Gdy dany jest już zbiór F formuł języka L, to przez (finitystyczną) *operację konsekwencji* w tym języku rozumiemy dowolną funkcję $C : \wp(F) \to \wp(F)$, która spełnia następujące warunki, dla dowolnych $X \subseteq F$ oraz $Y \subseteq F$:

1. $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)

2. jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)

3. $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)

4. $C(X)$ jest sumą wszystkich $C(Z)$, gdzie Z przebiega wszystkie skończone podzbiory X (finitarność).

Każda operacja konsekwencji jest pewnym *operatorem domknięcia*. Punkty stałe operacji konsekwencji C nazywają się jej *systemami dedukcyjnymi* (*teoriami*). Powyższa definicja pochodzi od Alfreda Tarskiego. Współcześnie rozważa się – głównie w celach aplikacyjnych (informatyka, filozofia, lingwistyka) – także inne rodzaje operacji konsekwencji (w szczególności, tzw. konsekwencje *niemonotoniczne*). Definicja Tarskiego pozwala uwzględnić zarówno konsekwencje polegające na *uznawaniu* zdań, jak też na ich *odrzucaniu*.

W praktyce rozważamy zwykle operacje konsekwencji wyznaczone przez podany wyraźnie zestaw reguł wnioskowania (ewentualnie również aksjomaty – choć aksjomaty zawsze traktować możemy jako bezprzesłankowe reguły wnioskowania). Niech zatem, dla ustalonych L (język) oraz F (zbiór wszystkich formuł), R będzie zbiorem (finitarnych) reguł wnioskowania, czyli zbiorem relacji $r \subseteq \wp_{fin}(F) \times F$, gdzie $\wp_{fin}(F)$ oznacza zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru F. Poprzedniki każdej relacji r nazywamy *przesłankami* reguły r, a jej następniki – *wnioskami* reguły r. Zakłada się przy tym ponadto, że dla każdej takiej relacji r liczebność jej zbiorów przesłanek jest ustalona. Reguły wnioskowania mogą mieć zatem jedną, dwie, trzy, itd. przesłanki. Zwykle reguły wnioskowania zapisujemy w postaci schematycznej: jeśli przesłankami reguły r są $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a jej wnioskiem β, to schematycznym zapisem r jest:

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}.$$

Elementy reguły r nazywa się czasem jej *sekwentami*.

Mówimy, że *formuła β jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X za pomocą reguł ze zbioru R*, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ taki, że:

1. β jest identyczna z α_n,

2. dla dowolnej $i \leqslant n$, albo α_i jest elementem zbioru X, albo istnieją wskaźniki $i_1, \ldots, i_k < i$ oraz istnieje reguła r należąca do R takie, że para złożona ze zbioru przesłanek $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\}$ oraz wniosku α_i należy do r.

Jeśli formuła β jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X za pomocą reguł ze zbioru R, to piszemy $\beta \in C_R(X)$. Każdy ciąg $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ spełniający podane wyżej warunki nazywamy *dowodem formuły β ze zbioru (założeń) X (przy użyciu reguł wnioskowania ze zbioru R)*. Zbiór $C_R(X)$ to zatem zbiór wszystkich formuł posiadających dowód ze zbioru założeń znajdujących się w X. Można sprawdzić, że tak określona operacja $C_R : \wp(F) \to \wp(F)$ jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego. Podobnie zdefiniować można operację $C_{R,A}$ wyprowadzalności formuł ze względu na zbiór reguł wnioskowania R oraz zbiór *aksjomatów* $A \subseteq F$:

$$C_{R,A}(X) = C_R(A \cup X).$$

Zbiór $C_R(\emptyset)$ (lub, odpowiednio, zbiór $C_{R,A}(\emptyset)$ nazywany jest zbiorem *tez* operacji konsekwencji C_R (odpowiednio, operacji $C_{R,A}$). Dla pewnych celów wygodne jest również rozważanie *wyprowadzalności w stopniu k*, którego (indukcyjna) definicja jest następująca:

1. $C_R^0(X) = X$
2. $C_R^{k+1}(X) = C_R^{k+1}(X) \cup \{\beta \in F : (\exists r \in R)(\exists Y \subseteq C_R^k(X))\ (Y, \beta) \in r\}$
3. $C_R^\infty(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_R^k(X)$.

Definicja ta formalizuje pojęcie posiadania dowodu o długości co najwyżej k i jest szczególnie użyteczna w metodzie *dowodów założeniowych*.

Wszystkie operacje konsekwencji dla ustalonego języka L i zbioru wszystkich jego formuł F tworzą pewną strukturę porządkową (tzw. *kratę*). Ów porządek jest określony następująco: $C_1 \preceq C_2$ dokładnie wtedy, gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ dla wszystkich $X \subseteq F$. Jeśli $C_1 \preceq C_2$, to mówimy, że C_2 jest *nadkonsekwencją* C_1 (oraz że C_1 jest *podkonsekwencją* C_2).

Gdy rozważamy system logiczny z operacją konsekwencji C_R (lub $C_{R,A}$), to reguły należące do R nazywamy regułami *pierwotnymi*. Warto wspomnieć o innych jeszcze rodzajach reguł związanych z dowolną operacją konsekwencji C_R (lub $C_{R,A}$, odpowiednio):

1. Reguła r jest *dopuszczalna* ze względu na C_R (lub $C_{R,A}$, odpowiednio), gdy – mówiąc intuicyjnie – dołączenie jej do zbioru reguł pierwotnych nie zmienia zbioru tez. Gdy r jest dopuszczalna ze względu na $C_{R,A}$, to piszemy $r \in \mathrm{Perm}(R, A)$. Formalnie: $r \in \mathrm{Perm}(R, A)$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $Y \subseteq F$ oraz $\beta \in F$, jeśli $(Y, \beta) \in r$ oraz $Y \subseteq C_R(A)$, to $\beta \in C_R(A)$. Reguła dopuszczalna w jakimś systemie logicznym to zatem taka reguła, ze względu na którą zbiór tez tego systemu jest domknięty.

2. Reguła r jest *wyprowadzalna* ze względu na C_R (lub $C_{R,A}$), gdy – mówiąc intuicyjnie – dołączenie do aksjomatów A przesłanek Y z pary (Y, β) należącej do r powoduje wyprowadzalność formuły β. Gdy r jest wyprowadzalna ze względu na $C_{R,A}$, to piszemy $r \in \text{Der}(R, A)$. Formalnie: $r \in \text{Der}(R, A)$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $Y \subseteq F$ oraz $\beta \in F$, jeśli $(Y, \beta) \in r$, to $\beta \in C_R(X \cup Y)$.

Zamiast mówić: r jest dopuszczalna ze względu na (R, A), mówmy: r jest (R, A)-dopuszczalna (i podobnie dla wyprowadzalności). Każda reguła (R, A)-wyprowadzalna jest (R, A)-dopuszczalna, lecz nie na odwrót. Reguła jest (R, A)-wyprowadzalna dokładnie wtedy, gdy jest dopuszczalna ze względu na dowolne rozszerzenie zbioru reguł R oraz zbioru aksjomatów A. Słuchacze zapewne zetknęli się z pojęciem reguł wyprowadzalnych podczas elementarnego kursu klasycznego rachunku zdań, bazującego na metodzie dowodów założeniowych.

Wreszcie, ważne jest także pojęcie reguły *strukturalnej*. W dydaktyce logiki używa się właściwie wyłącznie takich reguł wnioskowania. Jednak dla – choćby intuicyjnego – określenia własności strukturalności potrzebne są pewne dodatkowe pojęcia. Niech $e : At \to F$ będzie dowolną funkcją przyporządkowującą każdej formule prostej (w przypadku rachunków zdaniowych: każdej zmiennej zdaniowej) jakąś formułę ze zbioru F. Wtedy e można jednoznacznie rozszerzyć w naturalny sposób do homomorfizmu $h^e : F \to F$. Mówimy, że reguła r jest *strukturalna*, gdy dla wszystkich $X \subseteq F$, $\beta \in F$ oraz $e : At \to F$: jeśli $(X, \beta) \in r$, to $(h^e[X], h^e(\beta)) \in r$, gdzie $h^e[X]$ oznacza obraz X względem h^e. Intuicyjnie mówiąc, reguła strukturalna zawiera wszystkie pary: (zbiór przesłanek, wniosek), będące podstawieniami jakiejkolwiek pary należącej do tej reguły.

Na zakończenie tego wstępu rozważmy prosty przykład – znany być może słuchaczom *implikacyjno-negacyjny klasyczny rachunek zdań*, w jednej z wersji aksjomatycznych i w nieco innej notacji niż zwykle rozważana. *Alfabet* języka $L_\heartsuit$ zawiera wyłącznie:

1. wszystkie elementy nieskończonego zbioru $A_\heartsuit = \{\heartsuit_1, \heartsuit_2, \heartsuit_3, \ldots\}$ (zmienne zdaniowe);
2. dwa symbole: § oraz ★ (odpowiednio: symbol implikacji oraz symbol negacji).

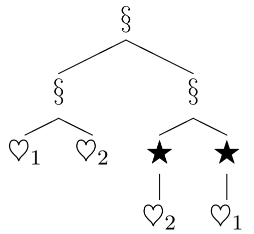
Zbiór $F_\heartsuit$ wszystkich *formuł* języka $L_\heartsuit$ definiujemy przez indukcję:

1. $A_\heartsuit \subseteq F_\heartsuit$
2. Jeśli $\alpha, \beta \in F_\heartsuit$, to $\S\alpha\beta \in F_\heartsuit$

3. Jeśli $\alpha \in F_{\heartsuit}$, to $\bigstar\alpha \in F_{\heartsuit}$

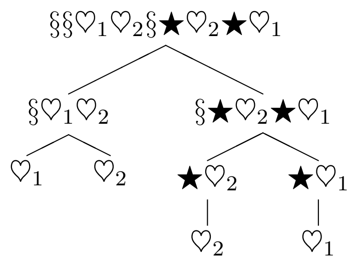
4. Każdy element w $F_{\heartsuit}$ jest bądź elementem $A_{\heartsuit}$, bądź powstaje z elementów $F_{\heartsuit}$ przez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Formułą języka $L_{\heartsuit}$ jest np. ciąg: $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$. Jej budowę składniową można reprezentować poprzez *drzewa składniowe*, np. tak:



Na liściach tego drzewa umieszczono elementy zbioru $A_{\heartsuit}$, w jego pozostałych wierzchołkach symbole $\S$ lub $\bigstar$, w korzeniu *funktor główny* rozważanej formuły.

Inny sposób drzewowej reprezentacji struktury składniowej tej samej formuły, czyli $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$:



Wierzchołki tego drzewa oznakowano wszystkimi *podformułami* rozważanej formuły.

Aksjomatami naszego systemu są wszystkie formuły o postaci (tu α, β, γ są elementami $F_{\heartsuit}$):

1. $\S\S\alpha\beta\S\S\beta\gamma\S\alpha\gamma$

2. $\S\S\bigstar\alpha\alpha\alpha$

3. $\S\alpha\S\bigstar\alpha\beta$.

Reguła odcinania ogona[1] to zbiór wszystkich par postaci $(\{\S\alpha\beta, \alpha\}, \beta)$, gdzie $\alpha, \beta \in F_{\heartsuit}$. *Dowodem* formuły α ze zbioru wyrażeń X nazywamy każdy skończony ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczne z α_n, a każdy element α_k tego

[1] To tylko nazwa wprowadzona dla zabawy. Naprawdę używa się nazwy *reguła odrywania*.

ciągu jest bądź aksjomatem $L_\heartsuit$, bądź elementem X, bądź drugim elementem pary w regule odcinania ogona, gdzie pierwszy element tej pary składa się z formuł występujących w tym ciągu wcześniej niż α_k. Dla dowolnego $X \subseteq F_\heartsuit$ niech:

$$C_\heartsuit(X) = \{\alpha \in F_\heartsuit : \text{ istnieje dowód } \alpha \text{ z } X\}.$$

Wtedy $C_\heartsuit$ jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego. *Tezą* systemu $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$ jest każda formuła α taka, że istnieje dowód α z aksjomatów $(L_\heartsuit, C_\heartsuit)$.

Formuły języka $L_\heartsuit$ zapisywane były w *notacji polskiej* (*prefiksowej*): symbol funktora przed symbolami jego argumentów. W *notacji infiksowej* symbol funktora dwuargumentowego występuje między symbolami swoich argumentów (podobnie jak czynimy to np. w zapisach arytmetycznych). Notacja infiksowa wymaga dodania do alfabetu *symboli pomocniczych*: nawiasu lewego (oraz nawiasu prawego). W notacji infiksowej formuła $\S\S\heartsuit_1\heartsuit_2\S\bigstar\heartsuit_2\bigstar\heartsuit_1$ przyjmuje następującą postać: $(\heartsuit_1\S\heartsuit_2)\S((\bigstar\heartsuit_2)\S(\bigstar\heartsuit_1))$, a podane wyżej aksjomaty mają postać:

1. $(\alpha\S\beta)\S((\beta\S\gamma)\S(\alpha\S\gamma))$
2. $((\bigstar\alpha)\S\alpha)\S\alpha$
3. $\alpha\S((\bigstar\alpha)\S\beta)$.

Semantyka języka $L_\heartsuit$ opisana jest w sposób następujący. Niech dane będą dowolne dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. *Wartościowaniem* (zmiennych zdaniowych) nazywamy dowolny nieskończony (przeliczalny) ciąg tych przedmiotów. Wartościowania to zatem ciągi o postaci $w = (w_1, w_2, \ldots)$, gdzie każdy element w_i jest równy 0 bądź 1. *Wartość $val(\alpha, w)$ formuły α przy wartościowaniu w* definiujemy indukcyjnie:

1. $val(\heartsuit_i, w) = w_i$;
2. jeśli $val(\alpha, w) = 0$, to $val(\bigstar\alpha, w) = 1$,
   a jeśli $val(\alpha, w) = 1$, to $val(\bigstar\alpha, w) = 0$;
3. $val(\S\alpha\beta, w) = 0$ tylko wtedy, gdy $val(\alpha, w) = 1$ oraz $val(\beta, w) = 0$; natomiast w pozostałych (trzech) przypadkach $val(\S\alpha\beta, w) = 1$.

Formuła α jest *prawem* (*tautologią*) tego systemu logicznego, gdy $val(\alpha, w) = 1$ dla wszystkich wartościowań w. Formuła β *wynika logicznie* ze zbioru formuł X, gdy: dla wszystkich wartościowań w, jeśli $val(\alpha, w) = 1$ dla każdej $\alpha \in X$, to $val(\beta, w) = 1$. Rozważany system ma własność *rozstrzygalności*: istnieją algorytmy, pozwalające rozstrzygnąć o dowolnej formule, czy jest ona prawem, czy też nie jest. Podstawowy związek między składnią a semantyką wyraża *twierdzenie o pełności*: dla dowolnego $X \subseteq F_\heartsuit$ oraz $\alpha \in F_\heartsuit$ zachodzi równoważność

$\alpha \in C_{\heartsuit}(X)$ (czyli α ma dowód z X) wtedy i tylko wtedy, gdy α wynika logicznie z X.

Gdy w tej równoważności za X weźmiemy pusty zbiór formuł, to otrzymujemy:

α jest tezą (rozważanego systemu) dokładnie wtedy, gdy α jest tautologią (tego systemu).

2 Klasyczna logika pierwszego rzędu FOL

Klasyczna logika pierwszego rzędu (FOL – *first order logic*) to współczesny *elementarz logiczny*. Jego początki sięgają drugiej połowy XIX wieku, a inspiracje do jego rozwoju były natury zarówno matematycznej, jak i filozoficznej oraz lingwistycznej. Poniżej wysłowimy niektóre najważniejsze definicje oraz przytoczymy (bez dowodów) pewne podstawowe twierdzenia dotyczące FOL. Notatka niniejsza nie jest, rzecz jasna, żadnym podręcznikiem FOL; listę wybranych podręczników podano na końcu tekstu.

2.1 Składnia

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — *zmienne indywiduowe*,

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathbb{N})$ — *predykaty*,

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathbb{N})$ — *symbole funkcyjne*,

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — *stałe indywiduowe*,

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — *stałe logiczne*,

$\Sigma_6 = \{\, , \, , \, (\, , \,)\}$ — *symbole pomocnicze*.

Stosujemy następującą terminologię:

1. $P_i^{n_i}$ nazywamy *n_i-argumentowym predykatem*,
2. $f_j^{n_j}$ nazywamy *n_j-argumentowym symbolem funkcyjnym*,

3. symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem generalnym*,

4. symbol $\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem egzystencjalnym*,

5. symbole: $\wedge$ (*koniunkcja*), $\vee$ (*alternatywa*), $\rightarrow$ (*implikacja*), $\neg$ (*negacja*) i $\equiv$ (*równoważność*) to znane słuchaczom funktory prawdziwościowe,

6. symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy *sygnaturą*. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathbb{N}$ (= zbiór wszystkich liczb naturalnych).

Wyrażeniem języka FOL nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka. Interesują nas jednak nie dowolne ciągi symboli języka FOL, lecz jedynie niektóre, o budowie składniowej dopuszczającej sensowne interpretacje, a mianowicie termy oraz formuły.

Definicja *termu* języka FOL jest indukcyjna:

1. wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;

2. jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

3. nie ma innych termów (języka FOL) prócz zmiennych indywiduowych, stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły 2.

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy *termami bazowymi*.

Formułą atomową języka FOL nazywamy każde wyrażenie tego języka o postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami. Definicja *formuły* języka FOL jest indukcyjna:

1. każda formuła atomowa jest formułą;

2. jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;

3. jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;

4. nie ma innych formuł (języka FOL) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł 1–3.

W praktyce stosujemy zwykle pewne konwencje, które pozwalają pomijać niektóre nawiasy, zwiększając czytelność – zwłaszcza długich – formuł.

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest *na tym miejscu związana*, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n. Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona *na tym miejscu wolna w* α. Mówimy, że x_n jest *zmienną wolną w* α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Mówimy, że term t jest *podstawialny* za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w t. Jeśli term t jest podstawialny za x_i do α, to żadna zmienna występująca w t nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α. W szczególności, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i w α, jeżeli po podstawieniu x_j w miejscach wolnych wystąpień x_i w α, zmienna x_j nie stanie się na tych miejscach związana w α. Tak więc, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_j nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x_i.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy *zdaniami* (języka FOL).

Definicja operacji $S(t, x, A)$ *podstawiania termu t za zmienną* x_i (w dowolnym termie A lub formule A języka FOL) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

1. $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j, gdy $i \neq j$
2. $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t, gdy $i = j$
3. $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
4. $S(t, x_i, f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j}))$ jest termem $f_j^{n_j}(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_{n_j}))$
5. $S(t, x_i, P_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j}))$ jest formułą $P_j^{n_j}(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_{n_j}))$
6. $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$
7. $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
8. $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$

9. $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
10. $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
11. $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
12. $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
13. $S(t, x_i, \alpha \to \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \to S(t, x_i, \beta)$
14. $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

2.2 Semantyka

W odróżnieniu od semantyki klasycznego rachunku zdań, którego semantyka jest stosunkowo uboga (dwa przedmioty i dwadzieścia funkcji prawdziwościowych), semantyka FOL jest znacznie bogatsza. Rozważa się w niej całkiem dowolne uniwersa (zbiory) całkiem dowolnych przedmiotów, które mogą być wzajem powiązane całkiem dowolnymi relacjami.

Nazwiemy *interpretacją języka o sygnaturze* σ dowolny układ $(M, \sigma, \triangle)$, gdzie M jest niepustym zbiorem, a $\triangle$ funkcją (*funkcją denotacji*) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

1. każdej stałej indywiduowej a_k element
$$\triangle(a_k) \in M;$$
2. każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową
$$\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i};$$
3. każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową
$$\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \to M.$$

Wtedy *strukturami relacyjnymi sygnatury* σ są dowolne układy $(M, \triangle[\sigma])$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy *uniwersum* $\mathfrak{M}$.

Dla $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ jest czasem wygodnie używać następujących oznaczeń:

1. $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, czyli dla oznaczenia zbioru M;

2. $\triangle^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury $\mathfrak{M}$.

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = (w_n)$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = (w_n) = (w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots)$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$(w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots).$$

Jeśli t jest termem sygnatury σ, a $(M, \triangle[\sigma])$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = (w_i)$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to *wartość termu* t *w strukturze* $(M, \triangle[\sigma])$ *przy wartościowaniu* w, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

1. gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
2. gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
3. gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie.

Niech $\mathfrak{M} = (M, \triangle[\sigma])$ będzie strukturą relacyjną sygnatury σ, w wartościowaniem w M, a α formułą sygnatury σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ *spełniania formuły* α *w strukturze* $\mathfrak{M}$ *przez wartościowanie* w ma następującą postać indukcyjną:

1. $\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi
$$\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}));$$
2. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
3. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
4. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
5. $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy bądź $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$, bądź nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ani nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

6. $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;

7. $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;

8. $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła α jest *prawdziwa w* $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$. Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$. Mówimy, że formuła α jest *fałszywa* w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ona prawdziwa w $\mathfrak{M}$.

Prawem (*Tautologią*) FOL (sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest *modelem* X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$. Mówimy, że α *wynika logicznie* z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{fol} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X *wynika logicznie* (na gruncie FOL) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \models_{fol} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{fol} Y$, to piszemy $X \not\models_{fol} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{fol} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{fol} \alpha$.

Można pokazać, że:

1. wartość termu w ustalonej interpretacji zależy tylko od wartościowań zmiennych wolnych tego termu;

2. spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły (w szczególności zatem zdania – formuły bez zmiennych wolnych – albo spełnione są w danej interpretacji przez wszystkie wartościowania, albo nie sa spełnione przez żadne wartościowanie).

Definicje powyższych pojęć semantycznych pochodzą od Alfreda Tarskiego. Są formalizacją klasycznego pojęcia prawdy, wywodzącego się od Arystotelesa. Rozważa się również inne propozycje definiowania prawdziwości (koherencyjna, pragmatyczna), ale dominujące jest przedstawione wyżej ujęcie.

Warto może przypomnieć, że Tarski pokazał również, iż nie jest możliwe podanie trafnej merytorycznie oraz poprawnej formalnie definicji pojęcia prawdy dla języków etnicznych (języka naturalnego, potocznego). Każdy język etniczny zawiera swój własny *metajęzyk*. Jest to konsekwencją *uniwersalności* języków etnicznych: w każdym z nich można mówić o nich samych (w każdym takim języku można mówić o jego wyrażeniach). Ma to jednak również i tę konsekwencję, że w języku etnicznym sformułować można *antynomię kłamcy*, co – jak właśnie wykazał Tarski – blokuje możliwość podania dla takiego języka definicji prawdy spełniającej wymogi merytorycznej trafności i formalnej poprawności.

2.3 Operacje konsekwencji

Współcześnie rozważa się wiele różnych operacji konsekwencji w języku FOL. Do najbardziej popularnych należą:

1. konsekwencje *aksjomatyczne* (w stylu Hilberta)
2. konsekwencje bazujące na *dedukcji naturalnej* (w stylu Gentzena lub Jaśkowskiego)
3. konsekwencje bazujące na *tablicach analitycznych* (w stylu Smullyana)
4. konsekwencje bazujące na *rezolucji* (wraz z procedurami *unifikacji*)
5. konsekwencje bazujące na *rachunkach sekwentów* Gentzena.

Wszystkie wymienione operacje konsekwencji są *równoważne*, w tym sensie, że wyznaczone przez nie zbiory tez pokrywają się. W zależności od celu, stosuje się w praktyce tę lub inną operację konsekwencji. Niektóre zalecają się szczególnie ze względów dydaktycznych (jak np. dedukcja naturalna), inne mają pożyteczne zastosowania w automatycznym dowodzeniu twierdzeń (jak np. rezolucja lub tablice analityczne).

Dla przykładu, podamy (bardzo tradycyjną) konsekwencję aksjomatyczną dla FOL. Niech α, β i γ będą dowolnymi formułami języka FOL. *Schematami aksjomatów* dla FOL są wszystkie formuły następującej postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$

- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- (A14) $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

Można sprawdzić, że wszystkie te schematy są tautologiczne – są prawami FOL.

Podobnie jak aksjomaty, również reguły wnioskowania dobierać można na różnorakie sposoby. W tym wykładzie przyjmiemy, że *regułami pierwotnymi* (aksjomatycznego ujęcia) FOL są:

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \to \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

Reguła generalizacji:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n\ \alpha}.$$

Zauważmy, że szczególnymi przypadkami schematów (A14) oraz (A15) są, odpowiednio:

- (A14*) $\forall x_n\ \alpha \to \alpha$
- (A15*) $\alpha \to \exists x_n\ \alpha$.

Jest tak oczywiście dlatego, że dowolna zmienna x_n jest podstawialna sama za siebie w dowolnej formule.

Mówimy, że:

- Formuła α jest *tezą* FOL wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Każdy taki ciąg $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ nazywamy *dowodem* formuły α.

- Formuła α jest *wyprowadzalna* w FOL ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Jeśli α jest wyprowadzalna z X, to piszemy $X \vdash_{fol} \alpha$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{fol} \alpha$.

- Zbiór formuł Y jest *wyprowadzalny* ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{fol} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y. Jeśli Y jest wyprowadzalny z X, to piszemy $X \vdash_{fol} Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{fol} Y$.

- Reguła $\mathcal{R}$ jest *wyprowadzalna* (*wtórna*) w FOL, jeśli $X \vdash_{fol} \alpha$ dla każdego sekwentu (X, α) należącego do $\mathcal{R}$.

Operacja C_{fol} *konsekwencji aksjomatycznej* w FOL jest zdefiniowana następująco dla dowolnego zbioru formuł X języka FOL:

$$C_{fol}(X) = \{\alpha : X \vdash_{fol} \alpha\}.$$

Tak zdefiniowana operacja C_{fol} spełnia warunki z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

Następujące reguły są wyprowadzalne w FOL:

- (R14)
$$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

- (R15)
$$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

- (R16)
$$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w α.

- (R17)
$$\frac{\forall x_n\,(\alpha \to \beta)}{\exists x_n\,\alpha \to \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w β.

- Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \forall x_n\,\beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$:
$$\frac{\exists x_n\,\alpha \to \beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego RD$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x_n\,\beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w α.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:
$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x_n\,\alpha \to \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w β.

Można pokazać, że formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo tezą FOL, albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji bądź jakiejkolwiek reguły wyprowadzalnej w FOL.

Zauważmy, że z każdej tezy klasycznego rachunku zdań można otrzymać tezę FOL, poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych dowolnymi formułami języka FOL. Czasami mówi się krótko, choć nie całkiem precyzyjnie (gdyż mówimy o tezach w różnych językach), że każda teza klasycznego rachunku zdań jest także tezą FOL.

Następujące formuły są tezami FOL, dla dowolnych formuł α oraz β (stosujemy tu zwyczajową konwencję – piszemy np. x, y, z zamiast x_n, x_m, x_k, itp. gdy nie prowadzi to do nieporozumień; zapis $\alpha(x/t)$ oznacza wynik podstawienia termu t za zmienną x w formule α):

1. $\forall x\ \alpha \to \alpha$.
2. $\forall x\ \alpha \to \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
3. $\alpha \to \exists x\ \alpha$.
4. $\alpha(x/t) \to \exists x\ \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.
6. $\forall x\ \alpha \equiv \forall y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
7. $\exists x\ \alpha \equiv \exists y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
8. $\forall x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
9. $\exists x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
10. $\forall x \forall y\ \alpha \equiv \forall y \forall x\ \alpha$.
11. $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$.
12. $\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$.
13. $\forall x \forall y\ \alpha \to \forall x\ \alpha(x/y)$, o ile x jest podstawialna za y w α.
14. $\exists x\ \alpha(x/y) \to \exists x \exists y\ \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α.
15. $\neg \forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg \alpha$.
16. $\neg \exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg \alpha$.
17. $\forall x\ \alpha \equiv \neg \exists x\ \neg \alpha$.
18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.
19. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$.
20. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha(x/t)) \to \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β.
21. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$.
22. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$.
23. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \exists x\ \beta$.

24. $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \exists x\ \beta)$.

25. $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \beta)$.

26. $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

27. $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

28. $\exists x\ (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

29. $\exists x\ (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

30. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta)$.

31. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$.

32. $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta)$.

33. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$.

34. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

35. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

36. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

37. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

38. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

39. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

40. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

41. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

42. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \forall x\ (\beta \rightarrow \alpha))$.

43. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta)$.

44. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \equiv \exists x\ \beta)$.

Podamy, dla przykładu, dowód jednej z tez. Stosujemy przy tym zwykle używaną konwencję: kroki dowodowe są numerowane z lewej strony, komentarze wskazujące, jak powstaje dany krok dowodowy podane są z prawej strony. Komentarz o postaci: (An) α/β oznacza, że w schemacie aksjomatów o numerze n

piszemy formułę β w miejsce występującej w nim formuły α. Warto może pamiętać, że każdy dowód ma także strukturę *drzewa*, w którego korzeniu znajduje się dowodzona formuła, którego liście są aksjomatami, a pozostałe wierzchołki odpowiadają krokom dowodowym.

DOWÓD TEZY 5. $\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$(\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha))$	(A1): $\alpha/\forall x\ \alpha$, β/α, $\gamma/\exists x\ \alpha$
4.	$(\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha)$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	RO: 4, 2.

Dowody w aksjomatycznym ujęciu FOL mogą być kłopotliwe dla osób bez należytej wprawy (od jakich aksjomatów zacząć dowód?). Ułatwieniem jest m.in. możliwość korzystania z twierdzenia o dedukcji w wersji syntaktycznej (patrz niżej).

2.4 Kilka własności

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) *niesprzeczny* wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{fol} \alpha$ oraz $X \vdash_{fol} \neg\alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest (syntaktycznie) *sprzeczny*.

Inną ważną własnością metalogiczną jest zupełność. Mówimy, że zbiór formuł języka FOL (o sygnaturze σ) jest *zupełny* (ze względu na tę sygnaturę) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α (w języku sygnatury σ) bądź α jest elementem $C_{fol}(X)$, bądź $\neg\alpha$ jest elementem $C_{fol}(X)$.

Punkty stałe operacji C_{fol}, czyli takie zbiory X formuł, dla których $C_{fol}(X) = X$ nazywamy *teoriami* lub *systemami dedukcyjnymi*.

Do najważniejszych *metatwierdzeń* dotyczących aksjomatycznego (w stylu Hilberta) ujęcia FOL należą m.in.:

1. *Lemat Lindenbauma*. Jeśli X jest zbiorem niesprzecznym, to istnieje niesprzeczna i zupełna teoria Y taka, że $X \subseteq Y$.

2. *Twierdzenie o pełności*. Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy α wynika logicznie z X. W szczególności, tezy FOL pokrywają się z tautologiami FOL.

3. *Twierdzenie o istnieniu modelu*. Zbiór formuł jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model.

4. *Twierdzenie o zwartości (w wersji semantycznej).* Zbiór formuł X ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model. Tak więc, X nie ma modelu dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór nie ma modelu.

5. *Twierdzenie o niesprzeczności*. Zbiór wszystkich tez FOL jest niesprzeczny.

6. *Twierdzenie Löwenheima-Skolema*. Jeśli X jest niesprzecznym zbiorem formuł, to X ma model *przeliczalny* (czyli o uniwersum równolicznym ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych).

7. *Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna).* Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka FOL zachodzi następująca równoważność:

   - $X \cup \{\alpha\} \vdash_{fol} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{fol} \alpha \to \beta$.

8. *Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja syntaktyczna).* Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka FOL zachodzą następujące równoważności:

   - (1) $X \vdash_{fol} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$.
   - (2) $X \vdash_{fol} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$.

