Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Badanie funkcji

- Przypomnimy niektóre pojęcia, znane słuchaczom ze szkoły: np. ekstrema lokalne funkcji. Podamy warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum.
- Znajdowanie ekstremów lokalnych to ważne zagadnienie z punktu widzenia zastosowań: w praktyce bardzo często interesujemy się, kiedy jakaś wielkość, opisująca badaną zależność, przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną.

- Przebieg zmienności funkcji charakteryzują takie pojęcia jak np.: jej *ekstrema lokalne*, jej *punkty przegięcia*, jej *punkty nieciągłości*, przedziały, w których jest ona *monotoniczna*, *wypukła*, *wklęsła*, jej *asymptoty*.
- Pojęcia te charakteryzujemy w terminach granicy oraz pochodnej funkcji.

Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w jakimś otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, czyli w pewnym przedziale otwartym $(x_0 - a, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:

1. *maksimum lokalne*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) \leqslant f(x_0)$;
2. *minimum lokalne*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Maksima oraz minima lokalne nazywamy *ekstremami lokalnymi* funkcji. Określone wyżej ekstrema nazywa się czasem *ekstremami niewłaściwymi*. Ponadto, mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0:

1. *maksimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) < f(x_0)$;
2. *minimum lokalne właściwe*, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż: jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) > f(x_0)$.

Przykłady:

- Funkcja $f(x) = -x^2 + 5$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.
- Funkcja $f(x) = |x - 2|$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = 2$.
- Funkcja $f(x) = \sin x$ nie ma ekstremum lokalnego w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Funkcja $f(x) = \cos x$ ma maksimum lokalne w każdym punkcie $x = 2 \cdot n \cdot \pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz minimum lokalne w każdym punkcie $x = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum podaje następujące twierdzenie:

- **Twierdzenie**. *Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w punkcie x_0 oraz posiada ekstremum lokalne w punkcie x_0, to $f'(x_0) = 0$.*

Równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0 ma jedną z następujących postaci (co wynika bezpośrednio z definicji ilorazu różnicowego funkcji w punkcie x_0):

1. $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, gdy $|f'(x_0)| < \infty$
2. $y = x_0$, gdy $|f'(x_0)| = \infty$.

Punkt przegięcia. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0. Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 *punkt przegięcia*, gdy: albo $|f'(x_0)| = \infty$ albo $|f'(x_0)| < \infty$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $0 < |h| < \delta$ zachodzi jeden z następujących przypadków:

1. $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leqslant f(x_0 + h)$ dla $h > 0$ oraz
   $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geqslant f(x_0 + h)$ dla $h < 0$
   (krzywa $y = f(x)$ *przewija się spod stycznej nad styczną*).
2. $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \geqslant f(x_0 + h)$ dla $h > 0$ oraz
   $f'(x_0 + h) + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \leqslant f(x_0 + h)$ dla $h < 0$
   (krzywa $y = f(x)$ *przewija się znad stycznej pod styczną*).

1. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale niewłaściwym (c, ∞), gdzie $c \in \mathbb{R}$. Mówimy, że prosta $y = a \cdot x + b$ jest *asymptotą ukośną funkcji* f *przy* $x \to +\infty$, gdy $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - a \cdot x - b) = 0$.
   Mówimy, że prosta $y = a \cdot x + b$ jest *asymptotą ukośną funkcji* f *przy* $x \to -\infty$, gdy $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - a \cdot x - b) = 0$.
2. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0, za wyjątkiem punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *asymptotę pionową* $x = x_0$ *w punkcie* x_0, gdy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ lub $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
3. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0)$ punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *lewostronną asymptotę pionową* $x = x_0$ *w punkcie* x_0, gdy: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.
4. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $(x_0, x_0 + \delta)$ punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma *prawostronną asymptotę pionową* $x = x_0$ *w punkcie* x_0, gdy: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ lub $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Przykłady

- Punkt $x_0 = 0$ jest punktem przegięcia krzywej o równaniu $f(x) = x^3$.
- Funkcja $f(x) = x^2$ nie ma punktów przegięcia.
- Asymptotami funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ są proste o równaniach $y = 0$ oraz $x = 0$.
- Asymptotami funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + x$ są proste o równaniach $y = x$ oraz $x = 0$.

- Pod koniec wykładu dowiemy się, jak wyznaczać punkty przegięcia oraz asymptoty.

- **Twierdzenie Rolle'a**. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału (a, b), a ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że $f'(x_0) = 0$.*
- W interpretacji geometrycznej twierdzenie Rolle'a głosi, że przy założeniu równości wartości funkcji na końcach przedziału wewnątrz tego przedziału istnieje punkt x_0 taki, że styczna do krzywej $f(x)$ przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi odciętych.