9. *Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna).* Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

   $X \cup \{\alpha\} \models_{fol} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{fol} \alpha \to \beta$.

10. *Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).* Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

    - (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{fol} \neg\alpha$.
    - (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{fol} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{fol} \alpha$.

11. *Twierdzenie Churcha*. Zbiór wszystkich praw FOL nie jest rozstrzygalny.

Podręczniki podają dziesiątki dalszych twierdzeń, ustalających własności FOL – nie wymieniamy ich tutaj, gdyż w wielu przypadkach dla ich sformułowania potrzeba najpierw wprowadzić szereg dodatkowych pojęć. Zainteresowani słuchacze zechcą zwrócić uwagę np. na twierdzenia: Herbranda, Betha, Craiga, twierdzenie o prefiksowych postaciach normalnych, twierdzenie o neutralności logiki wobec stałych indywiduowych, predykatów oraz symboli funkcyjnych – każde z nich wyraża fundamentalne własności FOL.

Niektóre zestawy powyższych własności charakteryzują jednoznacznie logikę FOL, w tym sensie, że jest ona maksymalną logiką o tychże własnościach. Dla przykładu, I twierdzenie Lindströma ustala, że każda logika, która ma własność zwartości i w której zachodzi twierdzenie Löwenheima-Skolema jest równoważna z FOL. Trzeba oczywiście nadać tu precyzyjny sens takim terminom jak *równoważność* logik (i kilku innym). Powiemy o tym więcej na trzecim wykładzie.

2.5 Teorie elementarne

W języku FOL formułować można tzw. *teorie elementarne*. Gdy wyróżnimy pewien zbiór *stałych pozalogicznych* (predykatów, symboli funkcyjnych, stałych indywidualnych) S oraz zbiór Ax zdań, zwanych *aksjomatami* rozważanej teorii elementarnej T, to sama formalna definicja T jest następująca.

Teorią elementarną w języku FOL o sygnaturze S oraz zbiorze aksjomatów Ax nazywamy zbiór wszystkich formuł wyprowadzalnych na gruncie FOL ze zbioru aksjomatów Ax. Tak więc, T jest teorią elementarną, gdy

$$T = \{\alpha : Ax \vdash_{fol} \alpha\}.$$

Jeśli T jest teorią elementarną, to $C_{fol}(T) = T$, co wynika wprost z powyższej definicji. Przypomnijmy, że w przypadku dowolnego operatora konsekwencji C, *teoriami* (tego operatora) nazywamy jego punkty stałe, tj. takie zbiory X, dla których $X = C(X)$.

Dla przykładu, ważnymi teoriami elementarnymi są:

1. teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (z aksjomatem wyboru) ZFC
2. arytmetyka Peana PA
3. teoria algebr Boole'a
4. teoria grup
5. teoria gęstych liniowych porządków bez elementu pierwszego i ostatniego
6. geometria elementarna.

2.5.1 Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla

Jest to teoria w języku FOL z identycznością. Jedyną stałą pozalogiczną tej teorii jest dwuargumentowy predykat $\in$. Formułę $x \in y$ czytamy: x jest elementem y.
AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI ZF.
Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.
Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \equiv u = x \vee u = y)$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.
Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \exists u\ (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.
Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.
Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists u\ (u \in z \equiv u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n))$
gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.
Aksjomat nieskończoności:

$\exists x\ (\exists y\ (y \in x \wedge \neg \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y\ (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u\ (u \in z \equiv u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.
Schemat zastępowania:

$\forall u (\forall x \forall y \forall z\ (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v\ (v \in w \equiv \exists x\ (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\ (u \in x) \to \exists y(y \in x \land \forall z\ (z \in y \to \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć *Aksjomat wyboru*:

$\forall x((\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y)) \land \forall y \forall u\ (y \in x \land u \in x \to y = u \lor \neg \exists v\ (v \in y \land v \in u))) \to \exists w(\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y \land z \in w \land \forall v\ (v \in y \land v \in w \to v = z)))))$

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany ZFC.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także *aksjomaty dla identyczności*:

- $\forall x\ (x = x)$
- $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \land y = z \to x = z)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \land x \in z \to y \in z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \land z \in x \to z \in y))$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: *nieskończony* i *przeliczalny* należą do *metajęzyka*.

Fundamentalne znaczenie teorii mnogości dla współczesnej matematyki polega m.in. na tym, że wszystkie konstrukcje matematyczne wyrazić można za pomocą pojęcia zbioru oraz relacji należenia elementu do zbioru.

$* * *$

Oczywistym wymogiem, któremu sprostać powinna teoria jest jej niesprzeczność. Teorie sprzeczne nie są interesujące (z formalnego punktu widzenia), gdyż wszystko (każda formuła języka FOL) daje się w nich udowodnić. Na mocy twierdzenia o pełności, teoria jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model. Jednak czysto *syntaktyczne* dowody niesprzeczności teorii są, w ogólności, trudne do uzyskania. Stosuje się w nich np. takie techniki, jak: metoda interpretacji syntaktycznej, metoda relatywizacji kwantyfikatorów. Odnotujmy kilka faktów dotyczących niesprzeczności:

1. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{fol}(X)$ jest niesprzeczny.

2. Podzbiór zbioru niesprzecznego jest niesprzeczny. Nadzbiór zbioru sprzecznego jest sprzeczny.

3. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że α nie jest elementem zbioru $C_{fol}(X)$.

4. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny. W konsekwencji, zbiór X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór jest sprzeczny. [To także jedna z postaci twierdzenia o zwartości.]

5. Jeżeli $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem niesprzecznych zbiorów formuł oraz
$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots,$$
to zbiór $\bigcup\limits_i X_i$ jest niesprzeczny.

6. Jeśli α jest zdaniem (nie zawiera zmiennych wolnych) oraz $\neg\alpha$ nie należy do zbioru $C_{fol}(X)$, to zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest niesprzeczny.

Gdy X jest zbiorem aksjomatów jakiejś teorii T (w języku o określonej sygnaturze), a α zdaniem (tego języka) takim, że ani α, ani $\neg\alpha$ nie należy do $C_{fol}(X)$, to mówimy, że α jest zdaniem *nierozstrzygalnym* na gruncie aksjomatów X (lub: w teorii T). Jeśli teoria jest zupełna, to nie istnieją w niej zdania nierozstrzygalne. Oznacza to, że w teorii zupełnej każdy problem sformułowany w jej języku znajduje rozstrzygnięcie na gruncie tej teorii.

Większość ważnych, interesujących teorii matematycznych to teorie, które nie są zupełne. Należy przy tym pamiętać, że nie zawsze zupełność jest pożądaną własnością teorii: dla przykładu teoria algebr Boole'a (niezupełna) została zbudowana z myślą o wielu bardzo różnych interpretacjach. Zupełność jest natomiast własnością pożądaną, gdy budujemy teorię z myślą o jakiejś jednej, ustalonej interpretacji (jak np. w przypadku arytmetyki Peana). Jednak właśnie w przypadku arytmetyki Peana (oraz, ogólniej, w przypadku wszelkich teorii zawierających stosowną część tej arytmetyki) mamy do czynienia z brakiem zupełności.

Teorią zupełną jest natomiast wymieniona powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Fakt ten może zostać udowodniony przy pomocy techniki zwanej *eliminacją kwantyfikatorów*. Oto kilka faktów dotyczących pojęcia zupełności (pomijamy wszędzie określenie: „ze względu na dany język"):

1. Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{fol}(X)$ jest zupełny.

2. Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły α nie należącej do $C_{fol}(X)$ zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest sprzeczny.

2.6 Pożytki z FOL

Wymogiem, który stawia się współczesnym teoriom matematycznym jest przedstawienie ich w postaci *aksjomatycznej*. Każda teoria matematyczna ma pewien zestaw pojęć *pierwotnych*, charakteryzowanych przez *aksjomaty*. Pamiętamy, że teorie, które formułujemy w języku FOL nazywamy *elementarnymi*. Tak się akurat obecnie składa, że bodaj wszystkie rozważania matematyczne można w ostatecznym rozrachunku sprowadzić do *teorii mnogości*. Najczęściej używana jest teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (z aksjomatem wyboru), która jest teorią elementarną. Tak więc, pierwszy pożytek z FOL jest wyraźnie widoczny: można w jej języku sformułować teorię mnogości, która z kolei stanowi podstawę dla prawie wszystkich rozważań matematycznych.

Dalej, FOL ma wiele własności, które uważamy za „porządne" własności logiczne, jest bardzo zgrabnym systemem logicznym pod względem *dedukcyjnym*. Stanowi to poważny argument na rzecz tzw. *tezy pierwszego rzędu*, która głosi, iż to właśnie FOL jest *właściwą* logiką – *the logic*. Istnieją też argumenty przeciw tej tezie – o niektórych ograniczeniach FOL piszemy niżej.

FOL jest powszechnie używanym standardem, jeśli chodzi o *logiczne rekonstrukcje* teorii naukowych, w tym także teorii lingwistycznych, którymi może najbardziej zainteresowani są słuchacze tego cyklu wykładów. Ponadto – a jest to bardzo ważki argument – we wszelkich rozważaniach *metateoretycznych*, a więc gdy mówimy o teoriach, używamy przy tym FOL, raczej niż jakiejś logiki nieklasycznej. Tak więc, FOL króluje w rozważaniach prowadzonych w *ogólnej metodologii nauk*, której poświęcony będzie ostatni z wykładów tego kursu.

2.7 Ograniczenia FOL

Jednym z ważnych ograniczeń FOL jest nikczemnie mała – jak na potrzeby np. matematyki – „moc wyrażania" jej języka. W samym języku FOL (nie mówimy tu o językach teorii formułowanych w języku FOL) nie można wyrazić wielu pojęć, które są podstawowe dla uprawiania matematyki. Dla przykładu:

1. *Pojęcie nieskończoności*. Przypominamy, że zbiór jest *nieskończony* (w sensie Dedekinda), gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym razie jest *skończony*. Pojęcia nieskończoności (a więc także pojęcia skończoności) nie można zatem wyrazić w języku FOL, gdyż

w języku tym możemy kwantyfikować jedynie zmienne indywiduowe, a nie symbole funkcyjne (ani też predykaty).

2. *Pojęcie ciągłości*. Każdy zbiór liczb rzeczywistych, który ma ograniczenie górne, ma też kres górny (czyli najmniejsze ograniczenie górne). Również tego faktu nie można wyrazić w języku FOL, gdyż mowa w nim o dowolnych *zbiorach*, a w języku FOL możemy kwantyfikować jedynie zmienne indywiduowe.

Matematycy badają struktury „z dokładnością do izomorfizmu". Bez przytaczania precyzyjnych definicji można powiedzieć, że istotna jest tu wewnętrzna budowa rozważanych struktur, cała sieć powiązań miedzy elementami uniwersum. Tak więc, dla matematyka nieodróżnialne (izomorficzne) są struktury o „takiej samej" wewnętrznej budowie, niezależnie od natury elementów uniwersum. Struktury izomorficzne muszą mieć równoliczne uniwersa.

Jeśli wszystkie modele danej teorii są izomorficzne, to mówimy, że teoria jest *kategoryczna*. Ta własność jest jednak zbyt rygorystyczna – nie ma interesujących teorii (w języku FOL), które byłyby kategoryczne. Nieco ciekawszą jest własność związana z mocą uniwersum rozważanej teorii. Mówimy mianowicie, że teoria T jest *kategoryczna w mocy* κ, gdzie κ jest (nieskończoną) liczbą kardynalną, gdy wszystkie modele teorii T, których uniwersa mają moc κ są izomorficzne. Kategoryczność w ustalonej mocy oznacza zatem, że wszystkie modele tej mocy branej pod uwagę teorii są strukturalnie nieodróżnialne, są „tak samo zbudowane".

Przykładem teorii kategorycznej w mocy $\aleph_0$ jest podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Nie jest natomiast kategoryczna w mocy $\aleph_0$ arytmetyka Peana. A zatem aksjomaty tej arytmetyki nie charakteryzują *dokładnie jednej* (z dokładnością do izomorfizmu) struktury.

Porównuje się jednak również modele pod względem semantycznym, ze względu na to, co *prawdziwie* można o nich powiedzieć w języku ustalonej teorii. Tak więc, modele *elementarnie równoważne* danej teorii to te, w których prawdziwe są dokładnie te same zdania (języka owej teorii). Teoria T jest *zupełna*, jeśli wszystkie jej modele są elementarnie równoważne, czyli nieodróżnialne pod względem semantycznym. Ta definicja zupełności zgodna jest z podaną poprzednio. Jeśli dwa modele są izomorficzne, to są też elementarnie równoważne, ale nie na odwrót.

Ponieważ większość ważnych, interesujących teorii matematycznych nie jest zupełna, więc nie posiadają one też jakiegoś wyróżnionego jednego „z dokładnością do elementarnej równoważności" modelu. Dla przykładu, arytmetyka Peana ma kontinuum przeliczalnych, wzajemnie elementarnie nierównoważnych modeli.

Z pewnego twierdzenia udowodnionego przez Alfreda Tarskiego (tzw. *górnego twierdzenia Löwenheima-Skolema*) wynika, że jeśli teoria w języku FOL jest niesprzeczna (i nie ma modeli skończonych), to ma modele *dowolnych* mocy. Widać zatem, że język FOL nie nadaje się do *odróżniania* modeli teorii niesprzecznych, które interesuje matematyków, czyli do odróżniania „z dokładnością do izomorfizmu".

W wielu zastosowaniach filozoficznych – np. w analizie *przekonań* i *wiedzy*, podstawowych dla epistemologii – musimy wyjść poza logikę klasyczną. Takie funktory jak np.: *jest konieczne*, *jest możliwe*, *jest nakazane*, *jest dozwolone*, *wierzę, że*, *wiem, że* oraz wiele innych są wszystkie *intensjonalne* – ustalenie prawdziwości zdań zawierających te wyrażenia wymaga uwzględnienia czegoś więcej niż tylko wartości logiczne zdań opatrzonych tymi funktorami. Powiemy o tym więcej na następnym wykładzie.

Wreszcie, FOL ma także ograniczenia, jeśli chodzi o jej aplikacje lingwistyczne. Niewątpliwie, jakaś część rozumowań przeprowadzanych w językach etnicznych daje się dobrze reprezentować w języku FOL. Z pewnością FOL bardziej precyzyjnie oddaje „strukturę logiczną" wielu konstrukcji w językach etnicznych niż tradycyjna sylogistyka Arystotelesa. Niemniej jednak pogląd, że FOL w ostatecznym rozrachunku wystarcza do reprezentacji owej struktury języków etnicznych wydaje się wątpliwy.

Czy „przekłady" z języka FOL na języki etniczne (oraz na odwrót) są możliwe? A jeśli niemożliwe są wierne, „globalne" przekłady, to jaka część języka etnicznego ma swój przekład na język FOL? Poniżej ograniczymy się tylko do bardzo ogólnych uwag dotyczących zależności między językiem FOL a językami etnicznymi. Będą to przy tym uwagi raczej dogmatyczne.

Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi. Wszystko, co daje się wyrazić, jest wyrażalne w językach etnicznych. Pomijając niuanse gramatyczne oraz zasoby słownikowe (które zawsze można uzupełniać), wszystkie języki etniczne są zasadniczo *równoważne*, jeśli chodzi o treści w nich wyrażalne.

Język klasycznego rachunku zdań jest tworem o wiele młodszym niż poszczególne języki etniczne — liczy sobie zaledwie dwa i pół tysiąca lat. Z kolei, język FOL (klasycznego rachunku predykatów, klasycznego rachunku kwantyfikatorów) liczy sobie niewiele więcej niż sto lat. Inspiracje do zbudowania języka FOL były po części logiczne, po części matematyczne.

Czasami podkreśla się fakt, że formalizacja klasycznego pojęcia prawdy (podana przez Tarskiego, w terminach relacji spełniania omówionej wyżej) nie jest adekwatna np. dla zdań z różnego rodzaju modalnościami (aletycznymi, deontycznymi, epistemicznymi, itd.). Tak oczywiście jest, należy jednak zwrócić uwagę, że dla każdej z odpowiednich logik nieklasycznych (np. modalnych) formułuje się dobrze określone pojęcie spełniania i prawdy. Przy tym, w metajęzyku opisu korzysta się z teorii mnogości, a więc także z FOL. Podobne uwagi można sformułować pod adresem innych logik: np. wielowartościowych, temporalnych, itd.

Zwraca się również uwagę, że wiele fenomenów języków etnicznych (np. okazjonalność, wyrażenia abstrakcyjne wymagające kwantyfikacji wyższych rzędów, elipsa, metafory, idiomy, presupozycje, implikatury, performatywy, konstrukcje intensjonalne w ogólności, akty mowy, mowa zależna, itd.) wymyka się opisowi z bezpośrednim zastosowaniem semantyki FOL. Także w tych przypadkach, stosowne ujęcia metalogiczne korzystają jednak, w ostatecznym rozrachunku, z teorii mnogości oraz FOL.

Wreszcie, podkreśla się zasadniczą różnicę między językami etnicznymi a językami sztucznymi: w językach etnicznych nie występują w sposób wyraźny *zmienne* (zdaniowe lub nazwowe). Ten fakt jednak nie przesądza, iż *przekłady* z języków etnicznych na języki sztuczne (i na odwrót), zachowujące własności znaczeniowe, są niemożliwe. W istocie, istnieje wiele rozbudowanych systemów formalnych, w których takie przekłady się proponuje.

Czyżby więc, mimo wszystkich tych (i ewentualnie dalszych) zastrzeżeń, istnienie *globalnego* „przekładu" wszelkich wyrażeń dowolnego języka etnicznego na język FOL, z zachowaniem wszystkich własności semantycznych, było przesądzone? Sądzimy, że nie. Tylko wybrane rodzaje wyrażeń (zdań) języków etnicznych można „rozumnie" przekładać na język FOL. Aby taki przekład był sensowny, muszą być spełnione, m.in. następujące warunki:

1. rozważane wyrażenia muszą mieć porządnie określone *kategorie syntaktyczne* (odpowiadające predykatom, nazwom, funktorom różnych rodzajów);

2. trzeba się ograniczyć jedynie do funkcji *informacyjnej* (deskryptywnej) wyrażeń, pomijając (pierwszorzędowe w przypadku języków etnicznych) funkcje *pragmatyczne*, np. funkcję *perswazyjną*;

3. należy się ograniczyć do wyrażeń, a nie *wypowiedzi*, w przypadku tych drugich istotną rolę odgrywają ich *konteksty*, a to zmusza do wykroczenia poza klasyczne (w terminach relacji spełniania dla FOL) rozumienie prawdziwości.

„Przekłady" w drugą stronę (tj. z języka FOL na języki etniczne) są oczywiście o wiele łatwiejsze. Jednak również w tym przypadku napotykamy na pewne trudności („przekłady" pewnych konstrukcji logicznych źle „współżyją" gramatycznie, jeśli użyć tej niejasnej metafory).

Tak więc, dla przykładu, nie sprawia najmniejszych trudności dokonanie „przekładu" z języka polskiego na język FOL zdań poniższej postaci, w których jest jasne, co przełoży się na predykat, co na nazwę, z jakimi rodzajami kwantyfikacji mamy do czynienia, itd.:

1. Jan zdradził Klaudię z Cecylią.

2. Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.

3. Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.

4. Kto śpi, nie grzeszy.

Podobnie, zarówno językoznawca, jak i zwykły użytkownik języka polskiego łatwo znajdzie różnice znaczeniowe w podanych niżej parach wyrażeń:

1.	Umarł i dostał jakiś order.	Dostał jakiś order i umarł.
2.	Umarł bo dostał jakiś order.	Dostał jakiś order bo umarł.
3.	Umarł więc dostał jakiś order.	Dostał jakiś order więc umarł.
4.	Umarł chociaż dostał jakiś order.	Dostał jakiś order chociaż umarł.
5.	Umarł gdy dostał jakiś order.	Dostał jakiś order gdy umarł.
6.	Umarł mimo że dostał jakiś order.	Dostał jakiś order mimo że umarł.
7.	Nie dość, że umarł, to dostał jakiś order.	Nie dość, że dostał jakiś order, to umarł.

Drobnym problemem może okazać się oddanie tych różnic znaczeniowych w „przekładach” tych wyrażeń na język FOL – to, że są to wszystko koniunkcje zdań w różnym szyku nie oddaje przecież owych różnic znaczeń.

Pozwólmy sobie, dla relaksu, przywołać w tym miejscu garść wyrażeń o wymowie (w naszym mniemaniu) zabawnej. Komizm jest tu wynikiem różnorakich czynników, np.: błędów składniowych i semantycznych, elipsy, wieloznaczności, obecności różnego rodzaju implikatur, itd. Można, dla rozrywki, próbować znaleźć „przekłady” podanych wyrażeń na język FOL.

1. Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem, po kościele — przed kościołem.

2. Nad rzeką dziewczę doiło krowę, a w wodzie odbijało się odwrotnie.

3. Jan zakopał skarb razem z teściową.

4. Mimo starań lekarzy pacjent wyzdrowiał.

5. Po wielu staraniach lekarzy pacjent zmarł.

6. Popieramy program partii (tu wPiSz nazwę partii), oparty na przeświadczeniu o własnej słuszności.

7. Przez uderzenia pędzlem malarz uzyskuje smutek na twarzy modelki.

8. Całymi dniami pił po nocach.
9. Nie ulegaj przesądom, bo to przynosi pecha.
10. Będzie tak dobrze, że gorzej już nie będzie.
11. Wszyscy nie zapłacili.
12. Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie robił to, na co ma ochotę. A jeśli nie, to go do tego zmusimy.
13. Potrafię się oprzeć wszystkiemu, z wyjątkiem pokusy.
14. *Panie doktorze, cierpię na chroniczne niezdecydowanie, ale pewna tego nie jestem.*
15. Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?

Inną – poważną – sprawą jest to, czy same języki etniczne wyposażone są w jakieś własne, wewnętrzne mechanizmy inferencyjne. Czy istnieje coś takiego jak *logika języków etnicznych* (*logika języka naturalnego*)? Z odpowiedzią na to pytanie zmierzymy się na czwartym z tej serii wykładów.

* * *

Jako uzupełnienie powyższych – bardzo przecież ogólnych – uwag o logice pierwszego rzędu pozwalamy sobie załączyć dwa dodatki, traktujące, kolejno, o jej: semantyce oraz aksjomatycznym ujęciu. Konsekwencja aksjomatyczna jest tylko jedną z wielu wykorzystywanych operacji konsekwencji w logice pierwszego rzędu. Słuchaczy zainteresowanych innymi takimi operacjami (tablice analityczne, dedukcja naturalna, metoda rezolucji) uprzejmie zachęcamy do zajrzenia do wykładów o nich traktujących, przeznaczonych dla pierwszego roku studiów i powszechnie dostępnych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

http://www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka

Nie załączamy tych informacji bezpośrednio do niniejszych notatek, gdyż wtedy ich objętość (obecnie wynosząca około 600 stron) musiałaby wzrosnąć znacznie ponad tysiąc stron, a to byłoby chyba przesadą, jak na notatki do pięciu wykładów. Ponadto – niejako z przekory – nie włączamy do niniejszych notatek obszerniejszego opisu Klasycznego Rachunku Zdań. Zainteresowany słuchacz znajdzie te informacje np. na wskazanych wyżej stronach internetowych. Uważamy, że słuchacze – którzy przecież ukończyli studia – ów podstawowy fragment *Elementarza Logicznego* muszą już znać. Jakże bowiem przystępować do pisania doktoratu bez znajomości rudymentów Logiki?!

Zalecana literatura

Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna*. PWN, Warszawa.

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Cori, R., Lascar, D. 2000. *Mathematical Logic. A Course with Exercises*. Oxford University Press, Oxford. Part I: *Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems*. Part II: *Recursion Theory, Gödel's Theorems, Set Theory, Model Theory*.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*. Oxford University Press, Oxford.

Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

Hunter, G. 1982. *Metalogika*. PWN, Warszawa.

Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Mendelson, E. 1964. *Introduction to mathematical logic*. Princeton, N.J.

Mostowski, A. 1948. *Logika matematyczna*. Warszawa-Wrocław.

Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Shoenfield, J. 1967. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.

Tarski, A. 1965. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences.* Oxford University Press.

Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

3 Dodatek A: Semantyka FOL

Niniejszy dodatek zawiera tekst wykładów 16 i 17 w ramach dwusemestralnego kursu *Logika Matematyczna*. Stanowią one początek tych wykładów w semestrze letnim. Semestr zimowy poświęcony był omówieniu kilku operacji konsekwencji w klasycznym rachunku zdań. Wszystkie wykłady są powszechnie dostępne na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

http://www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka

Zarówno w Dodatku A, jak i w następującym po nim Dodatku B używamy skrótu KRP dla *Klasycznego Rachunku Predykatów*. W tekście wykładów używaliśmy skrótu FOL zamiast KRP.

16.1. Składnia języka KRP

16.1.1. Alfabet języka KRP

Niech I, J, K będą dowolnymi zbiorami. Rozpatrzmy alfabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$, gdzie:

$\Sigma_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ — ***zmienne indywiduowe***,

$\Sigma_2 = \{P_i^{n_i}\}_{i \in I}$ $(n_i \in \mathcal{N})$ — ***predykaty***,

$\Sigma_3 = \{f_j^{n_j}\}_{j \in J}$ $(n_j \in \mathcal{N})$ — ***symbole funkcyjne***,

$\Sigma_4 = \{a_k\}_{k \in K}$ — ***stałe indywiduowe***,

$\Sigma_5 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \equiv, \forall, \exists\}$ — ***stałe logiczne***,

$\Sigma_6 = \{\ ,\ ,\ (\ ,\ )\}$ — ***symbole pomocnicze***.

Stosujemy następującą terminologię:

- $P_i^{n_i}$ nazywamy n_i-***argumentowym predykatem***,
- $f_j^{n_j}$ nazywamy n_j-***argumentowym symbolem funkcyjnym***,
- symbol $\forall$ nazywamy ***kwantyfikatorem generalnym***,
- symbol $\exists$ nazywamy ***kwantyfikatorem egzystencjalnym***,

- symbole: $\wedge$ (***koniunkcja***), $\vee$ (***alternatywa***), $\rightarrow$ (***implikacja***), $\neg$ (***negacja***) i $\equiv$ (***równoważność***) znane są z wykładu semestru zimowego,
- symbole pomocnicze to: przecinek oraz lewy i prawy nawias.

Zbiór $\sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ nazwiemy *sygnaturą*. W dalszym ciągu mówić będziemy o pewnej ustalonej sygnaturze σ. Zwykle rozważa się przypadek, gdy $I = J = K = \mathbb{N}$ (= zbiór wszystkich liczb naturalnych).

Wyrażeniem języka KRP nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu tego języka. Interesują nas jednak nie dowolne ciągi symboli języka KRP, lecz jedynie niektóre, o budowie składniowej dopuszczającej sensowne interpretacje.

16.1.2. Termy języka KRP

Definicja ***termu*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) wszystkie zmienne indywiduowe x_n oraz wszystkie stałe indywiduowe a_k są termami;

(ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami, to wyrażenie $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ jest termem;

(iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy ***termami bazowymi***.

16.1.3. Formuły języka KRP

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami.

Definicja ***formuły*** języka KRP jest indukcyjna:

(i) każda formuła atomowa jest formułą;

(ii) jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;

(iii) jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;

(iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n \ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n \ (\alpha)$ nazywamy ***zasięgiem*** odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest ***na tym miejscu związana***, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n.

Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona ***na tym miejscu wolna w*** α.

Mówimy, że x_n jest ***zmienną wolną w*** α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Mówimy, że term t jest ***podstawialny*** za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w t.

Jeśli t jest podstawialny za x_i do α, to żadna zmienna występująca w t nie stanie się związana po podstawieniu t za wszystkie wolne wystąpienia x_i w formule α.

W szczególności, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i w α, jeżeli po podstawieniu x_j w miejscach wolnych wystąpień x_i w α, zmienna x_j nie stanie się na tych miejscach związana w α.

Tak więc, zmienna x_j jest podstawialna za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_j nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x_i.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy ***zdaniami*** (języka KRP).

Definicja operacji $S(t, x, A)$ ***podstawiania termu*** t ***za zmienną*** x_i (w dowolnym termie A lub formule A języka KRP) ma postać indukcyjną (poniżej t jest termem, x_i jest zmienną, a_j jest stałą, α i β są formułami, a reszta oznaczeń jest oczywista):

- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem x_j, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, x_j)$ jest termem t, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, a_j)$ jest termem a_j
- $S(t, x_i, f_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest termem $f_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, P_j(t_1, \ldots, t_n))$ jest formułą $P_j(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$
- $S(t, x_i, \neg(\alpha))$ jest formułą $\neg S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\forall x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ S(t, x_i, \alpha)$, gdy $i \neq j$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ (\alpha))$ jest formułą $\exists x_j\ (\alpha)$, gdy $i = j$
- $S(t, x_i, \alpha \wedge \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \wedge S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \vee \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \vee S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \rightarrow \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \rightarrow S(t, x_i, \beta)$
- $S(t, x_i, \alpha \equiv \beta)$ jest formułą $S(t, x_i, \alpha) \equiv S(t, x_i, \beta)$.

Ćwiczenie. Wzorując się na powyższej definicji, podaj definicję operacji **podstawiania zmiennej za zmienną w formule.**

16.2. Semantyka języka KRP

16.2.1. Interpretacje

Nazwiemy ***interpretacją języka o sygnaturze*** σ dowolny układ $\langle M, \sigma, \triangle \rangle$, gdzie M jest niepustym zbiorem, a $\triangle$ funkcją (***funkcją denotacji***) o dziedzinie σ, która przyporządkowuje:

- każdej stałej indywiduowej a_k element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu predykatowi $P_i^{n_i}$ relację n_i-argumentową $\triangle(P_i^{n_i}) \subseteq M^{n_i}$;

- każdemu symbolowi funkcyjnemu $f_j^{n_j}$ funkcję n_j-argumentową $\triangle(f_j^{n_j}) : M^{n_j} \to M$.

Wtedy ***strukturami relacyjnymi sygnatury*** σ są dowolne układy $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$, gdzie $\triangle$ jest funkcją denotacji, a $\triangle[\sigma]$ oznacza ciąg (indeksowany elementami zbioru $I \cup J \cup K$) wszystkich wartości funkcji σ. Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ jest strukturą relacyjną, to M nazywamy uniwersum $\mathfrak{M}$.

Jeśli $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ jest strukturą relacyjną, to czasem wygodnie jest używać następujących oznaczeń:

- $|\mathfrak{M}|$ dla oznaczenia uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, czyli dla oznaczenia zbioru M;
- $\triangle^{\mathfrak{M}}$ dla oznaczenia funkcji denotacji struktury $\mathfrak{M}$.

16.2.2. Wartościowania

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n\rangle$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = \langle w_n\rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots\rangle$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots\rangle.$$

Jeśli t jest termem sygnatury σ, a $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ strukturą relacyjną sygnatury σ oraz $w = \langle w_i\rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to ***wartość termu*** t ***w strukturze*** $\langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ ***przy wartościowaniu*** w, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są termami, to
  $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_j^{n_j})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_j}))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie (zobacz niżej, twierdzenie 16.2.5.1.).

16.2.3. Spełnianie

Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma]\rangle$ będzie strukturą relacyjną sygnatury σ, w wartościowaniem w M, a α formułą sygnatury σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***spełniania formuły*** α ***w strukturze*** $\mathfrak{M}$ ***przez wartościowanie*** w ma następującą postać indukcyjną:

$\mathfrak{M} \models_w P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$\triangle(P_i^{n_i})(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_{n_i}));$$

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;

$\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;

$\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;

$\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \equiv (\beta)$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, to mówimy, że formuła α jest ***prawdziwa w*** $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$. Piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$. Mówimy, że zdanie α jest ***fałszywe*** w $\mathfrak{M}$, gdy nie jest ono prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

16.2.4. Tautologie i wynikanie logiczne

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$. Mówimy, że α ***wynika logicznie*** z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X ***wynika logicznie*** (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy

$X \models_{krp} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$

Uwaga terminologiczna. W polskiej literaturze przedmiotu terminów ***struktura relacyjna***, ***system relacyjny*** oraz ***struktura algebraiczna*** używa się wymiennie. Gdy sygnatura nie zawiera predykatów, to mówimy o ***algebrach***, gdy zaś sygnatura nie zawiera ani stałych, ani symboli funkcyjnych, to mówimy o strukturach relacyjnych ***czystych***.

Uwaga notacyjna. W dalszym ciągu będziemy czasem używać pewnych, powszechnie stosowanych, uproszczeń notacyjnych. Omówione zostaną one podczas wykładu. W tym miejscu zwróćmy natomiast uwagę na różne konteksty użycia symbolu „$\models$" i na znaczenia odnośnych wyrażeń zawierających ten symbol (tu X i Y są dowolnymi zbiorami formuł języka KRP, α dowolną formułą tego języka, $\mathfrak{M}$ dowolną strukturą relacyjną (ustalonej sygnatury), a w dowolnym wartościowaniem):

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich w.
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego w.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich w: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.
- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Z podanych wyżej równoważności będziemy często korzystać.

16.2.5. Kilka prostych własności pojęć semantycznych

Wyrazimy teraz precyzyjnie intuicyjne sformułowania:

- wartość termu w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tego termu
- spełnianie formuły w ustalonej interpretacji zależy jedynie od wartościowań zmiennych wolnych tej formuły.

Własności te zostaną wykorzystane w dowodach dalszych twierdzeń.

TWIERDZENIE 16.2.5.1.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t, to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t).$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy termu t.

Niech t będzie pojedynczą zmienną, np. x_i. Wtedy założenie twierdzenia głosi, że $w_i = v_i$. Mamy więc:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(x_i) = w_i = v_i = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_i).$$

Jeśli t jest nazwą indywiduową a_i, to mamy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(a_i) = \triangle(a_i) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(a_i).$$

Niech założenie indukcyjne zachodzi dla termów $t_1, \ldots, t_n$ oraz niech t będzie termem $f_i(t_1, \ldots, t_n)$. Skoro wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t, to dla każdego termu t_j (gdzie $j \leqslant n$) wartościowania te nie różnią się także na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w t_j. Na mocy założenia indukcyjnego mamy zatem dla wszystkich $j \leqslant n$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_j) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j).$$

Zachodzą wtedy równości:

$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(f_i)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_n)) = \triangle(f_i)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t)$.

Następne twierdzenie wykorzystuje operację podstawiania termu za zmienną (w termie).

TWIERDZENIE 16.2.5.2.

Jeżeli $w = \langle w_n \rangle$ i $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$ oraz:

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy termu t'.

Niech t' będzie zmienną x_k. Możliwe są dwa przypadki:

- $k = i$
- $k \neq i$.

Jeśli $k = i$, to $S(t, x_i, t') = S(t, x_i, x_k) = t$. Mamy wtedy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = v_i = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_i) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Jeśli $k \neq i$, to $S(t, x_i, t') = S(t, x_i, x_k)$, a $S(t, x_i, x_k)$ jest, z definicji, zmienną x_k. Mamy wtedy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(x_k) = w_k = v_k = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(x_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Niech teraz t' będzie nazwą indywiduową a_k. Wtedy $S(t, x_i, t')$ jest stałą a_k. Otrzymujemy stąd:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t')) = \triangle_w^{\mathfrak{M}}(a_k) = \triangle(a_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(a_k) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t').$$

Wreszcie, niech $t_1, \ldots, t_n$ będą dowolnymi termami, dla których, na mocy założenia indukcyjnego, twierdzenie zachodzi. Mamy więc dla wszystkich $j \leqslant n$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_j)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j).$$

Musimy pokazać, że twierdzenie zachodzi także dla termu złożonego t' postaci $f_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie f_k jest dowolnym n-argumentowym symbolem funkcyjnym. Mamy następujący ciąg równości:

- $\triangle^{\mathfrak{M}}_w(S(t, x_i, t')) =$
- $\triangle^{\mathfrak{M}}_w(S(t, x_i, f_k(t_1, \ldots, t_n))) =$
- $\triangle^{\mathfrak{M}}_w(f_k(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))) =$
- $\triangle(f_k)(\triangle^{\mathfrak{M}}_w(S(t, x_i, t_1)), \ldots, \triangle^{\mathfrak{M}}_w(S(t, x_i, t_n))) =$
- $\triangle(f_k)(\triangle^{\mathfrak{M}}_v(t_1), \ldots, \triangle^{\mathfrak{M}}_v(t_n)) =$
- $\triangle^{\mathfrak{M}}_v(f_k(t_1, \ldots, t_n)) =$
- $\triangle^{\mathfrak{M}}_v(t')$.

Następne twierdzenie dotyczy formuł oraz relacji spełniania (formuł w strukturach przez wartościowania).

TWIERDZENIE 16.2.5.3.

Niech $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ będą wartościowaniami w uniwersum M struktury $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\sigma] \rangle$. Jeżeli $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem budowy α.

Niech α będzie formułą atomową postaci $P_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie P_k jest predykatem n-argumentowym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α (a więc ze wskaźnikami ***dowolnych*** zmiennych występujących w $P_k(t_1, \ldots, t_n)$), to dla każdego wskaźnika $i \leqslant n$, wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych występujących w termie t_i. Korzystając z twierdzenia 16.2.5.1., otrzymujemy stąd, że dla wszystkich $i \leqslant n$:

$$\triangle^{\mathfrak{M}}_w(t_i) = \triangle^{\mathfrak{M}}_v(t_i).$$

Z definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w P_k(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\triangle(P_k)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v P_k(t_1, \ldots, t_n)$.

Niech teraz α_1 i α_2 będą dowolnymi formułami, dla których (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł: $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ oraz $\neg\alpha_1$.

1. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \wedge \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

2. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \vee \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \vee \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

3. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \to \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \to \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

4. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1 i α_2, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$.

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \equiv \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

5. Niech α będzie formułą $\neg\alpha_1$. Zakładamy zatem, że wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla α_1, mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$

Na mocy definicji spełniania otrzymujemy z powyższego ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \neg\alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz β będzie formułą, dla której (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że zachodzi ona również dla formuł $\forall x_i\ \beta$ oraz $\exists x_i\ \beta$.

6. Niech α będzie formułą $\forall x_i\ \beta$. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to dla dowolnego elementu m należącego do uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ ciągi:

$$\langle w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, m, v_{i+1}, \ldots \rangle$$

nie różnią się na miejscach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w formule β. Mamy więc:

$$\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta.$$

Na mocy powyższego, korzystając z definicji relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \forall x_i\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

7. Niech α będzie formułą $\exists x_i\ \beta$. Skoro wartościowania $\langle w_n \rangle$ oraz $\langle v_n \rangle$ nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych formuły α, to dla dowolnego elementu m należącego do uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ ciągi:

$$\langle w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, m, v_{i+1}, \ldots \rangle$$

nie różnią się na miejscach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w formule β. Mamy więc:

$$\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta.$$

Na mocy powyższego, korzystając z definicji relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m z uniwersum $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{v_i^m} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \exists x_i\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

TWIERDZENIE 16.2.5.4.

Jeżeli α jest zdaniem, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są dowolnymi wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, to:

$$\mathfrak{M} \models_w \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Ponieważ w α nie ma zmiennych wolnych, więc wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ oczywiście nie różnią się na miejscach o wskaźnikach pokrywających się ze wskaźnikami zmiennych wolnych w α. Teza twierdzenia wynika zatem z twierdzenia poprzedniego.

TWIERDZENIE 16.2.5.5.

Jeśli α jest zdaniem, to następujące warunki są równoważne:

- (1) Istnieje wartościowanie $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ takie, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- (2) Dla każdego wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.

DOWÓD.

$(1) \Rightarrow (2)$. Jeśli co najmniej jedno wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełnia zdanie α, to, na mocy poprzedniego twierdzenia, dowolne inne wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełnia zdanie α.

$(2) \Rightarrow (1)$. Ponieważ, z definicji, uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$ jest niepuste, więc istnieje co najmniej jedno wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$. Jeżeli zatem wszystkie wartościowania w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ spełniają α, to istnieje wartościowanie w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, które spełnia α.

TWIERDZENIE 16.2.5.6.

Jeśli t jest termem podstawialnym za zmienną x_i do α, a $w = \langle w_n \rangle$ oraz $v = \langle v_n \rangle$ są wartościowaniami w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ oraz

$$v = \langle w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle,$$

to:

$$\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models_v \alpha.$$

DOWÓD.

Przez indukcję strukturalną względem α.

Niech α będzie formułą atomową postaci $P_k(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie P_k jest predykatem n-argumentowym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami. Na mocy twierdzenia 16.2.5.2. mamy:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_j)) = \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_j),$$

dla wszystkich $j \leqslant n$. Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, P_k(t_1, \ldots, t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w P_k(S(t, x_i, t_1), \ldots, S(t, x_i, t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(S(t, x_i, t_n)))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\triangle(P_k)(\triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_v^{\mathfrak{M}}(t_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v P_k(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz α_1 i α_2 będą dowolnymi formułami, dla których (na mocy założenia indukcyjnego) zachodzi teza twierdzenia. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł: $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ oraz $\neg\alpha_1$.

1. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \wedge S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ oraz $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \wedge \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

2. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \vee \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \vee S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ lub $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ lub $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \vee \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

3. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \rightarrow S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$, to $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- jeśli $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$, to $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

4. Niech α będzie formułą $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1 oraz α_2. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_2)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1) \equiv S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1 \equiv \alpha_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

5. Niech α będzie formułą $\neg\alpha_1$. Załóżmy, że t jest podstawialny za x_i do α. Wtedy t jest także podstawialny za x_i do α_1. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_v S(t, x_i, \alpha_1)$.

Na mocy powyższego, korzystając z definicji operacji podstawiania oraz relacji spełniania, otrzymujemy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \neg\alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_v \alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \neg\alpha_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

Niech teraz β będzie formułą, dla której (na mocy założenia indukcyjnego) teza twierdzenia zachodzi. Pokażemy, że wtedy zachodzi ona również dla formuł $\forall x_j\ \beta$ oraz $\exists x_j\ \beta$.

6. Niech α będzie formułą $\forall x_j\ \beta$. Załóżmy, że dla formuły β twierdzenie zachodzi. Niech t będzie termem podstawialnym za x_i do α. Należy rozważyć dwa przypadki:

- (a) x_i nie jest wolna w α
- (b) x_i jest wolna w α.

W przypadku (a) $S(t, x_i, \alpha)$ jest formułą α, a więc mamy wtedy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

W przypadku (b) mamy: $i \neq j$, a stąd następujące formuły są identyczne:

- $S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \forall x_j\ \beta)$
- $\forall x_j\ S(t, x_i, \beta)$.

Ponieważ term t jest podstawialny za zmienną x_i do formuły α, więc t jest też oczywiście podstawialny za x_i do formuły β. Tak więc, założenie indukcyjne przybiera postać:

Dla każdego wartościowania $u = \langle u_n \rangle$: $\mathfrak{M} \models_u \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M} \models_{u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}} \beta.$$

Dla wyjaśnienia: wartościowanie $u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}$ powstaje z wartościowania $u = \langle u_n \rangle$ przez zastąpienie elementu u_i wartością $\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)$.

Ponieważ t jest podstawialny za x_i do α i x_i jest wolna w α, więc w α nie występuje zmienna x_j. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.1., mamy dla dowolnego elementu m uniwersum struktury $\mathfrak{M}$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t).$$

Dla uniknięcia stosowania bardzo złożonych indeksów, przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$w(j,i,m,t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$w^*(j,i,m,t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Tak więc:

- $w(j,i,m,t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_{w_i^m}^{\mathfrak{M}}(t)$
- $w^*(j,i,m,t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$.

Uwzględniając powyższe oraz definicję relacji spełniania otrzymujemy następujący ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_j \ S(t, x_i, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} S(t, x_i \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- dla wszystkich m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w^*(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_{w_i^{\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \forall x_j\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

7. Niech α będzie formułą $\exists x_j\ \ \beta$. Załóżmy, że dla formuły β twierdzenie zachodzi. Niech t będzie termem podstawialnym za x_i do α. Należy rozważyć dwa przypadki:

- (a) x_i nie jest wolna w α
- (b) x_i jest wolna w α.

W przypadku (a) $S(t, x_i, \alpha)$ jest formułą α, a więc mamy wtedy ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

W przypadku (b) mamy: $i \neq j$, a stąd następujące formuły są identyczne:

- $S(t, x_i, \alpha)$
- $S(t, x_i, \exists x_j\ \beta)$
- $\forall x_j\ S(t, x_i, \beta)$.

Ponieważ term t jest podstawialny za zmienną x_i do formuły α, więc t jest też oczywiście podstawialny za x_i do formuły β. Tak więc, założenie indukcyjne przybiera postać:

Dla każdego wartościowania $u = \langle u_n \rangle$: $\mathfrak{M} \models_u \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}} \beta$.

Dla wyjaśnienia: wartościowanie $u_i^{\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)}$ powstaje z wartościowania $u = \langle u_n \rangle$ przez zastąpienie elementu u_i wartością $\triangle_u^{\mathfrak{M}}(t)$.

Ponieważ t jest podstawialny za x_i do α i x_i jest wolna w α, więc w α nie występuje zmienna x_j. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.1., mamy dla dowolnego elementu m uniwersum struktury $\mathfrak{M}$:

$$\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t).$$

Tak jak poprzednio, dla uniknięcia stosowania bardzo złożonych indeksów, przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$w(j,i,m,t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_{w_j^m}^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle$$

$$w^*(j,i,m,t) = \langle w_1, \ldots, w_{j-1}, m, w_{j+1}, \ldots, w_{i-1}, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t), w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Tak więc:

- $w(j,i,m,t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_{w_i^m}^{\mathfrak{M}}(t)$
- $w^*(j,i,m,t)$ powstaje z wartościowania $w = \langle w_n \rangle$ poprzez zastąpienie x_j przez m oraz zastąpienie w_i przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$.

Uwzględniając powyższe oraz definicję relacji spełniania otrzymujemy następujący ciąg równoważności:

- $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_i, \alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_j\ S(t, x_i, \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} S(t, x_i \beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- dla pewnego m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models_{w^*(j,i,m,t)} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_{w_i^{\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \exists x_j\ \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy
- $\mathfrak{M} \models_v \alpha$.

To kończy dowód twierdzenia.

Podane wyżej twierdzenia miały charakter pomocniczy. Kolejne twierdzenie podaje pewne własności relacji $\models$.

TWIERDZENIE 16.2.5.7.

Relacja $\models_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\models_{krp}$ jest zwrotna: $X \models_{krp} X$ dla każdego X.
- (2) $\models_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Y \models_{krp} Z$, to $X \models_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.
- (3) $\models_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krp} Y$.
- (4) $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP.

DOWÓD.

(1). Wynika wprost z definicji.

(2). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y i Z takie, że $X \models_{krp} Y$ i $Y \models_{krp} Z$ ale $X \not\models_{krp} Z$. Skoro $X \not\models_{krp} Z$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ i $\mathfrak{M} \not\models_w Z$. Ponieważ $X \models_{krp} Y$ oraz $\mathfrak{M} \models_w X$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$. Ponieważ $Y \models_{krp} Z$ oraz $\mathfrak{M} \models_w Y$, więc $\mathfrak{M} \models_w Z$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: relacja $\models_{krp}$ jest przechodnia.

(3). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y oraz Z takie, że: $X \models_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, lecz $Z \not\models_{krp} Y$. Skoro $Z \not\models_{krp} Y$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w Z$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w Y$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w Z$, to każdy element zbioru Z jest spełniony przez w w $\mathfrak{M}$. Ponieważ $X \subseteq Z$, więc również każdy element zbioru X jest spełniony przez w w $\mathfrak{M}$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \models_w X$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $X \models_{krp} Y$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: relacja $\models$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu.

(4). Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieją zbiory formuł X, Y oraz Z takie, że $X \models_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, lecz $X \not\models_{krp} Z$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w Z$. Skoro $X \models_{krp} Y$ oraz

$\mathfrak{M} \models_w X$, to $\mathfrak{M} \models_w Y$. Z definicji, jeśli $\mathfrak{M} \models_w Y$, to wszystkie elementy zbioru Y są spełnione przez w w $\mathfrak{M}$. Ponieważ $Z \subseteq Y$, więc również wszystkie elementy Z są spełnione przez w w $\mathfrak{M}$, czyli $\mathfrak{M} \models_w Z$ i otrzymujemy sprzeczność. Trzeba więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: relacja $\models_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu.

(5). Wynika z definicji tautologii KRP. Zauważmy, że zbiór pusty $\emptyset$ jest prawdziwy w każdej interpretacji.

Pokażemy teraz, że następujące formuły są tautologiami KRP. Formuły te są szczególnie ważne, jako iż mogą one stanowić (jak się przekonamy w wykładach 20–21) aksjomatykę dla KRP.

TWIERDZENIE 16.2.5.8.

Niech α, β oraz γ będą dowolnymi tautologiami KRP. Wtedy tautologiami KRP są również wszystkie formuły postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- (A14) $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α

- (A16) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

DOWÓD.

Dowody wszystkich punktów przeprowadza się metodą nie wprost.

(A1). Przypuśćmy, że (A1) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$. Dalej, mamy: $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \gamma$. Wreszcie: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \models_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \models_w \gamma$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A1) jest tautologią KRP.

(A2). Przypuśćmy, że (A2) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A2) jest tautologią KRP.

(A3). Przypuśćmy, że (A3) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to (\beta \to \alpha).$$

Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta \to \alpha$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A3) jest tautologią KRP.

(A4). Przypuśćmy, że (A4) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \wedge \beta) \to \alpha.$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A4) jest tautologią KRP.

(A5). Przypuśćmy, że (A5) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta.$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \wedge \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A5) jest tautologią KRP.

(A6). Przypuśćmy, że (A6) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))).$$

Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$. Dalej, mamy stąd, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$. To z kolei oznacza, że: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta \wedge \gamma$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \gamma$, to $\mathfrak{M} \models_w \beta \wedge \gamma$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A6) jest tautologią KRP.

(A7). Przypuśćmy, że (A7) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A7) jest tautologią KRP.

(A8). Przypuśćmy, że (A8) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A8) jest tautologią KRP.

(A9). Przypuśćmy, że (A9) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta)).$$

Mamy wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta)$. To oznacza, że: $\mathfrak{M} \models_w \gamma \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \gamma$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy:

- skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$
- skoro $\mathfrak{M} \models_w \gamma \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \gamma$.

Z powyższego, znowu na mocy definicji relacji $\models$, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \vee \gamma$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A9) jest tautologią KRP.

(A10). Przypuśćmy, że (A10) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ i otrzymujemy sprzeczność z warunkiem definicyjnym dla spełniania formuły $\alpha \equiv \beta$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A10) jest tautologią KRP.

(A11). Przypuśćmy, że (A11) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \equiv \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta \to \alpha$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z warunkiem definicyjnym dla spełniania formuły $\alpha \equiv \beta$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A11) jest tautologią KRP.

(A12). Przypuśćmy, że (A12) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w (\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta)$. Dalej, mamy: $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \equiv \beta$. Warunek $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \equiv \beta$ oznacza, że zachodzi alternatywa:

- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$ ***lub***
- $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

To z kolei jest alternatywą warunków:

- (i) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$ ***lub***

- (ii) $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$.

Jednak warunek (i) jest sprzeczny z tym, że $\mathfrak{M} \models_w \alpha \to \beta$, a warunek (ii) jest sprzeczny z tym, że $\mathfrak{M} \models_w \beta \to \alpha$. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A12) jest tautologią KRP.

(A13). Przypuśćmy, że (A13) nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta \to \neg\alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$. Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\beta \to \neg\alpha$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A13) jest tautologią KRP.

(A14). Załóżmy, że t jest podstawialny za x_n w α i przypuśćmy, że $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha).$$

Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w S(t, x_n, \alpha)$. Ponieważ t jest podstawialny za x_n w α, więc (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.) otrzymujemy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Dalej, skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ \alpha$, to dla każdego elementu a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ zachodzi: $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. W szczególności, dla $a = \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)$ otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$, co daje sprzeczność z poprzednimi ustaleniami. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A14) jest tautologią KRP.

(A15). Załóżmy, że t jest podstawialny za x_n w α i przypuśćmy, że $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_m S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha.$$

Mamy stąd: $\mathfrak{M} \models_w S(t, x_n, \alpha)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha$. Ponieważ t jest podstawialny za x_n w α, więc (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.) otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha$, to nie istnieje element a w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. Ale, jak przed chwilą pokazaliśmy, dla elementu $a = \Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)$ (który oczywiście jest elementem uniwersum struktury $\mathfrak{M}$) zachodzi: $\mathfrak{M} \models_{w_n^{\Delta_w^{\mathfrak{M}}(t)}} \alpha$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A15) jest tautologią KRP.

(A16). Załóżmy, że x_n nie jest zmienną wolną w α i przypuśćmy, że $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta).$$

Wtedy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \forall x_n\ \beta$. Stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ \beta$. Oznacza to, że istnieje element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_n^a} \beta$. Z definicji relacji $\models$, skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta)$, to $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} (\alpha \to \beta)$. Z założenia, x_n nie jest zmienną wolną w α, skoro więc $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, to także $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ (na mocy twierdzenia 16.2.5.3.). Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} (\alpha \to \beta)$, to również $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A16) jest tautologią KRP.

(A17). Załóżmy, że x_n nie jest zmienną wolną w β i przypuśćmy, że $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$ nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie $w = \langle w_i \rangle$ takie, że:

$$\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta).$$

Wtedy $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha \to \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x_n\ \alpha \to \beta$, to $\mathfrak{M} \models \exists x_n\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: istnieje element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w \forall x_n\ (\alpha \to \beta)$, to także $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha \to \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha \to \beta$, to $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$. Z założenia, x_n nie jest zmienną wolną formuły β. Stąd, na mocy twierdzenia 16.2.5.3., skoro $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \beta$, to również $\mathfrak{M} \models_w \beta$, i otrzymaliśmy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: (A17) jest tautologią KRP.

Komentarza wymagają warunki umieszczone w punktach (A14)–(A17). Podamy mianowicie przykłady wskazujące, że jeśli warunki te nie są spełnione, to odnośne formuły nie są tautologiami KRP.

1. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której

$$\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\exists x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\exists x_m\ P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_n \exists x_m\ P(x_n, x_m)\ \to\ \exists x_m\ P(x_m, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

2. Pokażemy, że istnieje formuła α, dla której t nie jest podstawialny za x_n w α i dla której

$$S(t, x_n, \alpha) \rightarrow \exists x_n \ \alpha$$

nie jest tautologią KRP.

Niech α będzie formułą: $\forall x_m P(x_n, x_m)$, gdzie P jest dowolnym predykatem dwuargumentowym. Wtedy $S(x_m, x_n, \alpha)$ jest formułą $\forall x_m P(x_m, x_m)$. Formuła (A14) ma wtedy postać:

$$\forall x_m P(x_m, x_m) \ \rightarrow \ \exists x_n \forall x_m P(x_n, x_m).$$

Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których jest ona fałszywa. Dla przykładu: niech uniwersum $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a interpretacją P w $\mathfrak{M}$ niech będzie relacja mniejszości. Wtedy poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy w $\mathfrak{M}$, a jej następnik jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy.

3. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w α i dla których

$$\forall x_n \ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_n \ \beta)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły α. Formuła (A16) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n \ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n) \ \rightarrow \ \forall x_n \ Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n. Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4

- interpretacją predykatu Q jest jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 0$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n \ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (P(x_n) \ \rightarrow \ \forall x_n \ Q(x_n))$.

4. Pokażemy, że istnieją formuły α oraz β takie, że x_n jest wolna w β i dla których

$$\forall x_n \ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x_n \ \alpha \rightarrow \beta)$$

nie jest tautologią KRP.

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Niech α będzie formułą $P(x_n)$, a β formułą $Q(x_n)$. Zauważmy, że x_n jest zmienną wolną formuły β. Formuła (A17) ma w tym przypadku postać:

$$\forall x_n \ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n \ P(x_n) \rightarrow Q(x_n)).$$

Zauważmy, że powyższa formuła zawiera wolne wystąpienie zmiennej x_n. Powyższa formuła nie jest tautologią KRP: istnieją interpretacje $\mathfrak{M}$, w których nie jest ona spełniona przez pewne wartościowania. Dla przykładu, niech struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w będą określone w sposób następujący:

- uniwersum $\mathfrak{M}$ jest zbiór zbiór wszystkich liczb naturalnych
- interpretacją predykatu P jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 4
- interpretacją predykatu Q jest zbiór wszystkich liczb podzielnych bez reszty przez 2
- wartościowanie w określone jest następująco: $w_i = 1$, dla wszystkich i.

Wtedy $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x_n \ (P(x_n) \rightarrow Q(x_n)) \rightarrow (\exists x_n \ P(x_n) \rightarrow Q(x_n))$.

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

jest znana z wykładów semestru zimowego. Zdefiniujemy teraz jeszcze jedną regułę wnioskowania.

DEFINICJA 16.2.5.1.

Przez ***regułę generalizacji*** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n\ \alpha}.$$

Tak jak w przypadku KRZ, mówimy, że reguła (o schemacie) (X, α) ***zachowuje własność bycia tautologią***, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami, to również α jest tautologią.

TWIERDZENIE 16.2.5.9.

Reguła odrywania i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią.

DOWÓD.

1. REGUŁA ODRYWANIA.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że formuły $\alpha \to \beta$ oraz α są tautologiami KRP, i przypuśćmy, że β nie jest tautologią KRP. Istnieje wtedy struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \beta$. Ponieważ $\alpha \to \beta$ oraz α są tautologiami KRP, więc $\mathfrak{M} \models \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models \alpha$. Stąd, na mocy definicji relacji $\models$, otrzymujemy $\mathfrak{M} \models \beta$, sprzeczność. Poczynione przypuszczenie należy zatem odrzucić. Ostatecznie: reguła odrywania zachowuje tautologiczność.

2. REGUŁA GENERALIZACJI.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że α jest tautologią KRP i przypuśćmy, że $\forall x_n\ \alpha$ nie jest tautologią KRP. Istnieje zatem struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\forall x_n\ \alpha$ nie jest prawdziwa w $\mathfrak{M}$. Z definicji relacji spełniania, istnieje wtedy element a uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_n^a} \alpha$ dla pewnego wartościowania $\langle w_i \rangle$ w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$. Jednak α jest, z założenia, tautologią KRP, więc $\mathfrak{M} \models_{w_n^a} \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność. Poczynione przypuszczenie trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie: reguła generalizacji zachowuje tautologiczność.

Bezpośrednim wnioskiem z powyższych twierdzeń jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 16.2.5.10.

Schematy tautologii KRZ są schematami tautologii KRP.

DOWÓD.

Każdy schemat aksjomatów KRZ jest schematem tautologii KRP (na mocy twierdzenia 16.2.5.5.). Reguła odrywania zachowuje tautologiczność (na mocy twierdzenia 16.2.5.6.). Stąd wynika teza obecnego twierdzenia.

Można rozważać wiele dalszych reguł wnioskowania w KRP. W szczególności, punkty (A14)–(A17) twierdzenia 16.2.5.5. mogą sugerować rozpatrzenie następujących reguł:

- (R14)
$$\frac{\forall x_n\ \alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.
- (R15)
$$\frac{S(t, x_n, \alpha)}{\exists x_n\ \alpha},$$
o ile term t jest podstawialny za x_n w α.
- (R16)
$$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w α.
- (R17)
$$\frac{\forall x_n\ (\alpha \to \beta)}{\exists x_n\ \alpha \to \beta},$$
o ile x_n nie jest wolna w β.

Z twierdzenia o dedukcji wprost, które udowodnimy za chwilę, będzie wynikało, że reguły (R14)–(R17) są wszystkie regułami niezawodnymi.

Przypominamy, że reguła $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna***, wtedy i tylko wtedy, gdy z przesłanek dowolnego sekwentu tej reguły wynika logicznie wniosek tego sekwentu. W przypadku KRP definicja ta przyjmuje postać następującą.

DEFINICJA 16.2.5.2. ***Reguła niezawodna w KRP.***

Niech $\mathcal{R}$ będzie regułą wnioskowania w KRP. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna*** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \mathcal{R}$ zachodzi: $X \models_{krp} \alpha$.

Podobnie jak reguły (RO), (RG), (R14)–(R17) również następująca ***reguła podstawiania*** jest regułą niezawodną w KRP:

- (RS)

$$\frac{\alpha}{S(t, x_n, \alpha)},$$

o ile term t jest podstawialny za x_n w α.

Rozważmy jeszcze pewne (pouczające) przykłady. Więcej przykładów (zarówno elementarnych, jak i bardziej zaawansowanych podajemy niżej, w Ćwiczeniach).

PRZYKŁAD 16.2.5.1.

Niech w sygnaturze rozważanego języka będzie dwuargumentowy predykat $\prec$. Niech interpretacją tego predykatu w zbiorze wszystkich liczb naturalnych będzie relacja $<$ mniejszości. Zastanówmy się, jakie wartościowania (czyli ciągi liczb naturalnych) spełniają każdą z podanych niżej formuł:

- (1) $x_1 \prec x_2$
- (2) $\exists x_2 \ (x_1 \prec x_2)$
- (3) $\forall x_1 \ (x_1 \prec x_2)$
- (4) $\forall x_1 \exists x_2 \ (x_1 \prec x_2)$
- (5) $\exists x_2 \forall x_1 \ (x_1 \prec x_2)$.

Wartościowania to nieskończone ciągi liczb naturalnych. Niech w_i oznacza i-ty element ciągu w. Rozważmy, jakie ciągi spełniają każdą z podanych formuł.

Formuła (1) jest spełniona przez wszystkie ciągi w, dla których: $w_1 < w_2$.

Formuła (2) jest spełniona przez takie ciągi w, które różnią się od ciągów spełniających formułę (1) co najwyżej na drugim miejscu. Ponieważ dla dowolnej liczby w_1 możemy znaleźć liczbę c taką, że $w_1 < c$, więc formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi liczb naturalnych.

Formuły (3) nie spełnia ***żaden*** ciąg. Przypuśćmy bowiem, że jakieś wartościowanie w spełnia (3). Wtedy ***każdy*** ciąg v różniący się od w na pierwszym miejscu (tj. taki, że $w_1 \neq v_1$) musiałby spełniać formułę (1). Ale np. ciąg stały $\langle w_2, w_2, w_2, \ldots \rangle$ nie spełnia formuły (1) — sprzeczność. Nie ma zatem ciągu spełniającego (3).

Jakiś ciąg w spełnia formułę (4), gdy każdy ciąg v otrzymany z w przez zastąpienie w_1 ***dowolną*** liczbą naturalną spełnia formułę (2). Ale formułę (2) spełniają ***wszystkie*** ciągi. Zatem również formułę (4) spełniają ***wszystkie*** ciągi.

Ponieważ ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (3), więc również ***żaden*** ciąg nie spełnia formuły (5) (bo ciągi spełniające (5) miałyby się różnić od jakiegoś ciągu spełniającego (3) co najwyżej na drugim miejscu).

PRZYKŁAD 16.2.5.2.