- **Twierdzenie Lagrange'a**. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie należącym do przedziału (a, b), a ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*
- W interpretacji geometrycznej teza powyższego twierdzenia głosi, że styczna do krzywej $f(x)$ przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do siecznej łączącej punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału (a, b). Wtedy:*

1. *f jest niemalejąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geqslant 0$ w (a, b).*
2. *f jest nierosnąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leqslant 0$ w (a, b).*

Ponadto, jeśli $f'(x) > 0$ w (a, b), to f jest ściśle rosnąca w (a, b), natomiast jeśli $f'(x) < 0$ w (a, b), to f jest ściśle malejąca w (a, b).

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego:

Twierdzenie. *Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0. Wtedy:*

1. *Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0.*
2. *Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, to funkcja f ma minimum lokalne w punkcie x_0.*

- **Twierdzenie Cauchy'ego**. *Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalne w każdym punkcie należącym do przedziału (a, b), a ponadto $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że:*
$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$
- Z omówionych wyżej twierdzeń o wartości średniej mamy wiele pożytków. Między innymi, pozwalają one uzasadnić regułę postępowania z wyrażeniami, zawierającymi granice, których obliczenie nie jest – na pierwszy rzut oka – oczywiste.

- Tak jest np. w sytuacjach, gdy otrzymujemy wyrażenie ułamkowe, w którym licznik oraz mianownik dążą do zera, lub licznik i mianownik dążą do nieskończoności.
- Procedurę postępowania w takich przypadkach opisuje *reguła de l'Hospitala*. Zachodzą mianowicie następujące cztery twierdzenia:

1. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[x_0, x_0 + \delta]$, gdzie $\delta > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach przedziału otwartego $(x_0, x_0 + \delta)$. Załóżmy też, że $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oraz $g(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Jeżeli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $[x_0, x_0 + \delta]$ przedziałem $[x_0 - \delta, x_0]$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

2. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale niewłaściwym (a, ∞), gdzie $a > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in (a, \infty)$. Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje także granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi równość: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$, gdzie $\delta > 0$ oraz różniczkowalne we wszystkich punktach tego przedziału. Załóżmy też, że $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \infty$ oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Jeśli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość: $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ przedziałem $(x_0 - \delta, x_0)$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

4. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[x_0, x_0 + \delta]$, gdzie $\delta > 0$ i mają ciągłe pochodne aż do rzędu $n - 1$ w tym przedziale oraz ich n-te pochodne są skończone w każdym punkcie przedziału otwartego $(x_0, x_0 + \delta)$. Załóżmy też, że dla $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ mamy $g^{(k)}(x) \neq 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oraz że zachodzą równości:
$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$.
Jeśli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, to istnieje też granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy przedział $[x_0, x_0 + \delta]$ przedziałem $[x_0 - \delta, x_0]$, a granice prawostronne przy $x \to x_0^+$ granicami lewostronnymi przy $x \to x_0^-$.

- Omówione wyżej przejścia od liczenia granicy ilorazu funkcji do liczenia granicy ilorazu ich pochodnych (przy zakładanych założeniach) nazywamy *regułą de l'Hospitala*.
- W powyższych twierdzeniach używaliśmy terminu *symbol nieoznaczony* dla sytuacji, gdy obliczane granice mają postać $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.
- Sformułowania powyższych twierdzeń jawić się mogą studentom kognitywistyki UAM jako odrobinę skomplikowane. Ich dowody (podobnie jak dowody wszystkich innych twierdzeń wspominanych na tym wykładzie) znajdą zainteresowani słuchacze w tekstach wykładów zamieszczonych na naszej stronie internetowej oraz w podręcznikach, np.: Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Sugerujemy, aby słuchacze korzystali z następującej *Uwagi Praktycznej* dotyczącej stosowania reguły de l'Hospitala:

Uwaga Praktyczna

Przez *symbole nieoznaczone* rozumiemy wyrażenia następujących postaci:
$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0
Reguła de l'Hospitala pokazuje, jak radzić sobie z symbolami $\frac{0}{0}$ oraz $\frac{\infty}{\infty}$.
Pozostałe sytuacje możemy zredukować do tych dwóch, poprzez przekształcenia:

1. Dla $\infty - \infty$ stosujemy przekształcenie: $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$, prowadzące do symbolu $\frac{0}{0}$, do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.
2. Dla $0 \cdot \infty$ stosujemy przekształcenie: $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, prowadzące do symbolu $\frac{\infty}{\infty}$, do którego stosujemy regułę de l'Hospitala.
3. Dla symboli 0^0, 1^∞ oraz ∞^0 stosujemy przekształcenie: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, prowadzące do przypadku rozważanego w punkcie 2.