Niech N będzie predykatem jednoarumentowym, S jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, a $\bigcirc$ stałą. Nadto, niech $\doteq$ będzie predykatem dwuargumentowym. Zamiast $\doteq (t_1, t_2)$, dla termów t_1 oraz t_2 piszemy: $t_1 \doteq t_2$. Rozważmy następujące zdania:

- $N(\bigcirc)$
- $\forall x \neg(\bigcirc \doteq S(x))$
- $\forall x\ (N(x) \to N(S(x)))$
- $\forall x \forall y\ (S(x) \doteq S(y) \ \to \ x \doteq y)$
- $\forall x\ (x \doteq x)$
- $\forall x \forall y\ (x \doteq y \to y \doteq x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z)$
- $\forall x \forall y\ ((N(x) \wedge x \doteq y) \to N(y))$
- $\forall x \forall y\ (x \doteq y \to S(x) \doteq S(y))$.

Wtedy modelem powyższego zbioru zdań będzie każda struktura $\mathfrak{M}$ o uniwersum M oraz następującej interpretacji stałej $\bigcirc$, symbolu funkcyjnego S, predykatu N oraz predykatu $\doteq$:

- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0;
- S denotuję funkcję następnika, tj. $S(t)$ oznacza liczbę o jeden większą liczby oznaczanej przez t;
- predykat N denotuje własność „być liczbą naturalną”;

- predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$.

Proszę podumać nad następującym pytaniem: czy w takim modelu $\mathfrak{M}$ prawdziwe jest zdanie: $\forall x\ N(x)$? Oczywiście, dla dowolnego modelu $\mathfrak{N}$ powyższego zbioru zdań, denotacja predykatu N w $\mathfrak{N}$ będzie zbiorem nieskończonym. Ale czy musi to być zbiór pokrywający się z całym uniwersum modelu?

PRZYKŁAD 16.2.5.3.

Rozważmy następujące formuły, zawierające predykat dwuargumentowy R:

- $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$ (R jest przechodni)
- $\forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ (R jest asymetryczny)
- $\forall x \exists y\ R(x,y)$ (R jest serialny).

Wtedy każda interpretacja, w której prawdziwe są powyższe zdania, ma uniwersum nieskończone.

16.3. Twierdzenia o dedukcji

TWIERDZENIE 16.3.1. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzi następująca równoważność:

$$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta.$$

DOWÓD.

Dowody implikacji: prostej i odwrotnej przeprowadzimy metodą nie wprost.

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \rightarrow \beta$. Mamy stąd: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$.

Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M}_w \models \alpha$, więc $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$. Stąd oraz z założenia $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$ otrzymujemy, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$, co jest sprzeczne z poczynionym przypuszczeniem. Musimy więc przypuszczenie to odrzucić. Ostatecznie: $X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \alpha \to \beta$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \beta$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Jeśli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \beta$, to $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$. Ale, ponieważ $X \models_{krp} \alpha \to \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w X$, więc $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha \to \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Trzeba zatem odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$.

TWIERDZENIE 16.3.2. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

DOWÓD.

Dowody implikacji: prostej i odwrotnej przeprowadzimy w każdym przypadku metodą nie wprost.

RÓWNOWAŻNOŚĆ (a).

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \neg\alpha$. Skoro $X \not\models_{krp} \alpha$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Tak więc, $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$. Z założenia mamy $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, a więc gdy $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w \{\beta, \neg\beta\}$. To jednak oznacza sprzeczność, bo implikuje, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Tak więc, musimy odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \models_{krp} \neg\alpha$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \neg\alpha$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Skoro $X \cup \{\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \{\beta, \neg\beta\}$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\alpha\}$, więc $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha$. Dalej, mamy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \neg\alpha$, to nie zachodzi $X \models_{krp} \neg\alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem $X \models_{krp} \neg\alpha$. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie: $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

RÓWNOWAŻNOŚĆ (b).

1. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ i przypuśćmy, że $X \not\models_{krp} \alpha$. Skoro $X \not\models_{krp} \neg\alpha$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$, czyli $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$. Tak więc, $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$. Z założenia mamy $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, a więc gdy $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$, to $\mathfrak{M} \models_w \{\beta, \neg\beta\}$. To

jednak oznacza sprzeczność, bo implikuje, że $\mathfrak{M} \models_w \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \neg\beta$. Tak więc, musimy odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $X \models_{krp} \alpha$.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $X \models_{krp} \alpha$ i przypuśćmy, że $X \cup \{\neg\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Skoro $X \cup \{\neg\alpha\} \not\models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$, to istnieje struktura $\mathfrak{M}$ i wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \models_w X \cup \{\neg\alpha\}$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \{\beta, \neg\beta\}$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models X_w \cup \{\neg\alpha\}$, więc $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \models \neg\alpha$. Dalej, mamy $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$, co oznacza, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$. Skoro $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$, to nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem $X \models_{krp} \alpha$. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie: $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

16.4. Język KRP w zastosowaniach

Klasyczny Rachunek Predykatów wyznacza pewien standard logiczny. Rozumiemy przez to m.in. dwie rzeczy:

- ważne teorie naukowe formułowane są w języku KRP (lub mogą zostać „przetłumaczone" na język KRP);
- argumentacje przeprowadzane w językach etnicznych mogą być rekonstruowane w KRP.

Tym dwom problemom poświęcone są uwagi w dwóch punktach następnych.

16.4.1. Teorie elementarne

Podamy aksjomatyki dwóch ważnych teorii elementarnych:

- ***teorii mnogości Zermelo-Fraenkla***
- ***teorii algebr Boole'a***.

Są to teorie fundamentalne dla wielu działów matematyki. Całą współczesną matematykę można ugruntować na bazie teorii mnogości. Z kolei, algebry Boole'a (i inne, podobne do nich struktury) są nie tylko bardzo ważnym rodzajem struktur algebraicznych, ale również znajdują wszechobecne zastosowania (np. w ***każdym*** komputerze „pracuje" algebra Boole'a bramek logicznych).

16.4.1.1. Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla

Jest to teoria w języku KRP z identycznością. Jedyną stałą pozalogiczną tej teorii jest dwuargumentowy predykat $\in$. Formułę $x \in y$ czytamy: x jest elementem y.

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI ZF.

Aksjomat ekstensjonalności:

$$\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomat sumy:

$$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists u\ (z \in u \wedge u \in x))$$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:

$$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists u\ (u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x\ (\exists y\ (y \in x \wedge \neg \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y\ (y \in x \to \forall z (\forall u\ (u \in z \leftrightarrow u = y) \to z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:

$\forall u (\forall x \forall y \forall z\ (x \in u \wedge \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \exists w \forall v\ (v \in w \leftrightarrow \exists x\ (x \in u \wedge \varphi(x,v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze *schematem* nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x (\exists u\ (u \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \forall z\ (z \in y \to \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć ***Aksjomat wyboru***:

$\forall x ((\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y \forall u\ (y \in x \wedge u \in x \to y = u \vee \neg \exists v\ (v \in y \wedge v \in u))) \to \exists w (\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y \wedge z \in w \wedge \forall v\ (v \in y \wedge v \in w \to v = z)))))$

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany ZFC.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także *aksjomaty dla identyczności*:

- $\forall x\ (x = x)$
- $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \to x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge x \in z \to y \in z))$;

- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge z \in x \rightarrow z \in y))$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: *nieskończony* i *przeliczalny* należą do *metajęzyka*.

Fundamentalne znaczenie teorii mnogości dla współczesnej matematyki polega m.in. na tym, że wszystkie konstrukcje matematyczne wyrazić można za pomocą pojęcia zbioru oraz relacji należenia elementu do zbioru.

$* * *$

Teoria mnogości jest także zakładana w ***metajęzyku***, w którym mówimy o systemach logicznych, w tym oczywiście także o KRZ oraz KRP.

16.4.1.2. Teoria algebr Boole'a

Znajdowanie analogii między różnymi twierdzeniami to szczególna umiejętność.[2] Możesz posiąść tę umiejętność, nawet na (stosunkowo niskim) poziomie elementarza logicznego. Z pewnością zauważyłaś, że jest odpowiedniość między pewnymi prawami KRZ a niektórymi prawami rachunku zbiorów.

Dla teorii algebr Boole'a podać można różne (równoważne) aksjomatyki. Ograniczymy się do dwóch aksjomatyk oraz jednej definicji algebr Boole'a (przez częściowe porządki).

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: PIERWSZA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

[2] Jeszcze ciekawsza jest umiejętność znajdowania analogii między różnymi analogiami, jak twierdzą matematycy.

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$

$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B_1^1: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B_1^2: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

B_1^3: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxplus(x, y), z))$

B_1^4: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxtimes(x, y), z))$

B_1^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, y), y) = y)$

B_1^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, y), y) = y)$

B_1^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$

B_1^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$

B_1^9: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y)$

B_1^{10}: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y)$.

Prostymi konsekwencjami tych aksjomatów są np.:

- $\forall x\ (\boxplus(x, x) = x)$
- $\forall x\ (\boxtimes(x, x) = x)$
- $\forall x \forall y\ ((\boxplus(x, y) = \boxplus(x, \boxminus(x)) \wedge \boxtimes(x, y) = \boxtimes(x, \boxtimes(x))) \rightarrow y = \boxminus(x))$.

Niech ich wyprowadzenia będą ćwiczeniem dla czytelniczek. Jako wskazówkę podajemy ciąg równości dla pierwszych dwóch rozważanych wyżej przypadków:

$$x = \boxplus(x, \boxtimes(x, y)) = \boxtimes(\boxplus(x, x), \boxplus(x, y)) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxplus(x, y)), \boxtimes(x, \boxplus(x, y))) = \boxplus(x, x)$$

$$x = \boxtimes(x, \boxplus(x, y)) = \boxplus(\boxtimes(x, x), \boxtimes(x, y)) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxtimes(x, y)), \boxplus(x, \boxtimes(x, y))) = \boxtimes(x, x).$$

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: DRUGA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);
- stałą indywiduową $\triangledown$, nazywającą *jedynkę* (element największy) algebry;
- stałą indywiduową $\vartriangle$, nazywającą *zero* (element najmniejszy) algebry.

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$$

$$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y)).$$

Uwaga. Naprawdę potrzebne są tylko dwa pierwsze z tych aksjomatów. Pozostałe można wyprowadzić z innych aksjomatów teorii algebr Boole'a.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B_2^1: $\forall x\ (\boxplus(x, \vartriangle) = x)$

B_2^2: $\forall x\ (\boxtimes(x, \triangledown) = x)$

B_2^3: $\forall x\ (\boxplus(x, \boxminus(x)) = \triangledown)$

B_2^4: $\forall x\ (\boxtimes(x, \boxminus(x)) = \vartriangle)$

B_2^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B_2^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

B_2^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$

B_2^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$.

DEFINICJA ALGEBR BOOLE'A PRZEZ CZĘŚCIOWE PORZĄDKI.

Niech U będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym częściowo przez relację $\prec$. Przypominamy, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

- element $a \in A$ nazywamy *elementem maksymalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:

  $\forall x\ ((x \in a \land x \prec a) \to x = a)$;

- element $a \in A$ nazywamy *elementem minimalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:

  $\forall x\ ((x \in a \land a \prec x) \to x = a)$;

- element $a \in A$ nazywamy *elementem największym* w A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;

- element $a \in A$ nazywamy *elementem najmniejszym* w A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;

- element $a \in U$ jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;

- element $a \in U$ jest *kresem dolnym* zbioru A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *najmniejszym kresem górnym* zbioru A, jeśli a jest elementem najmniejszym zbioru wszystkich kresów górnych zbioru A;
- element $a \in U$ jest *największym kresem dolnym* zbioru A, jeśli a jest elementem największym zbioru wszystkich kresów dolnych zbioru A.

Mówimy, że $\langle U, \prec \rangle$ jest ***kratą***, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in U$ istnieją: najmniejszy kres górny oraz największy kres dolny zbioru $\{x, y\}$. Ponieważ elementy te są wyznaczone jednoznacznie, więc możemy przyjąć oznaczenia:

- $\boxtimes(x, y)$ — dla największego kresu dolnego zbioru $\{x, y\}$;
- $\boxplus(x, y)$ — dla najmniejszego kresu górnego zbioru $\{x, y\}$.

Krata $\langle U, \prec \rangle$ jest ***dystrybutywna***, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in U$ zachodzą warunki:

- $\forall x \forall y \forall z \ \boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z))$
- $\forall x \forall y \forall z \ \boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z))$.

Kratę dystrybutywną $\langle U, \prec \rangle$ nazywamy ***algebrą Boole'a***, jeśli dla dowolnego elementu $x \in U$ istnieje jego *dopełnienie*, tj. element $\boxminus(x)$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y \ \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y$
- $\forall x \forall y \ \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y$.

Z każdego z podanych wyżej układów aksjomatów dla teorii algebr Boole'a można wywieść wszystkie warunki charakteryzujące algebry Boole'a jako określone przed chwilą struktury uporządkowane, a także na odwrót: z charakterystyki porządkowej algebr Boole'a można wyprowadzić każdą z omawianych wcześniej aksjomatyk.

Uwaga o standardowej notacji. Dla operacji w algebrach Boole'a używa się zwykle standardowych oznaczeń:

- $\cup$ — dla kresu górnego (także: $\vee$);
- $\cap$ — dla kresu dolnego (także: $\wedge$);
- $-$ — dla operacji dopełnienia (także: $'$).

Powyżej celowo nie używaliśmy standardowej notacji. Niech będzie prostym ćwiczeniem dla Czytelniczek zapisanie podanych aksjomatyk teorii algebr Boole'a w notacjach standardowych. Wykonanie tego ćwiczenia nagrodzone zostanie iluminacją: stwierdzisz, że przecież gdzieś już to widziałaś!

Przykłady algebr Boole'a.

- Wszystkie ***podzbiory dowolnego zbioru*** U wraz z operacjami teoriomnogościowymi: sumy (kres górny), iloczynu (kres dolny), dopełnienia (do U), zbiorem U jako jedynką oraz zbiorem pustym $\emptyset$ jako zerem tworzą algebrę Boole'a.
- **Algebra wartości logicznych.** Tabliczki prawdziwościowe funktorów odpowiadających spójnikom zdaniowym pokazują, że w zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ można wprowadzić strukturę algebry Boole'a. Zerem tej algebry jest 0, jej jedynką jest 1. Kres dolny odpowiada koniunkcji, kres górny alternatywie (nierozłącznej), a operacja dopełnienia odpowiada negacji.
- **Algebra zdarzeń.** Przestrzeń zdarzeń jest algebrą Boole'a. Jest to, rzecz jasna, szczególny przypadek pierwszego z rozważanych przykładów. Zdarzenia są zbiorami (zdarzeń elementarnych), a koniunkcji i alternatywie zdarzeń odpowiadają operacje teoriomnogościowe na zbiorach zdarzeń elementarnych; zdarzeniu przeciwnemu do danego zdarzenia odpowiada dopełnienie teoriomnogościowe tego zdarzenia.
- **Kraty pojęć.** Ten przykład wykorzystuje kilka pojęć algebraicznych, których tu nie objaśniamy. Jest on przeznaczony dla tych czytelniczek, które są już trochę oswojone z algebrą, lub też takich, które — zżerane zdrową ambicją — zechcą odnaleźć owe pojęcia w jakimś podręczniku. Dodajmy, że algebry z tego przykładu mają ciekawe zastosowania, także lingwistyczne — np. w opisie zależności semantycznych w leksykonie.

Kontekstem nazwiemy dowolny układ postaci (G, M, I), gdzie G (ogół rozważanych obiektów) i M (ogół rozważanych cech) są zbiorami, a I relacją o dziedzinie G oraz przeciwdziedzinie M. Wyrażenie gIm czytajmy: obiekt g ma cechę m.

Można czynić dalsze założenia o tego typu układach; w tym miejscu przywoływanie ich jest nieistotne. Zdefiniujmy dwa operatory na rodzinach zbiorów obiektów i cech:

$$\rhd(A) = \{m \in M \ : \ (\forall g)\ [g \in A \to gIm]\}$$

$$\lhd(B) = \{g \in G \ : \ (\forall m)\ [m \in B \to gIm]\}$$

Para $(\rhd, \lhd)$ jest odpowiedniością Galois. Dla dowolnego kontekstu (G, M, I) nazwiemy ***pojęciem formalnym*** tego kontekstu każdą parę (A, B) taką, że:

$$A \subseteq G,\ B \subseteq M,\ \rhd(A) = B,\ \lhd(B) = A.$$

Ekstensją pojęcia formalnego (A, B) jest A, jego ***intensją*** jest B. Rodzinę wszystkich pojęć formalnych kontekstu (G, M, I) oznaczmy przez $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Rodzina ta jest częściowo uporządkowana przez relację $\prec$:

$(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 \subseteq A_2$ (co jest równoważne temu, że $B_2 \subseteq B_1$).

Podstawowe dla rozważanej problematyki twierdzenie wysłowić można następująco (zob. Bernhard Ganter, Rudolf Wille *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999, str. 20; upraszczam nieco notację; wszystkie potrzebne do zrozumienia twierdzenia pojęcia znaleźć można w dowolnym solidnym podręczniku teorii krat; stosujemy też standardowe niedomówienia algebraiczne):

Twierdzenie.

Krata pojęć $\mathfrak{B}(G, M, I)$ jest kratą zupełną, w której kresy zdefiniowane są równościami:

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = (\bigcap_{t \in T} A_t, \rhd(\lhd(\bigcup_{t \in T} B_t)))$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = (\lhd(\rhd(\bigcup_{t \in T} A_t)), \bigcap_{t \in T} B_t).$$

Krata zupełna $\boldsymbol{V}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania $\gamma : G \to V$ oraz $\mu : M \to V$ takie, że $\gamma(G)$ jest supremum-gęsty w $\boldsymbol{V}$, $\mu(M)$ jest infimum-gęsty w $\boldsymbol{V}$ oraz gIm jest równoważne z $\gamma g \leqslant \mu m$ dla wszystkich $g \in G$ i wszystkich $m \in M$. W szczególności, $\boldsymbol{V} \cong \mathfrak{B}(V, V, \leqslant)$. Mamy tu oczywiście: $\boldsymbol{V} = (V, \leqslant)$.

Jak pisze jeden z autorów znanego Państwu *Wstępu do językoznawstwa* na stronie 14, teoria algebr Boole'a jest ***powszechnie znana***. Mam jednak nadzieję, że przypomnieniem tych kilku pojęć nikogo nie uraziłem.

16.4.2. Język KRP a języki etniczne

Czy „przekłady" z języka KRP na języki etniczne (i na odwrót) są możliwe? A jeśli niemożliwe są wierne, „globalne" przekłady, to jaka część języka etnicznego ma swój przekład na język KRP? Poniżej ograniczymy się tylko do bardzo ogólnych uwag dotyczących zależności między językiem KRP a językami etnicznymi. Będą to przy tym uwagi raczej dogmatyczne. Więcej na ten temat: np. w wykładzie SEMIOTYKA LOGICZNA przewidzianym w programie studiów JĘZYKOZNAWSTWA I NAUK O INFORMACJI na roku czwartym.

Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi. Wszystko, co daje się wyrazić, jest wyrażalne w językach etnicznych. Pomijając niuanse gramatyczne oraz zasoby słownikowe (które zawsze można uzupełniać), wszystkie języki etniczne są zasadniczo ***równoważne***, jeśli chodzi o treści w nich wyrażalne.

Język Klasycznego Rachunku Zdań jest tworem o wiele młodszym niż poszczególne języki etniczne — liczy sobie zaledwie dwa i pół tysiąca lat. Z kolei, język Klasycznego Rachunku Predykatów liczy sobie niewiele więcej niż sto lat. Inspiracje do zbudowania języka KRP były po części logiczne, po części matematyczne.

Język KRP nadaje się do „mówienia" o bardzo szerokiej klasie struktur: o układach złożonych z ***dowolnego*** zbioru przedmiotów oraz określonych między tymi przedmiotami relacjach. Dla większości zastosowań, język KRP (a więc także jego dobrze określona semantyka) jest całkowicie wystarczający. W szczególności, ponieważ w języku tym sformułować można teorię mnogości (która stanowi podstawę dla całej matematyki), znakomita większość rozważań matematycznych jest wyrażalna w (stosownych fragmentach) języka KRP.

Czasami podkreśla się fakt, że formalizacja klasycznego pojęcia prawdy (podana przez Tarskiego, w terminach relacji spełniania omówionej wyżej) nie jest adekwatna np. dla zdań z różnego rodzaju modalnościami (aletycznymi, deontycznymi, epistemicznymi, itd.). Tak oczywiście jest, należy jednak zwrócić uwagę, że dla każdej z odpowiednich logik nieklasycznych (np. modalnych) formułuje się dobrze określone pojęcie spełniania i prawdy. Przy tym, w metajęzyku opisu korzysta się z teorii mnogości, a więc także z KRP. Podobne uwagi można sformułować pod adresem innych logik: np. wielowartościowych, temporalnych, itd.

Zwraca się również uwagę, że wiele fenomenów języków etnicznych (np. okazjonalność, wyrażenia abstrakcyjne wymagające kwantyfikacji wyższych rzędów, elipsa, metafory, idiomy, presupozycje, implikatury, performatywy, konstrukcje intensjonalne w ogólności, akty mowy, mowa zależna, itd.) wymyka się opisowi z bezpośrednim zastosowaniem semantyki KRP. Także w tych przypadkach, stosowne ujęcia metalogiczne korzystają jednak, w ostatecznym rozrachunku, z teorii mnogości oraz KRP.

Wreszcie, podkreśla się zasadniczą różnicę między językami etnicznymi a językami sztucznymi: w językach etnicznych nie występują w sposób wyraźny ***zmienne*** (zdaniowe lub nazwowe). Ten fakt jednak nie przesądza, iż ***przekłady*** z języków etnicznych na języki sztuczne (i na odwrót), zachowujące własności znaczeniowe, są niemożliwe. W istocie, istnieje wiele rozbudowanych systemów formalnych, w których takie przekłady się proponuje.

Czyżby więc, mimo wszystkich tych (i ewentualnie dalszych) zastrzeżeń, istnienie ***globalnego*** „przekładu" wszelkich wyrażeń dowolnego języka etnicznego na język KRP, z zachowaniem wszystkich własności semantycznych, było przesądzone? Sądzimy, że nie. Tylko wybrane rodzaje wyrażeń (zdań) języków etnicznych można „rozumnie" przekładać na język KRP. Aby taki przekład był sensowny, muszą być spełnione, m.in. następujące warunki:

- rozważane wyrażenia muszą mieć porządnie określone ***kategorie syntaktyczne*** (odpowiadające predykatom, nazwom, funktorom różnych rodzajów);
- trzeba się ograniczyć jedynie do funkcji ***informacyjnej*** (deskryptywnej) wyrażeń, pomijając (pierwszorzędowe w przypadku języków etnicznych) funkcje ***pragmatyczne***, np. funkcję ***perswazyjną***;
- należy się ograniczyć do wyrażeń, a nie ***wypowiedzi***, w przypadku tych drugich istotną rolę odgrywają ich ***konteksty***, a to zmusza do wykroczenia poza klasyczne (w terminach relacji spełniania dla KRP) rozumienie prawdziwości.

„Przekłady" w drugą stronę (tj. z języka KRP na języki etniczne) są oczywiście o wiele łatwiejsze. Jednak również w tym przypadku napotykamy na pewne trudności („przekłady" pewnych kontrukcji logicznych źle „współżyją" gramatycznie, jeśli użyć tej niejasnej metafory).

Tak więc, dla przykładu, nie sprawia najmniejszych trudności dokonanie „przekładu" z języka polskiego na język KRP zdań poniższej postaci, w których jest jasne, co przełoży się na predykat, co na nazwę, z jakimi rodzajami kwantyfikacji mamy do czynienia, itd.:

- Jan zdradził Klaudię z Cecylią.
- Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- Kto śpi, nie grzeszy.

Podobnie, nietrudno znaleźć różnice znaczeniowe w podanych niżej parach wyrażeń:

1.	Umarł i dostał jakiś order.	Dostał jakiś order i umarł.
2.	Umarł bo dostał jakiś order.	Dostał jakiś order bo umarł.
3.	Umarł więc dostał jakiś order.	Dostał jakiś order więc umarł.
4.	Umarł chociaż dostał jakiś order.	Dostał jakiś order chociaż umarł.
5.	Umarł gdy dostał jakiś order.	Dostał jakiś order gdy umarł.
6.	Umarł mimo że dostał jakiś order.	Dostał jakiś order mimo że umarł.
7.	Nie dość, że umarł, to dostał jakiś order.	Nie dość, że dostał jakiś order, to umarł.

Drobnym problemem może okazać się oddanie tych różnic znaczeniowych w „przekładach" tych wyrażeń na język KRP.

Nie poświęcamy w tych wykładach specjalnej uwagi problemom znajdowania tego rodzaju przekładów z powodów, które zostały już przedstawione w semestrze zimowym: skoro otrzymałaś Świadectwo Dojrzałości, to należy przypuszczać, że sprawnie posługujesz się językiem polskim, w Czytaniu ze Zrozumieniem, analizie składniowej wypowiedzi, itd. Kto jednak łaknie tego typu ćwiczeń, znajdzie je w wielu powszechnie dostępnych podręcznikach i zbiorach zadań.

Pozwólmy sobie, dla relaksu, przywołać w tym miejscu garść wyrażeń o wymowie (w naszym mniemaniu) zabawnej. Komizm jest tu wynikiem różnorakich czynników, np.: błędów składniowych i semantycznych, elipsy, wieloznaczności, różnego rodzaju implikaturom, itd. Można, dla rozrywki, próbować znaleźć „przekłady" podanych wyrażeń na język KRP.

- Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem, po kościele — przed kościołem.
- Nad rzeką dziewczę doiło krowę, a w wodzie odbijało się odwrotnie.
- Jan zakopał skarb razem z teściową.
- Mimo starań lekarzy pacjent wyzdrowiał.
- Po wielu staraniach lekarzy pacjent zmarł.
- Popieramy program partii (tu wPiSz nazwę partii), oparty na przeświadczeniu o własnej słuszności.
- Cała wspólnota dziękuje chórowi parafialnemu, który na okres wakacji zaprzestał swojej działalności.
- Wieś była samowystarczalna: kobiety dostarczały mleka, mięsa i skór.
- Zachowanie dzieci dalece odbiega od rzeczywistości.
- Temperatura w kraju zależy od termometru.
- Chory więzień nie dość, że nie był leczony, musiał jeszcze niekiedy umierać.
- Nie chcę, ale muszę.
- Mam swoje zdanie w tej sprawie, ale się z nim nie zgadzam.
- Kara śmierci ma charakter nieodwracalny.
- Na mordy carów państwa Europy patrzyły złym okiem.
- W XVI wieku uprawiano wiele roślin, których jeszcze nie znano.
- Dzięki seppuku Japończycy mogli pokazać swoje prawdziwe wnętrze.
- Emilia Plater była pułkownikiem o kobiecych piersiach widocznych spod munduru.
- Wietrzenie skał jest pojęciem czysto teoretycznym, bo wszystkie dawno wywietrzały.
- Meduza żyje w jelicie grubym człowieka, więc jest pożytecznym szkodnikiem.
- Beethoven był głuchy, ale przynajmniej widział co komponował.

- Jontek na swoim zegarze w chałupie znalazł wskazówki do życia.
- Harfa jest podobna do łabędzia, tylko gorzej pływa.
- Jeśli podzielimy graniastosłup wzdłuż przekątnej podstawy, to otrzymamy dwie trumny.
- Prostokąt różni się od kwadratu tym, że raz jest wyższy a raz szerszy.
- Przez uderzenia pędzlem malarz uzyskuje smutek na twarzy modelki.
- Gdyby stopniały lodowce, to Wielka Brytania byłaby cała zalana, a Polska chyba też, ale kilka dni później.
- Po bitwie na polu grunwaldzkim zostało więcej trupów niż przyszło.
- Polana jest to forma lasu bez lasu.
- Janko Muzykant ledwie zipał, ale zipał.
- Słowacki na swoim pogrzebie widział tylko garstkę najbliższych przyjaciół.
- Po ogłoszeniu 10 przykazań Mojżesz uznał je za nieżyciowe i rzucił w przepaść.
- Kaj i Gerda nie byli ani siostrą ani bratem, tylko rodzeństwem.
- W puszczy żyje dużo drapieżników, które mogą człowieka pożreć, zadusić i zostawić.
- Całymi dniami pił po nocach.
- Na skutek żałoby swojej matki, Iwona urodziła się w pięć lat po śmierci ojca.
- Andromaka była wdową, jakiej wielu mężów mogło sobie życzyć.
- We wsi panowała ciemnota a także wójt.
- Autor w tym wierszu ukazuje nam swoje wnętrze i mówi, że jest mu niedobrze.
- Wiatr wiał tak silny, że powywracał dzwony na lewą stronę.
- Spróchniały ząb czasu dotknął go swoim palcem.
- Ludzie pierwotni, gdy chcieli rozpalić ogień musieli pocierać krzemieniem o krzemień, a pod spód podkładali stare gazety.

- *Bogurodzica* śpiewana była często na rozpoczęcie bitwy pod Grunwaldem.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie zarabiał więcej od średniej krajowej.
- „Ruchu nie ma" — rzekł Parmenides i odszedł.
- Nie znał zupełnie niczego.
- W moim zestawie pojęć nie ma pojęcia grzechu, a więc nie mogę grzeszyć.
- Przypuszczam, że sto lat temu nie było mnie (jeszcze/już) na świecie.
- Beata jest wierna wszystkim swoim narzeczonym.
- Nie ulegaj przesądom, bo to przynosi pecha.
- Każdy rzekomy przestępca jest przestępcą.
- Oskarżenie ministra okazało się bezpodstawne.
- Będzie tak dobrze, że gorzej już nie będzie.
- Wszyscy nie zapłacili.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie robił to, na co ma ochotę. A jeśli nie, to go do tego zmusimy.
- Kobiety i mężczyźni mają takie same prawa przy podejmowaniu i rozwiązywaniu umowy o pracę.
- Wyjątek potwierdza regułę.
- Dzięki swemu kalectwu nie może biedak dostać pracy.
- Z okazji śmierci męża ślemy wyrazy głębokiego współczucia.
- W związku ze śmiercią mojej matki proszę o wypłacenie mi ekwiwalentu pieniężnego.
- Małżeństwo to zalegalizowana prostytucja.
- Wolny jest ten, kto nie siedzi w więzieniu.
- Kapitał to ta część bogactwa, którą poświęca się, by pomnożyć swe bogactwo.

- Mąż stanu to polityk nieżyjący od piętnastu lat.
- Demokracja to ustrój, w którym możesz mówić to co myślisz, nawet wtedy, kiedy nie myślisz.
- Sprawiedliwe jest to, co leży w interesie silniejszego.
- Potrafię się oprzeć wszystkiemu, z wyjątkiem pokusy.
- Nietoperze są ssakami, bo nie mają piór. :)
- Założę się, że nie ma się o co zakładać.
- Jeśli zalegalizujemy eutanazję, to rozwiążemy problem braku pieniędzy na emerytury.
- Jeśli zalegalizujemy aborcję, to rozwiążemy problem przeludnienia.
- Lepsze jutro było wczoraj.
- W teorii nie ma różnicy między teorią a praktyką. W praktyce jest.
- „Nie strzelajcie, towarzysze" — powiedział Majakowski na chwilę przed swoim urzędowo stwierdzonym samobójstwem.
- „Nie ma reguły bez wyjątków" jest regułą bez wyjątków.
- Raz ladacznica, zawsze ladacznica.
- Kiedy ktoś mówi, że chodzi o zasady, a nie o pieniądze, to wiadomo,że chodzi o pieniądze.
- Uczciwy polityk to ten, który, gdy raz został kupiony, pozostaje takim na zawsze.
- Ekonomista to ekspert, który będzie wiedział jutro, dlaczego rzeczy, które przepowiedział wczoraj, nie sprawdziły się dzisiaj.
- Zamiast wiary w pieniądze, inwestuj w wiarę.
- W kapitalizmie człowiek wykorzystuje człowieka. W komunizmie odwrotnie.
- Oddać życie za przekonania teologiczne jest najgorszym użytkiem, jakie człowiek może z życia uczynić.
- Pieniądze ma się po to, aby ich nie mieć.

- W piekle diabeł jest postacią pozytywną.
- Wiem, skąd legenda o bogactwie żydowskim. Żydzi płacą za wszystko.
- Pieniądze ułatwiają znoszenie ubóstwa.
- Polityka to bezkrwawa wojna, a wojna to polityka i rozlew krwi.
- W wolnym kraju każdy może wygłaszać własne zdanie i nikt nie musi tego słuchać.
- Istnieje cenzor, który cenzoruje teksty dokładnie tych autorów, którzy nie stosują autocenzury.
- **Hegel.** Człowiek uczy się z historii, że człowiek niczego nie uczy się z historii.
- **Kamień.** Istota wszechmogąca może stworzyć kamień, którego nie może podnieść.
- **Teodycea.** Istnienie zła na świecie jest w zgodzie z miłosierdziem bożym.
- **Hempel.** Obserwowanie żółtych liści dostarcza konfirmacji, że wszystkie kruki są czarne.
- **Berry.** Najmniejsza liczba naturalna niedefiniowalna przez mniej niż 30 słów jest definiowalna przez mniej niż 30 słów.
- **Achilles.** Jeśli Żółw znajduje się w odległości np. 1m od Achillesa, to Achilles nigdy go nie dogoni.
- **Moment śmierci.** Jeśli żyjemy, to śmierci nie ma. Jeśli nie żyjemy, to nie ma życia. Moment śmierci nie może należeć ani do życia, ani do śmierci.
- **Moore.** „Byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę.”
- **Quine.** Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to Pingwiny rządzą światem.
- **Tezeusz.** Jeśli każdy element Statku został co najmniej raz zastąpiony nowym, to czy mamy do czynienia wciąż z tym samym Statkiem?
- **Ograniczenia kontroli.** Nigdy nie możemy być pozbawieni kontroli, bowiem niepodleganie czyjejkolwiek kontroli oznacza samokontrolę.
- **Rzymskie.** Dla zachowania pokoju przygotowuj się do wojny.

- **Nihilizm.** Jeśli prawda nie istnieje, to stwierdzenie „Prawda nie istnieje” jest prawdą.
- **Wszechmoc.** Co się stanie, gdy pocisk, który przebija wszystko trafi w tarczę, której nic nie może przebić?
- **Piosenka ontologiczna.** „To, co się dzieje, naprawdę nie istnieje, więc nie warto mieć niczego, tylko karmić zmysły.”
- **Niemożliwa odpowiedź.** Śpisz? Tak.
- **Stopnie nicości.** A im bardziej Puchatek zaglądał do środka, tym bardziej Prosiaczka tam nie było.
- **Sceptycyzm.** Nic nie jest poznawalne.
- **Solipsyzm.** Jestem solipsystą i dziwi mnie to, że inni nie są.
- Piotr głosi tolerancję dla nietolerancji.
- Piotr głosi nietolerancję dla tolerancji.
- Piotr głosi nietolerancję dla nietolerancji.
- *Panie doktorze, cierpię na chroniczne niezdecydowanie, ale pewna tego nie jestem.*
- Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?
- Powoli zaczynamy się spieszyć.

17. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

17.1. Język KRP

17.1.1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- (a) $\forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ (Q(x) \wedge R(x, y)))$
- (b) $\exists x\ (P(x) \wedge \forall z\ (Q(z) \rightarrow R(x, z)))$
- (c) $\exists x\ (P(x) \wedge \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x, y)))$.

17.1.2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α, gdzie:

- (a) t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z\ (P(y, z) \rightarrow Q(x))$; x jest jedyną zmienną w termie t;
- (b) t jest postaci $g(x, y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z\ (P(x, y) \rightarrow Q(z))$; x i y są jedynymi zmiennymi w termie t;
- (c) t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall y\ (P(x) \vee Q(y))$; t jest termem bazowym.

17.1.3. Podaj wartość $S(t, x, t')$ dla:

- (a) t postaci $f(a)$ oraz t' postaci $g(x, f(x))$;
- (b) t postaci $f(x, f(x, x))$ oraz t' postaci $g(x, g(x, y))$;
- (c) t postaci $f(x)$ oraz t' postaci $g(a, a)$; $g(a, a)$ jest termem bazowym.

17.1.4. Podaj wartość $S(t, x, \alpha)$ dla:

- (a) t postaci y oraz α postaci $\forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- (b) t postaci $f(x, y)$ oraz α postaci $\forall x \exists z\ (P(x) \rightarrow Q(x, z))$;
- (c) t postaci $g(x, f(y))$ oraz α postaci $P(x) \rightarrow Q(f(x), g(x, x))$.

17.1.5. Opisz zbiór wszystkich termów:

- (a) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego jednoargumentowego f;

- (b) utworzonych z jednej zmiennej x oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g;
- (c) utworzonych z jednej zmiennej x, jednego termu bazowego t oraz jednego symbolu funkcyjnego dwuargumentowego g.

17.1.6. Które z podanych niżej formuł są zdaniami języka KRP:

- (a) $\forall x \exists y \forall z\ (P(x,y,z) \rightarrow Q(x,x,x))$
- (b) $\exists x\ ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y\ (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- (c) $\forall x \exists y\ (P(f(y),x) \wedge Q(x,f(y)))$.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \ldots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum $\mathfrak{M}$ o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\exists x_1\ (x_1 \prec x_2) \vee \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (b) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \vee \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (c) α postaci $\exists x_1\ (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2\ (x_1 \prec x_2)$
- (d) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.2. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$
- (b) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- (c) α postaci $\forall x_1\ (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2\ (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \wedge z \prec y)$
- (b) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (z \prec x \wedge z \prec y)$
- (c) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Niech teraz $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację niewiększości $\leqslant$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $\leqslant$. Które z powyższych formuł są wtedy prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$?

17.2.4. Niech $\mathfrak{N}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych, z operacjami: dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i następnika „$+1$” oraz relacją mniejszości $<$ i relacją identyczności $=$ oraz zerem 0 jako elementem wyróżnionym w uniwersum, zdefiniowanymi w zwykły sposób. Niech:

- $\oplus$ denotuje operację dodawania
- $\otimes$ denotuje operację mnożenia
- S denotuje operację następnika
- $\prec$ denotuje relację mniejszości
- $\doteq$ denotuje relację identyczności
- $\bigcirc$ denotuje liczbę 0.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest podzielna bez reszty przez y
- (b) x jest liczbą pierwszą
- (c) x i y są względnie pierwsze

- (d) x jest sumą dwóch kwadratów
- (e) x jest większa od każdego podzielnika y
- (f) x nie jest następnikiem żadnego podzielnika y
- (g) x jest liczbą parzystą
- (h) x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z
- (i) x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{N}$:

- (a) Istnieje największa liczba pierwsza.
- (b) Istnieje bardzo dużo liczb pierwszych.
- (c) Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.
- (d) Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika.
- (e) Istnieją dokładnie dwie różne liczby, dla których zachodzi: $3x^2+2x+1 = 0$.
- (f) Dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia.
- (g) Każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych.

17.2.5. Niech $\mathfrak{L}$ będzie nieskończonym zbiorem L częściowo uporządkowanym przez relację $\sqsubseteq$. Oznacza to, że relacja $\sqsubseteq$ jest w zbiorze L zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna. Niech relacja $\sqsubset$ będzie zdefiniowana warunkiem: $x \sqsubset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqsubseteq y$ oraz nieprawda, że $y \sqsubseteq x$. Niech predykat $\doteq$ denotuje relację identyczności $=$. Niech predykat $\ll$ denotuje relację $\sqsubseteq$, a predykat $\prec$ relację $\sqsubset$.

A) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze formuły, wyrażające następujące pojęcia:

- (a) x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że x jest następnikiem, a y poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)

- (b) x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym (nie istnieje element y różny od x taki, że y jest następnikiem, a x poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$)
- (c) x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym (x jest poprzednikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (d) x jest elementem $\sqsubseteq$-największym (x jest następnikiem w relacji $\sqsubseteq$ względem każdego y)
- (e) x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B) Zapisać w języku KRP o powyższej sygnaturze następujące zdania i zastanowić się, które z nich są zdaniami prawdziwymi w strukturze $\mathfrak{L}$:

- (a) Porządek $\sqsubseteq$ jest liniowy (ma dodatkowo własność spójności).
- (b) Porządek $\sqsubset$ jest gęsty (istnieją co najmniej dwa elementy pozostające w relacji $\sqsubset$ oraz między każdymi dwoma elementami pozostającymi w relacji $\sqsubset$ istnieje element $\sqsubset$-pośredni).
- (c) Porządek $\sqsubset$ jest dyskretny (każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik), ma także bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik)).
- (d) Porządek $\sqsubset$ nie jest ani gęsty, ani dyskretny.
- (e) Istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) Istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.
- (i) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) Każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Niech teraz $\mathfrak{L}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, relacja $\sqsubseteq$ będzie inkluzją, a $\sqsubset$ inkluzją właściwą. Które z powyższych zdań są wtedy prawdziwe w $\mathfrak{L}$?

17.3. Tautologie KRP

17.3.1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:

- (a) $(\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \to Q(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)) \to \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
- (c) $\forall x \exists y\ P(y, x) \to \exists y \forall x\ P(y, x)$.

17.3.2. Wykaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\exists x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$
- (b) $(\alpha \vee \forall x\ \beta) \to \forall x\ (\alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest zmienną wolną w α.
- (c) $\forall x\ (\alpha \to \neg\beta) \to \forall x\ (\beta \to \neg\alpha)$.

17.3.3. Udowodnij, że następująca formuła jest prawdziwa w każdej strukturze skończonej, ale nie jest tautologią KRP:

- (a) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ ((P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3)) \to (P(x_1, x_1) \to P(x_2, x_1)))$

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Wykaż, że ze zbioru X wynika logicznie zbiór Y, dla:

- (a) $X = \{\forall x\ (\alpha \to \beta),\ \forall x\ (\beta \to \gamma)\}$, $Y = \{\forall x\ (\alpha \to \gamma)\}$
- (b) $X = \{\forall x\ \alpha,\ \forall x\ \beta\}$, $Y = \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta),\ \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$.

17.4.2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:

- (a) $X = \{\forall x \exists y\ P(x, y),\ \exists x\ P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\ P(x, x)$
- (b) $X = \{\exists x\ P(x),\ \forall x\ (P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$.

17.5. Teoria mnogości

Uwaga. Słuchacze tych wykładów mają za sobą kurs WSTĘPU DO MATEMATYKI, na którym omówiono rachunek zbiorów i relacji oraz rozwiązano wiele ćwiczeń dotyczących tej problematyki. Nie będziemy więc tego wszystkiego raz jeszcze rozpamiętywać. Poniżej podajemy jedynie kilka typowych ćwiczeń.

17.5.1. Zapisz w języku teorii mnogości:

- (a) x jest funkcją różnowartościową z y na z.
- (b) Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
- (c) Istnieje zbiór nieprzeliczalny.

17.5.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich zbiorach:

- (a) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \in y \wedge y \in z) \to x \in z)$
- (b) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \in y \wedge y \neq z) \to x \notin z)$
- (c) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \subseteq y \wedge y \in z) \to x \notin z)$.

17.5.3. Pokaż, że są prawami rachunku zbiorów:

- (a) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \subseteq y \wedge y \cap z = \emptyset) \to x \cap z = \emptyset)$
- (b) $\forall x \forall y\ (x = x \cap y \to x \subseteq y)$
- (c) Produkt kartezjański dowolnej rodziny zbiorów niepustych jest niepusty.

17.5.4. Udowodnij, że:

- (a) operacje sumy $\cup$ oraz różnicy $-$ można zdefiniować w terminach operacji: $\cap$ oraz różnicy symetrycznej $\div$;
- (b) operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ oraz różnicy $-$.

17.5.5. Pokaż, że są prawami rachunku relacji:

- (a) Niech $R \circ S$ oznacza złożenie relacji R i S, a R^{-1} niech oznacza konwers relacji R. Konwers złożenia relacji R i S jest złożeniem relacji S i R, czyli: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- (b) Relacja R w zbiorze X jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest relacją identyczności w X.
- (c) Złożenie $R_1 \circ SR_2$ relacji równoważności R_1 oraz R_2 jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1. Zapisz w języku teorii algebr Boole'a:

- (a) Dopełnienie kresu górnego elementów x i y jest równe kresowi dolnemu dopełnień elementów x i y.
- (b) Zbiór I elementów algebry jest jej ideałem, tj.: jest domknięty na operację kresu górnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego mniejsze.
- (c) Zbiór F elementów algebry jest jej filtrem, tj.: jest domknięty na operację kresu dolnego oraz zawiera, wraz z każdym swoim elementem, wszystkie elementy od niego większe.

17.6.2. Podaj przykłady ukazujące, że następujące zdania nie są prawdziwe o wszelkich algebrach Boole'a:

- (a) Istnieją atomy, tj. elementy minimalne algebry różne od jej zera.
- (b) Istnieją koatomy, tj. elementy maksymalne algebry różne od jej jedynki.
- (c) Porządek elementów algebry nie jest liniowy.

17.6.3. Pokaż, że są prawami teorii algebr Boole'a (w drugiej aksjomatyce):

- (a) Kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y.
- (b) Dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y.

17.6.4. Niech $\mathbb{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego X o skończonych dopełnieniach i niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru X ze zwykłymi teoriomnogościowymi operacjami sumy, iloczynu oraz dopełnienia.

- (a) Czy zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem, czy ideałem algebry $\mathfrak{B}$?
- (b) Czy algebra $\mathfrak{B}$ zawiera jakieś atomy lub koatomy?

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1. Podaj wyrażenie języka KRP odpowiadające strukturze składniowej następujących zdań języka polskiego:

- (a) Są wstrętne prawdy i piękne fałsze.
- (b) Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę.
- (c) Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- (d) Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- (e) Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa.

17.7.2. Odczytaj w języku polskim odpowiedniki następujących formuł języka KRP, przy podanej interpretacji:

- (a) $\forall x\ ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow R(x))$; $P(x)$ — x wdycha opary rtęci, $Q(x)$ — x kona, rzężąc, pocąc się i mocząc, $R(x)$ — x świruje jarząbka.

- (b) $\forall x\ (P(x) \to (\exists x \forall y\ (Q(x,y) \to \exists x\ \neg R(x))))$; $P(x)$ — x jest bezrobotny, $Q(x,y)$ — x jest bogatszy od y, $R(x)$ — x jest odpowiedzialny za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.
- (c) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5\ ((M(x_1,x_2,x_3) \wedge M(x_4,x_3,x_5)) \to \exists x_6\ (M(x_1,x_6,x_4 \wedge M(x_5,x_2,x_6)$; $M(x,y,z)$ — y leży między x oraz z, przy czym nie jest wykluczone, iż y jest identyczny z x lub y jest identyczny z z.

17.7.3. Które z poniższych wyrażeń są prawdami logicznymi lub fałszami logicznymi:

- (a) Żaden papież nie był kobietą.
- (b) Dawno, dawno temu wszystkie liczby były wymierne.
- (c) Współżył z najstarszą mieszkanką naszej wsi, ale mieszkał u jej matki.
- (d) Prawdy wieczne są odwieczne.
- (e) Elipsy to takie lekko spłaszczone okręgi.

Rozwiązania ćwiczeń

17.1. Język KRP

17.1.1.

- (a) Pierwsze z lewej wystąpienie y jest wolne w tej formule. Zmienna y jest zmienną wolną tej formuły.
- (b) Ta formuła nie zawiera zmiennych wolnych.
- (c) Zmienna y jest jedyną zmienną wolną tej formuły.

17.1.2.

- (a) Tak. Żadna zmienna występująca w termie $f(x)$ nie stanie się związana po podstawieniu tego termu do rozważanej formuły.

- (b) Nie. Po wstawieniu termu $g(x, y)$ do formuły $\forall y \forall z\ (P(x, y) \to Q(z))$ zmienna y występująca w tym termie staje się związana w rozważanej formule.

- (c) Tak. Term $f(a)$ nie zawiera zmiennych wolnych, a więc jest podstawialny do każdej formuły.

17.1.3.

- (a) $S(f(a), x, g(x, f(x)))$ jest termem $g(f(a), f(f(a)))$.
- (b) $S(f(x, f(x, x)), x, g(x, g(x, y)))$ jest termem $g(f(x, f(x, x)), g(f(x, f(x, x), y)))$.
- (c) Nie można dokonać podstawienia. Term $g(a, a)$ nie zawiera zmiennej x.

17.1.4.

- (a) $S(y, x, \forall x \exists z\ (P(x) \to Q(x, z)))$ jest formułą $\forall x \exists z\ (P(y) \to Q(y, z))$.
- (b) $S(f(x, y), x, \forall x \exists z\ (P(x) \to Q(x, z)))$ jest formułą $\forall x \exists z\ (P(f(x, y)) \to Q(f(x), z))$. Zauważ, że zmienna x stała się związana po podstawieniu!
- (c) $S(g(x, f(y)), x, P(x) \to Q(f(x), g(x, x))$ jest formułą:
  $P(g(x, f(y))) \to Q(f(g(x, f(y))), g(g(x, f(y)), g(x, f(y))))$.

17.1.5.

- (a) Jest to zbiór: $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\}$.
- (b) Jest to zbiór: $\{x, g(x, x), g(x, g(x, x)), g(g(x, x), x), \ldots\}$.
- (c) Jest to zbiór:
  $\{x, t, g(x, x), g(t, t), g(x, t), g(t, x)\} \cup$
  $\{g(x, g(x, x)), g(x, g(t, t)), g(x, g(x, t)), g(x, g(t, x))\} \cup$
  $\{g(t, g(x, x)), g(t, g(t, t)), g(t, g(x, t)), g(t, g(t, x))\} \cup \ldots$.

17.1.6.

- (a) Tak, jest zdaniem.
- (b) Pierwszy człon koniunkcji zawiera wolne wystąpienie zmiennej y, a więc rozważana formuła nie jest zdaniem.
- (c) Tak, jest zdaniem.

17.2. Relacja spełniania

17.2.1.

- (a) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden jej człon. Wystarczy teraz zauważyć, że ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, ponieważ ciąg $w' = \langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$.
- (b) Rozważana formuła jest alternatywą, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ co najmniej jeden jej człon. Ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej alternatywy: ciąg w spełniałby w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej alternatywy, gdyby ***każdy*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną, spełniał w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Tak jednak nie jest, ponieważ np. ciąg $\langle 1, 0, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy zatem, że ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ żadnego z członów rozważanej alternatywy. W konsekwencji, alternatywa ta nie jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ przez ciąg w.
- (c) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami egzystencjalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_1\, x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 0: ciąg $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla

drugiego członu rozważanej koniunkcji: ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_2 \; x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 2: ciąg $\langle 1, 2, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Ponieważ ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ oba człony koniunkcji, spełnia też w strukturze $\mathfrak{M}$ całą koniunkcję.

- (d) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami generalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\forall x_1 \; x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną. Jednak np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy więc, że ciąg w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1 \; x_1 \prec x_2$, czyli pierwszego członu rozważanej koniunkcji. Nie spełnia zatem również całej koniunkcji. Szukanie odpowiedzi na pytanie, czy ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon rozważanej koniunkcji (a nietrudno pokazać, że nie spełnia) nie jest już potrzebne.

17.2.2.

- (a) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 \; (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest alternatywą, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia co najmniej jeden człon tej alternatywy. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej alternatywy. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają alternatywę $x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę:

$$\forall x_1 \; (x_1 \prec x_2 \vee x_2 \prec x_1).$$

- (b) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 \; (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w'

spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest koniunkcją, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa człony tej koniunkcji. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej koniunkcji. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają koniunkcję $x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 \, (x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$.

- (c) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa: (1) w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1 (x_1 \prec x_2)$ ***lub*** (2) w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_2 (x_1 \prec x_2)$. Punkt (1) oznacza, że nie dla wszystkich wartościowań $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ wartościowanie w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Istotnie, tak właśnie jest: np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Ponieważ zachodzi jeden (pierwszy) z członów alternatywy (1) ***lub*** (2), więc zachodzi cała ta alternatywa. Oznacza to, że ***dowolne*** wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1 (x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2 (x_1 \prec x_2)$.

17.2.3.

Najpierw rozważamy przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację mniejszości $<$.

- (a) Rozpatrywana formuła stwierdza, że między każdymi dwiema liczbami naturalnymi istnieje liczba „pośrednia" (w sensie porządku $<$). Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ np. między liczbami 1 i 2 nie ma żadnej liczby naturalnej n takiej, że $1 < n$ oraz $n < 2$.

- (b) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba mniejsza od nich obu. Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ nie istnie np. liczba mniejsza od liczb 0 oraz 1.

- (c) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba większa od nich obu. Formuła ta jest więc prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$: dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n np. liczba $m+n+1$ jest większa zarówno od m, jak i od n.

UWAGA. W powyższej interpretacji nie mamy możliwości stwierdzania, że rozważane liczby naturalne są różne (nie dysponujemy predykatem identyczności).

Rozważamy teraz przypadek, gdy $\prec$ denotuje relację niewiększości $\leqslant$.

- (a) Rozpatrywana formuła jest fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$: np. dla liczb 3 oraz 2 nie istnieje liczba n taka, że $3 \leqslant n$ oraz $n \leqslant 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $k \leqslant m$, jak i $k \leqslant n$.
- (c) Rozpatrywana formuła jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$. Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych m oraz n istnieje liczba k taka, że zarówno $m \leqslant k$, jak i $n \leqslant k$.

17.2.4.

A) W przypadku predykatu $\doteq$ będziemy pisać $t_1 \doteq t_2$ zamiast $\doteq (t_1, t_2)$. Podobnie, w przypadku predykatu $\prec$ będziemy pisać $t_1 \prec t_2$ zamiast $\prec (t_1, t_2)$. Niech ponadto predykat $\preceq$ będzie zdefiniowany warunkiem: $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \prec y$ lub $x \doteq y$. [Oznacza to, że wyrażenie $x \preceq y$ jest skrótem dla wyrażenia $x \prec y \lor x \doteq y$.]

- (a) $\exists z\ (x \doteq \otimes(y, z))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $div(x, y)$. Formułę $div(x, y)$ czytamy zatem: x jest podzielna się bez reszty przez y.
- (b) $\forall y\ (y \preceq x \rightarrow ((y \doteq S(\bigcirc) \lor y \doteq x)) \lor \neg div(x, y))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $pr(x)$. Formułę $pr(x)$ czytamy zatem: x jest liczbą pierwszą.
- (c) $\forall z\ ((\neg z \doteq S(\bigcirc) \land (z \preceq x \land z \preceq y)) \rightarrow \neg(div(x, z) \land div(y, z)))$. Niech skrótem dla tej formuły będzie $rp(x, y)$. Formułę $rp(x, y)$ czytamy zatem: x oraz y są względnie pierwsze.
- (d) $\exists y \exists z\ (x \doteq \oplus(\otimes(y, y), \otimes(z, z)))$. Formuła ta stwierdza, że x jest suma dwóch kwadratów.
- (e) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow z \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest większa od każdego podzielnika y.
- (f) $\forall z\ (div(y, z) \rightarrow \neg x \doteq s(z))$. Formuła ta stwierdza, że liczba x nie jest następnikiem żadnego podzielnika liczby y.
- (g) $\exists z\ (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z))$. Formuła ta stwierdza, że x jest liczbą parzystą.

- (h) $div(y,x) \wedge div(z,x) \wedge \forall u\ ((div(y,u) \wedge div(z,u)) \rightarrow u \preceq x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest największym wspólnym podzielnikiem y oraz z.

- (i) $div(x,y) \wedge div(x,z) \wedge \forall u\ ((div(u,y) \wedge div(u,z)) \rightarrow x \preceq u)$. Formuła ta stwierdza, że x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y oraz z.

B)

- (a) $\exists x\ (pr(x) \wedge \forall y\ (pr(y) \rightarrow y \preceq x))$. To zdanie stwierdza, że istnieje największa liczba pierwsza. Jest ono fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (b) Tego nie można napisać w języku KRP. „Bardzo dużo" jest wyrażeniem niejasnym znaczeniowo. W języku KRP rozważanej sygnatury można zapisać np. to, że dla każdej liczby pierwszej istnieje większa od niej liczba pierwsza (por. punkt (a) powyżej). Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

- (c) $\forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\ (x \doteq \oplus(\otimes(y_1,y_1), \oplus(\otimes(y_2,y_2), \oplus(\otimes(y_3,y_3), \otimes(y_4,y_4)))))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (d) $\forall x \forall v \forall y \forall z\ (((div(x,y) \wedge div(x,z) \wedge \forall u\ ((div(u,y) \wedge div(u,z)) \rightarrow x \preceq u)) \wedge (div(y,v) \wedge div(z,v) \wedge \forall u\ ((div(y,u) \wedge div(z,u)) \rightarrow u \preceq v))) \rightarrow x \prec v)$. Ta formuła stwierdza, że najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb jest mniejsza od ich największego wspólnego podzielnika. Jest ona fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (e) Zapiszmy najpierw formułę $R(x)$ wyrażającą fakt, że $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

  $$\oplus(\otimes(S(S(S(\bigcirc))), \otimes(x,x)), \oplus(\otimes(S(S(\bigcirc)), x), S(\bigcirc))) \doteq \bigcirc.$$

  Napiszemy teraz, że istnieją dokładnie dwie liczby, dla których zachodzi $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

  $$\exists x_1 \exists x_2\ ((R(x_1) \wedge R(x_2)) \wedge \forall y\ (R(y) \rightarrow (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2))).$$

  To zdanie jest fałszywe w strukturze $\mathfrak{M}$.

- (f) $\forall x \forall y \forall z\ (\otimes(\oplus(x,y), z) \doteq \oplus(\otimes(x,z), \otimes(y,z)))$. To zdanie wyraża (prawostronną) rozdzielność dodawania względem mnożenia. Jest ono prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$. Podobnie zapisujemy lewostronną rozdzielność dodawania względem mnożenia (Ćwiczenie: zapisz).

- (g) $\forall x\ (\exists z\ (x \doteq \otimes(S(S(\bigcirc)), z)) \to \exists u \exists v\ ((pr(u) \wedge pr(v)) \wedge x \doteq \oplus(u, v)))$. To zdanie stwierdza, że każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. W chwili, gdy pisane są te słowa, nie wiadomo, czy to zdanie jest prawdziwe w strukturze $\mathfrak{N}$. Jest to tzw. ***hipoteza Goldbacha***.

17.2.5.

A)

- (a) $\neg\exists y\ (\neg y \doteq x \wedge y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-minimalnym.
- (b) $\neg\exists y\ (\neg y \doteq x \wedge x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-maksymalnym.
- (c) $\forall y\ (x \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-najmniejszym.
- (d) $\forall y\ (y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że x jest elementem $\sqsubseteq$-największym.
- (e) $\neg y \ll x \wedge \neg x \ll x$. Formuła ta stwierdza, że x nie jest $\sqsubseteq$-następnikiem y oraz nie jest $\sqsubseteq$-poprzednikiem z.

B)

- (a) Trzeba zapisać, że predykat $\ll$ denotuje relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną:

  $\forall x\ (x \ll x)$

  $\forall x \forall y \forall z\ ((x \ll y \wedge y \ll z) \to x \ll z)$

  $\forall x \forall y\ ((x \ll y \wedge y \ll x) \to x \doteq y)$

  $\forall x \forall y\ (\neg x \doteq y \to (x \ll y \vee y \ll x))$.

  Koniunkcja tych formuł stwierdza, że $\sqsubseteq$ (czyli denotacja predykatu $\ll$) jest liniowym porządkiem.
- (b) $\exists x \exists y\ (\neg x \doteq y \wedge x \prec y) \wedge \forall x \forall y \exists z\ (x \prec y \to (x \prec z \wedge z \prec y))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem gęstym.
- (c) $\forall x\ (\exists y\ x \prec y \to \neg\exists z\ (x \prec z \wedge z \prec y)) \wedge \forall x\ (\exists y\ x \prec y \to \neg\exists z\ (y \prec z \wedge z \prec x))$. Formuła ta stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) jest porządkiem dyskretnym: każdy element, który ma $\sqsubset$-poprzednik ($\sqsubset$-następnik) ma też bezpośredni $\sqsubset$-poprzednik (bezpośredni $\sqsubset$-następnik).

- (d) Koniunkcja zaprzeczeń formuł z (b) i (c) powyżej stwierdza, że $\sqsubset$ (czyli denotacja predykatu $\prec$) nie jest ani porządkiem gęstym, ani porządkiem dyskretnym.
- (e) $\exists x \exists y\ (\neg x \ll y \wedge \neg y \ll x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubseteq$-nieporównywalne.
- (f) $\forall x \forall y \exists z\ (z \ll x \wedge z \ll y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-poprzednik.
- (g) $\forall x \forall y \exists z\ (x \ll z \wedge y \ll z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubseteq$-następnik.
- (h) $\exists x \exists y\ (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x)$. Formuła ta stwierdza, że istnieją elementy $\sqsubset$-nieporównywalne.
- (i) $\forall x \forall y \exists z\ (z \prec x \wedge z \prec y)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-poprzednik.
- (j) $\forall x \forall y \exists z\ (x \prec z \wedge y \prec z)$. Formuła ta stwierdza, że każde dwa elementy mają wspólny $\sqsubset$-następnik.

Dla każdego z powyższych zdań znaleźć można zbiór częściowo uporządkowany, w którym zdanie to jest fałszywe. Innymi słowy, zdania te nie są prawdziwe o wszystkich zbiorach częściowo uporządkowanych.

Jeśli L jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych, a relacja $\sqsubseteq$ jest relacją inkluzji i relacja $\sqsubset$ jest relacją inkluzji właściwej, to w strukturze $\mathfrak{L} = \langle L, \sqsubseteq, \sqsubset \rangle$:

- (a) Nie jest prawdziwe. Inkluzja nie jest porządkiem liniowym w L.
- (b) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa nie jest porządkiem gęstym w rozważanym zbiorze. Dla przykładu, nie istnieje zbiór A taki, że $\{1, 2\} \subset A$ oraz $A \subset \{1, 2, 3\}$.
- (c) Jest prawdziwe o inkluzji właściwej. Inkluzja właściwa jest porządkiem dyskretnym w rozważanym zbiorze.
- (d) Nie jest prawdziwe o inkluzji właściwej: zobacz punkty (b) i (c) powyżej.
- (e) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subseteq B$ ani $B \subseteq A$.

- (f) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \cap B \subseteq B$.
- (g) Jest prawdziwe. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi: $A \subseteq A \cup B$ oraz $B \subseteq A \cup B$.
- (h) Jest prawdziwe. Istnieją zbiory A, B liczb naturalnych takie, że ani $A \subset B$ ani $B \subset A$.
- (i) Nie jest prawdziwe. Zbiór pusty $\emptyset$ oraz dowolny zbiór niepusty A nie mają wspólnego $\subset$-poprzednika.
- (j) Nie jest prawdziwe. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz dowolny jego podzbiór A nie mają wspólnego $\subset$-następnika.

17.3. Tautologie KRP

17.3.1.

- (a) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

  - być liczbą podzielną przez 2
  - być liczbą podzielną przez 4.