Przykłady

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$. Mamy do czynienia z symbolem $\frac{0}{0}$. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sqrt{x}}{1+x} = 0$$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x^2}$. Mamy do czynienia z symbolem $\frac{\infty}{\infty}$. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(\ln x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\cdot\ln x}}{2\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\cdot x^2\cdot\ln x} = 0$$
- $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$. Mamy do czynienia z symbolem $0\cdot\infty$. Korzystając z przekształcenia zalecanego w *Uwadze Praktycznej* oraz z reguły de l'Hospitala otrzymujemy:
$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}x^2 = 0$$

Załóżmy, że funkcja $f[a, b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne aż do $n+1$-tego rzędu w przedziale $[a, b]$ (na krańcach przedziału pochodne jednostronne). Wtedy dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi ***wzór Taylora***:

$f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)) + R_n(x, a)$, gdzie $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$.

Wzór Taylora pozwala na przybliżanie wartości funkcji wielomianami, których współczynniki wyznaczone są przez pochodne wyjściowej funkcji.

Twierdzenie Maclaurina. *Załóżmy, że funkcja f ma w przedziale $[0, x]$ (gdzie $x > 0$) ciągłą pochodną $f^{(n-1)}$ oraz ma skończoną pochodną $f^{(n)}$ wewnątrz tego przedziału. Dla każdej liczby naturalnej $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ istnieje liczba rzeczywista $t \in (0, 1)$ taka, że:*

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + R_n(x)$, *gdzie*

$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)! \cdot k} \cdot (1-t)^{n-k} \cdot f^{(n)}(t \cdot x)$.

Przykłady

- *Funkcja wykładnicza* e^x. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:
  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{e^{t \cdot x}}{n!} \cdot x^n$, gdzie $0 < t < 1$.
- *Funkcja logarytmiczna* $\ln(1+x)$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:
  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n \cdot (1+t \cdot x)^n}$, gdzie $0 < t < 1$ oraz $x > -1$.
- *Funkcja trygonometryczna* $\sin x$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:
  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \sin(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2})$, gdzie $0 < t < 1$.
- *Funkcja trygonometryczna* $\cos x$. Zastosowanie twierdzenia Maclaurina daje następujące przedstawienie tej funkcji:
  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \cos(t \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2})$, gdzie $0 < t < 1$.

Dodajmy jeszcze, dla zainteresowanych słuchaczy, że z omawianych wyżej twierdzeń wynika również, że jeśli szereg $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ma promień zbieżności $R > 0$, to dla $|x| < R$ zachodzi równość:
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

Ponadto, z twierdzeń tych wynika, że funkcja f posiadająca pochodne wszystkich rzędów (wspólnie ograniczone przez pewną stałą) w punktach pewnego przedziału domkniętego może zostać przedstawiona w postaci szeregu potęgowego:
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.
Te wnioski mają duże znaczenie praktyczne w analizie matematycznej.

Poniżej podajemy szereg warunków dotyczących badania funkcji:

Warunek wystarczający istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$, to f ma w x_0 ekstremum lokalne. Przy tym jest to:

1. maksimum lokalne, gdy $f''(x_0) < 0$
2. minimum lokalne, gdy $f''(x_0) > 0$.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną pochodną $f^{(n)}(x_0)$, dla pewnego $n > 1$. Jeśli ponadto $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to:

1. Gdy n jest parzysta, to f ma w x_0 ekstremum lokalne. Przy tym jest to: maksimum lokalne, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$ zaś minimum lokalne, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.
2. Gdy n jest nieparzysta, to f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego.

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$ oraz ma w x_0 punkt przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.

Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu drugiej pochodnej. Załóżmy, że funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 skończoną drugą pochodną $f''(x_0)$. Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi jedno z dwojga:

1. $f''(x_0) \geqslant 0$ dla $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ oraz $f''(x_0) \leqslant 0$ dla $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$
2. $f''(x_0) \leqslant 0$ dla $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ oraz $f''(x_0) \geqslant 0$ dla $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$

to krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie o odciętej x_0 punkt przegięcia. W pierwszym z tych przypadków krzywa przewija się znad stycznej pod styczną, a w drugim z nich przewija się spod stycznej nad styczną.

Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia sformułowany przy użyciu pochodnych wyższych rzędów. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną pochodną $f^{(n)}(x_0)$, dla pewnego $n > 2$. Jeśli ponadto $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to:

1. Gdy n jest parzysta, to krzywa $y = f(x)$ ma w punkcie o odciętej x_0 punkt przegięcia. Przy tym:
    1. gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, to krzywa przewija się spod stycznej nad styczną
    2. gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, to krzywa przewija się znad stycznej pod styczną.
2. Gdy n jest nieparzysta, to krzywa $y = f(x)$ nie ma w punkcie o odciętej x_0 punktu przegięcia.

Ciągłość funkcji wypukłej. Załóżmy, że funkcja f jest wypukła w pewnym otoczeniu punktu x_0. Wtedy f jest ciągła w tym punkcie. Twierdzenie to zachowuje ważność, gdy wypukłość zamienimy na wklęsłość.

Wypukłość funkcji a monotoniczność pochodnej. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niemalejąca w (a, b). Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nierosnąca w (a, b).

Wypukłość funkcji a położenie stycznej. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 leży poniżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą. Funkcja f różniczkowalna w przedziale (a, b) jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 leży powyżej tej krzywej, bądź jest odcinkami identyczna z tą krzywą.

Warunek konieczny i wystarczający wypukłości funkcji. Załóżmy, że funkcja f ma skończoną drugą pochodną f'' w przedziale otwartym (a, b). Wtedy:

1. f jest wypukła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$.
2. f jest wklęsła w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \leqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$.

Asymptoty ukośne. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale niewłaściwym $(c, +\infty)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Prosta $y = a \cdot x + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x \to +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ oraz $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - a \cdot x) = b$. To twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy zamienimy przedział $(c, +\infty)$ na przedział $(-\infty, c)$ oraz napiszemy wszędzie $x \to -\infty$ zamiast $x \to +\infty$.

Ogólny schemat badania przebiegu zmienności funkcji przedstawia się następująco:

1. Określamy dziedzinę oraz przeciwdziedzinę funkcji.
2. Badamy granice funkcji w punktach krańcowych jej przedziałów określoności.
3. Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość dla argumentu równego 0 (czyli wyznaczamy miejsca przecięcia się wykresu funkcji z osiami współrzędnych).
4. Wyznaczamy asymptoty funkcji.
5. Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji.
6. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji.
7. Ustalamy przedziały monotoniczności, wklęsłości i wypukłości funkcji.
8. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji.
9. Wyniki powyższych ustaleń przedstawiamy w stosownej tabeli, na podstawie której szkicujemy następnie wykres funkcji.

Rozkład normalny

Bardzo ważna w zastosowaniach (jako funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej, o czym słuchacze dowiedzą się na zajęciach ze statystyki) jest funkcja: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji.

- Jej dziedziną jest oczywiście cały zbiór $\mathbb{R}$.
- Funkcja ta nie przyjmuje wartości 0 dla żadnego $x \in \mathbb{R}$, a więc nie ma miejsc zerowych.
- Dla argumentu $x = 0$ funkcja f przyjmuje następującą wartość: $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$.
- Wyznaczamy granice funkcji w nieskończoności:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$

Obliczamy pierwszą i drugą pochodną badanej funkcji:

$f'(x) = (\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}})' = \frac{-1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$

$f''(x) = (\frac{-1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}})' = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1).$

- $f'(x) = 0$ dla $x = 0$.
- Dla $x \in (-\infty, 0)$ mamy $f'(x) > 0$, a więc funkcja f jest rosnąca w przedziale niewłaściwym $(-\infty, 0)$. Dla $x \in (0, +\infty)$ mamy $f'(x) < 0$, a więc funkcja f jest malejąca w przedziale niewłaściwym $(-\infty, 0)$. Funkcja f ma zatem maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.
- $f''(x) = 0$ dla $x = 1$ lub $x = -1$.
- Ponieważ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ mamy $f''(x) > 0$, więc funkcja f jest wypukła w przedziałach niewłaściwych $(-\infty, -1)$ oraz $(1, +\infty)$. Ponieważ dla $x \in (-1, 1)$ mamy $f''(x) < 0$, więc funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-1, 1)$. Funkcja f ma zatem punkty przegięcia dla $x = -1$ oraz $x = 1$.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, więc prosta $y = 0$ jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota. Możemy zebrać w tabeli poczynione wyżej ustalenia:

x	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow \smile$	$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}$	$\nearrow \frown$	$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$	$\searrow \frown$	$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}$	$\searrow \smile$

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam.