  Wtedy:

  - Poprzednik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Jeśli wszystkie liczby są podzielne przez 2, to wszystkie liczby są podzielne przez 4*. Ta implikacja jest prawdziwa w rozważanej interpretacji, ponieważ ma fałszywy poprzednik.
  - Następnik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Każda liczba podzielna przez 2 jest też podzielna przez 4*. Ta implikacja jest fałszywa w rozważanej interpretacji, ponieważ np. liczba 2 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 4.

- (b) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

  - być liczbą parzystą
  - być liczbą nieparzystą.

  Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta).

- (c) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacja predykatu P będzie relacją „być następnikiem". Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (każda liczba ma następnik), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, będąca następnikiem wszystkich liczb naturalnych).

17.3.2. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \exists x\ (\alpha \to \beta)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ \alpha \ \to\ \exists x\ \beta$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \exists x\ \beta$. Stąd istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \exists x\ \beta$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \to \beta)$). Na mocy definicji relacji spełniania oznacza to, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$.

  Na mocy $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$ mamy: $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \alpha$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że dla wszystkich $m \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$.

  Założenie $\mathfrak{M} \models_w \exists x\ (\alpha \to \beta)$ oznacza, że dla pewnego $m_0 \in M$ mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \to \beta$.

  Ponieważ dla wszystkich $m \in M$ mamy $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$, więc mamy także w szczególności: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$.

Ponieważ reguła odrywania jest niezawodna, z powyższego otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$, co jest sprzeczne z otrzymanym poprzednio $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^m} \beta$. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologią KRP.

- (b) Dowód przeprowadzamy metodą nie wprost. Załóżmy, że x nie jest zmienną wolną w α. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models \alpha \vee \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Oznacza to, że istnieje wartościowanie w takie, że: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ (oraz $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$). Na mocy definicji relacji spełniania istnieje element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \vee \beta$. Stąd, mamy: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$.

  Z założenia, $\mathfrak{M} \models_w \alpha \vee \forall x\ \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że zachodzi alternatywa:

  - (1) $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***lub***
  - (2) $\mathfrak{M} \models_w \forall x\ \beta$.

  Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

  Jeśli zachodzi (1), to — ponieważ x nie jest zmienną wolną formuły α — na mocy twierdzenia 16.2.5.3., $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Ale $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$, na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost. Stąd przypadek (1) jest wykluczony.

  Jeśli zachodzi (2), to $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$ dla wszystkich $m \in M$, na mocy definicji relacji spełniania. W szczególności zatem: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, również przypadek (2) został wykluczony.

  Przypuszczenie dowodu nie wprost należy zatem odrzucić. Ostatecznie, rozważana formuła jest tautologia KRP.

- (c) Wystarczy zauważyć, że formuły $\alpha \to \neg\beta$ oraz $\beta \to \neg\alpha$ są semantycznie równoważne, co widoczne jest stąd, że tautologiami KRZ są:

  - $\alpha \to \neg\beta \ \equiv\ \neg\alpha \vee \neg\beta$
  - $\beta \to \neg\alpha \ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$
  - $\neg\alpha \vee \neg\beta \ \equiv\ \neg\beta \vee \neg\alpha$.

Formuły semantycznie równoważne spełniane są przez dokładnie te same wartościowania.

17.3.3.

- (a) Trzeba pokazać, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich strukturach skończonych, ale nie jest prawdziwa w co najmniej jednej strukturze nieskończonej.

  Po pierwsze, pokażemy, że jeśli podana formuła jest fałszywa w jakiejś strukturze $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, gdzie relacja R jest denotacją predykatu P, to zbiór M jest nieskończony. Stąd oczywiście wynika, że rozważana formuła jest prawdziwa we wszystkich modelach skończonych.

  Jeśli $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \; ((P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)) \rightarrow (P(x_1, x_1) \rightarrow P(x_2, x_1)))$ jest fałszywa w $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$, to istnieje funkcja $f : M \rightarrow M$ taka, że:

  - dla każdego $m \in M$ zachodzi $R(m, m)$
  - dla żadnego $m \in M$ nie zachodzi $R(f(m), m)$
  - dla każdych $m, n \in M$ mamy: jeśli $R(f(m), n)$, to $R(m, n)$.

  Weźmy dowolny element $m \in M$. Konstruujemy ciąg $\langle m_i \rangle$ w sposób następujący:

  - $m_0 = m$
  - $m_{i+1} = f(m_i)$.

  Niech $i < j$. Mamy wtedy:

  - zachodzi $R(m_i, m_{j-1})$
  - nie zachodzi $R(m_j, m_{j-1})$,

  co oznacza, że $m_i \neq m_j$. Tak więc, ciąg $\langle m_i \rangle$ jest różnowartościowy. Stąd zbiór M jest nieskończony.

  Po drugie, zauważmy, że rozważana formuła nie jest prawdziwa w strukturze nieskończonej $\mathfrak{M}$, której uniwersum stanowią wszystkie liczby naturalne, a denotacją predykatu P jest relacja niewiększości $\leqslant$.

17.4. Wynikanie logiczne w KRP

17.4.1. Przyjmiemy następującą konwencję notacyjną: jeśli w jest wartościowaniem w zbiorze M i $m \in M$, a x jest zmienną indywiduową, to przez w_x^m oznaczamy wartościowanie powstające z wartościowania w przez zastąpienie wartości przypisanej przez w zmiennej x elementem m.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$. Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)$. Stąd, dla pewnego wartościowania w mamy: $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \rightarrow \gamma)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$.

  Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha \rightarrow \beta$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ (\beta \rightarrow \gamma)$, więc $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta \rightarrow \gamma$ dla wszystkich $m \in M$, a więc w szczególności również $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$. Skoro $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \beta$ oraz $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta \rightarrow \gamma$, to oczywiście także $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \rightarrow \gamma$, ponieważ reguła sylogizmu hipotetycznego jest regułą niezawodną. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, zachodzi wynikanie logiczne: $X \models_{krp} Y$.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że nie zachodzi $X \models_{krp} Y$. Wtedy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.

  Oznacza to, że: $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \{\forall x\ (\alpha \wedge \beta), \forall x\ (\alpha \vee \beta)\}$. Zachodzi zatem alternatywa:

  - (1) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ ***lub***
  - (2) $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \forall x\ (\alpha \vee \beta)$.

  Każdy z tych przypadków należy rozpatrzyć oddzielnie.

  Jeśli zachodzi (1), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \wedge \beta)$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności zatem, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Oznacza to, na mocy definicji relacji spełniania, że: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha \wedge \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem przypadek (1) został wykluczony.

  Jeśli zachodzi (2), to istnieje wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \forall x\ (\alpha \vee \beta)$. Na mocy definicji relacji spełniania istnieje wtedy element $m_0 \in M$ taki, że $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} (\alpha \vee \beta)$. Stąd: $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_{w_x^{m_0}} \beta$. Ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \alpha$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \alpha$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \alpha$. Podobnie, ponieważ $\mathfrak{M} \models \forall x\ \beta$, więc dla wszystkich $m \in M$ zachodzi $\mathfrak{M} \models_{w_x^m} \beta$. W szczególności, mamy: $\mathfrak{M} \models_{w_x^{m_0}} \beta$. Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie), a zatem również przypadek (2) został wykluczony.

Ostatecznie, przypuszczenie dowodu nie wprost należy odrzucić. Zachodzi wynikanie logiczne $X \models_{krp} Y$.

17.4.2.

- (a) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P w tym zbiorze. Niech:

  - $M = \{1, 2, 3\}$
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(P) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

- (b) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P oraz $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ predykatu Q w tym zbiorze. Niech:

  - M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych
  - $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

  Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

17.5. Teoria mnogości

17.5.1. Definicje wszystkich rozpatrywanych pojęć muszą być sformułowane jedynie w terminach relacji $\in$ oraz relacji identyczności $=$.

- (a) Definiujemy najpierw pojęcia: singletonu, pary nieuporządkowanej i pary uporządkowanej:

$$x = \{y\} \;\equiv\; \forall z(z \in x \equiv z = y)$$

$$x = \{y, z\} \;\equiv\; \forall u(u \in x \equiv (u = y \vee u = z))$$

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Predykat „być funkcją" ma następującą definicję:

$$\mathrm{Fn}(x) \;\equiv\; (\forall y(y \in x \to \exists u \exists v(y = \langle u, v\rangle)) \wedge \\ \forall y \forall u \forall v((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle y, v\rangle \in x) \to u = v)).$$

Definiujemy pojęcia dziedziny i przeciwdziedziny:

$$y = \delta(x) \;\equiv\; \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle z, u\rangle \in x))$$

$$y = \rho(x) \;\equiv\; \forall z(z \in y \equiv \exists u(\langle u, z\rangle \in x)).$$

Definiujemy własność „być funkcją różnowartościową":

$$\mathrm{In}(x) \;\equiv\; \mathrm{Fn}(x) \wedge \forall y \forall z \forall u \forall v(((\langle y, u\rangle \in x \wedge \langle z, v\rangle \in x) \wedge u = v) \to y = z).$$

Wreszcie, własność „być funkcją różnowartościową z y na z" definiujemy następująco:

$$\mathrm{Bi}(x, y, z) \;\equiv\; \mathrm{In}(x) \wedge (\delta(x) = y \wedge \rho(x) = z).$$

- (b) Definiujemy relacje inkluzji oraz inkluzji właściwej:

$$x \subseteq y \;\equiv\; \forall z(z \in x \to z \in y)$$

$$x \subset y \;\equiv\; x \subseteq y \wedge \neg x = y.$$

Definiujemy własność „być zbiorem potęgowym zbioru x":

$$y = \wp(x) \;\equiv\; \forall z(z \in y \equiv z \subseteq x).$$

Fakt, że zbiory y oraz z są równoliczne ma zapis następujący:

$$\exists x\ \mathrm{Bi}(x, y, z).$$

Wtedy twierdzenie Cantora, głoszące, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów otrzymuje zapis następujący:

$$\neg \exists x \exists y\ \mathrm{Bi}(x, y, \wp(y)).$$

- (c) Definiujemy zbiór pusty oraz operację sumy zbiorów:

$$x = \emptyset \;\equiv\; \forall y \neg y \in x$$

$$z = x \cup y \;\equiv\; \forall u(u \in z \equiv (u \in x \vee u \in y)).$$

Definiujemy liczby porządkowe oraz graniczne liczby porządkowe:

$$\text{Ord}(x) \equiv (\forall y \forall z((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in x) \wedge \forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x) \rightarrow (z \in y \vee y = z \vee y \in z)))$$

$$\text{Lim}(x) \equiv ((\text{Ord}(x) \wedge \neg x = \emptyset) \wedge \forall y \neg x = y \cup \{x\}).$$

Definiujemy najmniejszą graniczną liczbę porządkową ω:

$$x = \omega \equiv (\text{Lim}(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg \text{Lim}(y))).$$

Definiujemy własność „być zbiorem przeliczalnym”:

$$\text{Ctb}(x) \equiv \exists y \ \text{Bi}(y, x, \omega).$$

Definiujemy własność „być zbiorem nieskończonym”:

$$\text{Inf}(x) \equiv \exists y \exists z \ (z \in \wp(x) \wedge \text{Bi}(y, x, z)).$$

Wreszcie, definiujemy własność „być zbiorem nieprzeliczalnym”:

$$\text{Uct}(x) \equiv \text{Inf}(x) \wedge \neg \ \text{Ctb}(x).$$

Zdanie *Istnieje zbiór nieprzeliczalny* ma zatem postać:

$$\exists x \ \text{Uct}(x).$$

Zwróćmy uwagę, że w definicji własności „być zbiorem nieprzeliczalnym” piszemy, że nie istnieje funkcja ustalająca równoliczność pewnych zbiorów.

17.5.2.

- (a) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
  - $C = \{\{\{1, 2\}, 3\}, 4\}$.

  Mamy wtedy: $A \in B$, $B \in C$ oraz $A \notin C$.
- (b) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{\{1, 2\}, 3\}$
- $C = \{\{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \in B$, $B \neq C$ oraz $A \in C$.

- (c) Wystarczy znaleźć zbiory A, B oraz C takie, że poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Takie są np. zbiory:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 4\}$.

Mamy wtedy: $A \subseteq B$, $B \in C$ oraz $A \in C$.

17.5.3.

- (a) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A, B oraz C takie, że:

  - $A \subseteq B$
  - $B \cap C = \emptyset$
  - $A \cap C \neq \emptyset$.

  Z ostatniej nierówności otrzymujemy, że istnieje $x \in A \cap C$, czyli $x \in A$ oraz $x \in C$. Skoro $A \subseteq B$, to $x \in B$. Ponieważ $B \cap C = \emptyset$, to $x \notin C$ i otrzymujemy sprzeczność. Tak więc, poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to $A \cap C = \emptyset$, dla dowolnych zbiorów A, B oraz C.

- (b) Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że rozważana implikacja nie jest prawem rachunku zbiorów. Wtedy istnieją zbiory A oraz B takie, że:

  - $A = A \cap B$
  - $A \nsubseteq B$.

Z drugiego z powyższych warunków otrzymujemy, że istnieje $x \in A$ taki, że $x \notin B$. Stąd i z warunku pierwszego, skoro $x \in A$ oraz $A = A \cap B$, to $x \in A \cap B$, czyli także $x \in B$. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem poczynione przypuszczenie należy odrzucić. Ostatecznie, jeśli $A = A \cap B$, to $A \subseteq B$, dla dowolnych zbiorów A oraz B.

- (c) Dla dowodu, że produkt kartezjański dowolnej niepustej rodziny $\{A_i : i \in I\}$ zbiorów niepustych jest niepusty wystarczy skorzystać z pewnika wyboru: wybieramy po jednym elemencie a_i z każdego ze zbiorów A_i. Wtedy ciąg $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ jest elementem produktu kartezjańskiego rodziny $\{A_i : i \in I\}$.

17.5.4.

- (a) Przypominamy, że różnica symetryczna zbiorów A i B zdefiniowana jest wzorem:
$$A \div B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
Operacja ta jest łączna, tzn.: $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$, można więc pisać $A \div B \div C$ w miejsce $A \div (B \div C)$ lub $(A \div B) \div C$. Mamy:

  - $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$
  - $A - B = A \div (A \cap B)$.

- (b) Niech zbiór C otrzymany będzie ze zbiorów A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$. Liczbę zastosowań operacji $\cap$ i $-$ potrzebnych do otrzymania C z A i B nazwiemy *wysokością* zbioru C. Przez indukcję po wysokości zbioru C pokażemy, że C jest podzbiorem albo A albo B.

  Jeśli wysokość C wynosi 0, to $C = A$ lub $C = B$ i twierdzenie jest udowodnione.

  Niech C ma wysokość $n+1$ i załóżmy, że twierdzenie zostało udowodnione dla wszystkich zbiorów o mniejszej wysokości. Wtedy $C = D \cap E$ lub $C = D - E$ dla pewnych zbiorów D i E, których wysokość jest mniejsza niż $n + 1$.

  W obu przypadkach $C \subseteq D$, a z założenia indukcyjnego D jest podzbiorem albo A, albo B. Zatem również C jest podzbiorem albo A, albo B.

  Tak więc, z A i B z pomocą operacji $\cap$ i $-$ otrzymać można tylko podzbiory A lub podzbiory B. Ale $A \cup B$ nie zawsze jest podzbiorem A lub podzbiorem B. Stąd, operacji sumy $\cup$ nie można zdefiniować w terminach operacji iloczynu $\cap$ i różnicy $-$.

17.5.5.

- (a) Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

  - $x(R \circ S)^{-1}y$
  - $y(R \circ S)x$
  - $\exists z\ (yRz \wedge zSx)$
  - $\exists z\ (zSx \wedge yRz)$
  - $\exists z\ (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
  - $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

  Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

- (b) Jeśli R jest relacją identyczności, to oczywiście jest relacją równoważności, a także jest częściowym porządkiem (bo jest zwrotna i przechodnia, a następnik implikacji charakteryzującej warunek antysymetrii jest zawsze spełniony, więc R jest również antysymetryczna).

  Z drugiej strony, skoro R jest jednocześnie równoważnością i częściowym porządkiem, to ponieważ R jest zarazem symetryczna i antysymetryczna, to dla dowolnych x oraz y, z $R(x, y)$ otrzymujemy $x = y$. Ponieważ R jest w dodatku zwrotna, więc R musi być relacją identyczności.

- (c) Przypominamy, że:

  - operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
  - jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R, R_1 i R_2
  - relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
  - relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
  - jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.

  Niech teraz R_1 i R_2 będą relacjami równoważności.

  Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

  Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

  $$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.

Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = \\ (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

17.6. Algebry Boole'a

17.6.1.

- (a) $\boxminus(\boxplus(x, y)) \doteq \boxtimes(\boxminus(x), \boxminus(y))$.
- (b) Zbiór I elementów algebry Boole'a jest jej ideałem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \land y \in I) \rightarrow \boxplus(x, y) \in I)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in I \land y \leqslant x) \rightarrow y \in I)$.
- (c) Zbiór F elementów algebry Boole'a jest jej filtrem, gdy:
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \land y \in F) \rightarrow \boxtimes(x, y) \in F)$
  - $\forall x \forall y\ ((x \in F \land x \leqslant y) \rightarrow y \in F)$.

17.6.2. Niech $\mathfrak{B}$ będzie algebrą Boole'a o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ wraz z operacjami:

- $\boxplus(x, y) = \max\{x, y\}$
- $\boxtimes(x, y) = \min\{x, y\}$

- $\boxminus(x) = 1 - x$,

gdzie jedynką algebry jest 1, a jej zerem jest 0. Wtedy:

- (a) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera atomów.
- (b) Algebra $\mathfrak{B}$ nie zawiera koatomów.
- (c) Porządek algebry $\mathfrak{B}$ jest liniowy.

17.6.3.

- (a) Przez różnicę elementów x oraz y rozumiemy element $\boxtimes(x, \boxminus(y))$. Oto dowód (w drugiej aksjomatyce), że kres górny elementów x i y jest równy kresowi górnemu elementu y oraz różnicy x i y, czyli że zachodzi: $\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$:

1.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \boxplus(y, \boxminus(y)))$	aksjomat B_2^7
2.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxtimes(\boxplus(y, x), \vartriangle)$	1, aksjomat B_2^1
3.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(y, x)$	2, aksjomat B_2^2
4.	$\boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y))) = \boxplus(x, y)$	3, aksjomat B_2^6
5.	$\boxplus(x, y) = \boxplus(y, \boxtimes(x, \boxminus(y)))$	4, symetryczność identyczności.

- (b) Mamy pokazać, że dopełnienie kresu dolnego elementów x i y jest równe kresowi górnemu dopełnień elementów x i y, czyli że: $\boxminus(\boxtimes(x, y)) = \boxplus(\boxminus(x), \boxminus(y))$.

  Po pierwsze, przypomnijmy, że następujące warunki są równoważne:

  - (1) $\boxtimes(x, y) = x$
  - (2) $\boxplus(x, y) = y$.

  Po drugie, zauważmy, że zachodzi implikacja:

  (3) jeśli $\boxtimes(x, z) = \vartriangle$ oraz $\boxplus(x, z) = \triangledown$, to $z = \boxminus(x)$.

  Istotnie, następujące dwa ciągi równości, wraz z (1) oraz (2) uzasadniają (3):

  $z = \boxplus(\vartriangle, z) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), z) =$

  $= \boxtimes(\boxplus(x, z), \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\triangledown, \boxplus(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\boxminus(x), z)$.

  $z = \boxtimes(\triangledown, z) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), z) =$

  $= \boxplus(\boxtimes(x, z), \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxplus(\vartriangle, \boxtimes(\boxminus(x), z)) = \boxtimes(\boxminus(x), z)$.

  Pokażemy teraz, że:

– (4) $\boxtimes(\boxtimes(x,y),\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y)))=\vartriangle$

– (5) $\boxplus(\boxtimes(x,y),\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y)))=\triangledown$.

Wtedy, na mocy (3), (4) oraz (5) otrzymamy poszukiwaną równość $\boxminus(\boxtimes(x,y)) = \boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y))$.

Dowód (4) jest następującym ciągiem równości:

$$
\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x,y),\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y))) =\\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(x,y),\boxminus(x)),\boxtimes(\boxtimes(x,y),\boxminus(y))) =\\
&\boxplus(\boxtimes(\boxtimes(y,x),\boxminus(x)),\boxtimes(x,\boxtimes(y,\boxminus(y)))) =\\
&\boxplus(\boxtimes(y,\boxtimes(x,\boxminus(x))),\boxtimes(x,\vartriangle)) = \boxplus(\boxtimes(y,\vartriangle),\vartriangle) =\\
&\boxplus(\vartriangle,\vartriangle) =\\
&\vartriangle.
\end{aligned}
$$

Dowód (5) jest następującym ciągiem równości:

$$
\begin{aligned}
&\boxtimes(\boxtimes(x,y),\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y))) =\\
&\boxtimes(\boxplus(x,\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y))),\boxplus(y,\boxplus(\boxminus(x),\boxminus(y)))) =\\
&\boxtimes(\boxplus(\boxplus(x,\boxminus(x)),\boxminus(y)),\boxplus(y,\boxplus(\boxminus(y),\boxminus(x)))) =\\
&\boxtimes(\boxplus(\triangledown,\boxminus(y)),\boxplus(\boxplus(y,\boxminus(y)),\boxminus(x))) =\\
&\boxtimes(\triangledown,\boxplus(\triangledown,\boxminus(x))) =\\
&\boxtimes(\triangledown,\triangledown) =\\
&\triangledown.
\end{aligned}
$$

17.6.4.

- (a) Zbiór $\mathbb{F}$ jest filtrem rozważanej algebry.
- (b) Atomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory jednoelementowe. Koatomami algebry $\mathfrak{B}$ są dokładnie wszystkie zbiory, których dopełnienia są jednoelementowe.

17.7. Język KRP a języki etniczne

17.7.1.

- (a) Wybieramy predykaty:

- $P(x)$ — x jest prawdą
- $F(x)$ — x jest fałszem
- $B(x)$ — x jest piękne
- $U(x)$ — x jest wstrętne.

Wtedy struktura składniowa zdania *Są wstrętne prawdy i piękne fałsze* jest następująca:

$$\exists x\ (U(x) \wedge P(x)) \wedge \exists x\ (B(x) \wedge F(x)).$$

- (b) Wybieramy predykaty:

  - $K(x)$ — x jest kobietą
  - $M(x)$ — x jest mężczyzną
  - $N(x)$ — x może nawiązać umowę o pracę
  - $R(x)$ — x może rozwiązać umowę o pracę.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Kobiety i mężczyźni mają równe prawa przy nawiązywaniu lub rozwiązywaniu umowy o pracę* jest następująca:

  $$\forall x\ ((K(x) \vee M(x)) \rightarrow (N(x) \wedge R(x))).$$

  Zwróć uwagę, że w powyższym przykładzie słowu „i” odpowiada alternatywa, a słowu „lub” odpowiada koniunkcja.

- (c) Mamy tu następujące predykaty:

  - $P(x, y, u, v)$ — z x do y jest dalej niż z u do v
  - $Q(x)$ — x jest miejscowością
  - $R(x, y)$ — x jest niewiększa od y
  - $S(x)$ — x jest wioską w Japonii.

  Mamy ponadto dwie stałe indywiduowe: a — denotującą Kutno oraz b — denotującą Paryż. Struktura składniowa zdania *Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii* jest zatem następująca:

  $$\forall x \forall y\ (((Q(x) \wedge S(y)) \wedge \forall z\ (S(z) \rightarrow R(y, z))) \rightarrow P(a, x, b, y)).$$

- (d) Mamy tu jeden predykat dwuargumentowy: $P(x, y)$ — x myśli o y. Mamy ponadto jedną stałą indywiduową a, której denotacją jest wypowiadający rozważane zdanie. Trzeba również użyć predykatu identyczności $\doteq$. Struktura składniowa zdania *Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie* jest zatem następująca:

$$\forall x \forall y\ (P(x, y) \rightarrow x \doteq y) \wedge P(a, a).$$

- (e) Załóżmy, że predykatem istotnym dla rekonstrukcji budowy składniowej tego zdania jest:

  – $P(x, y, z, t)$ — x ufa y w sprawie z w czasie t.

  Wtedy struktura składniowa zdania *Nikt nigdy nikomu w żadnej sprawie nie ufa* jest następująca:

$$\neg \exists x \exists y \exists z \exists t\ P(x, y, z, t).$$

  Można też proponować inne rekonstrukcje logiczne tego zdania, wprowadzając dodatkowo predykaty dla oznaczania własności: „być momentem”, „być sprawą”, „być osobą”, itd. W istocie, nie zawsze jest jasne, kiedy w języku naturalnym mamy do czynienia z predykatem prostym („nierozkładalnym” na inne predykaty).

17.7.2.

- (a) *Ktokolwiek nie kona, rzężąc, pocąc się i mocząc przy wdychaniu oparów rtęci, ten świruje jarząbka.*
- (b) *Jeśli wszyscy są bezrobotni, to o ile ktoś jest bogatszy od wszystkich, to co najmniej jedna osoba nie jest odpowiedzialna za stan gospodarki tego nieszczęsnego kraju.*
- (c) *Dla dowolnych pięciu (punktów), jeśli Drugi leży między Pierwszym a Trzecim, a Trzeci leży między Czwartym a Piątym, to istnieje Szósty, leżący między Pierwszym a Czwartym taki, że Drugi leży między Piątym a Szóstym.*

17.7.3.

- (a) To nie jest prawda logiczna. Nie jest to też prawda faktualna. Jak dotąd, (co najmniej) jeden z papieży był kobietą.

- (b) Najpierw trzeba ustalić semantykę zwrotu *dawno, dawno temu*. Może to oznaczać np. milion lat temu, albo sto lat temu, itp. Może też oznaczać np. rok przed twoim urodzeniem — zauważ, że rok przed twoim urodzeniem to dla ciebie przeszłość *nieskończenie* odległa, podobnie jak minuta po twoim zgonie będzie dla ciebie przyszłością nieskończenie odległą. Dość żartów. Niech *dawno, dawno temu* znaczy np. *milion lat i dwa tygodnie* temu. Po pierwsze, wiadomo, że istnieją liczby niewymierne, a więc nie wszystkie liczby są wymierne. Po drugie *istnienie* liczb jest niezależne od czasu. Tak więc, rozważane zdanie nie jest ani prawdą logiczną, ani prawdą faktualną. Oczywiście inaczej rzecz się ma np. ze zdaniem stwierdzającym, że *3000 lat temu sądzono, że wszystkie liczby są wymierne*. To zdanie zawiera jednak modalność (doksastyczną) i jego analiza wykracza poza Elementarz Logiczny.

- (c) Ta koniunkcja jest fałszem logicznym, choć każdy z jej członów z osobna może być prawdą faktualną. Nikt nie jest (biologicznie) starszy od własnej matki.

- (d) Przypomnijmy:

  – ODWIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie wcześniejszym t'.*

  – WIECZNOŚĆ PRAWDY: *Sąd A jest prawdziwy w czasie t wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwy w dowolnym czasie późniejszym t'.*

  Tak więc, zdanie *Prawdy wieczne są odwieczne* nie jest prawdą logiczną. Łatwo zbudować zdanie, wyrażające prawdę wieczną, która nie jest odwieczna.

- (e) Temu zdaniu nie można przypisać wartości logicznej. Termin *lekko spłaszczony* nie jest terminem ostrym.

Wykorzystywana literatura

Batóg, T.: *Podstawy logiki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003 (strony 109–112 oraz 238–261).

Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L.: *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004 (strony 85–89 oraz 95–96, a zwłaszcza przypis tłumacza na stronach 87–88).

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

4 Dodatek B: Aksjomatyczne ujęcie logiki pierwszego rzędu

Niniejszy dodatek zawiera tekst wykładów 20–21 w ramach dwusemestralnego kursu *Logika Matematyczna*. Oprócz – podanej niżej – konsekwencji aksjomatycznej dla logiki pierwszego rzędu w semestrze tym omówiono także operacje konsekwencji wyznaczone przez: tablice analityczne, reguły systemu dedukcji naturalnej oraz regułę rezolucji wraz z algorytmami unifikacji. Wszystkie wykłady są powszechnie dostępne na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

http://www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka

20.1. Aksjomaty, reguły i konsekwencja aksjomatyczna

20.1.1. Aksjomaty i reguły

Można na wiele sposobów podać aksjomatykę dla KRP. Jedną z możliwości jest przyjęcie za aksjomaty KRP wszystkich formuł powstających z dowolnych tautologii KRZ przez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych jakimikolwiek formułami języka KRP. Aksjomatyka jest wtedy nieskończona, ale efektywna: taki zbiór aksjomatów jest obliczalny, istnieje algorytmiczna procedura sprawdzania, czy dowolna formuła języka KRP jest aksjomatem.

Inna z możliwości to podanie skończonej liczby ***schematów*** aksjomatów. Owe schematy dobierać można na różne sposoby. Wybierzemy właśnie jeden z nich. O niektórych innych informujemy na końcu tego wykładu.

* * *

Niech α, β i γ będą dowolnymi formułami języka KRP. ***Schematami aksjomatów*** dla KRP są wszystkie formuły następującej postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$

- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
- (A14) $\forall x_n \ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n \ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n \ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n \ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n \ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n \ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

Przypominamy, że wszystkie powyższe schematy są schematami tautologii KRP, co pokazane zostało na wykładzie dotyczącym semantyki KRP.

Podobnie jak aksjomaty, również reguły wnioskowania dobierać można na różnorakie sposoby. W tym wykładzie przyjmiemy, że ***regułami pierwotnymi*** (aksjomatycznego ujęcia) KRP są:

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \to \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

Reguła generalizacji:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n \ \alpha}.$$

Poniżej podajemy też przykłady ważnych reguł wyprowadzalnych w (aksjomatycznym ujęciu) KRP.

Zauważmy, że szczególnymi przypadkami schematów (A14) oraz (A15) są, odpowiednio:

- (A14*) $\forall x \ \alpha \to \alpha$
- (A15*) $\alpha \to \exists x \ \alpha$.

Jest tak oczywiście dlatego, że dowolna zmienna x jest podstawialna sama za siebie w dowolnej formule.

20.1.2. Konsekwencja aksjomatyczna

Mówimy, że:

- Formuła α jest ***tezą*** KRP wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Każdy taki ciąg $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ nazywamy ***dowodem*** formuły α.

- Formuła α jest ***wyprowadzalna*** w KRP ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Jeśli α jest wyprowadzalna z X, to piszemy $X \vdash_{krp} \alpha$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{krp} \alpha$.

- Zbiór formuł Y jest ***wyprowadzalny*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krp} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y. Jeśli Y jest wyprowadzalny z X, to piszemy $X \vdash_{krp} Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{krp} Y$.

- Reguła $\mathcal{R}$ jest ***wyprowadzalna*** (***wtórna***) w KRP, jeśli $X \vdash \alpha$ dla każdego sekwentu $\langle X, \alpha \rangle$ należącego do $\mathcal{R}$.

Operacja C_{krp} ***konsekwencji aksjomatycznej*** w KRP jest zdefiniowana następująco dla dowolnego zbioru formuł X języka KRP:

$$C_{krp}(X) = \{\alpha : X \vdash_{krp} \alpha\}.$$

Tak zdefiniowana operacja C_{krp} spełnia warunki (C1)–(C4) z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

TWIERDZENIE 20.1.2.1.

Relacja konsekwencji aksjomatycznej $\vdash_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\vdash_{krp}$ jest zwrotna: $X \vdash_{krp} X$ dla każdego X.

- (2) $\vdash_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $Y \vdash_{krp} Z$, to $X \vdash_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.

- (3) $\vdash_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{krp} Y$.
- (4) $\vdash_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą KRP.

Dowód tego twierdzenia, analogiczny do dowodu odpowiedniego twierdzenia w KRZ, pozostawiamy jako ćwiczenie.

20.1.3. Niektóre tezy i reguły wyprowadzalne

Jest nieskończenie wiele reguł wyprowadzalnych w KRP, ale niektóre uznawane są za ważne ze względu na zastosowania.

Uwaga: będziemy używać symboli x, y, z dla oznaczenia dowolnych zmiennych języka KRP.

TWIERDZENIE 20.1.3.1.

Następujące reguły są wyprowadzalne w KRP:

- (R14)
$$\frac{\forall x\ \alpha}{S(t, x, \alpha)},$$
o ile term t jest podstawialny za x w α.
- (R15)
$$\frac{S(t, x, \alpha)}{\exists x\ \alpha},$$
o ile term t jest podstawialny za x w α.
- (R16)
$$\frac{\forall x\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x nie jest wolna w α.
- (R17)
$$\frac{\forall x\ (\alpha \to \beta)}{\exists x\ \alpha \to \beta},$$
o ile x nie jest wolna w β.

- Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:

$$\frac{\alpha \to \forall x\ \beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$:

$$\frac{\exists x\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta}.$$

- Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego RD$\forall$:

$$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\ \beta},$$

  o ile x nie jest wolna w α.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:

$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x\ \alpha \to \beta},$$

  o ile x nie jest wolna w β.

DOWÓD.

Fakt, że reguły (R14)–(R17) są wyprowadzalne wynika bezpośrednio ze schematów aksjomatów (A14)–(A17), odpowiednio.

Podamy, dla przykładu, dowody wyprowadzalności reguł: opuszczania kwantyfikatora generalnego oraz dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego. Pozostałe dwa dowody pozostawiamy jako ćwiczenie.

Dowód wyprowadzalności reguły opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:

$$\frac{\alpha \to \forall x\ \beta}{\alpha \to \beta}.$$

Należy pokazać, że $\{\alpha \to \forall x\ \beta\} \vdash_{krp} \alpha \to \beta$.

1.	$\alpha \to \forall x\ \beta$	założenie
2.	$\forall x\ \beta \to \beta$	(A14*): α/β
3.	$(\alpha \to \forall x\ \beta) \to ((\forall x\ \beta \to \beta) \to (\alpha \to \beta))$	(A1): $\beta/\forall x\ \beta,\ \gamma/\beta$
4.	$(\forall x\ \beta \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	RO: 3, 1
5.	$\alpha \to \beta$	RO: 4, 2.

Dowód wyprowadzalności reguły dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\exists x\ \alpha \rightarrow \beta},$$

o ile x nie jest wolna w β.

Należy pokazać, że $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krp} \exists x\ \alpha \rightarrow \beta$, przy założeniu, że x nie jest wolna w β.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$	RG: 1
3.	$\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \rightarrow \beta)$	(A17)
4.	$\exists x\ \alpha \rightarrow \beta$	RO: 3, 2.

Mogliśmy w powyższym dowodzie skorzystać z aksjomatu (A17), ponieważ zmienna x nie jest, na mocy założenia, wolna w formule β.

Podobnie jak w KRZ, mamy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 20.1.3.2.

Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo tezą KRP, albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji bądź jakiejkolwiek reguły wyprowadzalnej w KRP.

Dowód tego twierdzenia, który przeprowadza się analogicznie jak w przypadku odpowiedniego twierdzenia w KRZ, pozostawiamy jako ćwiczenie.

Jest nieskończenie wiele tez KRP, ale niektóre uznawane są za ważne ze względu na zastosowania.

Zauważmy, że z każdej tezy KRZ można otrzymać tezę KRP, poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych dowolnymi formułami języka KRP. Czasami mówi się krótko, choć nie całkiem precyzyjnie (gdyż mówimy o tezach w różnych językach), że każda teza KRZ jest także tezą KRP.

TWIERDZENIE 20.1.3.3.

Następujące formuły są tezami KRP, dla dowolnych formuł α oraz β:

- 1. $\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha$.
- 2. $\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.

- 3. $\alpha \to \exists x\ \alpha$.
- 4. $\alpha(x/t) \to \exists x\ \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- 5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.
- 6. $\forall x\ \alpha \equiv \forall y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 7. $\exists x\ \alpha \equiv \exists y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 8. $\forall x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 9. $\exists x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 10. $\forall x \forall y\ \alpha \equiv \forall y \forall x\ \alpha$.
- 11. $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$.
- 12. $\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$.
- 13. $\forall x \forall y\ \alpha \to \forall x\ \alpha(x/y)$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 14. $\exists x\ \alpha(x/y) \to \exists x \exists y\ \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 15. $\neg \forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg\alpha$.
- 16. $\neg \exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg\alpha$.
- 17. $\forall x\ \alpha \equiv \neg \exists x\ \neg\alpha$.
- 18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg\alpha$.
- 19. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \land \alpha) \to \beta$.
- 20. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \land \alpha(x/t)) \to \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β.
- 21. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$.
- 22. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$.
- 23. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \land \alpha) \to \exists x\ \beta$.
- 24. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \exists x\ \beta)$.
- 25. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$.

- 26. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 27. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 28. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 29. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 30. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta)$.
- 31. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$.
- 32. $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \to (\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta)$.
- 33. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$.
- 34. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 35. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 36. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 37. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 38. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 39. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 40. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 41. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 42. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \forall x\ (\beta \to \alpha))$.
- 43. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta)$.
- 44. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \to (\exists x\ \alpha \equiv \exists x\ \beta)$.

DOWÓD.

Podamy, dla przykładu, dowody niektórych z powyższych tez. Dowody pozostałych pozostawiamy jako ćwiczenie.

DOWÓD TEZY 5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall x\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \to \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$(\forall x\ \alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \exists x\ \alpha) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha))$	(A1): $\alpha/\forall x\ \alpha,\ \beta/\alpha,\ \gamma/\exists x\ \alpha$
4.	$(\alpha \to \exists x\ \alpha) \to (\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha)$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$	RO: 4, 2.

DOWÓD TEZY 12. $\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall y\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \to \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$\forall y\ \alpha \to \exists x\ \alpha$	Reguła Sylogizmu Hipotetycznego: 1, 2
4.	$\exists x \forall y\ \alpha \to \exists x\ \alpha$	D$\exists$: 3
5.	$\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$	D$\forall$: 4.

DOWÓD TEZY 18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.

Aby udowodnić tę tezę równoważnościową, dowodzimy że tezami są: implikacja prosta i odwrotna. Następnie wystarczy skorzystać z wyprowadzalnej w KRZ (a więc także w KRP) reguły równoważności RR:

$$\frac{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

DOWÓD TEZY IMPLIKACYJNEJ: $\neg \forall x\ \neg \alpha \to \exists x\ \alpha$.

1.	$\alpha \to \exists x\ \alpha$	(A15*)
2.	$(\alpha \to \exists x\ \alpha) \to (\neg \exists x\ \alpha \to \neg \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \to \beta) \to (\neg \beta \to \neg \alpha)$: $\beta / \exists x\ \alpha$
3.	$\neg \exists x\ \alpha \to \neg \alpha$	RO: 2, 1
4.	$\neg \exists x\ \alpha \to \forall x\ \neg \alpha$	D$\forall$: 3
5.	$(\neg \exists x\ \alpha \to \forall x\ \neg \alpha) \to (\neg \forall x\ \neg \alpha \to \neg\neg \exists x\ \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \to \beta) \to (\neg \beta \to \neg \alpha)$: $\alpha / \neg \exists x\ \alpha,\ \beta / \forall x\ \neg \alpha$
6.	$\neg \forall x\ \neg \alpha \to \neg\neg \exists x\ \alpha$	RO: 5, 4
7.	$\neg\neg \exists x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$	teza KRZ $\neg\neg \alpha \to \alpha$: $\alpha / \exists x\ \alpha$
8.	$\neg \forall x\ \neg \alpha \to \exists x\ \alpha$	Reguła Sylogizmu Hipotetycznego: 6, 7.

DOWÓD TEZY IMPLIKACYJNEJ: $\exists x\ \alpha \to \neg \forall x\ \neg \alpha$.

1.	$\forall x\ \neg \alpha \to \neg \alpha$	(A14*)
2.	$(\forall x\ \neg \alpha \to \neg \alpha) \to (\alpha \to \neg \forall x\ \neg \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \neg \alpha)$: $\alpha / \forall x\ \neg \alpha,\ \beta / \alpha$
3.	$\alpha \to \neg \forall x\ \neg \alpha$	RO: 2, 1
4.	$\exists x\ \alpha \to \neg \forall x\ \neg \alpha$	D$\exists$: 3.

20.2. Twierdzenia o dedukcji

Podobnie jak w KRZ, w KRP również zachodzą twierdzenia o dedukcji w wersji syntaktycznej. Potrzebne są jednak pewne dodatkowe założenia.

TWIERDZENIE 20.2.1. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka KRP zachodzi następująca równoważność:

- $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krp} \alpha \to \beta$.

DOWÓD.

Podamy dowody implikacji prostej i odwrotnej.

1. $\Rightarrow$

Zakładamy, że α jest zdaniem oraz $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$. Oznacza to, że β posiada dowód w KRP z $X \cup \{\alpha\}$, czyli że istnieje ciąg formuł

$$(*) \quad \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$$

taki, że γ_n jest identyczna z β, a każdy wyraz ciągu $(*)$ jest bądź założeniem (tj. elementem $X \cup \{\alpha\}$), bądź aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$ jako wynik zastosowania reguły odrywania lub reguły generalizacji. Budujemy ciąg $(**)$:

$$(**) \quad \langle \alpha \to \gamma_1, \ldots, \alpha \to \gamma_n \rangle.$$

Pokażemy teraz, posługując się metodą indukcji matematycznej, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_i$, dla $0 \leqslant i \leqslant n$, czyli że wszystkie elementy ciągu $(**)$ są wyprowadzalne na gruncie KRP ze zbioru X. Ponieważ γ_n jest identyczna z β, otrzymamy w ten sposób tezę twierdzenia.

POCZĄTKOWY KROK INDUKCJI.

Trzeba sprawdzić, czy zachodzi $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1$. Możliwe są następujące przypadki:

- (1) γ_1 jest założeniem, czyli elementem zbioru $X \cup \{\alpha\}$.
- (2) γ_1 jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17).

W przypadku (1) należy rozważyć dwie możliwości:

- (1.1.) γ_1 jest elementem X.
- (1.2.) γ_1 jest elementem $\{\alpha\}$, czyli γ_1 jest identyczna z α.

Rozpatrzmy możliwość (1.1.). Skoro γ_1 jest elementem X, to (na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$) otrzymujemy: $X \vdash_{krp} \gamma_1$. Zauważmy, że formuła $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$, jako szczególny przypadek schematu (A3), jest tezą KRP, czyli $\emptyset \vdash_{krp} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$. Stąd, na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $X \vdash_{krp} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$. Pokazaliśmy więc, że $X \vdash_{krp} \{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\}$. Ponieważ zachodzi oczywiście

$$\{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1,$$

więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$) mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1$.

Rozpatrzmy teraz możliwość (1.2.). Z założenia, γ_1 jest identyczna z α. Trzeba zatem pokazać, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$. Ponieważ formuła $\alpha \to \alpha$ jest podstawieniem tezy KRZ (za zmienną zdaniową podstawiamy formułę α języka KRP), więc jest też tezą KRP. A zatem $\emptyset \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$, i na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$.

Przechodzimy do rozpatrzenia przypadku (2). Jeżeli γ_1 jest aksjomatem KRP, to oczywiście jest również tezą KRP, czyli $\emptyset \vdash_{krp} \gamma_1$. Podobnie jak w punkcie 1.1. powyżej, formuła $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ jest tezą KRP, a zatem pokazaliśmy, że: $X \vdash_{krp} \{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\}$. Ponieważ zachodzi oczywiście

$$\{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1,$$

więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$) mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1$.

NASTĘPNIKOWY KROK INDUKCJI.

Przyjmujemy założenie indukcyjne, czyli zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $k < n$. Należy pokazać, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_{k+1}$.

Możliwe są następujące przypadki:

- (1) γ_{k+1} jest założeniem, czyli elementem zbioru $X \cup \{\alpha\}$.
- (2) γ_{k+1} jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17).
- (3) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania RO do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$.
- (4) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji RG do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$.

W przypadkach (1) oraz (2) postępujemy analogicznie jak w początkowym kroku indukcji i otrzymujemy, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_{k+1}$.

Rozważmy przypadek (3). Skoro γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania RO do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$, to istnieją $l \leqslant k$ oraz $m \leqslant k$ takie, że dla formuł γ_l oraz γ_m zachodzi alternatywa:

- γ_l jest identyczna z $\gamma_m \to \gamma_{k+1}$ lub
- γ_m jest identyczna z $\gamma_l \to \gamma_{k+1}$.

Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_l$ oraz
- $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_m$.

Otrzymujemy więc alternatywę:

- $X \vdash_{krp} \alpha \to (\gamma_m \to \gamma_{k+1})$ oraz $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_m$ lub
- $X \vdash_{krp} \alpha \to (\gamma_l \to \gamma_{k+1})$ oraz $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_l$.

Oznacza to, że zachodzi alternatywa:

- $X \vdash_{krp} \{\alpha \to \gamma_m, \alpha \to (\gamma_m \to \gamma_{k+1})\}$ lub
- $X \vdash_{krp} \{\alpha \to \gamma_l, \alpha \to (\gamma_l \to \gamma_{k+1})\}$.

Zastosowanie poprzedzonej reguły odrywania PRO, znanej z KRZ, daje alternatywę:

- $\{\alpha \to \gamma_m, \alpha \to (\gamma_m \to \gamma_{k+1})\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_{k+1}$ lub
- $\{\alpha \to \gamma_l, \alpha \to (\gamma_l \to \gamma_{k+1})\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_{k+1}$.

Na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy ostatecznie: $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_{k+1}$.

Zakończyliśmy więc dowód indukcyjny, a tym samym dowód implikacji $\Rightarrow$.

2. $\Leftarrow$

Zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \beta$. Musimy pokazać, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$.

Skoro $X \vdash_{krp} \alpha \to \beta$, to (na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$) zachodzi także $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha \to \beta$. Na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$ mamy: $\{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. Stąd, ponownie na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. A zatem $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \{\alpha \to \beta, \alpha\}$. Ponieważ oczywiście (reguła odrywania!) zachodzi $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash_{krp} \beta$, więc, na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$, mamy ostatecznie $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$.

Zauważmy, że w dowodzie implikacji $\Leftarrow$ nie było potrzebne założenie, że α jest zdaniem, czyli formułą bez zmiennych wolnych.

TWIERDZENIE 20.2.2. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka KRP zachodzą następujące równoważności:

- (1) $X \vdash_{krp} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.
- (2) $X \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

DOWÓD.

Podamy dowody implikacji prostej i odwrotnej w przypadku (2). Dowód części (1) jest analogiczny (wystarczy zamiast α wpisać konsekwentnie $\neg\alpha$, a zamiast $\neg\alpha$ wpisać α).

1. $\Rightarrow$

Zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha$. Na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ mamy również: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. Z kolei, na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $\{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\alpha$. Z monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\alpha$. Widać zatem, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\alpha, \neg\alpha\}$. Mamy więc parę formuł wzajem sprzecznych wyprowadzalnych ze zbioru $X \cup \{\neg\alpha\}$, co należało wykazać.

Zauważmy, że w dowodzie implikacji $\Rightarrow$ nie było potrzebne założenie, że α jest zdaniem, czyli formułą bez zmiennych wolnych.

2. $\Leftarrow$

Zakładamy, że istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Z definicji relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy:

- $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ oraz
- $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\beta$.

Skoro α jest zdaniem, to także $\neg\alpha$ jest zdaniem. Możemy zatem skorzystać z twierdzenia o dedukcji wprost, na mocy którego mamy:

- $X \vdash_{krp} \neg\alpha \rightarrow \beta$ oraz
- $X \vdash_{krp} \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$.

Oznacza to, że $X \vdash_{krp} \{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\}$. Przypominamy, że formuła:

$$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$$

jest szczególnym przypadkiem prawa sylogizmu destrukcyjnego, prawa KRZ. Stąd, $\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krp} \alpha$. Skoro, jak już pokazaliśmy, $X \vdash_{krp} \{\neg\alpha \rightarrow$

$\beta, \neg\alpha \to \neg\beta\}$, to (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$), otrzymujemy ostatecznie: $X \vdash_{krp} \alpha$.

Dodatkowe założenie w twierdzeniach o dedukcji jest istotne, jak widzieliśmy w dowodach tych twierdzeń.

Zauważmy, że tezy wymienione w twierdzeniu 20.1.3.1. mają wszystkie postać implikacji bądź równoważności. Z twierdzenia o dedukcji wprost otrzymujemy cały szereg dalszych reguł wtórnych: z tezy implikacyjnej utworzyć możemy regułę wtórną o przesłance identycznej z poprzednikiem branej pod uwagę implikacji, a wniosku identycznym z następnikiem tej implikacji. Z tezy równoważnościowej utworzyć możemy ***dwie*** reguły wtórne.

20.3. Przykłady dowodów

Podamy dwa przykłady dowodów formuł ze zbioru założeń.

PRZYKŁAD 20.3.1.

Aby udowodnić, że $\{\alpha\} \vdash_{krp} \forall x \ \alpha$ wystarczy do założenia α zastosować regułę generalizacji RG, otrzymując $\forall x \ \alpha$.

Zauważmy, że gdy α jest formułą atomową np. o postaci $P(x)$, gdzie P jest dowolnym predykatem jednoargumentowym, to $P(x) \vdash_{krp} \forall x \ P(x)$, na mocy powyższego.

Warto jednak pamiętać, że ***nie zachodzi***: $P(x) \models_{krp} \forall x \ P(x)$. Niech pokazanie tego będzie ćwiczeniem dla słuchaczek.

PRZYKŁAD 20.3.2.

Pokażemy, że: $\{\forall x \ (\alpha \to \beta), \ \exists x \ \alpha\} \vdash_{krp} \exists x \ \beta$. W tym celu najpierw udowodnimy tezę $(*)$:

$$(*) \qquad \forall x \ (\alpha \to \beta) \to (\exists x \ \alpha \to \exists x \ \beta).$$

1.	$\forall x \ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A14*)
2.	$\alpha \to (\forall x \ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	prawo komutacji: 1
3.	$(\alpha \wedge \forall x \ (\alpha \to \beta)) \to \beta$	prawo importacji: 2
4.	$\beta \to \exists x \ \beta$	(A15*)
5.	$(\alpha \wedge \forall x \ (\alpha \to \beta)) \to \exists x \ \beta$	sylogizm hipotetyczny: 3, 4
6.	$\alpha \to (\forall x \ (\alpha \to \beta) \to \exists x \ \beta)$	prawo eksportacji: 5
7.	$\exists x \ \alpha \to (\forall x \ (\alpha \to \beta) \to \exists x \ \beta)$	D$\exists$: 6
8.	$\forall x \ (\alpha \to \beta) \to (\exists x \ \alpha \to \exists x \ \beta)$	prawo komutacji: 7.

Teraz poszukiwany dowód jest już całkiem prosty:

1.	$\forall x\ (\alpha \to \beta)$	założenie
2.	$\exists x\ \alpha$	założenie
3.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$	teza $*$
4.	$\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta$	RO: 3, 1
5.	$\exists x\ \beta$	RO: 4, 2.

20.4. Trafność i pełność metody aksjomatycznej

20.4.1. Trafność metody aksjomatycznej

W wykładzie dotyczącym semantyki KRP pokazaliśmy, że schematy (A1)–(A17) są wszystkie schematami tautologii KRP. Pokazaliśmy również, że zarówno reguła odrywania, jak i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią. Wykorzystamy te dwa fakty w dowodzie, że wszystkie tezy KRP są tautologiami KRP.

TWIERDZENIE 20.4.1.1.

Każda teza systemu aksjomatycznego KRP jest tautologią KRP.

DOWÓD.

Niech α będzie tezą systemu aksjomatycznego KRP. Oznacza to, że istnieje dowód formuły α, czyli ciąg formuł:

$$(*) \quad \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$$

taki, że γ_n jest identyczna z α, a każdy wyraz tego ciągu jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu jako wynik zastosowania reguły odrywania lub reguły generalizacji.

Pokażemy, stosując metodę indukcji matematycznej, że każdy wyraz ciągu $(*)$ jest tautologią KRP. Ponieważ α jest identyczna z γ_n, będzie to wystarczało do dowodu całego twierdzenia.

POCZĄTKOWY KROK INDUKCJI.

Mamy pokazać, że γ_1 jest tautologią KRP. Na mocy definicji dowodu, γ_1 musi być aksjomatem KRP. Ponieważ każdy aksjomat KRP jest tautologią KRP (co pokazaliśmy na wykładzie dotyczącym semantyki KRP), więc γ_1 jest tautologią KRP.

NASTĘPNIKOWY KROK INDUKCJI.

Zakładamy, że wszystkie formuły γ_i dla $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $k < n$ są tautologiami KRP. Musimy pokazać, że również γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Należy rozważyć następujące przypadki:

- (1) γ_{k+1} jest aksjomatem KRP.
- (2) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$.
- (3) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$.

Przypadek (1) jest oczywisty: skoro γ_{k+1} jest aksjomatem KRP, to jest też tautologią KRP.

Rozważmy przypadek (2). Jeśli γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$, to istnieją liczby $l \leqslant k$ oraz $m \leqslant k$ takie, że:

- γ_l jest identyczna z $\gamma_m \to \gamma_{k+1}$ lub
- γ_m jest identyczna z $\gamma_l \to \gamma_{k+1}$.

Na mocy założenia indukcyjnego, γ_l oraz γ_m są tautologiami KRP. Ponieważ reguła odrywania zachowuje własność bycia tautologią, więc także γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Rozpatrzmy teraz przypadek (3). Jeśli γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$, to istnieją: liczba $l \leqslant k$ oraz zmienna x_m takie, że γ_{k+1} jest identyczna z $\forall x_m\ \gamma_l$. Na mocy założenia indukcyjnego, γ_l jest tautologią KRP. Ponieważ reguła generalizacji zachowuje własność bycia tautologią, więc także γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Zakończyliśmy więc dowód indukcyjny, a tym samym dowód całego twierdzenia.

Warto zauważyć, że dla wykazania, iż formuła α ***nie jest*** tezą KRP wystarczy, na mocy powyższego twierdzenia, wykazać, że nie jest ona tautologią, czyli znaleźć strukturę relacyjną, w której α jest fałszywa.

20.4.2. Pełność metody aksjomatycznej

Następne twierdzenie to bodaj najważniejsze twierdzenie KRP. Głosi ono (w jednym ze sformułowań), że aksjomatyka KRP jest pełna, czyli że każda tautologia KRP jest jego tezą. Jest wiele metod dowodu tego twierdzenia. Polecamy artykuł Jana Zygmunta *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, zamieszczony w podanej w odnośnikach bibliograficznych monografii pod redakcją Stanisława Surmy, szczegółowo omawiający różne wersje tego twierdzenia oraz sposoby jego dowodu. Poniżej podajemy (za cytowanym artykułem) szkic dowodu, wykorzystujący metodę Henkina. Ograniczamy się przy tym jedynie do omówienia głównej konstrukcji, pomijając szczegółowe uzasadnienia. W rozważanym ujęciu buduje się pewien model z „materiału językowego”, tj. ze stosownego zbioru stałych indywidualnych. Korzysta się z niektórych pojęć metalogicznych (teoria, teoria niesprzeczna, teoria zupełna), o których wspominamy krótko w punkcie 20.8. poniżej. W poprzednich wykładach wspominano już także o metodzie budowania modelu ilorazowego, wykorzystywanej poniżej.

TWIERDZENIE 20.4.2.1.

Każda tautologia KRP jest tezą systemu aksjomatycznego KRP.

DOWÓD (SZKIC).

Wprowadzamy, na potrzeby niniejszego dowodu, kilka użytecznych oznaczeń:

- S oznacza zbiór wszystkich formuł języka KRP o sygnaturze złożonej z jednego predykatu jednoargumentowego P, jednego predykatu dwuargumentowego Q oraz predykatu identyczności $\doteq$. Ograniczenie do takiej sygnatury nie powoduje utraty ogólności dowodu.

- Przez Sys oznaczamy rodzinę wszystkich *systemów dedukcyjnych* (wszystkich *teorii*) relacji konsekwencji $\vdash_{krp}$, tj. rodzinę tych wszystkich zbiorów formuł X, dla których zachodzi: $C_{krp}(X) = X$.

- Przez Con oznaczamy rodzinę wszystkich *niesprzecznych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których $C_{krp}(X) \neq S$ (warunek ten jest równoważny warunkowi: nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$).

- Przez Com oznaczamy rodzinę wszystkich *zupełnych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których: $X \vdash_{krp} \alpha$ lub $X \vdash_{krp} \neg\alpha$, dla dowolnej formuły α.

Do (schematów) aksjomatów podanych powyżej (w 20.1.1.) dodajemy aksjomaty dla predykatu identyczności $\doteq$, omówione w wykładzie dotyczącym tablic analitycznych dla KRP z identycznością (wykłady 18–19).

W dowodzie twierdzenia wykorzystuje się Lemat Lindenbauma (zob. punkt 20.8.) oraz twierdzenie o dedukcji nie wprost (twierdzenie 20.2.2.).

Dowód twierdzenia dzieli się w sposób naturalny na dwie części:

- I. Dowód, iż każdy niesprzeczny zbiór formuł języka KRP ma model.

- II. Dowód (nie wprost), że każda tautologia KRP jest tezą KRP, wykorzystujący część I.

I. KONSTRUKCJA MODELU.

Rozpoczynamy od języka L o sygnaturze wspomnianej wyżej. Niech

$$C = \{c_i : i \in \omega\}$$

będzie zbiorem stałych indywidualnych (ω jest tu zbiorem wszystkich skończonych liczb porządkowych). Przez $L(C)$ oznaczamy rozszerzenie języka L otrzymane poprzez dodanie do L wszystkich stałych indywidualnych ze zbioru C.

Niech Y będzie dowolnym niesprzecznym i zupełnym systemem dedukcyjnym w języku $L(C)$. Definiujemy relację $\sim$ na zbiorze C w sposób następujący:

$$c_i \sim c_j \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } c_i \doteq c_j \text{ należy do } Y.$$

Wykorzystując własności Y można pokazać, że $\sim$ jest relacją równoważności w C. Niech $c_i^\sim$ oznacza klasę równoważności elementu c_i względem tej relacji.

Budujemy strukturę relacyjną

$$\mathfrak{M}(Y, C) = \langle U, P, Q, \{s_i : i \in \omega\}, id\rangle$$

w sposób następujący:

- (i) $U = \{c_i^\sim : c_i \in C\}$
- (ii) $s_i = c_i^\sim$
- (iii) $c_i^\sim \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(c_i) \in Y$
- (iv) $(c_i^\sim, c_j^\sim) \in Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(c_i, c_j) \in Y$
- (v) $(c_i^\sim, c_j^\sim) \in id$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \doteq c_j \in Y$.

Z powyższego wynika, że id jest relacją identyczności w uniwersum U.

Powiemy, że zbiór zdań Y spełnia warunek (H) (warunek Henkina) w zbiorze stałych C, gdy dla każdego zdania egzystencjalnego $\exists x\ \alpha(x)$ z faktu, że $\exists x\ \alpha(x)$ jest elementem Y wynika, iż istnieje stała $c \in C$ taka, że $\alpha(x/c)$ jest elementem Y.

Dowodzi się teraz szeregu lematów, które posłużą do wykazania, że każdy niesprzeczny zbiór formuł ma model.

LEMAT 1.

Jeśli Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$ takim, że:

- (1) Y jest teorią niesprzeczną i zupełną (tj. elementem rodziny $Sys \cap Con \cap Com$),
- (2) Y spełnia warunek (H) w zbiorze C,

to dla dowolnego zdania α:

- (3) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$.

DOWÓD.

Załóżmy (1) i (2). Dowód (3) prowadzi się przez indukcję strukturalną po budowie formuły α.

Dla formuł atomowych równoważność (3) zachodzi na mocy definicji modelu $\mathfrak{M}(Y, C)$.

Załóżmy, że (3) zachodzi dla α_1 i α_2. Trzeba pokazać, że zachodzi wtedy także dla: $\neg\alpha_1$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, $\exists x\ \alpha_1(x)$ oraz $\forall x\ \alpha_1(x)$. Pokażemy to dla $\neg\alpha_1$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ oraz $\exists x\ \alpha_1(x)$. Dowody w pozostałych przypadkach przebiegają podobnie.

Przy założeniu, że (3) zachodzi dla α_1, następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \neg\alpha_1$
- nie zachodzi $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1$
- $\alpha_1 \notin Y$
- $\neg\alpha_1 \in Y$.

Z kolei, przy założeniu, że (3) zachodzi dla α_1 oraz α_2, następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1 \wedge \alpha_2$
- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1$ oraz $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_2$
- $\alpha_1 \in Y$ oraz $\alpha_2 \in Y$
- $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in Y$.

Załóżmy teraz, że $\exists x\ \alpha_1(x)$ jest zdaniem oraz że:

- (4) warunek (3) zachodzi dla dowolnej formuły o postaci $\alpha_1(c)$.

Załóżmy ponadto, że:

- (5) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \exists x\ \alpha_1(x)$

oraz przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

- (6) $\exists x\ \alpha_1(x) \notin Y$.

Otrzymujemy wtedy kolejno:

- (7) $\forall x\ \neg\alpha_1(x) \in Y$, na mocy (1) i (6),
- (8) $\neg\alpha_1(c) \in Y$ dla wszystkich $c \in C$, na mocy (1) oraz (A14),
- (9) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \neg\alpha_1(c)$ dla wszystkich $c \in C$, na mocy założenia indukcyjnego (4),
- (10) dla wszystkich $c \in C$: nie zachodzi $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$, na mocy definicji relacji $\models$,
- (11) istnieje $c \in C$ i wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M}(Y, C) \models_{w_x^c{\sim}} \alpha_1(x)$,
- (12) istnieje $c \in C$ taka, że $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$, na mocy definicji relacji $\models$,
- (13) sprzeczność: (9), (12).

Tak więc, przypuszczenie (6) trzeba odrzucić i otrzymujemy:

- (14) $\exists x\ \alpha_1(x) \in Y$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (14). Wtedy, na mocy (2), istnieje $c \in C$ taka, że:

- (15) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha_1(c)$.

Na mocy definicji relacji $\models$ otrzymujemy stąd:

- (16) $\mathfrak{M}(Y, C) \models \exists x\ \alpha_1(x)$.

Pokazaliśmy więc, że (3) zachodzi również dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych. Ostatecznie, otrzymujemy z powyższego, że (3) zachodzi dla wszystkich formuł.

LEMAT 2.

Jeśli α oraz β są zdaniami, to z $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ wynika $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \beta$.

DOWÓD.

Zobacz dowód twierdzenia o dedukcji wprost.

LEMAT 3.

Jeżeli:

- (1) stała indywidualna c nie występuje w formułach ze zbioru X,
- (2) $\alpha(x)$ powstaje z $\alpha(c)$ przez wstawienie zmiennej x w miejsce c w formule $\alpha(c)$ oraz x nie jest w $\alpha(x)$ na żadnym miejscu związana,
- (3) $X \vdash_{krp} \alpha(c)$,

to

- (4) $X \vdash_{krp} \alpha(x)$.

DOWÓD.

Jest to w istocie twierdzenie o tym, że KRP nie wyróżnia żadnej stałej indywiduowej.

Załóżmy, że $X \vdash_{krp} \alpha(c)$. Wtedy istnieje dowód $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ formuły $\alpha(c)$ ze zbioru założeń X. Możemy założyć, że formuły tego ciągu nie zawierają zmiennej x. Spośród formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ przynajmniej niektóre zawierają stałą c. Przez $\gamma_i(x)$ oznaczmy formułę powstałą poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień stałej c w γ_i zmienną x.