Krzywa logistyczna

Trend logistyczny jest charakterystyczny dla sytuacji, gdy pewna wielkość z początku szybko rośnie, ale po osiągnięciu pewnego poziomu rośnie już wolniej, po czym stabilizuje się. Sytuacji takiej odpowiada funkcja: $f(x) = \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot x}}$, gdzie $a, b, c > 0$ są pewnymi parametrami. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji. Załóżmy, że badamy ją w przedziale $[0, \infty)$, a zatem to jest jej dziedzina.

- Dla $x = 0$ wartość funkcji f jest równa: $f(0) = \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot 0}} = \frac{a}{1+b}$, a więc krzywa ta ma punkt wspólny z osią rzędnych: jest to punkt o współrzędnych $(0, \frac{a}{1+b})$. Funkcja przyjmuje jedynie wartości dodatnie, a więc nie ma ona miejsc zerowych.
- Obliczając granicę tej funkcji przy x dążącym do ∞ widzimy, że: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot x}} = a$, ponieważ mianownik rozważanego ułamka dąży do 1 przy x dążącym do ∞.

Obliczamy pierwszą oraz drugą pochodną rozważanej funkcji:
$f'(x) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$
$f''(x) = a \cdot b \cdot c^2 \cdot e^{-c \cdot x} \cdot \frac{b \cdot e^{-c \cdot x} - 1}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^3}$.
Ponieważ $f'(x) > 0$ w rozważanej dziedzinie, więc funkcja f jest rosnąca w tej dziedzinie. Nie ma zatem ekstremum lokalnego.

Mamy $f''(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \cdot e^{-c \cdot x} = 1$, czyli $e^{-c \cdot x} = \frac{1}{b}$. To zachodzi wtedy, gdy $e^{c \cdot x} = b$, czyli gdy $x = \frac{\ln b}{c}$. Zauważmy, że:

1. Dla $x \in [0, \frac{\ln b}{c})$ mamy $f''(x) > 0$, czyli funkcja f jest wypukła w tym przedziale.
2. Dla $x \in (\frac{\ln b}{c}, \infty)$ mamy $f''(x) < 0$, czyli funkcja f jest wklęsła w tym przedziale.
3. Punkt $(\frac{\ln b}{c}, \frac{a}{2})$ jest punktem przegięcia funkcji f.

Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot x}} = a$, więc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{1+b\cdot e^{-c\cdot x}} \cdot \frac{1}{x} = 0$. Wynika z tego, że prosta o równaniu $y = a$ jest asymptotą badanej funkcji. Jest to jej jedyna asymptota (dla funkcji rozważanej w $[0, \infty)$; jeśli rozważamy krzywą logistyczną dla argumentów z całego zbioru $\mathbb{R}$, to asymptotą poziomą jest też prosta o równaniu $y = 0$).

Tabela zmienności funkcji f wygląda zatem następująco:

x	0	$(0, \frac{\ln b}{c})$	$\frac{\ln b}{c}$	$(\frac{\ln b}{c}, \infty)$	∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{a}{1+b}$	$\nearrow\smile$	$\frac{a}{2}$	$\nearrow\frown$	a

Na podstawie tej tabeli słuchacze mogą teraz naszkicować wykres rozważanej funkcji, do czego zachęcam.

Myśl przekornie!

- Czy w danym przedziale funkcja może mieć tylko skończoną liczbę ekstremów lokalnych (punktów nieciągłości, punktów przegięcia, punktów, w których nie jest różniczkowalna)?
- Dotąd omawiano pojęcia: granicy, ciągłości i różniczkowalności funkcji jednej zmiennej. W tym przypadku argumenty „dążą” do wybranej wielkości po „drogach” wewnątrz jednowymiarowego kontinuum. A co z funkcjami *wielu* zmiennych (np. dwóch)? Cóż miałoby znaczyć, że ciąg punktów (x_n, y_n) *dąży* do punktu (a, b)?
- Skoro funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych wyznacza pewną powierzchnię, to czy istnieje odpowiednik pojęcia *stycznej* w tym przypadku?

Co musisz ZZZ

- Ekstrema lokalne funkcji.
- Reguła de l'Hospitala.
- Wzór Taylora.
- Procedura badania przebiegu zmienności funkcji:
  - Określamy dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji.
  - Badamy granice funkcji w punktach krańcowych jej przedziałów określoności.
  - Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość dla argumentu równego 0.
  - Wyznaczamy asymptoty funkcji.
  - Obliczamy pierwszą i drugą pochodną funkcji.
  - Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji.
  - Ustalamy przedziały monotoniczności, wklęsłości i wypukłości funkcji. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji.
  - Sporządzamy tabelę zmienności funkcji oraz wykres funkcji.