Przez indukcję po i pokazuje się, że wszystkie zdania $\forall x \ \gamma_i(x)$ są konsekwencjami X. W szczególności więc, $\forall x \ \gamma_n(x)$ jest konsekwencją X. Ponieważ $\gamma_n(x)$ jest identyczna z $\alpha(x)$, otrzymujemy, iż $\forall x \ \alpha(x)$ jest konsekwencją X. Na mocy (A14*) i reguły odrywania, również $\alpha(x)$ jest konsekwencją X, czyli $X \vdash_{krp} \alpha(x)$.

LEMAT 4.

Jeżeli:

- (1) $X \in Con$
- (2) stała c nie występuje w elementach zbioru X,
- (3) $\exists x \ \alpha(x)$ jest elementem X,

to

- (4) $X \cup \{\alpha(x/c)\} \in Con$.

DOWÓD.

Załóżmy, że zachodzą (1)–(3) i przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

- (5) $X \cup \{\alpha(x/c)\} \notin Con$.

Otrzymujemy wtedy kolejno:

- (6) $X \cup \{\alpha(c)\} \vdash_{krp} \neg\alpha(c)$, na mocy definicji Con,
- (7) $X \vdash_{krp} \alpha(c) \to \neg\alpha(c)$, na mocy lematu 2,
- (8) $X \vdash_{krp} \neg\alpha(c)$, na mocy tezy $(\beta \to \neg\beta) \to \neg\beta$,
- (9) $X \vdash_{krp} \neg\alpha(x)$, na mocy (2) oraz lematu 3,
- (10) $X \vdash_{krp} \forall x\, \neg\alpha(x)$, na mocy reguły generalizacji,
- (11) $X \vdash_{krp} \neg\exists x\, \alpha(x)$, na mocy prawa De Morgana,
- (12) sprzeczność: (3) i (11).

Tak więc, trzeba odrzucić przypuszczenie (5) i dowód lematu jest zakończony.

Do sformułowania następnego lematu potrzeba kilku pojęć pomocniczych. Dla każdej liczby naturalnej i niech C_i będzie nieskończonym ciągiem wzajemnie jednoznacznym $\langle c_j^i \rangle$, gdzie j przebiega wszystkie liczby naturalne. Każdy ciąg C_i jest zatem ciągiem bez powtórzeń. Niech $C = \bigcup\limits_{i\in\omega} C_i$.

Określamy ciąg języków L_n. Za L_0 bierzemy L. Język L_n otrzymujemy z L_0 poprzez dodanie do niego zbioru stałych $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$. Przez $S_{(n)}$ rozumiemy zbiór zdań języka L_n.

LEMAT 5.

Jeżeli:

- (1) $X \in Con$,
- (2) $X \subseteq S_{(n)}$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- (3) $X \subseteq Y$,
- (4) $Y \subseteq S_{(n+1)}$
- (5) $Y \in Con$,
- (6) Y spełnia względem X warunek (H) w zbiorze $\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$, tj. dla dowolnego zdania $\exists x\ \alpha(x) \in X$ istnieje stała $c \in \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$ taka, że $\alpha(c) \in Y$.

DOWÓD.

Niech $\langle \exists x_{k_j} \alpha_j(x_{k_j}) \rangle$ będzie ciągiem wszystkich zdań egzystencjalnych należących do zbioru X. Zdefiniujmy:

- (7) $Y = X \cup \{\alpha_j(c_j^{n+1}) : j \geqslant 1\}$.

Na mocy (1), definicji zbiorów C_i oraz lematu 4 otrzymujemy, że zachodzi warunek (5). Z kolei, (3), (4) oraz (6) są bezpośrednimi konsekwencjami (7).

LEMAT 6.

Jeżeli:

- (1) $X \subseteq S_{(0)}$,
- (2) $X \in Con$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- (3) Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$,
- (4) $X \subseteq Y$,
- (5) $Y \in Sys \cap Con \cap Com$,
- (6) Y spełnia warunek (H) w C.

DOWÓD.

Załóżmy, że zachodzą (1) i (2). Zbudujemy ciąg zbiorów:

- (7) $X_0, X_0^+, X_1, X_1^+, X_2, X_2^+, \ldots$

zdefiniowanych warunkami:

- (7.1) $X_0 = X_0^+ = X$.
- (7.2) X_n, dla $n \geqslant 1$, jest niesprzecznym rozszerzeniem X_{n-1}^+, które istnieje na mocy lematu 5.
- (7.3) X_n^+, dla $n \geqslant 1$, jest niesprzeczną i zupełną teorią zawierającą X_n (istniejącą na mocy Lematu Lindenbauma, zob. punkt 20.8.); ponadto, zarówno X_n, jak i X_n^+ są zbiorami formuł języka L_n.

Zdefiniujmy:

- (8) $Y = \bigcup\limits_{i \in \omega} (X_i \cup X_i^+)$.

Na mocy (7) oraz (8) mamy:

- (9) $Y = \bigcup\limits_{i \in \omega} X_i^+$.

Z definicji (8) wynika, że:

- (10) Y spełnia warunki (3) oraz (4).

Z (9) oraz twierdzenia o sumie niesprzecznych teorii zupełnych (zob. punkt 20.8.) wynika, że:

- (11) Y spełnia warunek (5).

Trzeba jeszcze udowodnić (6). Załóżmy, że:

- (12) $\exists x\ \alpha(x) \in Y$

Na mocy (9) otrzymujemy stąd, że istnieje n taka, że:

- (13) $\exists x\ \alpha(x) \in X_{n-1}^+$.

Na mocy (13) oraz (7.2), istnieje $c \in C$ taka, że:

- (14) $\alpha(c) \in X_n$.

Z (8) oraz (14) wynika, że:

- (15) $\alpha(c) \in Y$.

Wreszcie, na mocy (12) oraz (15), otrzymujemy:

- (16) Y spełnia warunek (6).

Na mocy lematów 1 i 6 otrzymujemy:

KAŻDY NIESPRZECZNY ZBIÓR ZDAŃ MA MODEL.

II. KAŻDA TAUTOLOGIA KRP JEST TEZĄ KRP.

Załóżmy, że α jest tautologią KRP i przypuśćmy, że α nie jest tezą KRP. Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a zatem trzeba je odrzucić.

Przypominamy: uniwersalne domknięcie formuły α to formuła powstająca z α poprzez poprzedzenie α kwantyfikatorami generalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne w α. Uniwersalne domknięcie dowolnej formuły jest oczywiście zdaniem.

Jeśli α nie jest tezą, to również jej uniwersalne domknięcie $\overline{\alpha}$ nie jest tezą. Gdyby bowiem $\overline{\alpha}$ było tezą, to (na mocy (A14)) także α byłaby tezą, wbrew przypuszczeniu.

Skoro $\overline{\alpha}$ nie jest tezą, to ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$. Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest zdaniem, więc można skorzystać z twierdzenia o dedukcji nie wprost: ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***nie istnieje*** formuła β taka, że:

$$\{\neg\overline{\alpha}\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}.$$

Oznacza to, że zbiór $\{\neg\overline{\alpha}\}$ jest niesprzeczny. Na mocy części I dowodu, istnieje model $\mathfrak{M}$ tego zbioru, a zatem:

$$(\dagger) \quad \mathfrak{M} \models \neg\overline{\alpha}.$$

Z założenia, α jest tautologią. Również $\overline{\alpha}$ jest więc tautologią, ponieważ reguła generalizacji zachowuje własność bycia tautologią. Tak więc, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej (stosownej sygnatury). W szczególności, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej $\mathfrak{M}$, skonstruowanej na mocy części I dowodu:

$$(\ddagger) \quad \mathfrak{M} \models \overline{\alpha}.$$

Warunki $(\dagger)$ oraz $(\ddagger)$ są jednak wzajem sprzeczne, ze względu na definicję relacji $\models$. Tak więc, przypuszczenie, że α nie jest tezą należy odrzucić. Ostatecznie, każda tautologia KRP jest tezą KRP.

20.5. Twierdzenie o zwartości syntaktycznej

TWIERDZENIE 20.5.1.

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi następująca równoważność:

- $X \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$.

DOWÓD.

Dowód implikacji odwrotnej $\Leftarrow$ jest natychmiastowy: skoro $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$, to — ze względu na monotoniczność relacji $\vdash_{krp}$ — zachodzi także $X \vdash_{krp} \alpha$.

Dowód implikacji prostej $\Rightarrow$ również nie jest trudny. Skoro $X \vdash_{krp} \alpha$, to istnieje dowód α z X w KRP, a więc skończony ciąg formuł $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ taki, że γ_n jest identyczna z α, a każdy element ciągu $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), bądź wynikiem zastosowania reguły podstawiania lub reguły generalizacji do wyrazów wcześniejszych w tym ciągu. Niech teraz Y będzie zbiorem tych wyrazów ciągu $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$, które są elementami zbioru X. Zbiór Y jest oczywiście skończony. Jest także oczywiste, że można zbudować dowód w KRP formuły α w oparciu o zbiór Y, czyli że $Y \vdash_{krp} \alpha$.

W dowodzie powyższego twierdzenia odwołujemy się w istocie do finitystyczności operatora konsekwencji C_{krp}.

20.6. Niesprzeczność KRP

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) ***niesprzeczny*** wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest (syntaktycznie) ***sprzeczny***.

TWIERDZENIE 20.6.1.

Zbiór wszystkich tez KRP jest niesprzeczny.

DOWÓD.

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że zbiór wszystkich tez KRP nie jest niesprzeczny. Istnieje wtedy formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są konsekwencjami zbioru wszystkich tez KRP, czyli są tezami KRP.

Na mocy twierdzenia o pełności, zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są tautologiami KRP, czyli są obie spełnione w każdej interpretacji. Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolną strukturą relacyjną, a w dowolnym wartościowaniem w $\mathfrak{M}$. Wtedy zachodziłoby zarówno $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, jak i $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$, co jest jednak sprzeczne z definicją relacji spełniania. Ostatecznie zatem nie istnieje formuła α o podanej wyżej własności, a więc zbiór wszystkich tez KRP jest (syntaktycznie) niesprzeczny.

20.7. Informacja o innych twierdzeniach metalogicznych dotyczących KRP

W wykładach dotyczących semantyki KRP oraz metody tablic analitycznych dla KRP podaliśmy kilka ważnych twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP, np.:

- twierdzenie Churcha
- twierdzenie Herbranda
- twierdzenie Löwenheima-Skolema
- twierdzenie o prefiksowych postaciach normalnych.

Twierdzenia te mogą być również sformułowane w aksjomatycznym ujęciu KRP.

Dodajmy do tej listy jeszcze jedno twierdzenie, zwane *twierdzeniem o neutralności logiki wobec stałych indywiduowych, predykatów oraz symboli funkcyjnych*. Przypominamy, że $S(a_j, x_i, \alpha)$, gdzie a_j jest stałą indywidualną, x_i zmienną, a α formułą języka KRP oznacza wynik podstawienia stałej a_j za zmienną x_i w formule α (tj. za wszystkie wolne wystąpienia x_i w α). Niech ponadto, dla formuły α, m-argumentowych predykatów P_i^m i P_j^m oraz m-argumentowych symboli funkcyjnych F_i^m i F_j^m:

- $\alpha(P_i^m/P_j^m)$ oznacza wynik konsekwentnego zastąpienia wszystkich wystąpień predykatu P_i^m w formule α predykatem P_j^m;
- $\alpha(F_i^m/F_j^m)$ oznacza wynik konsekwentnego zastąpienia wszystkich wystąpień symbolu funkcyjnego F_i^m w formule α symbolem funkcyjnym F_j^m.

Zapowiadane twierdzenie ma następujące sformułowanie:

- Jeśli żadna ze stałych indywidualnych a_m, a_n nie występuje w α, to $S(a_m, x_i, \alpha)$ jest tezą KRP wtedy i tylko wtedy, gdy $S(a_n, x_i, \alpha)$ jest tezą KRP.

- Jeśli α jest tezą KRP, to $\alpha(P_i^m/P_j^m)$ jest tezą KRP.
- Jeśli α jest tezą KRP, to $\alpha(F_i^m/F_j^m)$ jest tezą KRP.

Powyższe twierdzenie jest też nazywane *twierdzeniem o niewyróżnianiu stałych pozalogicznych*. Głosi ono, mówiąc krótko, że:

- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnej stałej indywidualnej, da się także udowodnić o dowolnej innej stałej;
- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnym predykacie, da się także udowodnić o dowolnym innym predykacie;
- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnym symbolu funkcyjnym, da się także udowodnić o dowolnym innym symbolu funkcyjnym.

20.8. Niektóre własności teorii elementarnych

Teorie aksjomatyczne budowane w języku KRP mają wyszczególnione zbiory:

- pojęć specyficznych (pierwotnych, niedefiniowalnych)
- aksjomatów (założeń przyjmowanych bez dowodu).

Środkami dowodowymi w takich teoriach są reguły wnioskowania KRP.

W języku klasycznego rachunku predykatów formułować można tzw. ***teorie elementarne***. Gdy wyróżnimy pewien zbiór *stałych pozalogicznych* (predykatów, symboli funkcyjnych, stałych indywidualnych) S oraz zbiór A zdań, zwanych *aksjomatami* rozważanej teorii elementarnej T, to sama formalna definicja T jest następująca.

Teorią elementarną w języku KRP o sygnaturze S oraz zbiorze aksjomatów A nazywamy zbiór wszystkich formuł wyprowadzalnych na gruncie KRP ze zbioru aksjomatów A. Tak więc, T jest teorią elementarną, gdy

$$T = \{\alpha : A \vdash_{krp} \alpha\}.$$

Jeśli T jest teorią elementarną, to $C_{krp}(T) = T$, co wynika wprost z powyższej definicji. Przypomnijmy, że w przypadku dowolnego operatora konsekwencji C, ***teoriami*** (tego operatora) nazywamy jego punkty stałe, tj. takie zbiory X, dla których $X = C(X)$.

W poprzednich wykładach podano przykłady czterech takich teorii:

- teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema ZFC
- arytmetyka Peana PA
- teoria algebr Boole'a (dwie aksjomatyki)
- teoria grup (trzy aksjomatyki).

Podajmy jeszcze jeden przykład prostej teorii elementarnej: teorii gęstych liniowych porządków bez elementu pierwszego i ostatniego. Jest to teoria, w której języku występuje, obok predykatu identyczności $\doteq$ jeden predykat dwuargumentowy, powiedzmy $\prec$. Teoria jest scharakteryzowana następującymi aksjomatami:

- (1) $\forall x\ (x \doteq x)$
- (2) $\forall x \forall y\ (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- (3) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$
- (4) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \doteq y \wedge x \prec z) \rightarrow y \prec z)$
- (5) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \doteq y \wedge z \prec x) \rightarrow z \prec y)$
- (6) $\forall x \forall y\ (x \prec y \rightarrow \neg y \prec x)$
- (7) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z)$
- (8) $\forall x \forall y\ (x \doteq y \vee x \prec y \vee y \prec x)$
- (9) $\forall y \exists x\ (y \prec x)$
- (10) $\forall y \exists x\ (x \prec y)$
- (11) $\forall x \forall y\ (x \prec y \rightarrow \exists z\ (x \prec z \wedge z \prec y))$.

Modelami tej teorii są np.: zbiór wszystkich liczb wymiernych wraz ze zwykłą relacją porządku $<$, a także zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wraz ze zwykłą relacją porządku $<$. Zbiór wszystkich liczb całkowitych, ze zwykłą relacją porządku $<$ nie jest modelem tej teorii, ponieważ nie spełnia warunku (11), czyli warunku gęstości. Przedział domknięty $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych (ze zwykłą relacją porządku $<$) również nie jest modelem tej teorii, gdyż nie spełnia ani warunku (9), ani warunku (10).

* * *

Ważnym zadaniem metalogiki jest badanie własności teorii (tu: elementarnych). Podamy kilka przykładów takich własności oraz (bez dowodów) informacje, jakim teoriom własności te przysługują.

Oczywistym wymogiem, któremu sprostać powinna teoria jest jej niesprzeczność. Teorie sprzeczne nie są interesujące (z formalnego punktu widzenia), gdyż wszystko (każda formuła języka KRP) daje się w nich udowodnić.

Na mocy twierdzenia o pełności, teoria jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model. Jednak czysto ***syntaktyczne*** dowody niesprzeczności teorii są, w ogólności, trudne do uzyskania. Stosuje się w nich np. takie techniki, jak: metoda interpretacji syntaktycznej, metoda relatywizacji kwantyfikatorów.

Przypominamy, że $C_{krp}(X)$ to zbiór wszystkich konsekwencji logicznych zbioru X. Odnotujmy (bez dowodu) kilka faktów dotyczących niesprzeczności:

- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{krp}(X)$ jest niesprzeczny.

- Podzbiór zbioru niesprzecznego jest niesprzeczny. Nadzbiór zbioru sprzecznego jest sprzeczny.

- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że α nie jest elementem zbioru $C_{krp}(X)$.

- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny. W konsekwencji, zbiór X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór jest sprzeczny. [To także jedna z postaci twierdzenia o zwartości.]

- Jeżeli $\langle X_1, X_2, X_3, \ldots \rangle$ jest nieskończonym ciągiem niesprzecznych zbiorów formuł oraz
$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots,$$
to zbiór $\bigcup\limits_{i} X_i$ jest niesprzeczny.

- Jeśli α jest zdaniem (nie zawiera zmiennych wolnych) oraz $\neg\alpha$ nie należy do zbioru $C_{krp}(X)$, to zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest niesprzeczny.

* * *

Inną ważną własnością metalogiczną jest zupełność. Mówimy, że zbiór formuł języka KRP (o sygnaturze σ) jest ***zupełny*** (ze względu na tę sygnaturę) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α (w języku sygnatury σ) bądź α jest elementem $C_{krp}(X)$, bądź $\neg\alpha$ jest elementem $C_{krp}(X)$.

Gdy X jest zbiorem aksjomatów jakiejś teorii T (w języku o określonej sygnaturze), a α zdaniem (tego języka) takim, że ani α, ani $\neg\alpha$ nie należy do $C_{krp}(X)$, to mówimy, że α jest zdaniem ***nierozstrzygalnym*** na gruncie aksjomatów X (lub: w teorii T). Jeśli teoria jest zupełna, to nie istnieją w niej zdania nierozstrzygalne. Oznacza to, że w teorii zupełnej każdy problem sformułowany w jej języku znajduje rozstrzygnięcie na gruncie tej teorii.

Większość ważnych, interesujących teorii matematycznych to teorie, które nie są zupełne. Należy przy tym pamiętać, że nie zawsze zupełność jest pożądaną własnością teorii: dla przykładu teoria algebr Boole'a (niezupełna) została zbudowana z myślą o wielu bardzo różnych interpretacjach. Zupełność jest natomiast własnością pożądaną, gdy budujemy teorię z myślą o jakiejś jednej, ustalonej interpretacji (jak np. w przypadku arytmetyki Peana). Jednak właśnie w przypadku arytmetyki Peana (oraz, ogólniej, w przypadku wszelkich teorii zawierających stosowną część tej arytmetyki) mamy do czynienia z brakiem zupełności.

Teorią zupełną jest natomiast podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Fakt ten może zostać udowodniony przy pomocy techniki zwanej *eliminacją kwantyfikatorów*.

Podamy (bez dowodów) kilka faktów dotyczących pojęcia zupełności (pomijamy wszędzie określenie: „ze względu na dany język"):

- Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{krp}(X)$ jest zupełny.
- Jeżeli zbiór X nie jest zupełny, to jest niesprzeczny.
- Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły α nie należącej do $C_{krp}(X)$ zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest sprzeczny.
- (LEMAT LINDENBAUMA). Jeśli X jest zbiorem niesprzecznym, to istnieje niesprzeczna i zupełna teoria Y taka, że $X \subset Y$.

SZKIC DOWODU LEMATU LINDENBAUMA.

Wszystkie zdania języka KRP można ustawić w nieskończony ciąg:

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle,$$

przyjmując jakąś umowę dotyczącą uporządkowania zbioru ciągów symboli z alfabetu skończonego (metody takie omówiono na zajęciach ze *Wstępu do matematyki*).

Przez indukcję określamy teraz ciąg $\langle Y_1, Y_2, Y_3, \ldots \rangle$ zbiorów formuł zdaniowych w sposób następujący:

- $Y_1 = X$
- jeśli $\neg\alpha_i$ nie jest elementem $C_{krp}(Y_i)$, to przyjmujemy: $Y_{i+1} = Y_i \cup \{\alpha_i\}$
- jeśli $\neg\alpha_i$ jest elementem $C_{krp}(Y_i)$, to przyjmujemy: $Y_{i+1} = Y_i$.

Tak określony ciąg zbiorów jest wstępujący, czyli $Y_i \subset Y_{i+1}$ dla wszystkich i. Ponadto, wszystkie zbiory Y_i są niesprzeczne, co wykazuje się przez indukcję po i. W konsekwencji, zbiór:

$$Y = C_{krp}(\bigcup_{i=1}^{\infty})Y_i$$

również jest zbiorem niesprzecznym. Oczywiście, Y jest teorią i zawiera X. Na mocy konstrukcji zbiorów Y_i, dla każdego zdania α zachodzi alternatywa:

- α jest elementem Y, lub
- $\neg\alpha$ jest elementem Y.

A zatem zbiór Y spełnia tezę Lematu Lindenbauma: jest niesprzeczną zupełną teorią zawierającą zbiór X.

UWAGA. Dowód Lematu Lindenbauma nie jest konstruktywny (korzysta z aksjomatu wyboru), wiemy więc tylko, że każdy niesprzeczny zbiór formuł można rozszerzyć do teorii niesprzecznej i zupełnej.

* * *

Następna z własności metalogicznych to niezależność. Mówimy, że formuła α jest ***niezależna*** od zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy α nie należy do $C_{krp}(X)$. Mówimy, że zbiór formuł X jest ***niezależny*** wtedy i tylko wtedy, gdy α nie należy do $C_{krp}(X - \{\alpha\})$, dla wszystkich formuł α należących do X.

Gdy budujemy system aksjomatów, to wymóg jego niezależności stanowi wyraz troski o ekonomię: aksjomaty, które nie są niezależne od pozostałych są po prostu zbędne, gdyż można je z owych pozostałych wyprowadzić. Czasami jednak nie przykłada się pierwszorzędnej wagi do własności niezależności (zbioru aksjomatów), przedkładając nad nią (pragmatyczne) własności: zrozumiałości, estetyki, łatwości zapamiętania.

Powiemy, że zbiory X i Y formuł są ***logicznie równoważne*** wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{krp}(X) = C_{krp}(Y)$. Zbiory logicznie równoważne mają zatem dokładnie te same konsekwencje logiczne.

Przypominamy, że $\overline{\alpha}$ oznacza ***uniwersalne domknięcie*** formuły α, tj. formułę otrzymaną z α poprzez poprzedzenie α kwantyfikatorami generalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne w α. Oto dwa fakty dotyczące pojęcia niezależności (podane bez dowodów):

- Jeśli zbiór $X \cup \{\neg\overline{\alpha}\}$ jest niesprzeczny, to formuła α jest niezależna od zbioru X.
- Jeżeli zbiór X jest skończony, to istnieje niezależny zbiór Y równoważny logicznie zbiorowi X.

Istnieją nieskończone zależne zbiory formuł, które nie są równoważne logicznie z żadnym swoim skończonym niezależnym podzbiorem. Rozważmy bowiem następujący ciąg zdań (niech ich zapisanie w języku KRP będzie ćwiczeniem dla słuchaczek):

- Istnieją co najmniej dwa obiekty.
- Istnieją co najmniej trzy obiekty.
- Istnieją co najmniej cztery obiekty.
- …

Każde zdanie tego zbioru jest tutaj zależne, ponieważ jest konsekwencją logiczną zdania po nim następującego. Jednak żaden skończony zbiór tych zdań nie jest logicznie równoważny całemu ich zbiorowi.

$* * *$

Dodajmy, że poszukiwanie ***skończonych*** zbiorów formuł mogących stanowić aksjomatykę rozważanej teorii elementarnej T, równoważną logicznie z (być może nieskończoną) aksjomatyką teorii T jest ważnym problemem metodologicznym: jest to pytanie o tzw. ***skończoną aksjomatyzowalność*** teorii.

$* * *$

Zakładamy, że słuchaczki znają pojęcie izomorfizmu oraz pojęcie (nieskończonej) liczby kardynalnej z zajęć ze *Wstępu do matematyki*. Pojęcia te wykorzystujemy dla sformułowania jeszcze jednej własności mogącej przysługiwać teoriom elementarnym.

Mówimy mianowicie, że teoria T jest ***kategoryczna w mocy*** κ, gdzie κ jest (nieskończoną) liczbą kardynalną, gdy wszystkie modele teorii T, których uniwersa mają moc κ są izomorficzne. Kategoryczność w ustalonej mocy oznacza zatem, że wszystkie modele tej mocy branej pod uwagę teorii są strukturalnie nieodróżnialne, są „tak samo zbudowane".

Przykładem teorii kategorycznej w mocy $\aleph_0$ jest podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Nie jest natomiast kategoryczna w mocy $\aleph_0$ arytmetyka Peana. A zatem aksjomaty tej arytmetyki nie charakteryzują ***dokładnie jednej*** (z dokładnością do izomorfizmu) struktury.

20.9. Przykłady innych aksjomatyk KRP

Jak wspomniano na początku, można na różne sposoby dobierać aksjomaty KRP. Oto kilka znanych propozycji. Tytuły poniższych punktów odnoszą się do pozycji zamieszczonych w odnośnikach bibliograficznych.

Pogorzelski 1992, 242.

Aksjomatami są domknięcia uniwersalne wszystkich formuł o postaci:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
- $\forall x_k\ \alpha \to S(t, x_k, \alpha)$, o ile term t jest podstawialny za x_k w α
- $\forall x_k\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x_k\ \alpha \to \forall x_k\ \beta)$
- $\alpha \to \forall x_k\ \alpha$, o ile x_k nie jest zmienną wolną formuły α.

Jedyną regułą wnioskowania w tym systemie jest reguła odrywania RO.

Cori, Lascar 2000, 194–195.

Za schematy aksjomatów bierzemy wszystkie podstawienia tautologii KRZ oraz schematy następujące:

- $\exists x\ \alpha \equiv \neg\forall x\ \neg\alpha$

- $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α
- $\forall x\ \alpha \to S(t, x, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x w α.

Regułami wnioskowania są tu: reguła odrywania oraz reguła generalizacji.

Marciszewski 1987, 26 i następne.

W omawianym tu systemie aksjomatami są wszystkie podstawienia tez KRZ oraz następujące schematy:

- $\forall x\ \alpha(x) \to \alpha(y)$
- $\alpha(y) \to \exists x\ \alpha(x)$.

Regułami systemu są (zakłada się tu, że x nie jest wolna w β):

$$\frac{\beta \to \alpha(x)}{\beta \to \forall x\ \alpha(x)} \qquad \frac{\alpha(x) \to \beta}{\exists x\ \alpha(x) \to \beta}.$$

21. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

1. Podaj dowody następujących tez KRP:

- (a) $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$
- (b) $(\exists x\ \alpha \lor \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \lor \beta)$.

2. Pokaż, że następujące reguły są wyprowadzalne w KRP:

- (a)
$$\frac{\exists x\ \alpha}{\exists x\ (\alpha \lor \beta)}$$
- (b)
$$\frac{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta}{\forall x\ (\gamma \to \alpha)}.$$

3. Wykorzystaj twierdzenia o dedukcji w dowodach następujących tez:

- (a) $(\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Rozwiązania

1(a). $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$

1.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A14*)
2.	$\alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	prawo komutacji: 1
3.	$\forall x\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
4.	$\forall x\ \alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 3, 2
5.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$	prawo komutacji: 4
6.	$(\forall x\ (\alpha \to \beta) \land \forall x\ \alpha) \to \beta$	prawo importacji: 5
7.	$(\forall x\ (\alpha \to \beta) \land \forall x\ \alpha) \to \forall x\ \beta$	D$\forall$: 6
8.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$	prawo eksportacji: 7.

1(b). $(\exists x\ \alpha \lor \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \lor \beta)$

1.	$(\exists x\ \alpha \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to$ $((\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to ((\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)))$	prawo dodawania poprzedników
2.	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	(A7)
3.	$(\alpha \vee \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	(A15*)
4.	$\alpha \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 2, 3
5.	$\exists x\ \alpha \to (\alpha \vee \beta)$	D∃: 4
6.	$((\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to ((\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)))$	RO: 1, 5
7.	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	(A8)
8.	$\beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 7, 3
9.	$\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	D∃: 8
10.	$(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	RO: 6, 9.

2(a).

$$\frac{\exists x\ \alpha}{\exists x\ (\alpha \vee \beta)}$$

Trzeba pokazać, że: $\{\exists x\ \alpha\} \vdash_{krp} \exists x\ (\alpha \vee \beta)$.

1.	$\exists x\ \alpha$	założenie
2.	$\exists x\ \alpha \to (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$	(A7)
3.	$\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta$	RO: 2, 1
4.	$(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	teza (ćw. 1(b))
5.	$\exists x\ (\alpha \vee \beta)$	RO: 4, 3.

2(b).

$$\frac{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta}{\forall x\ (\gamma \to \alpha)}$$

Trzeba pokazać, że: $\{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta\} \vdash_{krp} \forall x\ (\gamma \to \alpha)$.

1.	$\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta$	założenie
2.	$\forall x\ \beta$	założenie
3.	$(\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta) \to (\forall x\ \beta \to \forall x\ \alpha)$	(A11)
4.	$\forall x\ \beta \to \forall x\ \alpha$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha$	RO: 4, 2
6.	$\forall x\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
7.	α	RO: 6, 5
8.	$\alpha \to (\gamma \to \alpha)$	(A3)
9.	$\gamma \to \alpha$	RO: 8, 7
10.	$\forall x\ (\gamma \to \alpha)$	RG: 9.

3(a). $(\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$

$(\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$ jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\emptyset \vdash_{krp} (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)).$$

Ponieważ $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ jest zdaniem, więc (na mocy twierdzenia o dedukcji) zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)\} \vdash_{krp} \forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x).$$

Jeszcze raz stosujemy twierdzenie o dedukcji (co możemy uczynić, gdyż $\forall x\ P(x)$ jest zdaniem) i otrzymujemy, że zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x),\ \forall x\ P(x)\} \vdash_{krp} \exists x\ Q(x).$$

Budujemy zatem dowód tego ostatniego:

1.	$\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$	założenie
2.	$\forall x\ P(x)$	założenie
3.	$\forall x\ P(x) \rightarrow P(x)$	(A14*)
4.	$P(x)$	RO: 3, 2
5.	$P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$	(A15*)
6.	$\exists x\ P(x)$	RO: 5, 4
7.	$\exists x\ Q(x)$	RO: 1, 6.

3(b). $(\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

$(\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\emptyset \vdash_{krp} (\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Ponieważ $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$ jest zdaniem, więc (na mocy twierdzenia o dedukcji) zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)\} \vdash_{krp} \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Budujemy dowód tego ostatniego:

1.	$\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$	założenie
2.	$P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$	O$\exists$: 1
3.	$P(x) \rightarrow Q(x)$	O$\forall$: 2
4.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	RG: 3.

Wykorzystywana literatura

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Cori, R., Lascar, D. 2000. *Mathematical Logic. A Course with Exercises*. Oxford University Press, Oxford. Part I: *Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems*. Part II: *Recursion Theory, Gödel's Theorems, Set Theory, Model Theory*.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.

Zygmunt, J. 1973. A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem. W: Surma 1973, 165–238.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl