MATEMATYCZNE METAFORY KOGNITYWISTÓW

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

ABSTRAKT. Dzielimy się z czytelnikiem garścią uwag krytycznych na temat proponowanej przez niektórych kognitywistów (Lakoff, Núñez 2000) koncepcji *ucieleśnionej matematyki*. Wspomniani autorzy próbują redukować genezę oraz uprawianie matematyki do konstruowania swoistych metafor. Ponad trzydzieści lat temu zaproponowano ciekawą koncepcję tworzenia i funkcjonowania metafor: Lakoff, Johnson 1980. Obecnie Lakoff i Núñez próbują stosować ową teorię metafor do analizowania twórczości matematycznej. Polemizujemy z ich wizją *teorii ucieleśnionej matematyki* oraz z wysnuwanymi przez nich konkluzjami filozoficznymi. Niektóre z tych uwag krytycznych podaliśmy w Pogonowski 2011. Dodać wypada, że w ostatnich latach znajdujemy w literaturze przedmiotu bardzo zróżnicowane oceny propozycji Lakoffa i Núñeza: od entuzjastycznych po wielce krytyczne.[1]

1 Wstęp

Nie przedstawiamy w niniejszym tekście treści *Where mathematics comes from* – dość obszernie uczyniliśmy to w Pogonowski 2011. W polskiej literaturze filozoficznej dostępne są również inne omówienia – np. Hohol 2011. Poniżej przypomnimy jedynie kilka podstawowych założeń, pojęć, ustaleń i propozycji Lakoffa i Núñeza. Skupimy się natomiast na uwagach krytycznych, przy czym podkreślmy od razu, że nie jest naszym zamiarem *całkowite* zakwestionowanie omawianych propozycji, chociaż osobiście uważamy je za nietrafny obraz matematyki. Postaramy się bowiem wskazać na pewne wątpliwości, z którymi – być może – omawiana koncepcja, po stosownych uzupełnieniach dałaby sobie radę. Niewątpliwie

[1]Niniejszy tekst to rozszerzona wersja odczytu, który wygłosiłem 23 października 2012 roku podczas LVIII Konferencji Historii Logiki w Krakowie. Uważam, że to czy niniejsze notatki ukażą się w druku nie ma znaczenia. Mam nadzieję, że są nieszkodliwe.

jest to koncepcja nowa i ciekawa. Można mieć, naszym zdaniem, zastrzeżenia co do *zasięgu* jej stosowalności – takie zastrzeżenia zresztą wysuwać można wobec każdej koncepcji, która rości sobie prawa do bycia uniwersalną, rozstrzygającą wszelkie kwestie dotyczące genezy i uprawiania matematyki. Warto przypomnieć deklarację autorów, że ich koncepcja *nie jest* ani teorią *stricte* matematyczną, ani filozoficzną (choć implikuje, ich zdaniem, pewne rozstrzygnięcia filozoficzne). Teoria matematyki ucieleśnionej to koncepcja *kognitywistyczna*, ma wyjaśniać genezę i sposoby uprawiania matematyki w terminach wobec niej zewnętrznych, kognitywnych właśnie.

2 Matematyka ucieleśniona

Program *ucieleśnionej matematyki* sytuuje się w tzw. drugiej generacji badań kognitywistycznych. Pierwsza generacja wiązana jest z badaniami sztucznej inteligencji odwołującymi się głównie do funkcjonalizmu komputerowego (umysł – program, mózg – hardware, inteligencja – rozwiązywanie problemów, myślenie – manipulowanie symbolami). Początek drugiej generacji wiąże się z teorią metafor zaproponowaną w Lakoff, Johnson 1980. Wedle tej teorii, to głównie metafory odpowiedzialne są za większość procesów poznawczych.

Dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień, przytoczmy słowa autorów dotyczące ich rozumienia tego, czym są metafory pojęciowe (Lakoff, Núñez 2000, 6):

> Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another. [. . .] It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic).

Metafory polegają na swoistym odwzorowaniu: pojęcia, zwykle bardziej konkretne, z jednej dziedziny powiązane są z tworzonymi, zwykle bardziej abstrakcyjnymi, pojęciami dziedziny drugiej. Ważny jest przy tym ów twórczy charakter metafor, a także to, że są one odwzorowaniami zachowującymi pewne informacje. Zwykle mawia się, że odwzorowania metaforyczne zachowują pewne *własności* pojęć. Różnica między metaforą oraz analogią miałaby polegać na tym, że w analogii porównujemy istniejące w dwóch dziedzinach pojęcia, a w metaforze pojęcia w drugiej dziedzinie są tworzone. Nadto, czasami mawia się, że analogie zachowują relacje, a metafory własności. Może jednak trzeba mówić, że w obu przypadkach zachowywane są stosowne relacje.

Autorzy twierdzą, że udało im się pokazać błędność *mitologii matematycznej* (tak – może nie całkiem literalnie – oddajemy ich termin *romance of mathematics*), wedle której matematyka ma charakter obiektywny, jest jakoś obecna w świecie, jej istnienie jest niezależne od jakichkolwiek umysłów, a przy tym matematyka uprawiana przez ludzi pozwala nam odkrywać prawdy o świecie. Ich zdaniem są to wszystko przesądy. Wedle nich, sprawy mają się inaczej, m.in.:

1. Umysł jest ucieleśniony, a zatem natura naszych ciał, mózgów oraz codziennego funkcjonowania kształtuje ludzkie pojęcia i rozumowania, w szczególności matematyczne.

2. Większość procesów myślowych (w tym tych związanych z matematyką) jest niedostępna naszej świadomości.

3. Abstrakcje ujmujemy w postaci metafor pojęciowych, przenosząc pojęcia związane z aktywnością sensoro-motoryczną do innych dziedzin, w tym dziedzin matematycznych.

Próbując współcześnie wyjaśniać złożone procesy poznawcze (np. aktywności matematyczne) odnosimy się do ustaleń ewolucyjnych dotyczących zarówno gatunku ludzkiego, jak i rozwoju mózgu. Z ewolucyjnego punktu widzenia, mózg nie jest jakimś urządzeniem ogólnego przeznaczenia, lecz powinien być traktowany jako służący przetwarzaniu informacji dotyczącej: widzenia, ruchu, orientacji przestrzennej, wzajemnych oddziaływań interpersonalnych, emocji, języka, potocznych rozumowań. Zarówno język, jak i system pojęciowy są systemami, których organizacja zdeterminowana jest przez strukturę mózgu, ciała oraz świata zewnętrznego. Książka Lakoffa i Núñeza stara się odpowiedzieć na pytanie: jakie konkretnie mechanizmy działania ludzkiego mózgu oraz umysłu pozwalają ludziom na tworzenie pojęć matematycznych oraz rozumowania matematyczne? Ponadto, stara się też argumentować za tezą, że ludzka (ucieleśniona) matematyka jest *całą* matematyką: nie ma więc, zdaniem autorów, racji bytu matematyka w duchu Platońskim, przekraczająca ciała i umysły oraz nadająca strukturę kosmosowi. To, czym jest ludzka matematyka jest empirycznym problemem naukowym, a nie problemem matematycznym ani filozoficznym. Tak więc, jedynie nauki kognitywne, badające mózg, umysł oraz wiążące je zależności są w stanie odpowiedzieć jaka jest istota ludzkiej matematyki. W konsekwencji, całość matematyki to ludzka matematyka.

Autorzy wyróżniają dwa typy metafor pojęciowych w matematyce:

1. *Metafory bazujące*. Dostarczają podstawowych, bezpośrednio ugruntowanych pojęć. Dla przykładu: dodawanie jako grupowanie razem obiektów.

2. *Metafory łączące*. Dostarczają bardziej abstrakcyjnych pojęć. Dla przykładu: liczby to punkty na prostej, figury geometryczne to równania algebraiczne.

Wyrażanie w językach etnicznych różnego rodzaju zależności stanowi (dla kognitywistów) podstawę do wyodrębnienia odpowiednich *schematów obrazowych* (*image schemas*). Przykładem takiego schematu jest: *pojemnik* (wraz z *wnętrzem*, *brzegiem*, *zewnętrzem*). Schematy związane są też z systemami zależności *aspektowych*. Ruch i jego wyrażanie dostarczają schematu *źródło–droga–cel*, itd.

Tworzymy *metafory pojęciowe* dokonując przyporządkowań z jednej dziedziny w inną – dla przykładu, w metaforze *stany emocjonalne to miejsca w przestrzeni lub stany fizyczne* przyporządkowujemy emocjom, uczuciom, itp. miejsca lub cechy fizyczne: być w depresji, żywić ciepłe uczucia, itp. Takich metafor pojęciowych jest niezliczone mrowie, wiele z nich opisano dokładnie w Lakoff, Johnson 1980. *Kategorie* rozumiemy np. jako *pojemniki*, *miłość* jako *partnerstwo* (w cywilizacji Zachodu), itd.

Złącze pojęciowe to kombinacja dwóch różnych struktur poznawczych wraz z ustalonymi odpowiedniościami pomiędzy nimi. Jeśli te połączenia są metaforyczne, to mówimy o *złączu metaforycznym*. Za przykład niech służy tu *oś liczbowa*, która korzysta z metafory *liczby to punkty na prostej*.

Poszczególne rozdziały książki przedstawiają różne rodzaje metafor wykorzystywanych w tworzeniu pojęć matematycznych. W przypadku arytmetyki są to np. metafory:

1. *grupowania obiektów*
2. *konstruowania obiektów*
3. *odcinka pomiarowego*
4. *ruchu wzdłuż drogi*.

Podkreśla się – poświadczone eksperymentalnie – istnienie pewnych elementarnych zdolności arytmetycznych u noworodków. Krótko dyskutuje się rolę pewnych struktur w mózgu, związanych z takimi umiejętnościami.

Zarówno w przypadku arytmetyki, jak i w przypadkach innych działów matematyki autorzy starają się ukazać mechanizmy metaforycznego tworzenia (i rozumienia) pojęć, proponując stosowne dziedziny oraz zasady transferu własności z jednej dziedziny do drugiej. Niezwykle ważna jest tzw. BMI – *podstawowa metafora nieskończoności* (*Basic Metaphor of Infinity*). Punktem wyjścia jest rozumienie *procesów* jako ruchów, przy czym procesy ciągłe, bez wyraźnego ich zakończenia, ujmowane są jako (dyskretne) procesy *powtarzalne*. Uzasadnienia dla takich metafor znajdują kognitywiści m.in. w systemach aspektowych języków etnicznych. Autorzy piszą (Lakoff, Núñez 2000: 157):

> Why is this metaphor important for infinity? The reason is that we commonly apply it to infinitely continuous processes. Continuous processes without end – infinite continuous processes – are conceptualized via this metaphor as if they were infinite iterative processes, processes that iterate without end but in which each iteration has an endpoint and a result. For example, consider infinitely continuous motion, which has no intermediate endpoints and no intermediate locations where the motion stops. Such infinitely continuous motion can be conceptualized metaphorically as iterated motion with intermediate endings to motion and intermediate locations – but with infinitely many iterations.
>
> This metaphor is used in the conceptualization of mathematics to break down continuous processes into infinitely iterating step-by-step processes, in which each step is discrete and minimal. For example, the indefinitely continuous process of reaching a limit is typically conceptualized via this metaphor as an infinite sequence of well-defined steps.

Tak więc, zdaniem autorów, wprowadzanie wszelakich obiektów infinitarnych, granicznych jest motywowane metaforą, która każe „uzupełnić" powtarzalny proces, z nieokreśloną liczbą owych powtórzeń, przez ostateczny wynik takiego procesu. Ten ostateczny wynik to nowy obiekt, mający cechy nieskończoności *aktualnej*. Hipoteza autorów jest następująca (Lakoff, Núñez 2000: 158):

> We hypothesize that all cases of actual infinity – infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds – are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this metaphor the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end – that is, what linguists call imperfective processes. The effect of the BMI is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result – an infinite *thing*.

BMI odnajdujemy, wedle autorów, we wszelkich sytuacjach, gdy dokonujemy w matematyce jakiegoś *przejścia do granicy*, zastosowania jakiejś *zasady domknięcia*, a także gdy korzystamy z zasady *indukcji matematycznej*.

Pomijamy omówienie całego szeregu dalszych konstrukcji przedstawionych w *Where mathematics comes from*. Do niektórych z nich odnosimy się w następnym punkcie, formułując dotyczące ich zastrzeżenia i wątpliwości. Tak samo postąpimy też wobec deklaracji filozoficznych autorów.

3 Uwagi krytyczne

Nasze uwagi krytyczne są dwóch rodzajów. Po pierwsze, staramy się wskazać na konkretne problemy matematyczne, które – jak się zdaje – umykają opisowi proponowanemu przez Lakoffa i Núñeza. Przy okazji, wskazujemy na kilka bałamutnych stwierdzeń w tekście. Po drugie, formułujemy pewne polemiczne uwagi natury filozoficznej. Wreszcie, przytaczamy też niektóre uwagi krytyczne innych autorów.

3.1 Wątpliwości matematyczne

Nasze wątpliwości przedstawimy w formie dość skrótowej, hasłowo jedynie przywołując odnośne zagadnienia. W każdym przypadku możliwa jest, jak sądzimy, głębsza analiza anonsowanego problemu, która pozwoliłaby przesądzić, czy zarzuty są zasadne czy też np. wynikają z naszego niezrozumienia.

3.1.1 Teoria mnogości

Mówiąc o teorii mnogości, autorzy wykorzystują kilka metafor: metaforę *zbiory to pojemniki*, podstawową metaforę nieskończoności oraz kilka dalszych, o mniejszym znaczeniu. Warto może przywołać w tym miejscu znaną anegdotę, ilustrującą poglądy twórców teorii mnogości:

> Dedekind wyraził się odnośnie pojęcia zbioru jak następuje: wyobraża on sobie zbiór jak zamknięty worek, który zawiera zupełnie określone przedmioty; przedmiotów tych jednak nie widzimy i nie wiemy o nich nic, poza tym, że istnieją i są określone. W pewien czas później Cantor sformułował swój pogląd na zbiory: uniósł on swą ogromną figurę, podniesionym ramieniem zatoczył wielki łuk i kierując swój wzrok w nieokreślony punkt powiedział: *ja wyobrażam sobie zbiór, jako przepaść*.

Cytat ten pochodzi z Mostowski 1967. Andrzej Mostowski cytował (w swoim tłumaczeniu) z: Becker, O. 1954. *Grundlagen der Mathematik in Geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg – München, s. 316. Artykuł Mostowskiego ukazał się tuż po uzyskaniu przez Cohena jego znanego wyniku. Warto też może przywołać jeszcze ostrożną predykcję Mostowskiego dotyczącą możliwej przyszłości teorii mnogości (Mostowski 1967, 110–111):

> Istotnym wynikiem, do którego doprowadzają rozważania na temat pojęcia zbioru jest to, że pojęcie to nie jest należycie sprecyzowane i że istnieją różne sposoby uściślania go. Tak np. dzięki Gödlowi rozumiemy dobrze pojęcie zbioru definiowalnego predykatywnie (konstruowalnego), a także pojęcie zbioru definiowalnego za pomocą liczb porządkowych. Modele skonstruowane przez Cohena sugerują możliwość jeszcze innych pojęć, w których znajdą swój wyraz niektóre koncepcje intuicjonistów, a zapewne w przyszłości znajdą się inne jeszcze pojęcia. Być może będziemy operowali w przyszłości różnymi pojęciami zbiorów, podobnie jak dziś operujemy różnymi rodzajami przestrzeni. Przypuszczać należy, że te różne teorie zbiorów będą miały wspólną część, która wystarczy do uzasadnienia podstawowych faktów teorii mnogości potrzebnych do dowodów niezbędnych dla ugruntowania podstawowych pojęć matematycznych. Jak ta wspólna część różnych teorii mnogości ustosunkuje się do zagadnienia wysokich mocy trudno teraz przewidzieć.
>
> O ile naszkicowana wyżej sytuacja powstanie, to teoria mnogości nie będzie oczywiście mogła pretendować do zajmowania centralnego miejsca w matematyce w tym sensie, że każda teoria będzie sprowadzalna do teorii mnogości.
>
> Nie jest wykluczone, że sam Cantor uświadamiał sobie, że pojęcie zbioru nie jest dostatecznie ostro sprecyzowane. Jego osobliwą uwagę, którą zacytowaliśmy na początku artykułu, można interpretować w ten właśnie sposób.

Mija już prawie pół wieku od napisania artykułu Mostowskiego. Teoria mnogości w dalszym ciągu uważana jest za możliwą podstawę formalną matematyki (i to wbrew opinii niektórych z jej twórców – np. Skolema i von Neumanna). „Normalni" matematycy (ci, którzy nie pracują nad podstawami samej teorii mnogości) nie przejmują się zbytnio tym, że aksjomatyka tej teorii podaje jedynie dość mglistą charakterystykę pojęcia zbioru. Chciałoby się rzec, że tacy matematycy godzą się na takie *metaforyczne* wykorzystywanie pojęcia zbioru dla ujmowania coraz to nowych pojęć matematycznych. Czy jednak w takim przypadku istotnie dziedzina wyjściowa (zbiory) jest *bardziej konkretna* od dziedzin docelowych (wszelakie inne dziedziny matematyczne)? Pytanie to łączy się z omawianą przez autorów *Metaforą Redukcji Formalnej* – por. Lakoff, Núñez 2000, 369–376.

Przy omawianiu aksjomatów teorii mnogości autorzy pomijają jeden z nich, a mianowicie aksjomat *zastępowania* (właściwie: schemat aksjomatu zastępowania). Używając języka potocznego, bez szczegółów technicznych, aksjomat ten stwierdza, że obraz zbioru względem funkcji także jest zbiorem. Jest on konieczny np. dla zagwarantowania istnienia liczby kardynalnej $\aleph_\omega$. Jednak ważniejsze jest to, iż to właśnie schemat aksjomatu zastępowania umożliwia wszelkie konstrukcje wykorzystujące *indukcję pozaskończoną* – bez niego nie można poprawnie zdefiniować kroków granicznych w takiej indukcji. A sama technika indukcji pozaskończonej jest fundamentalna dla teorii mnogości. Nie jest dla nas jasne, dlaczego autorzy opuszczają ten problem.

Metafora Boolowska oraz BMI to chyba nie jedyne metafory, których doszukiwać się można w uzasadnianiu konstrukcji z teorii mnogości. Zarówno dla twórców tej teorii (dla Cantora oraz Zermela), jak i dla ich następców, podstawowa była i jest idea *ufundowania*, sprowadzająca się do tego, że zbiory można *dobrze uporządkować*. Ufundowanie zbiorów to rzecz podstawowa dla *iteratywnej* koncepcji tworzenia zbiorów, która jest powszechnie przyjmowana. Istnieją również ujęcia teorii zbiorów bez ufundowania, lecz mają one mniejsze znaczenie w praktyce matematycznej.

3.1.2 Aksjomaty nieskończoności

Wspomniany wyżej schemat aksjomatu zastępowania sam jest swoistym *aksjomatem nieskończoności*. Oprócz niego (i „zwykłego” aksjomatu nieskończoności) rozpatrujemy we współczesnej teorii mnogości olbrzymią różnorodność dalszych aksjomatów nieskończoności (aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych). Motywacje dla tych rozważań są wielorakie, m.in.:

1. Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych wiążą się z tzw. *mocą niesprzeczności* teorii (*consistency strength*) – w teoriach z takimi aksjomatami możemy udowodnić niesprzeczność teorii bez nich. Dla przykładu, aksjomat istnienia liczby mocno nieosiągalnej pozwala udowodnić niesprzeczność teorii mnogości ZF. Tak więc, mamy w tym przypadku do czynienia z motywacją *metateoretyczną*.

2. Argumentacja za przyjmowaniem aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych ma też charakter po części *pragmatyczny*. Daje wyraz przekonaniu – obecnie powszechnie akceptowanemu wśród teoretyków – że chcemy mieć do dyspozycji możliwie największe uniwersum zbiorów. Pisze się nawet o analogii między tymi aksjomatami a aksjomatem *zupełności* w systemie geometrii Hilberta. Wcześniej rozważane tzw. aksjomaty *ograniczenia*, które miały minimalizować uniwersum zbiorów, zostały odrzucone.

3. Duże liczby kardynalne zasługują na badanie dla nich samych. Zdarza się jednak i tak, że ich istnienie jest warunkiem koniecznym dla istnienia rozwiązań konkretnych problemów matematycznych, spoza samej teorii mnogości.

Warto zauważyć, że poglądy na temat aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych ulegały zmianie: Hausdorff uważał, że np. liczby mocno nieosiągalne nie będą miały żadnego znaczenia w praktyce badawczej matematyki, Zermelo postulował już istnienie całej pozaskończonej hierarchii liczb mocno nieosiągalnych, obecnie liczby te są najmniejszymi wśród rozważanych.

Warto też przypomnieć, że istnieje wiele metod, przy pomocy których wprowadzane są coraz to nowe duże liczby kardynalne. Nie jest więc tak, że kolejne „piętra nieskończoności" zdobywamy posługując się wyłącznie opisywaną przez autorów Podstawową Metaforą Nieskończoności. Istnieje na ten temat olbrzymia literatura, zainteresowany czytelnik zechce zajrzeć np. do klasycznej już dziś monografii Kanamori 1994.

Czytelnik *Where mathematics comes from*, który nie zna teorii mnogości może odnieść wrażenie, że kolejne nieskończoności wprowadzane są na mocy aksjomatów: nieskończoności, zbioru potęgowego oraz sumy. Tak oczywiście nie jest. Autorzy ograniczyli się do wspomnienia twierdzenia Cantora (o nierównoliczności zbioru z rodziną wszystkich jego podzbiorów), ale nie wspomnieli, w jaki sposób naprawdę wprowadza się w teorii mnogości skalę alefów.

3.1.3 Metafory Dedekinda

Autorzy wiele piszą o konstrukcji Dedekinda liczb rzeczywistych, przypisując mu posługiwanie się specyficznymi metaforami. Nie za wszystkimi ich argumentami potrafimy nadążyć. Wyliczyliśmy te wątpliwości w Pogonowski 2011. W szczególności, trudna nam się zgodzić, że – jak chcą autorzy – inspiracje Dedekinda były natury geometrycznej. Pozwólmy sobie na przytoczenie fragmentu naszych uwag z Pogonowski 2011:

> 1. Istotnie, Dedekind chciał wyeliminować z mówienia o liczbach rzeczywistych wszelkie intuicyjne odniesienia geometryczne. Na drugim niejako planie wskazywał na możliwość ustalenia wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między skonstruowanymi liczbami rzeczywistymi a punktami prostej rzeczywistej.
> 2. Dedekind podaje dowód, że rodzina wszystkich przekrojów liczb wymiernych, ze stosownie zdefiniowanym porządkiem tych przekrojów ma własność *ciągłości*, w tym sensie, iż porządek ten nie zawiera luk.

3. Dedekind pokazuje, że w zbiorze wszystkich przekrojów liczb wymiernych określić można działania arytmetyczne. Współcześnie dodamy: operacje arytmetyczne zgodne z porządkiem. Liczby rzeczywiste Dedekinda tworzą więc ciało uporządkowane w sposób ciągły.
4. Każde ciało uporządkowane w sposób ciągły jest archimedesowe.
5. Dedekind pokazuje, że liczby wymierne tworzą *ośrodek* w zbiorze liczb rzeczywistych.
6. Gdy rozważymy liczby hiperrzeczywiste ze standardowo definiowanym dla nich porządkiem $(\mathbb{R}^*, <_U)$ (gdzie U jest używanym w konstrukcji ultrafiltrem niegłównym), to można zauważyć, że:
   (a) Rodzina $\mathcal{R}^*$ wszystkich przekrojów zbioru $(\mathbb{R}^*, <_U)$ jest ciągła w sensie Dedekinda.
   (b) Ani $(\mathbb{R}^*, <_U)$ ani rodzina $\mathcal{R}^*$ tych przekrojów nie jest przestrzenią ośrodkową.
   (c) W konsekwencji, żadna z tych struktur nie jest izomorficzna ze standardowo uporządkowanym zbiorem liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$.
   (d) Liczby nieskończenie małe są domknięte na dodawanie i mnożenie (tworzą pierścień). Jednak w zbiorze wszystkich przekrojów struktury $(\mathbb{R}^*, <_U)$ nie można określić działań arytmetycznych tak, aby uzyskać strukturę ciała. Gdy bowiem rozważyć przekrój (A, B) taki, że A to wszystkie ujemne liczby hiperrzeczywiste oraz liczby nieskończenie małe, a B to reszta liczb hiperrzeczywistych, to widać, iż przekrój ten wyznacza lukę. Zgodnie z definicją proponowaną dla przekrojów powinno być:

   $$(A, B) + (A, B) = (A, B)$$

   $$(A, B) \times (A, B) = (A, B),$$

   a więc nie otrzymujemy ani grupy addytywnej ze względu na dodawanie, ani grupy multiplikatywnej ze względu na mnożenie.
   (e) Nauka z tego m.in. taka (por. Błaszczyk 2007, 183, Batóg 2000, 30–31), że uzupełnianie zbioru uporządkowanego

metodą Dedekinda jest w samej swojej istocie *rozszerzaniem ciała* (liczb wymiernych), a nie po prostu „wypełnianiem luk w porządku” nowymi elementami.

7. Dedekind wykonał przede wszystkim pewną (znakomitą!) robotę algebraiczną. Pokazał zarówno metodę konstrukcji pewnej specjalnej struktury arytmetyczno-porządkowej (liczb rzeczywistych właśnie), ale także dał podstawy pod tzw. *metodę uzupełniania Dedekinda*, powszechnie wykorzystywaną w teorii struktur porządkowych, topologii, itd.
8. Dedekind wskazał na możliwość interpretacji *ciągłości* prostej rzeczywistej w terminach arytmetycznych. Przy tym, owa prosta rzeczywista była obiektem dość tajemniczym – w systemie geometrii Euklidesa nie występują proste (są jedynie odcinki, które można dowolnie przedłużać). Jeśli więc mówić o jakiejś metaforze Dedekinda, to należałoby chyba odnosić ją do ukazanej przezeń odpowiedniości pomiędzy zdefiniowanymi przez niego (z uwzględnieniem własności arytmetycznych i porządkowych) liczbami rzeczywistymi a wielkościami geometrycznymi wiązanymi tradycyjnie z odcinkami.
9. Dedekind operował *zbiorami* oraz *liczbami wymiernymi* (oraz porządkiem i operacjami arytmetycznymi na nich), lecz nie dysponował jeszcze ani teorią zbiorów (tej dostarczył później Cantor, a w postaci aksjomatycznej ugruntował Zermelo), ani teorią liczb wymiernych (tę z kolei podał Weber). Teorię liczb wymiernych wreszcie oprzeć można było na aksjomatycznej teorii liczb naturalnych, którą opracował Peano.
10. Na marginesie dodajmy jeszcze, że aksjomat ciągłości jest niezależny od aksjomatów geometrii absolutnej. Istnieją modele tej geometrii, w których aksjomat ten nie zachodzi.

Tak więc, proste metafory przekroju (geometryczna i arytmetyczna, w terminologii autorów) to jeszcze nie wszystko, jeśli chodzi o *analizę idei matematycznych* związanych z konstrukcją Dedekinda. Wnikliwą analizę konstrukcji Dedekinda, wraz z wieloma odniesieniami do innych konstrukcji liczb rzeczywistych zawiera monografia Błaszczyk 2007. Niezwykle interesujące uwagi dotyczące rozumienia pojęcia ciągłości w matematyce znajdujemy np. w Mioduszewski 1996.

3.1.4 Podstawowa Metafora Nieskończoności

Pozwolimy sobie nieco żartobliwie odnieść się do jednego z aspektów ulubionej metafory autorów, a mianowicie *Podstawowej Metafory Nieskończoności* (BMI). Otóż piszą oni, że obiekt graniczny, który tworzymy w wyniku stosowania tej metafory jest zawsze wyznaczony jednoznacznie. W artykule Núñez 2005 na stronie 1772 znajdujemy rysunek przedstawiający początek nieskończonego ciągu wielokątów foremnych, którego „obiektem granicznym" miałby być okrąg, jako „wielokąt o nieskończenie wielu bokach nieskończenie małej długości". Podpis pod rysunkiem głosi:

> A case of actual infinity: the sequence of regular polygons with n sides, starting with $n = 3$ (assuming that the distance from the center to any of the vertices is constant). The sequence is endless but it is conceived as being completed. The final resultant state is a very peculiar entity, namely, a circle conceived as a polygon with infinitely many sides of infinitely small magnitude.

Nasza żartobliwa wątpliwość jest następująca: dlaczego to właśnie okrąg miałby być obiektem granicznym w tym przypadku, a nie np. zbiór wszystkich punktów okręgu o współrzędnych *wymiernych*? Ten pierwszy ma moc kontinuum, ten drugi jest przeliczalny. Ponadto, ten drugi ma bardzo ładną strukturę algebraiczną oraz interpretację geometryczną – zob. np. Tan 1996. Warto może przy tej okazji dodać, że badanie punktów (np. punktów wymiernych) na krzywych algebraicznych to niezwykle ważna dziedzina działalności matematyków. Wiąże się z nią np. spektakularny dowód Wilesa twierdzenia Fermata, twierdzenie Mordella-Weila, a wiele problemów w dalszym ciągu czeka na rozwiązanie.

Innym jeszcze kandydatem na obiekt graniczny w rozważanym tutaj przypadku mógłby być, jak sądzimy, zbiór wszystkich punktów okręgu o współrzędnych będących liczbami algebraicznymi. Można – zasadnie chyba – pytać o jeszcze inne zbiory: np. wszystkich punktów okręgu o współrzędnych będących liczbami *obliczalnymi* lub *definiowalnymi* – w każdym z tych przypadków „obiekt graniczny" rozważanej konstrukcji nie ma kontinuum elementów. Nieco przekornie możemy zatem zapytać, dlaczego Núñez „przeskakuje" nieskończoność przeliczalną w swojej metaforze i ląduje w kontinuum punktów okręgu. Ponadto, widać wyraźnie z podanych przykładów, że jednoznaczność owego „obiektu granicznego" okazuje się pozorna – można za taki obiekt uważać różne konstrukcje.

W matematyce rozważamy zarówno struktury, które zawierają ciągi elementów wraz ze swoimi obiektami granicznymi (w sensie porządkowym lub topologicznym), jak też struktury, które złożone są z ciągów nieskończonych, ale nie zawierające granic owych ciągów. Nie jest chyba tak, że *zawsze* czujemy się zmuszeni, kierując się BMI, uzupełniać te ostatnie struktury o elementy graniczne.

3.1.5 Przykłady topologiczne

Topologia jest stosunkowo młodą dyscypliną matematyczną (w porównaniu np. z arytmetyką czy analizą). Jednak już w topologii ogólnej znajdujemy konstrukcje, które daleko odbiegają od wszelkich intuicyjnych wyobrażeń doświadczenia potocznego, a więc można spodziewać się, że autorzy *Where mathematics comes from* mieliby trudności ze znajdowaniem w każdym z tych przypadków stosownych metafor, odpowiedzialnych za tworzenie pojęć. Rzeczy stają się jeszcze bardziej skomplikowane w przypadku nowszych działów topologii – np. topologii algebraicznej lub różniczkowej. Dla przykładu, musimy się pożegnać z intuicjami potocznymi przy rozważaniu takich obiektów jak (a to jedynie najprostsze, klasyczne przykłady):

1. sfera rogata Alexandera,
2. jeziora Wada,
3. krzywa Knastera.

Konstrukcje topologiczne mogą dotyczyć obiektów całkiem „oswojonych”, dobrze rozpoznawanych przez intuicje potoczne, ale mogą jednocześnie nie tylko wykraczać poza te intuicje, ale wręcz im dramatycznie przeczyć. Ładnym przykładem jest twierdzenie Smale'a o „przenicowaniu sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Posługujemy się w nim dobrze znanym obiektem (sferą dwuwymiarową) oraz bardzo intuicyjną techniką (homotopijna równoważność), ale otrzymany wynik jest szokujący z punktu widzenia doświadczenia potocznego. I jak tu metaforyzować?

Sądzimy, że trudności w proponowanej przez autorów „redukcji metaforycznej” sprawiać mogą też np. tzw. *egzotyczne* struktury różniczkowe. Udowodniono, że istnieją *sfery egzotyczne*, czyli sfery, które są homeomorficzne ze zwykłymi sferami, lecz nie są z nimi dyfeomorficzne. Fakt ten ukazuje, że poddać trzeba rewizji nasze intuicyjne przekonania dotyczące struktur różniczkowych, a co najmniej wyzbyć się musimy przekonania, że struktury takie muszą być jednoznaczne. Dodajmy, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ istnieje kontinuum niedyfeomorficznych struktur różniczkowych. Wymiar 4 jest tu wyróżniony: dla żadnej $n \neq 4$ nie istnieją struktury egzotyczne na $\mathbb{R}^n$. Nie wiadomo natomiast obecnie (2012), czy istnieją egzotyczne sfery czterowymiarowe. Jeśli mielibyśmy stosować jakieś metafory w charakterystyce struktur egzotycznych, to musiałyby one zapewne być jakościowo istotnie różne od „zwykłych” metafor, tych euklidesowych czy kartezjańskich.

Inny jeszcze problem topologiczny może jawić się jako trudność dla autorów omawianej koncepcji. Chodzi mianowicie o problem trudny dla samych topologów – należyte scharakteryzowanie pojęcia *wymiaru topologicznego*. Nie chodzi przy tym o to, że brak takiej charakterystyki. Jednak trzy dobrze opracowane pojęcia wymiaru (mały i duży wymiar indukcyjny oraz wymiar pokryciowy) pokrywają się ze sobą w przypadku ośrodkowych przestrzeni metrycznych, natomiast rozchodzą się w szerszych klasach przestrzeni. Czy sensowne jest zatem pytanie, które z tych pojęć jest *trafne*? „Rekonstrukcja metaforyczna”, w stylu proponowanym przez autorów, powinna jakoś odzwierciedlać te problemy związane z poszukiwaniem definicji pojęcia wymiaru w topologii. Nie mówiąc już o tym, że powinna zmierzyć się także z całą plejadą innych jeszcze rozumień pojęcia wymiaru, stosowanych w topologii, analizie funkcjonalnej, algebrze liniowej, geometrii różniczkowej. Wspomnijmy wreszcie na koniec, że kłopoty dla „metaforycznego rozumienia” stwarza wymiar iloczynu topologicznego przestrzeni. Chciałoby się zapewne uznać, że wymiar iloczynu topologicznego przestrzeni jest sumą wymiarów mnożonych przez siebie przestrzeni (np. walec jest wymiaru trzy, jako iloczyn koła o wymiarze dwa i odcinka o wymiarze jeden, torus jest wymiaru dwa jako iloczyn dwóch jednowymiarowych okręgów, itp.). Pontriagin podał jednak w 1930 roku przykład ukazujący, że zależność takiego logarytmicznego typu nie zachodzi w ogólności: skonstruował przestrzenie dwuwymiarowe, których iloczyn okazał się trójwymiarowy. Ten przykład – i niezliczone mnóstwo innych – pokazuje, że konstrukcje pewnych obiektów matematycznych umykają jednak procedurze metaforyzowania odwołującej się jedynie do wyobrażeń doświadczenia potocznego.

We współczesnych podręcznikach analizy lub topologii podaje się całe mnóstwo dalszych konstrukcji, które są kontrprzykładami, ukazującymi ograniczoną stosowalność pewnych pojęć, niezachodzenie niektórych twierdzeń dla szczególnych przypadków, itd. – por. też np. Gelmbaum, Olmsted 1990, 2003, Steen, Seebach 1995, Wise, Hall 1993.

3.1.6 Elementy idealne

Autorzy starają się ukazać BMI „w działaniu” na różnych obszarach matematyki. Na podstawie tej metafory rozumiane ma być wprowadzanie *punktów w nieskończoności*: w przypadku geometrii *rzutowej* chodzi o całą *prostą w nieskończoności*, złożoną z takich punktów, natomiast w przypadku geometrii *inwersji* o jeden punkt w nieskończoności. Autorzy wyraźnie podkreślają, że czym innym są tu definicje matematyczne tych obiektów, a czym innym sama ich konceptualizacja. Z matematycznego punktu widzenia geometria inwersji wyznaczona jest przez odwzorowania, których niezmiennikami są *uogólnione okręgi*. Z kolei w geometrii rzutowej niezmiennikami przekształceń rzutowych są własności incydencji oraz dwustosunek czwórki punktów.

Warto może zwrócić uwagę na to, że wprowadzanie punktów i prostych w nieskończoności może zostać ujęte z nieco ogólniejszego punktu widzenia – jako dołączanie do rozważanego uniwersum pewnych *elementów idealnych*, w celu uzyskania struktury o pożądanych, z różnych względów, własnościach matematycznych. Oto co pisał na ten temat David Hilbert (Hilbert 1926):

> Całkiem inne, jedyne w swoim rodzaju znaczenie i zasadnicze ujęcie pojęcia nieskończoności poznajemy za pomocą ze wszech miar ważnej i owocnej metody *elementów idealnych*. Znajduje ona zastosowanie już w elementarnej geometrii płaszczyzny. W geometrii tej punkty i proste są pierwotnie jedynymi rzeczywistymi i realnie istniejącymi obiektami. Obowiązuje dla nich m.in. aksjomat incydencji (das Axiom der Verknüpfung): przez dwa punkty przechodzi zawsze jedna i tylko jedna prosta. Stąd wynika wniosek, że dwie proste przecinają się co najwyżej w jednym punkcie. Nie zachodzi jednak twierdzenie, że dwie proste przecinają się zawsze w jednym punkcie; dwie proste mogą być do siebie równoległe. Wiadomo jednak, że poprzez wprowadzenie elementów idealnych, mianowicie punktów i prostych w nieskończoności (unendlich ferne Punkte und unendlich ferne Gerade) można uzyskać to, że twierdzenie, według którego dwie proste przecinają się zawsze w jednym i tylko jednym punkcie, będzie obowiązywać w całej ogólności.
>
> Idealne elementy „w nieskończoności" (die idealen „unendlichfernen" Elemente) dają tę korzyść, że czynią system twierdzeń o incydencji (Verknüpfungsgesetze) prostym i przejrzystym, tak jak to tylko jest możliwe. Ze względu na symetrię pomiędzy punktami i prostymi powstaje, jak wiadomo, tak owocna zasada dualności w geometrii.
>
> Zwykłe wielkości *zespolone-urojone* (*komplex-imaginäre Grössa*) w algebrze są także przykładem użycia elementów idealnych; służą one tu do uproszczenia twierdzeń o istnieniu i liczbie pierwiastków równania.
>
> Tak jak w geometrii używa się nieskończenie wielu prostych, mianowicie równoległych do siebie, do definicji jednego punktu idealnego, tak też w arytmetyce wyższej pewne systemy nieskończenie wielu liczb zostają ujęte razem w postaci jednego *ideału liczbowego* (Zahlenideal) i ma tu miejsce najgenialniejsze zastosowanie zasady elementów idealnych. [Tu przypis Romana Murawskiego: Hilbert ma tu na myśli teorię Kummera-Dedekinda. Otóż w drugiej połowie XIX w.

> w związku z badaniami nad wielkim twierdzeniem Fermata (i ogólnie nad kwestią rozwiązalności równań diofantycznych, czyli równań postaci
>
> $$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
>
> gdzie f i g są wielomianami o współczynnikach całkowitych) stworzono pewne metody badania równań diofantycznych, opierające się na twierdzeniu, że w odpowiednim pierścieniu każdy ideał rozkłada się jednoznacznie na iloczyn ideałów pierwszych (zwanych w klasycznej wersji liczbami idealnymi). Doprowadziło to do wyróżnienia pewnej szerokiej klasy pierścieni, zwanych pierścieniami Dedekinda, która odgrywa dziś bardzo istotną rolę w algebrze i w teorii liczb.] Jeżeli stosujemy zasadę tę systematycznie wewnątrz pewnego algebraicznego ciała liczbowego, to odnajdziemy w nim proste i dobrze znane twierdzenia o podzielności, jakie zachodzą dla zwykłych liczb całkowitych 1, 2, 3,. . .

Przywołujemy ten cytat dla ukazania, że czym innym jest metaforyczna eksplikacja jakiejś konstrukcji pojęciowej, a czymś zgoła innym powody, motywacje, inspiracje, itp. dla których owa konstrukcja dokonywana jest w matematyce.

Wspomnijmy przy okazji, że ciekawie o użyciu metafor w przypadku rekonstrukcji początków geometrii algebraicznej traktuje praca Aubry 2009.

3.1.7 Akty przekory

Matematyka jest twórczością swobodną, co z zadowoleniem podkreśla wielu wybitnych matematyków. Oczywiście obowiązują w tej twórczości pewne ograniczenia, np. wymóg niesprzeczności. Osobnym problemem, wymagającym badań empirycznych jest to, czy – a jeśli tak, to jak – twórczość ta ograniczona (uwarunkowana) jest ludzkimi strukturami poznawczymi. Proponując swoją teorię funkcjonowania metafor pojęciowych Lakoffa i Núñez chcą zwrócić uwagę na takie właśnie uwarunkowania. Pozwolimy sobie – nie do końca poważnie – wskazać na jeden z aspektów owej swobody w twórczości matematycznej, a mianowicie akty *przekory*. W Pogonowski 2011 podaliśmy parę przykładów takich przekornych działań w matematyce:

1. *Algebra*. Wiadomo z historii algebry, że np. liczby ujemne oraz urojone przyjmowane były z wielkimi początkowo oporami – dość długo trwało, zanim uznane one zostały za byty matematyczne prawomocnie istniejące. Do tego uznania przyczyniły się w pierwszym względzie chyba ustalenia, że liczby całkowite oraz

liczby zespolone tworzą *dobrze zachowujące się* struktury – w pierwszym przypadku pierścień, w drugim ciało, w dzisiejszej terminologii. W oswajaniu ich widzimy jednak również pewien odcień *przekory* właśnie – dopuśćmy istnienie nowych bytów matematycznych, choć konserwatywna wspólnota matematyków dotąd się przed nimi wzbraniała.

2. *Geometria*. Stworzenie geometrii *nieeuklidesowych* wymagało zaiste wielkiego aktu *przekory*. Z jednej strony, skoro wysiłki zmierzające do udowodnienia aksjomatu o równoległych nie przynosiły efektu, to niejako naturalne było przypuszczenie, że aksjomatu tego nie da się właśnie wyprowadzić z pozostałych. Ale samo rozważenie (jednej z dwóch wersji) jego zaprzeczenia było *przekorne*, przy powszechnym przecież ówcześnie przekonaniu, iż geometria ma *prawdziwie* opisywać rzeczywistość fizyczną.

3. *Teoria mnogości*. Jedna z metod tworzenia nowych zbiorów nieskończonych jest – wedle Andrzeja Mostowskiego – następująca. Przypuśćmy, że konstruując zbiory za pomocą operacji opisanych w aksjomatach teorii mnogości, które przyjęliśmy dotychczas, napotykamy stale na zbiory o pewnej własności P. Jeśli nie ma oczywistych powodów, które skłaniałyby nas do przyjęcia twierdzenia, że każdy zbiór ma własność P, to przyjmujemy nowy aksjomat, stwierdzający, że istnieją zbiory właśnie *nie* posiadające własności P. W ten sposób otrzymujemy np. liczby *mierzalne*.

Można oczywiście nie brać poważnie naszej propozycji uważania matematyków za przekornych z natury. Pozostają jednak do opisania związki między tworzeniem pojęć na drodze metaforycznej a takimi ważnymi procedurami matematycznymi jak np. *uogólnianie* bądź konstrukcje motywowane rozumowaniami przez *analogię*.

3.1.8 Zdania nierozstrzygalne

O ile dobrze pamiętamy tekst *Where mathematics comes from*, to nigdzie nie znajdujemy w nim deklaracji, iż stosowanie metafor pojęciowych wymusza jakiś czysto kumulatywny, bez „rozwidleń” proces narastania wiedzy matematycznej. Autorzy wykorzystują nawet fakt istnienia różnych geometrii, różnych teorii mnogości, itd. do argumentacji przeciw istnieniu matematyki rozumianej po Platońsku. Nie poświęcają jednak uwagi odkryciu istnienia *zdań nierozstrzygalnych* w bogatszych teoriach matematycznych. A jest to przecież okoliczność wielce znacząca dla podstaw matematyki, nawet jeśli „normalni" matematycy (ci, którzy nie zajmują się zawodowo logiką matematyczną lub teorią mnogości) poświęcają temu zagadnieniu znikomą uwagę. Inaczej zresztą rzecz ma się z informatykami, dla których problemy nierozstrzygalności teorii nie mogą być zbywane lekceważeniem.

Tak podstawowe teorie matematyczne jak arytmetyka i teoria mnogości są *istotnie nierozstrzygalne* (czyli są nierozstrzygalne i żadne ich niesprzeczne rekurencyjne rozszerzenie też nie jest rozstrzygalne). Odkrycie tych faktów rzuciło nowe światło na rozumienie związków między *dowodem* a *prawdą* w matematyce.

Sądzimy, że brak zainteresowania autorów zagadnieniami nierozstrzygalności nie jest przypadkowy: objaśnianie matematyki poprzez metafory pojęciowe w najmniejszym stopniu nie umożliwia żadnych decyzji w kwestii akceptacji bądź odrzucenia zdań nierozstrzygalnych. Jeśli jakieś tego typu decyzje zostaną podjęte, to przesądzi o tym, jak sądzimy, *praktyka badawcza* matematyki, a to potrwać może dziesiątki albo i setki lat. Pamiętajmy, że np. do precyzyjnej postaci teorii liczb rzeczywistych dochodzono przez dwa tysiące lat. Odkrycie zdań nierozstrzygalnych jest stosunkowo nowe, liczy sobie zaledwie kilkadziesiąt lat.

Warto przypomnieć, że znamy obecnie całe mnóstwo zdań nierozstrzygalnych o treści czysto matematycznej (a nie tylko „sztucznej" treści metamatematycznej). To ukazuje, że problemy nierozstrzygalności są jakoś bardzo głęboko obecne w tworzywie matematyki, a nie są jedynie wynikiem formalnych filozoficznych spekulacji. Trudno nam uwierzyć, że „trzecia droga" – czyli objaśnianie matematyki przez metafory pojęciowe (bez odwoływania się do dowodu i prawdy) – pozwoli dokonać znaczących ustaleń w sprawie zdań nierozstrzygalnych. Oto niektóre przykłady zdań niezależnych:

- CH i GCH. Kontinuum może przyjmować prawie dowolną wartość: $\aleph_1$, $\aleph_{2010}$, itd. Automatycznie dostajemy więc nieskończoną wielość zdań niezależnych od aksjomatów teorii mnogości.

- Ani aksjomatu konstruowalności, ani jego zaprzeczenia nie można udowodnić w ZFC.

- AD, czyli aksjomat determinacji (o nim za chwilę). AD jest sprzeczny z aksjomatem wyboru.

- *Drzewo Suslina* to drzewo o wysokości $\aleph_1$, w którym zarówno wszystkie łańcuchy, jak i antyłańcuchy są przeliczalne. *Hipoteza Suslina* SH głosi, że *nie istnieje drzewo Suslina*. Aksjomat konstruowalności implikuje zaprzeczenie SH. Hipotezę SH można też sformułować tak: każdy porządek liniowy bez elementu pierwszego i ostatniego, w którym topologia porządkowa jest spójna i spełnia warunek ccc (przeliczalnych antyłańcuchów) jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych z ich naturalnym porządkiem.

- *Aksjomat Martina MA. Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym o własności ccc (przeliczalnych antyłańcuchów), a G rodziną gęstych podzbiorów zbioru P o mocy mniejszej od $2^{\aleph_0}$. Wtedy istnieje filtr $F \subseteq P$, który ma niepusty przekrój z każdym zbiorem z G.* Hipoteza kontinuum implikuje MA. Podczas gdy CH implikuje, że jedyną nieskończoną liczbą kardynalną mniejszą od $2^{\aleph_0}$ jest $\aleph_0$, to MA implikuje, że każda nieskończona liczba kardynalna mniejsza od $2^{\aleph_0}$ jest w pewnym sensie podobna do $\aleph_0$. Konsekwencją MA oraz zaprzeczenia CH jest np. to, że $2^{\aleph_0}$ jest regularną liczbą kardynalną, a także SH; połączenie MA i $\neg CH$ ma też wiele ciekawych konsekwencji topologicznych.

- *Drzewa Kurepy*. Niech κ będzie regularną liczbą kardynalną nieskończoną. Przez κ-drzewo rozumiemy drzewo o wysokości κ, którego każdy α-ty poziom ma moc mniejszą od κ, dla wszystkich $\alpha < \kappa$. Jak wiadomo (twierdzenie Königa), każde ω-drzewo ma gałąź nieskończoną. Istnieje $\aleph_1$-drzewo, którego wszystkie gałęzie są przeliczalne (takie drzewa nazywamy *drzewami Aronszajna*). Drzewo Aronszajna jest *specjalne*, gdy jest sumą przeliczalnie wielu antyłańcuchów. Z MA oraz zaprzeczenia CH wynika, że każde drzewo Aronszajna jest specjalne. *Drzewem Kurepy* nazywamy $\aleph_1$-drzewo, które ma więcej niż $\aleph_2$ gałęzi nieprzeliczalnych. *Hipoteza Kurepy* KH to zdanie stwierdzające, że *istnieją drzewa Kurepy*. Hipoteza Kurepy jest spełniona w uniwersum konstruowalnym L. Jeśli niesprzeczna jest ZFC wraz z aksjomatem istnienia liczb nieosiągalnych, to niesprzeczna jest ZFC wraz z zaprzeczeniem KH.

- *Diament Jensena*. Niech κ będzie nieprzeliczalną regularną liczbą kardynalną. Zbiór C jest *stacjonarnym* podzbiorem κ, jeśli $C \cap S \neq \emptyset$ dla każdego domkniętego (w topologii porządkowej na κ) nieograniczonego zbioru $S \subseteq \kappa$. Przez *diament Jensena* $\diamondsuit$ rozumiemy następujące zdanie:

  Istnieje ciąg $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taki, że:

  1. $A_\alpha \subseteq \alpha$ dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$
  2. Dla każdego zbioru $A \subseteq \omega_1$ zbiór $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ jest stacjonarny.

  Jeśli ZFC jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest także ZFC+GCH+$\neg\diamondsuit$. Diament $\diamondsuit$ implikuje CH. Jeśli zachodzi $\diamondsuit$, to istnieje $\aleph_1$-drzewo Suslina. Wzmocnieniem diamentu Jensena jest następujący warunek $\diamondsuit^+$:

Istnieje ciąg $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taki, że:

1. Dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$ zbiór $\mathcal{A}_\alpha$ jest przeliczalną rodziną podzbiorów α.
2. Dla każdego zbioru $A \subseteq \omega_1$ istnieje domknięty i nieograniczony zbiór $C \subseteq \omega_1$ taki, że dla wszystkich $\alpha \in C$ zarówno $A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, jak i $C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$.

Warunek $\diamondsuit^+$ implikuje warunek $\diamondsuit$. Aksjomat konstruowalności implikuje $\diamondsuit^+$. Jeśli $\diamondsuit^+$ zachodzi, to istnieje ω_1-drzewo Kurepy (które ma 2^{ω_1} gałęzi o długości ω_1).

Być może, fakt istnienia zdań nierozstrzygalnych wspiera tezę *agnostycyzmu matematycznego*, o której piszemy w jednym z dalszych punktów. Matematykę budujemy na dowodach i jest ona (nasza, ludzka matematyka) jaka jest. Odkrywamy zdania nierozstrzygalne i możemy fantazjować, że w świecie Platońskich idei matematycznych rzeczy są ustalone i zachodzi np. hipoteza kontinuum. Albo że w istocie mamy do czynienia, na wzór wszechświatów Everetta, z Platońskim *multiświatem*, w którym – w poszczególnych jego rozgałęzieniach – realizują się wszelkie możliwe odpowiedzi na pytanie o hipotezę kontinuum. Spekulacje takie są, mniemamy, całkowicie niegroźne – nie widzimy podstaw ku temu, aby sądzić, że wiara (bądź niewiara) w istnienie uniwersum Platońskiego hamowała lub przyspieszała rozwój matematyki.

3.1.9 Opisywanie i definiowanie

Jak tworzenie metafor pojęciowych ma się do dwóch ważnych procedur matematycznych: *opisywania* oraz *definiowania*? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że wszystkie rozważane przez autorów konstrukcje są swoistymi *definicjami*.

Odróżniając opisywanie od definiowania mamy na myśli przede wszystkim różne w obu przypadkach możliwości dostępu poznawczego do obiektów matematycznych. Oczywiście jedna i druga procedura wymaga korzystania z jakichś ustalonych środków językowych. Jeśli rozumiemy języki jako wyznaczone przez skończony (lub przeliczalnie nieskończony) zestaw symboli wraz z rekurencyjnymi regułami składniowymi, to siłą rzeczy musimy uznać, że nie do wszystkich obiektów matematycznych mamy w ogóle dostęp językowy. W przypadku np. rodziny wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego jedynie przeliczalnie wiele jej elementów może zostać nazwanych w tak rozumianych językach. Tak więc, prawie wszystkie elementy tej rodziny pozostają niedostępne językowo. W przypadku liczb porządkowych również jedynie przeliczalnie wiele z nich może być opisywanych w sposób efektywny, za pomocą różnych specjalnie w tym celu stworzonych systemów notacji. Wszystkie liczby porządkowe do których mamy taki dostęp (liczby rekurencyjne) są przeliczalne i mniejsze od (przeliczalnej) liczby ω_1^{CK}. Powyżej tej liczby możemy jedynie *definiować* większe liczby porządkowe.

Już odróżnienie mocy *przeliczalnych* od *nieprzeliczalnych* zdaje się stwarzać wyzwanie dla BMI, Podstawowej Metafory Nieskończoności, tak hołubionej przez autorów. Uznajmy, że działa ona dobrze w przypadku zbiorów przeliczalnych. Postać normalna Cantora dla liczb porządkowych pozwala – zgódźmy się i na to – na manipulowanie metaforami arytmetyczno-algebraicznymi dla liczb porządkowych. Terminu „manipulowanie" użyliśmy tu celowo, gdyż nie tylko nieprzeliczalne liczby porządkowe, ale także pewne duże przeliczalne takie liczby pozostają niejako poza zasięgiem mocy dowodowych niektórych teorii matematycznych.

Zbiór liczb porządkowych mniejszych od ϵ_0 jest domknięty na operacje następnika, sumy, mnożenia i potęgowania liczb porządkowych. Liczba ϵ_0 wiąże się, jak wiadomo, z możliwościami dowodowymi arytmetyki Peana (pierwszego rzędu). Bada się liczby porządkowe związane z możliwościami dowodowymi innych teorii. Bada się tzw. *hierarchie szybko rosnących funkcji* (Veblena, Wainera, itd.). Być może nasza ocena jest mylna i naiwna, ale sądzimy, że dla *rozumienia* tych zagadnień nie można dojść ograniczając się jedynie do BMI, Podstawowej Metafory Nieskończoności. Trzeba chyba raczej *zrozumieć reguły operowania wielkościami pozaskończonymi* po prostu wyznaczone przez ich teorię – nie ma tutaj *drogi na skróty*.

Może warto w tym kontekście przypomnieć, że definiowanie kolejnych liczb nieskończonych w teorii mnogości wykorzystuje fakt dobrego uporządkowania klasy wszystkich liczb porządkowych. Tak więc, to raczej te założenia, które pozwalają konstruować klasę wszystkich liczb porządkowych oraz prowadzić definicje przez indukcję pozaskończoną, co najmniej tak samo jak BMI powinny zostać jakoś wykorzystane przez autorów *Where mathematics comes from* w ich próbie metaforycznego opisywania hierarchii nieskończoności.

Całkiem osobny problem dla koncepcji ucieleśnionej matematyki stwarzają te sytuacje, gdy potrafimy *udowodnić*, że jakiś obiekt matematyczny *nie jest definiowalny* (w ustalonym języku). Dla przykładu, zbiór (numerów Gödlowskich) wszystkich zdań prawdziwych w standardowym modelu arytmetyki Peana nie jest w tej arytmetyce definiowalny. Czy można do niego „dotrzeć" jakąś metaforą ucieleśnionej matematyki?

3.1.10 Dynamika intuicji

Intuicje doświadczenia potocznego są dość stabilne, co jest okolicznością sprzyjającą rozważaniom Lakoffa i Núñeza. Inaczej rzecz ma się z intuicjami matematycznymi – mają one charakter o wiele bardziej dynamiczny. Zasadne jest oczywiście pytanie o przyczyny takich zmian. Wskazać można, jak sądzimy, kilka rodzajów takich przyczyn:

1. *Antynomie*. Konieczność usunięcia sprzeczności z tworzonej koncepcji matematycznej jest dla każdego oczywista. Eliminacja antynomii wymaga zmiany założeń wyjściowych, a co za tym idzie także zmiany rozumienia badanych pojęć. Usuwając np. antynomię Russella z teorii mnogości (poprzez stosowne przeformułowanie aksjomatu wyróżniania) proponujemy w istocie całkiem *nowe* rozumienie pojęcia *zbiór*.

2. *Paradoksy*. Również w przypadku paradoksów, gdy staramy się poddawać je eksplikacji (gdy usiłujemy „rozwiązać" paradoks) oczekiwać musimy konieczności dokonania zmian w naszych intuicyjnych przekonaniach. Tu jednak sytuacja wygląda nieco inaczej niż w przypadku antynomii. Może być bowiem tak, że dzięki zmianie sposobu rozumienia jakiegoś pojęcia uzyskujemy rozwiązanie paradoksu, ale może się również zdarzyć, że zmiana taka jest niemożliwa, że musimy dokonać swoistego rodzaju „rozszczepienia" naszych intuicji. Pod pierwszy przypadek podpadają chyba zauważane od dawna *paradoksy nieskończoności*, jako kłócące się z euklidesowym przekonaniem, iż część musi zawsze być jakoś „mniejsza" od całości. Przyjęcie definicji Dedekinda zbioru nieskończonego (zbiór jest nieskończony dokładnie wtedy, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym) rozwiązuje te paradoksy, za cenę przyjęcia takiej właśnie intuicji kojarzonej ze zbiorami nieskończonymi. Ilustracji dla drugiego z omawianych przypadków dostarcza choćby *paradoks Banacha-Tarskiego*. Nie możemy odrzucić twierdzenia Banacha-Tarskiego, nawet jeśli boleśnie narusza ono nasze intuicje doświadczenia potocznego. Musimy natomiast przyznać, że intuicje te nie mają zastosowania w przypadku zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a, a także przyznać, że aksjomat wyboru stosowany do zbiorów nieskończonych sprawić może niespodziankę intuicjom potocznym (jeśli życzliwie uznamy, że napotykanie zbiorów nieskończonych należy do doświadczenia potocznego).

3. *Programy badawcze*. W tych przypadkach zmian intuicji dokonujemy świadomie, celowo. Postanawiamy, że od danego momentu jakaś sfera działalności matematycznej ma być badana takimi, a nie innymi środkami, pozbywszy się np. balastu zapożyczeń z innych dyscyplin, jeśli chodzi o rozumienie pojęć. Tak rzecz się miała z arytmetyzacją analizy w wieku XIX – pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego miały odtąd być wyrażane jedynie w terminach arytmetycznych, bez odwołań do ruchu, zmiany, geometrii. Można

uznać, że jest to program zakończony sukcesem, choć oczywiście w dalszym ciągu możemy pytać o alternatywne opisy kontinuum (np. w terminach analizy niestandardowej lub innych, całkiem nowych). Może też zdarzyć się tak, że w trakcie realizacji programu badawczego okazuje się on nierealny lub możliwy do wykonania jedynie częściowo. Taki był los programu Hilberta – znane twierdzenia metalogiczne (o niezupełności, o niedowodliwości niesprzeczności systemu w nim samym) ukazały, że wyjściowy program zrealizowany może zostać jedynie częściowo.

4. *Nowe wyniki matematyczne*. Nasze intuicyjne przekonania zmieniają się rzecz jasna w trakcie poszerzania naszej wiedzy matematycznej. Dla przykładu, do wyników Ruffiniego i Abela wierzono, że każde równanie algebraiczne posiada rozwiązanie dane przez pierwiastniki, dopiero wspomniane wyniki ukazały brak w ogólności istnienia tego typu rozwiązań dla równań stopnia wyższego od czterech. Tym samym, zmianie uległo – przynajmniej w jakimś aspekcie – rozumienie pojęcia *rozwiązanie równania algebraicznego*. Tego typu przykłady mnożyć można nieograniczenie – każde nowe istotne twierdzenie matematyczne jakoś na nowo kształtuje intuicje dotyczące występujących w nim pojęć oraz rozumienie przeprowadzanych konstrukcji.

5. *Wartości estetyczne*. Podkreślania przez wielu matematyków, iż najważniejszą motywacją dla uprawiania ich twórczości są walory estetyczne matematyki nie należy traktować jedynie jako oznak przechwalania się lub dawania świadectwa tego, co należy do *dobrego tonu* w matematyce. Nigdy nie zdarzyło nam się spotkać matematyka, który zaprzeczałby istnieniu inspiracji estetycznych w jego działalności. Jeśli jednak traktujemy te wypowiedzi poważnie, to – chcąc stosować skutecznie teorię metafor poznawczych – musimy jakoś te wartościowania uwzględnić w rekonstrukcjach metaforycznych. Być może koncepcja ucieleśnionej matematyki wypracowała już jakieś metody przydatne w tym względzie, nie znamy jednak żadnych prac na ten temat.

6. *Moda matematyczna*. To czynnik, którego nie należy chyba lekceważyć. To, które badania są akurat modne w danym okresie widać chociażby z listy przyznawanych nagród matematycznych. Problemy Hilberta w znaczącym stopniu ukształtowały ogromne połacie matematyki XX wieku. Kwaterniony były „bardzo modne" pod koniec wieku XIX, później traktowano je jako jedynie ciekawostkę algebraiczną, a współcześnie okazuje się, że struktury algebraiczne różne od – jakże szacownych klasycznych ciał liczb rzeczywistych i zespolonych – mają bardzo istotne zastosowania np. w fizyce. Jedną z największych karier w matematyce zrobiła teoria grup – narzucono wręcz

określony sposób ujmowania i rozumienia problemów na modłę algebraiczną.

Być może koncepcja ucieleśnionej matematyki będzie próbowała jakoś poradzić sobie z problemami zmienności intuicji matematycznych. Na razie autorzy omawianej książki odnieśli się do przypadków zmienności intuicji będących skutkiem realizacji programów badawczych – pisząc o metaforach Dedekinda oraz Weierstrassa.

Pozwólmy sobie na stwierdzenie, że najgłębsza zmiana jakościowa w rozumieniu intuicji matematycznych dokonała się w wyniku „rewolucji strukturalnej" w matematyce XIX wieku. Oczywiście wszelkie tego typu spekulacje obarczone są bardzo dużym ryzykiem błędu. Dopiero z odpowiednio dłuższej perspektywy, biorąc pod uwagę znaczący przedział czasowy można oceniać rozwój dyscyplin matematycznych. Można, tytułem eksperymentu, zaproponować porównanie koncepcji ucieleśnionej matematyki stosowanej w dwóch okresach: matematyki do wieku XIX oraz matematyki współczesnej. Pozwalamy sobie nieśmiało podejrzewać, że w tym pierwszym przypadku koncepcje Lakoffa i Núñeza sprawdziłyby się o wiele lepiej niż w przypadku drugim.

3.1.11 Kolizje intuicji

Można byłoby sądzić, że zawodowi matematycy w procesie tworzenia matematyki jakoś *uzgadniają* swoje intuicje, że powstaje w ten sposób jedno tylko „jedynie słuszne" rozumienie pojęć. W większości przypadków zaświadczonych w dziejach matematyki tak właśnie jest. Błędne jednakże jest mniemanie, iż jest tak zawsze, bezwyjątkowo. Zdarza się, że zarówno tak, iż różni matematycy rozwiązujący ten sam problem proponują inne jego intuicyjne (a w konsekwencji później także formalne) rozwiązanie, jak i tak, iż za przyjęciem jednych założeń przemawiają inne – dobrze osadzone w praktyce matematycznej – argumenty, niż za przyjęciem rozwiązania konkurencyjnego (również dobrze przystającego do owej praktyki).

Ilustracją dla pierwszego z tych przypadków mogą być spory między Newtonem i Leibnizem dotyczące podstaw rachunku różniczkowego. Newton posługiwał się wyłącznie skończonymi wielkościami arytmetycznymi w charakteryzowaniu obiektów granicznych. Leibniz natomiast rachował na *nieskończenie małych* wielkościach, traktowanych w sposób czysto formalny, dla których istnienia podawał jedynie argumenty metafizyczne. Analiza Newtonowska znalazła w pełni precyzyjny wyraz w XIX wieku, z chwilą *arytmetyzacji analizy*. Rozważaniom Leibniza precyzyjną formę dała *analiza niestandardowa*, zapoczątkowana w połowie wieku XX. Można podawać dalsze tego typu przykłady – np. spór Hamiltona z Grassmannem dotyczący podstaw rachunku wektorowego.

Drugi ze wspomnianych przypadków ilustruje np. konflikt pomiędzy *aksjomatem wyboru* AC a *aksjomatem determinacji* AD. Są one wzajem sprzeczne – obu razem przyjąć nie można. Za każdym z nich przemawiają dobre argumenty natury matematycznej. Co prawda, ich role są niewspółmierne – AC dotyczy wszelkich zbiorów, natomiast AD dotyczy podzbiorów przestrzeni Baire'a. Ich konflikt ukazuje jednak, że możemy – choć w ograniczonym zakresie – *wybierać* pomiędzy wzajem sprzecznymi założeniami i uprawiać jakiś fragment matematyki niezależnie od drugiego.

Innym jeszcze przykładem podpadającym pod drugi z omawianych przypadków jest konflikt między *aksjomatem konstruowalności* Gödla a *aksjomatem istnienia liczb mierzalnych*. Pierwszy z nich pozwala – mówiąc w stylistyce Lakoffa i Núñeza – „nadać ludzką twarz" rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego (poprzez rozważenie jedynie podzbiorów *definiowalnych*). Jego konsekwencjami są, jak wiadomo, zarówno aksjomat wyboru, jak i uogólniona hipoteza kontinuum. Nie jest on jednak – podobnie jak żaden inny aksjomat *ograniczenia* – uważany współcześnie za dobrego kandydata na nowy aksjomat teorii mnogości. Aksjomat istnienia liczby mierzalnej, choć z pozoru może wydawać się bardzo ezoterycznym założeniem, jest bodaj uważany za lepiej oddający „ducha" współczesnej teorii mnogości, w której zaleca się rozważanie możliwie największej liczby zbiorów.

Próba objaśniania konstrukcji matematycznych za pomocą metafor pojęciowych powinna jakoś, naszym zdaniem, próbować uporać się z kolizjami intuicji obu wymienionych rodzajów. Jak wyjaśnić – w paradygmacie proponowanym przez autorów – różnice w operowaniu intuicjami u poszczególnych matematyków? Jak wyjaśnić to, że sama matematyka w pewnych przypadkach oferuje możliwość podjęcia i kultywacji różnych, wzajem sprzecznych intuicji, za każdą z których przemawiają jakieś dobre matematyczne argumenty?

3.1.12 Równość prawie wszędzie

Nie można rzecz jasna wymagać od autorów, aby w swojej koncepcji pochylili się nad wszystkimi pojęciami matematycznymi, próbując ukazać ich metaforyczną naturę. Swoistym testem na trafność ich wizji byłaby próba skonstruowania odnośnych metafor dla pojęć wykorzystywanych w poszczególnych działach matematyki. Dla przykładu: jaka metafora mogłaby być odpowiedzialna za skonstruowanie pojęcia *równość prawie wszędzie*? Jest to jedno z fundamentalnych pojęć teorii miary, a nawet ogólniej – analizy matematycznej. Nie jest dla nas jasne, jak autorzy chcieliby metaforycznie odnosić się do zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a (występujących np. w znanym twierdzeniu Banacha-Tarskiego o rozkładzie kuli trójwymiarowej).

3.1.13 Pojęcie pochodnej

W artykule Thurston 1994 autor pisze niezwykle zajmująco o własnej karierze matematycznej, o swoich motywacjach, o celach pracy matematyka, które warte są propagowania. Pisze też o tym, w jaki sposób ludzie rozumieją matematykę. W szczególności, podaje przykład różnych rozumień pojęcia *pochodnej*:

> People have different ways of understanding particular pieces of mathematics. To illustrate this, it is best to take an example that practicing mathematicians understand in multiple ways, but that we see our students struggling with. The derivative of a function fits well. The derivative can be thought of as:
>
> 1. Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
> 2. Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1}, the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g * g'$, etc.
> 3. Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ε there is a δ such that when $0 < |\triangle x| < \delta$,
>
> $$|\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} - d| < \delta.$$
>
> 4. Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent.
> 5. Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.
> 6. Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
> 7. Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.
>
> This is a list of different ways of *thinking about* or *conceiving of* the derivative, rather than a list of different *logical definitions*. Unless great efforts are made to maintain the tone and flavor of the original human insights, the differences start to evaporate as soon as the mental concepts are translated into precise, formal and explicit definitions.

Listę powyższą można rozszerzać. Dla przykładu, Thurston podaje jeszcze jedno rozumienie omawianego pojęcia:

37. The derivative of a real valued function f in a domain D is the Lagrangian section of the cotangent bundle $T^*(D)$ that gives the connection form for the unique flat connection on the trivial $\mathbf{R}$-bundle $D \times \mathbf{R}$ for which the graph of f is parallel.

These differences are not just a curiosity. Human thinking and understanding do not work on a single track, like a computer with a single central processing unit. Our brains and minds seem to be organized into a variety of separate, powerful facilities. These facilities work together loosely, "talking" to each other at high levels rather than at low levels of organization.

Zwróćmy uwagę na ostatnie z cytowanych zdań – poglądy Thurstona różnią się tu wyraźnie od poglądów Lakoffa i Núñeza.

3.1.14 Krzywizna Gaussa

Theorema egregium Gaussa to jeden z najbardziej podstawowych wyników w geometrii różniczkowej. Bez wdawania się w szczegóły techniczne powiedzmy jedynie, że zawdzięczamy Gaussowi (który z kolei bazował na pewnych wynikach Eulera) określenie pojęcia *krzywizny* powierzchni oraz ustalenie, że można tę krzywiznę wyrazić w terminach samej badanej powierzchni, niezależnie od tego, w jakiej przestrzeni i w jaki sposób jest ona „zanurzona". Tak więc, np. Płaszczaki mieszkające na sferze mają możliwość ustalenia geometrii swojego świata, bez konieczności podróżowania w „zaświaty" przestrzeni trójwymiarowej. Byłoby ciekawe, sądzimy, wypróbowanie sił matematyki ucieleśnionej w rekonstrukcji podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. Jak daleko mogłaby posunąć się na tym obszarze koncepcja Lakoffa i Núñeza?

Przegląd języków etnicznych pokazuje, że stosują one różnorakie środki gramatyczne dla wyrażania stosunków przestrzennych. Dla przykładu, w polskim (i w angielskim) tak samo wyrażamy fakt, że coś leży *na* stole, jak i to, że coś wisi *na* ścianie. W niemieckim jest inaczej: w pierwszym przypadku mamy *auf den Tisch*, w drugim *an die Wand*. Nie ma w tym niczego tajemniczego, różne języki na różne sposoby gramatykalizują informacje. Uważamy jednak, że narzucanie prostych intuicji doświadczenia potocznego złożonym tworom różnych geometrii jest nie na miejscu. Zwyczaj językowy każe nam mówić, że np. trójkąt leży *na* płaszczyźnie. Jednak żaden godny tego miana geometra nie będzie „widział" płaszczyzny jako czegoś, *na* czym kładzie się trójkąty. Zauważmy, że nawet proste pojęcia geometrii Euklidesa znane ze szkoły zakładają już bardzo wysoki stopień *abstrakcji*, wymagają istotnego jakościowego „przeskoku" od pojęć doświadczenia potocznego do obiektów, które nie mają rozciągłości przestrzennej (punkty), nie mają „grubości” (płaszczyzny), nie mają „szerokości” (odcinki).

Twierdzenie Gaussa-Bonneta ustala pewną zależność między geometrią powierzchni (biorącą pod uwagę jej krzywiznę) a jej topologią (biorącą pod uwagę jej charakterystykę Eulera). Współcześnie o powierzchniach myślimy w matematyce jako o szczególnego rodzaju rozmaitościach Riemanna.

3.1.15 Rozmaitości Riemanna

Można wskazywać na różne punkty zwrotne w rozumieniu ogólnego pojęcia *przestrzeni* w matematyce. Do najważniejszych z nich niewątpliwie należą propozycje Riemanna. To właśnie one umożliwiły opis rzeczywistości fizycznej w makroskali, stanowiąc matematyczne podstawy ogólnej teorii względności. Konstrukcje Riemanna także mogą, jak się zdaje, stanowić wdzięczny obiekt zainteresowania matematyki ucieleśnionej. Czy potrafiłaby ona poradzić sobie z uogólnieniami dokonanymi przez Riemanna i jego następców? Piszemy o tym bez ironii, bo przecież można próbować śledzić – z punktu widzenia sporządzania metafor – możliwości oddania kolejnych, coraz bardziej zaawansowanych konstrukcji geometrii różniczkowej.

Konstrukcje Riemanna uogólniają poprzednio wspomniane badania Gaussa. Pozwalają na mówienie o tworach wielowymiarowych, wyposażonych w pewne własności metryczne. Są jednym z podstawowych narzędzi fizyki współczesnej.

Przy okazji, wspomnijmy tutaj o wyzwaniu dla matematyki ucieleśnionej, które stwarza rozpatrywanie w matematyce przestrzeni wielowymiarowych (mających skończenie lub nieskończenie wiele wymiarów). W samej matematyce pojęcie to wprowadzano ostrożnie. Podobnie jak w swoim czasie liczby urojone, także przestrzenie o liczbie wymiarów większej od trzech uważane były początkowo za twory całkiem fikcyjne. Na utworzenie dobrze funkcjonującego pojęcia przestrzeni *wielowymiarowej* złożyły się wysiłki matematyków z *różnych* dyscyplin: teorii liczb (np. prace nad kwaternionami Hamiltona), algebry liniowej (prace Grassmanna), wspomniane wyżej prace Gaussa i Riemanna, dające początek geometrii różniczkowej, itd. Nie było wcale tak, że za pomocą jakiejś *jednej* metafory pojęciowej „oswojono” przestrzenie wielowymiarowe. Współcześnie nawet laik potrafi wypowiadać się np. o *czwartym wymiarze*, choć nie zawsze czyni to z sensem. Nie możemy sobie w tym miejscu odmówić przytoczenia cytatu z broszury traktującej o roli geometrii wielowymiarowej w odczytywaniu Biblii, o *czterowymiarowym Jezusie*, itp. Oto w Kajfosz 2010 na stronie 39 podkreśla się, iż sformułowanie z *Listu do Efezjan* „zdołali pojąć ze wszystkimi świętymi, jaka jest szerokość i długość, i wysokość, i głębokość” wskazuje na posługiwanie się przez autora *Listu* odniesieniem do czterech wymiarów. Autor bogato obdarowuje nas wieloma innymi jeszcze przykładami. Dalej w tekście znajdujemy np. (Kajfosz 2010, 51–52):

> Innym częstym zjawiskiem było nagłe pojawianie się i znikanie aniołów, a także istot ludzkich (Mt 17,3; Wj 3,2; Sdz 6,12; Dz 12,7; Dz 8,39; Dn 5,5).
>
> Szczególnie ciekawy jest znany przypadek ręki, piszącej słowa na ścianie pałacu podczas uczty Belsezara (Dn 5,5). Można przypuszczać, że ręka należała do istoty, która pozostawała poza naszą przestrzenią i „wsunęła" ją tylko, aby napisać na ścianie pałacu wyrok Boży.
>
> Wymowne jest także pojawienie się Jezusa Chrystusa po zmartwychwstaniu, „gdy drzwi były zamknięte" (Łk 24,35-43; J 20,19). Uczniowie mniemali, że widzą ducha, jednak Pan Jezus kazał siebie dotykać, a nawet zjadł kawałek pieczonej ryby i plaster miodu, wyraźnie z zamiarem udowodnienia materialności swego zmartwychwstałego ciała.
>
> Wcześniej, tego samego dnia, także podczas posiłku, będąc w tym samym ciele, „znikł sprzed ich oczu" (Łk 24,31).
>
> Fakty te trudno wyjaśnić z punktu widzenia naszej przestrzeni, gdyż wymagałoby to przyjęcia, że Jego ciało, wraz ze zjedzonym pokarmem, miało zdolność dematerializowania się, przechodzenia przez zamknięte drzwi czy ściany budynku i ponownego materializowania się w innym miejscu. Warto zwrócić uwagę, że tekst biblijny nie mówi nic o przechodzeniu przez zamknięte drzwi czy też ściany, choć nieraz słyszy się o tym w kazaniach.
>
> Obraz czterowymiarowy jest całkiem jasny. Ciało Jezusa było fizyczne, tak jak starał się udowodnić, lecz nie był On już poddany ograniczeniom naszej przestrzeni. Mógł opuszczać naszą hiperpłaszczyznę i ponownie w nią wstępować w innym miejscu, a zatem nie musiał dematerializować się ani też przechodzić przez zamknięte drzwi czy ściany.

Nie zamierzamy oczywiście wypowiadać się na temat trafności tych interpretacji. „Logika" bajki nie podlega ocenie czysto racjonalnej, dopuszcza różnorodne fantazje, czasem spójne wewnętrznie, a czasem nawet tego warunku nie spełniające. W odróżnieniu od dywagacji o czterowymiarowym Jezusie, pewne *fantazje naukowe* dotyczące świata płaskiego warto traktować bardziej poważnie. Książeczka Abbot 1952 traktowana może być jako ciekawostka, popularyzująca matematykę. Ukazały się dalsze tego typu prace, np. Hinton 1907. Możliwości życia w świecie dwuwymiarowym, wraz z wieloma własnościami takiego świata, poświęcone były prace Dewdneya (Dewdney 1984, Dewdney 2000). Płaskoświat

Dewdneya budowany jest bardzo konsekwentnie, z zachowywaniem rygorów niesprzeczności logicznej. Podano zasady fizyki, chemii, biologii, itd., które obowiązują w tym świecie (dokładniej: na planecie *Astria*, która ma kształt dysku i wiruje na płaskiej powierzchni; nazwa planety wzięta została z wcześniejszej pracy Hintona). Martin Gardner tak pisze o zasadach rządzących tym światem i jego korelacjach ze stereoświatem, czyli światem trójwymiarowym (Gardner 1997, 12):

> Aby swój dziwaczny projekt uchronić przed „zwyrodnieniem do jałowych spekulacji", Dewdney przyjął dwie podstawowe zasady. „Zasada podobieństwa" głosi, że płaskoświat musi być możliwie najbardziej podobny do stereoświata: ciało, na które nie działają siły zewnętrzne, spoczywa lub porusza się po linii prostej, płaski odpowiednik sfery to okrąg, i tak dalej. „Zasada modyfikacji" głosi, że gdy jesteśmy zmuszeni wybrać jedną spośród sprzecznych hipotez, które jednakowo są podobne do teorii obowiązującej w stereoświecie, to powinniśmy zdecydować się na hipotezę bardziej podstawową, pozostałe zaś zmodyfikować. Aby określić, jakie hipotezy są podstawowe, Dewdney zastosował hierarchię, w której fizyka jest bardziej podstawowa od chemii, chemia bardziej podstawowa od biologii i tak dalej.

W konsekwentny sposób ustala się wiele faktów, dotyczących astronomii, fizyki, chemii, biologii, architektury, mechaniki, itd. astriańskiego świata. Problematyka płaskoświatowej nauki jest stale żywa, rozważa się np. problem, jak wyglądać w niej może ogólna teoria względności. Zwrócono uwagę m.in. na to kłopoty w porozumiewaniu się w takim świecie za pomocą dźwięku lub fal elektromagnetycznych: pewne własności rozwiązań równania falowego utrudniają takie porozumiewanie się w każdym świecie o *parzystej* liczbie wymiarów. Warto może na koniec dodać, że we współczesnej fizyce intensywnie badane są m.in. własności powierzchni pokrytych bardzo cienkimi błonami (grubości jednej cząsteczki) oraz różne *dwuwymiarowe* własności elektrostatyczne i elektroniczne.

3.1.16 Cantor: Widzę to, ale w to nie wierzę

Wśród pierwszych wyników Cantora w jego teorii mnogości znajdujemy twierdzenia ustalające równoliczność bądź nierównoliczność pewnych ważnych (z punktu widzenia praktyki matematycznej) zbiorów. I tak, Cantor ustalił m.in. że:

1. Przeliczalne są zbiory: liczb całkowitych, wymiernych, algebraicznych.

2. Nieprzeliczalne są zbiory: liczb rzeczywistych, liczb przestępnych. Przy okazji, warto pamiętać, że Cantor podał dwa całkiem różne dowody nieprzeli-

czalności zbioru liczb rzeczywistych – tylko w drugim z nich stosuje swój słynny argument przekątniowy.

3. Istnieje tylko jeden, z dokładnością do izomorfizmu, zbiór przeliczalny uporządkowany w sposób gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego (zbiór liczb wymiernych).
4. Zbiory: punktów prostej, punktów płaszczyzny, punktów przestrzeni trójwymiarowej są wszystkie równoliczne – ich moc wynosi kontinuum (podobnie dla $\mathbb{R}^n$, dla każdej $n > 0$).

W przypadku ostatniego z wyliczonych wyżej twierdzeń Cantor napisał w jednym z listów: *Widzę to, ale w to nie wierzę*. Nie należy tego stwierdzenia traktować jako wyrazu utraty zaufania do tworzonej teorii matematycznej. Odczytujemy stwierdzenie Cantora jako przyznanie, że oto przy badaniu abstrakcyjnych zbiorów musimy *porzucić* różnego rodzaju intuicje, mniemania, myślenie metaforami. Konsekwentne rozwijanie teorii wymusza zmianę rozumienia pewnych pojęć. Nie jest dla nas widoczne, w jaki sposób koncepcja Lakoffa i Núñeza mogłaby się uporać z takimi sytuacjami – a jest ich w matematyce całe mnóstwo.

3.1.17 Kwantowanie wielkości ciągłych

Autorzy wiele piszą o dwóch rozumieniach pojęcia *ciągłości* – jedno z nich ma być jakoś *naturalne*, związane z doświadczeniem potocznym, drugie zaś to rozumienie redukujące kontinuum do konstrukcji czysto arytmetycznych. Można odnieść wrażenie, że autorzy to pierwsze rozumienie darzą o wiele większym sentymentem niż drugie. Brutalna odpowiedź na te deklaracje mogłaby odwołać się do filozoficznego sloganu: *Nic nie jest takie, jakim się wydaje*. To, że przypisywaliśmy w różnych momentach „naturalną” ciągłość np. przestrzeni fizycznej, masie, czasowi, elektryczności, energii, itd. nie oznacza, iż wszystkie one mają naturę ciągłą, nawet w drugim z przywołanych wyżej znaczeniu. Przywołajmy raz jeszcze rozważania Hilberta (Hilbert 1926, 321–322):

> Pierwszym naiwnym wrażeniem zjawisk przyrody i materii jest ciągłość (Stetige), nieprzerwaność (Kontinuierliche). Jeżeli mamy kawałek metalu lub pewną objętość cieczy, to nasuwa się nam wyobrażenie, że są one podzielne nieograniczenie, że każdy ich mały kawałek ma znów te same własności. Wszędzie jednak tam, gdzie wystarczająco ulepszono metody badań w fizyce materii, natrafia się na granice podzielności, które leżą nie w nieudolności naszych prób, ale w naturze rzeczy, tak że można by wręcz ująć tendencję współczesnej nauki jako równouprawnienie nieskończenie małych (eine Emanzipation

> von dem Unendlichkleinen) i zamiast dawnego motta – *natura non facit saltis*, można by dziś stwierdzić coś przeciwnego – „natura czyni skoki".
>
> Jak wiadomo, materia zbudowana jest z małych cegiełek, z atomów, poprzez kombinacje i związki których powstaje cała rozmaitość tworzywa makroskopowego (der makroskopischen Stoffe).
>
> Fizyka nie zatrzymała się jednak na atomistyce materii. Obok niej pojawiła się pod koniec ubiegłego wieku atomistyka elektryczności, jawiąca się na pierwszy rzut oka jako coś dziwacznego. Podczas gdy dotąd uważano elektryczność za fluid i stanowiła ona pierwowzór czynnika działającego w sposób nieprzerwany (das Vorbild eines kontinuierlich wirkenden Agens), to teraz także ona okazuje się zbudowana z pozytywnych i negatywnych *elektronów*.
>
> Poza materią i elektrycznością jest jeszcze w fizyce inna rzeczywistość, dla której także zachodzi prawo zachowania, mianowicie energia. Nawet ona nie dopuszcza, jak dziś wiadomo, nieskończonej i nieograniczonej podzielności; Planck odkrył *kwanty energii*.
>
> Wniosek jest taki, że nigdzie nie da się znaleźć jednorodnego kontinuum, które dopuszczałoby nieograniczoną podzielność i w ten sposób realizowało nieskończenie małe (das Unendliche im Kleinen). Nieskończona podzielność kontinuum jest operacją istniejącą tylko w myślach, której przeczą nasze obserwacje przyrody i doświadczenia fizyki i chemii.

Wielu matematyków piszących o kontinuum geometrycznym oraz liczbach rzeczywistych (np. Dedekind, Weber, Cantor) wyraźnie podkreślało, że nie posiadamy żadnego dowodu ani na ciągłość świata fizycznego, ani na jego dyskretność. Także całkiem współczesna wiedza fizyczna nie dostarcza w tej kwestii żadnych rozstrzygnięć. Poglądy na temat struktury kontinuum zmieniały się w dziejach matematyki (i refleksji filozoficznej): jedni uważali, że kontinuum jest nieskończenie podzielne, inni, iż składa się jakoś (scala) z atomów, wykorzystywano wielkości nieskończenie małe, pozbywano się ich, przywracano je na nowo (w innej szacie matematycznej), itd. Tak więc, nie było tak, iż istniał jakiś jeden, *naturalny* sposób rozumienia kontinuum (i ciągłości). Nadto, czym innym jest tworzenie wyobrażeń wedle „zdroworozsądkowych" wyobrażeń operujących, raczej bezrefleksyjnie, w doświadczeniu potocznym, a czym innym filozoficzna i matematyczna analiza pojęć oraz refleksja teoretyczna np. w fizyce. Sądzimy, że należy zachować pewną ostrożność przy próbach eksplikacji tworzenia wszelakich pojęć poprzez odwołanie się do prostych metafor pojęciowych wywodzących się z doświadczenia potocznego.

Piszący te słowa niedawno tłumaczył (z niemieckiego na polski) szereg prac dotyczących rozumienia pojęcia ciągłości oraz konstrukcji liczb rzeczywistych. Jak już wyżej wspomniano, znajdujemy w tych pracach również uwagi filozoficzne dotyczące ewentualnych związków między rozważanymi konstrukcjami matematycznymi a rzeczywistością fizyczną. Dla przykładu:

> Istotę ciągłości odnajduję [...] w następującej zasadzie:
>
> „Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki."
>
> Jak już powiedziano, sądzę, iż się nie mylę przyjmując, że każdy uzna natychmiast prawdziwość tego stwierdzenia; większość moich czytelników będzie bardzo rozczarowana dowiadując się, że tak potocznym stwierdzeniem można odsłonić tajemnicę ciągłości. Skwituję to następująco. Jestem wielce rad, jeśli każdy znajduje powyższą zasadę tak oczywistą i zgodną z jego wyobrażeniami linii prostej; ani nie jestem bowiem w stanie podać jakiegokolwiek innego dowodu jej poprawności, ani nikt nie może tego zrobić. Przyjęcie tej własności linii prostej jest niczym innym jak aksjomatem, dopiero na mocy którego przyznajemy linii prostej jej ciągłość, na mocy którego wnikamy w ciągłość linii prostej. Jeśli przestrzeń ma w ogóle jakąś realną egzystencję, to wcale *nie* musi koniecznie być ciągła; niezliczone jej własności pozostałyby takie same, gdyby była nieciągła. I gdybyśmy wiedzieli z pewnością, że przestrzeń jest nieciągła, to i tak nic nie mogłoby nas powstrzymać, gdybyśmy tego chcieli, aby w myśli uczynić ją ciągłą, poprzez wypełnienie jej luk; to wypełnienie polegałoby jednak na tworzeniu nowych indywiduów punktowych wedle powyższej zasady.
>
> Dedekind 1872

> Z tymi twierdzeniami łączą się rozważania na temat tej własności świata rzeczywistego, która dla pojęciowego opisu oraz objaśnienia zachodzących w nim zjawisk daje leżącą u podstaw przestrzeń trójwymiarową. Jak wiadomo, zarówno ze względu na spotykane w niej formy, jak też zwłaszcza w odniesieniu do zachodzących w niej ruchów, zakłada się, że jest ona *nieprzerwanie ciągła* [*durchgängig stetig*]. To ostatnie założenie – wedle jednoczesnych i niezależnych ba-

dań DEDEKINDA (zob. broszurę R. DEDEKIND *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872) oraz autora – polega na niczym innym niż na tym, że każdy punkt, którego współrzędne x, y, z w prostokątnym układzie współrzędnych dane są jako *jakiekolwiek* ustalone rzeczywiste liczby wymierne lub niewymierne jest pomyślany jako *rzeczywiście należący do przestrzeni*, do czego w ogólności nie ma jednak żadnego wewnętrznego przymusu, a stąd musi [to] być uważane za wolny akt naszej konstrukcji myślowej [unserer gedanklichen Construktionshätigkeit]. *Hipoteza ciągłości przestrzeni* jest zatem niczym innym, jak w sobie samym dowolnym założeniem pełnej, wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między trójwymiarowym *czysto arytmetycznym kontinuum* (x, y, z) a przestrzenią leżącą u podstaw świata zjawisk. [...]

Nasze myślenie może jednak z równą łatwością abstrahować od pojedynczych punktów, nawet jeśli występują one wszędzie gęsto [überalldicht] i utworzyć sobie obraz *nieciągłej* trójwymiarowej przestrzeni $\mathfrak{A}$ o własności omówionej uprzednio. Powstające wtedy pytanie, czy także w takich *nieciągłych* przestrzeniach $\mathfrak{A}$ do pomyślenia byłby *ruch ciągły* musi, na mocy poprzednio stwierdzonego, koniecznie zostać *potwierdzone*, gdyż pokazaliśmy, że każde dwa punkty obrazu $\mathfrak{A}$ mogą zostać połączone przez niezliczenie wiele ciągłych całkowicie regularnych linii. Okazuje się więc interesujące, że z samego faktu ruchu ciągłego nie można na razie wyciągnąć żadnego wniosku o nieprzerwanej ciągłości trójwymiarowej przestrzeni, używanej do objaśnienia zjawisk ruchu. Stąd blisko już do podjęcia próby zmodyfikowanej mechaniki, stosownej dla przestrzeni o własności [posiadanej przez] $\mathfrak{A}$, tak, aby z konsekwencji tego rodzaju badania oraz jego porównania z rzeczywistością być może otrzymać rzeczywiste punkty oparcia dla hipotezy o nieprzerwanej ciągłości pojęcia przestrzeni leżącego u podstaw doświadczenia.

Cantor 1882

Ciągłość, zarówno jak gęstość, są własnościami, które z natury rzeczy są niedostępne naszemu postrzeganiu zmysłowemu; nie można ich zatem ściśle przypisać rzeczom świata zewnętrznego, wielkościom przestrzennym, okresom czasu, masom, jakkolwiek głęboko leżą one w istocie naszego oglądu. Można jednak [swobodnie] konstruować czyste systemy pojęć, którym przysługuje gęstość bez ciągłości, albo też gęstość oraz ciągłość. [Tu przypis: Pokazał to DEDEKIND, któremu w ogóle zawdzięczamy podaną wyżej definicję ciągłości. Por. pisma DE-

> DEKINDA, „Stetigkeit und irrationale Zahlen”, Braunschweig 1872, 1892, „Was sind und was sollen die Zahlen?”, Braunschweig 1888, 1893. Inne rozmaitości, którym przysługuje ciągłość, są stworzone przez WEIERSTRASSA oraz CANTORA. Definicja ciągłości, którą za DEDEKINDEM bierzemy tu za podstawę, jest tak dalece wyczerpująca, że zbiór ciągły w tym sensie, któremu przysługuje jeszcze za chwilę podana własność mierzalności, nie może być częścią bogatszego zbioru ciągłego. Nie wiem, czy własność ta jest gdziekolwiek dowiedziona i mam nadzieję wrócić do tego przy innej sposobności. Zauważę jednak, że taka własność dowodliwa jest jedynie dla zbiorów mierzalnych. Zbiór tylko uporządkowany może być zawsze, jakkolwiek by był gęsty, pojmowany jako część zbioru jeszcze bardziej gęstego.]
>
> Weber 1885

Może warto wspomnieć, że istnieją modele geometrii absolutnej, które nie mają własności ciągłości: np. w zbiorze wszystkich *liczb algebraicznych* (będących interpretacjami *punktów*) zachodzą wszystkie aksjomaty systemu geometrii absolutnej oraz zaprzeczenie aksjomatu ciągłości.

3.1.18 Dostępność liczb rzeczywistych

Nieco żartobliwie rzecz ujmując, nie jest możliwe stworzenie *wiernego* listu gończego pozwalającego wspomóc wytropienie liczby przestępnej. Mówiąc natomiast bardziej poważnie, warto przypomnieć, że mamy zróżnicowany *dostęp poznawczy* do poszczególnych liczb rzeczywistych. Zgodzimy się, że najłatwiej dostępne są liczby *wymierne* oraz *algebraiczne*. Łatwo dostępne są też liczby *obliczalne* oraz *definiowalne*. Trudno dostępne są w ogólności liczby *przestępne*. Ów „stopień dostępności” charakteryzować można na różne sposoby. Wprowadza się np. *miarę niewymierności* dla liczb rzeczywistych, rozważa się tzw. liczby *normalne*, charakteryzowane w terminach częstości występowania cyfr ich rozwinięcia (w ustalonej bazie), bada się dokładność przybliżeń liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi, itd. Sądzimy, że problematyka ta stanowi swego rodzaju wyzwanie dla matematyki ucieleśnionej: nie tylko kontinuum liczb rzeczywistych jako całość warte jest – o ile ktoś akceptuje założenia tej koncepcji – rekonstrukcji metaforycznej, ale ciekawe może być również scharakteryzowanie metaforycznie owego stopnia dostępności do mieszkańców kontinuum.

Zwykle mówi się o liczbach wymiernych jako zbiorze liniowo uporządkowanym w sposób gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego, a ich „wizualizacje” przedstawia na osi liczbowej. Rzadziej przypomina się obecnie o reprezentacjach liczb wymiernych jako skończonych ułamków łańcuchowych. Warto jednak pamiętać, budując różnorakie metafory, że liczby wymierne mają też ładne reprezentacje w postaci drzew: ciągi Fareya, drzewo Calkina-Wilfa, w którym każda liczba wymierna występuje dokładnie raz, drzewo Sterna-Brocota, w którym dokładnie raz występuje każda liczba wymierna z odcinka $[0, 1]$):

1. *Ciągi Fareya*. Ciąg Fareya F_n to ciąg liczb wymiernych, których mianowniki nie przekraczają liczby n. Konstrukcję tych ciągów rozpoczynamy od elementów $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, a następnie, w kroku n, pomiędzy $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ wstawiamy liczby $\frac{a+c}{b+d}$ dla których $b + c \leqslant n$.

2. *Drzewo Calkina-Wilfa*. Korzeniem drzewa jest liczba 1, każdy wierzchołek, będący ułamkiem $\frac{a}{b}$ ma dwóch bezpośrednich potomków: ułamki $\frac{a}{a+b}$ oraz $\frac{a+b}{b}$.

3. *Drzewo Sterna-Brocota*. To drzewo związane jest z rozwinięciami łańcuchowymi liczb wymiernych. Intuicyjnie mówiąc, budujemy je piętrami, zaczynając od korzenia 1. Na kolejnych piętrach między ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ wstawiamy ułamek $\frac{a+b}{c+d}$.

Liczby rzeczywiste również mogą być reprezentowane w postaci drzewa: np. nieskończonego drzewa dwójkowego – każdej (nieskończonej!) gałęzi tego drzewa odpowiada liczba rzeczywista. Chciałoby się rzec, że w ten oto sposób „widzimy", „ujmujemy poglądowo", itp. cały zbiór *nieprzeliczalny*, o ile pamiętamy, że wszystkich tych gałęzi jest właśnie nieprzeliczalnie wiele. To jednak jedynie *złudzenie* – naprawdę widzimy jedynie skończony fragment tego drzewa.

Przypomnijmy przy tej okazji, że niezwykle trudno zbliżyć się do całkowitej, absolutnej *losowości*. Nazwijmy nieskończony ciąg (powiedzmy zerojedynkowy) *nieskończenie dystrybutywnym*, gdy prawdopodobieństwo wystąpienia każdego układu n zer oraz jedynek jest takie samo i wynosi $\frac{1}{2^n}$. Ciągiem *von Misesa* nazwiemy ciąg, którego każdy nieskończony podciąg (a więc jakkolwiek wybrany) jest nieskończenie dystrybutywny. Wydawałoby się, że uzyskaliśmy w ten sposób całkiem obiektywny matematyczny opis doskonałej losowości. Zła wiadomość jest jednak następująca: ciągi von Misesa nie istnieją, czego dowiódł Doob.

3.2 Błędy wskazywane przez innych autorów

Książka Lakoffa i Núñeza doczekała się wielu recenzji. Z reguły są to recenzje pozytywne, choć w niektórych z nich wskazuje się usterki matematyczne, a także błędy argumentacji. Dla przykładu:

3.2.1 Auslander

Joseph Auslander zwraca uwagę na szereg błędów matematycznych w książce Lakoffa i Núñeza, np.: niejasne oświadczenia, iż *krzywe wypełniające przestrzeń* tak naprawdę jej nie wypełniają, przywoływanie dziwolągów w postaci *nieskończonych wielomianów*, błędne wyjaśnienia dlaczego szereg Taylora reprezentuje funkcję, brak uzasadnienia dla procedury różniczkowania wyraz po wyrazie, użycie błędnego koła w objaśnianiu wzoru $e^{i\pi} + 1 = 0$, złe wytłumaczenie „paradoksu długości", nietrafne operowanie pojęciem granicy, itp. Auslander kończy swoją recenzję następująco (Auslander 2001):

> It may be that metaphors don't play a central role in formulating more advanced mathematical concepts, or if they do, they will need to be of a different nature than those used in more elementary mathematics. Mathematical concepts, once they are developed, acquire a life of their own and are dealt with directly. It's difficult for me to conceive of a metaphor for a real number raised to a complex power, but if there is one, I'd sure like to see it.

3.2.2 Devlin

Keith Devlin był, jak sam pisze początkowo entuzjastą propozycji Lakoffa i Núñeza (Devlin 2008). Później częściowo zmienił zdanie, podnosząc pewne wątpliwości. Najkrócej rzecz ujmując, Devlin zwraca uwagę m.in. na to, że:

1. Funkcje to nie procesy, ale relacje.
2. Nauka matematyki przypomina raczej grę w szachy niż grę metafor.
3. Być może uczymy się np. elementarnej arytmetyki w jakiejś zgodzie z mechanizmami opisanymi przez Lakoffa i Núñeza. Devlinowi trudno jest jednak zaakceptować to, że także w zaawansowanej pracy zawodowych matematyków podstawową rolę odgrywają również te mechanizmy.

Sądzimy, że „szachowa" analogia Devlina warta jest tu zacytowania, w nawiązaniu do powyższych punktów:

> Rather, a mathematician (at least me and the others I've asked) learns new math the way people learn to play chess. We first learn rules of chess. Those rules don't relate to anything in our everyday experience. They don't make sense. They are just rules of chess. To play chess, you don't have to understand the rules or know where they came from or

what they “mean”. You simply have to follow them. In our first few attempts at playing chess, we follow the rules blindly, without any insight or understanding what we are doing. And, unless we are playing another beginner, we get beat. But then, after we’ve played a few games, the rules begin to make sense to us – we start to *understand* them. Not in terms of anything in the real world or in our prior experience, but in terms of the game itself. Eventually, after we have played many games, the rules are forgotten. We just play chess. And it really does make sense to us. The moves do have meaning (in terms of the game). But this is not a process of constructing a metaphor. Rather it is one of *cognitive bootstrapping* (my term), where we make use of the fact that, through conscious effort, the brain can learn to follow arbitrary and meaningless rules, and then, after our brain has sufficient experience working with those rules, it starts to make sense of them and they acquire meaning for us. (At least it does if those rules are formulated and put together in a way that has structure that enables this.)

3.2.3 Siegfried

Tom Siegfried w recenzji pisze, że czym innym jest sytuacja, gdy równania opisują znaną rzeczywistość fizyczną, a czym innym sytuacja, gdy równania matematyczne pozwalają *przewidywać* fakty fizyczne, por. Siegfried 2001:

> For one thing, the authors ignore the fact that brains not only observe nature, but also are parts of nature. Perhaps the math that brains invent takes the form it does because math had a hand in forming the brains in the first place (through the operation of natural laws in constraining the evolution of life). Furthermore, it’s one thing to fit equations to aspects of reality that are already known. It’s something else for that math to tell phenomena never previously suspected. When Paul Dirac’s equations describing electrons produced more than one solution, he surmised that nature must possess other particles, now known as antimatter. But scientists did not discover such particles until after Dirac’s math told him they must exists. If math is a human invention, nature seems to know what was going to be invented.

3.2.4 Voorhees

Burton Voorhees napisał bardzo krytycznie o książce Lakoffa i Núñeza (Voorhees 2004). Wspomina on o przystawaniu koncepcji autorów do poglądów Rubena Hersha na matematykę oraz do *społecznego konstruktywizmu* Paula Ernesta. Podkreśla swoistą oryginalność ich ujęcia matematyki, wskazując jednak jednocześnie na: błędy matematyczne, dyskusyjny status pewnych metafor, brak głębszych odniesień do innych koncepcji kognitywistycznych oraz bałamutne stwierdzenia natury filozoficznej. Za nieporozumienie uważa Voorhees to, co autorzy piszą o wprowadzanych przez nich *liczbach ziarnistych* (*granular numbers*). Ich metafora wykorzystywana w tym przypadku, czyli BMI, w żaden sposób nie usprawiedliwia wprowadzenia „pierwszej nieskończenie małej"; nadto także odpowiedź Lakoffa i Núñeza na krytykę w tej sprawie świadczy, że mieszają oni myślenie życzeniowe z przeprowadzaniem konstrukcji matematycznych, por. np. Voorhees 2004, 85:

> As it happens, though, their concept is nonsense. The error lies in the definition. Omitting details, it boils down to defining this purported object as a number having the form $\frac{1}{H}$ where H is an integer greater than all real numbers. Since all integers *are* real numbers, however, this definition is stating that H is an integer greater than any integer. Use of the BMI has led to contradiction. [Tu przypis: More precisely, unreflexive application of the BMI leads to a conclusion that suffers from the fallacy of continuity – the assumption that the properties of the limit of an infinite sequence must be the same as the properties of points in the sequence itself.] [...]
>
> It is not enough to say that something is metaphorically generated and therefore is a legitimate mathematical idea. It must also be demonstrated that the idea generated is free of contradiction. Conceptual metaphors can only be trusted so far – eventually there will be a point at which they break down. Indeed, much of abstract mathematics begins at exactly the point where a metaphor breaks down; where our expectations turn out to have led us astray. When we come to that point, continued reliance on the metaphor leads to illusion. Any further progress depends on pure abstraction.

Voorhees krytykuje również sposób odrzucenia przez Lakoffa i Núñeza stanowiska Platonizmu matematycznego:

1. To, że liczby mogą być charakteryzowane na różne sposoby nie świadczy nijak o domniemanej „ontologicznej sprzeczności" matematyki – raczej przeciwnie, sam fakt istnienia wielu różnych reprezentacji liczb wspiera możliwość abstrahowania pojęcia liczby.

2. Voorhees przyrównuje argument Lakoffa i Núñeza o niepoznawalności transcendentalnej matematyki do znanego argumentu Gorgiasza. Dodaje też w tym kontekście (Voorhees 2004, 87):

> The argument fails: the fact that human mathematics is based in human cognitive capacities does not mean that these capacities cannot provide recognition of transcendent mathematical truth. What it does do is point to the well-know issue of qualia, and to the hard problem of consciousness.

3. Odnosząc się do krytyki podnoszącej brak związku przyczynowego w percepcji obiektów matematycznych i do tego, co znaczy, że matematyk „widzi” prawdę matematyczną, pisze (Voorhees 2004, 87):

   > It is more direct recognition of something that is experienced as mind-independent. Although they would be loath to admit it, L&N point to a possible answer to the question of how such 'seeing' is possible. We are caused to 'see' a mathematical object or a mathematical truth by the neural activity involved in the employment of the cognitive metaphors used in thinking about it, just as we are caused to 'see' a tree by the neural activity involved in the sensory processing that results in the perceived image of a tree. There is, in other words, a direct analogy between everyday sensory qualia such as colours, and perceptions of abstract mathematical objects.

Voorhees kończy swoją recenzję następująco (Voorhees 2004, 88):

> Mathematics, as carried out by human beings, *is* embodied. It suffers all of the slings and arrows that go along with that embodiment. In emphasizing this, Lakoff&Núñez perform a valuable service. Ironically, however, their attempt to give mathematics a more human face ignores what is perhaps the most significant human aspect of mathematics. For the Platonist, it is the ability to have intuitive access to what is transcendent, whatever the mode of its existence, that is uniquely human.

3.2.5 Henderson

David Henderson, oprócz wskazania błędów matematycznych autorów, proponuje nieco inną metaforę nieskończoności, ilustrując ją procedurą wprowadzania *punktów w nieskończoności* w geometrii rzutowej; warto może wspomnieć w tym miejscu, że metafora użyta przez Lakoffa i Núñeza (na stronach 167–170 ich książki) dla „uzasadnienia” tej konstrukcji jest całkowicie bałamutna, nie tylko matematycznie, ale nawet jakoś intuicyjnie, poglądowo, jakkolwiek zresztą to nazwać –

nijak nie widać, dlaczego ów tajemniczy punkt C_∞ miałby być wyznaczony jednoznacznie. Metafora Hendersona natomiast odwołuje się do *ruchu* (punktów oraz prostych) i nawiązuje do pojęcia *odwzorowania rzutowego*, dobrze określonego w tym systemie geometrii. Argumentuje też, że zamiast odwołań metaforycznych miewamy w matematyce do czynienia raczej z *wyobraźnią* oraz *punktami widzenia*, jak np. w geometrii, gdy okręgi kół wielkich na sferze traktujemy jako *linie proste* na tej powierzchni. Dalej, Henderson uważa za błędne przekonania autorów, iż:

1. Matematyka jest formalna, składa się z formalnych definicji, aksjomatów, twierdzeń i dowodów.

2. Matematyka nie pyta (i pytać nie może), co *znaczą* idee matematyczne, jak mogą być rozumiane i *dlaczego* twierdzenia matematyki są prawdziwe.

Przesądy te, zdaniem Hendersona, funkcjonują głównie wśród nie-matematyków. Apeluje on – zarówno do samych matematyków, jak i do specjalistów w naukach kognitywnych – o rzeczywistą *współpracę* nad zrozumieniem matematyki. Podkreśla przy tym, że wielu wielkich matematyków (cytuje Hilberta) miało pełną świadomość podwójnej niejako natury matematyki – składają się na nią zarówno metody formalne i operacje logiczne, jak i procesy rozumienia pojęć i operowania nimi, zwykle nazywane *intuicją matematyczną*. Podobnie wypowiadał się np. Poincaré, na co uwagę zwraca w swojej recenzji James Madden (zob. niżej).

3.2.6 Madden

James Madden ustosunkowuje się do trzech spraw, ważnych dla omawianej koncepcji:

1. hipotezy o roli metafor w poznaniu matematycznym,

2. stanowiska filozoficznego w kwestii prawdy matematycznej,

3. techniki analizy pojęć matematycznych.

O tym, jakie niejasności budzi operowanie metaforami przez omawianych autorów Madden pisze m.in. tak (Madden 2001, 1184–1185):

> One might react to this with the feeling that it is all pretty trivial. Of course, once the arithmetic metaphors are internalized, using them is as easy as riding a bike. But the skills involved in using arithmetic, or in riding a bike, are cognitively quite complex. This is most obvious in

the fact that *learning* them is not at all trivial. I would even suggest that evidence in favor of the metaphor hypothesis can be found in the fact that exposure to different metaphors influences the learning process. [...]

How do metaphors function in the mathematical activities of actual people? On this, Lakoff and Núñez are not very clear. When they talk about the mathematical activities of real people, they describe them in generic terms: people entertain ideas or "use cognitive mechanisms" of one sort or another to "conceptualize" this or that. Presumably, when an individual is engaged in mathematical work, that person is guided by metaphors that are somehow represented in his or her own brain. The details would depend on the specific task or problem. Unfortunately, Lakoff and Núñez do not provide any illustrations of what they suppose goes on in "real time", so this is about as much as I can say. [...]

How exactly do people use metaphors when they are learning new material, solving problems, proving theorems, and communicating with one another? I would like to have seen direct support for the metaphor hypothesis from the observation of mathematical behaviors. After a demonstration that metaphors are indeed as common as the authors believe, I would want a detailed examination of the *ways* metaphors are used in a wide variety of settings.

Madden zwraca też wcześniej uwagę, że opisy Lakoffa i Núñeza dotyczą właściwie obecności pojęć matematycznych w podręcznikach, nie są natomiast wiązane z matematyczną aktywnością *w działaniu*. Przywołuje także pewne badania, które dotyczyły właśnie takiej aktywności, obserwowanej w trakcie przyswajania sobie matematyki – m.in. opisywały różne, w gruncie rzeczy dysfunkcjonalne oraz idiosynkratyczne, metafory studentów uczących się podstaw rachunku różniczkowego: zadziwiające było to, że studenci ci potrafili w końcu dotrzeć do intuicji uważanych za standardowe w tej dziedzinie.

Madden stwierdza, że Lakoff i Núñez stosują swoje metafory w tak wielu kontekstach i tak różnorodnych funkcjach, że samo pojęcie metafory zaczyna zatracać wyraźne znaczenie. Zauważa także, iż hipoteza, że metafory nie są arbitralne i że mają bogatą wewnętrzną strukturę jest hipotezą empiryczną i jako taka wymaga badań empirycznych, których autorzy na razie nie dostarczają. Wskazuje wreszcie, że istnieją opisy alternatywne do propagowanych przez autorów, jeśli chodzi o techniki analizy pojęć matematycznych. W uwagach kończących recenzję pisze m.in. (Madden 2001, 1187):

> If I think about the portrayal of mathematics in the book as a whole, I find myself disappointed by the pale picture the authors have drawn. In the book, people formulate ideas and reason mathematically, realize things, extend ideas, infer, understand, symbolize, calculate, and, most frequently of all, *conceptualize*. These plain vanilla words scarcely exhaust the kinds of things that go on when people do mathematics. They explore, search for patterns, organize data, keep track of information, make and refine conjectures, monitor their own thinking, develop and execute strategies (or modify or abandon them), check their reasoning, write and rewrite proofs, look for and recognize errors, seek alternate descriptions, look for analogies, consult one another, share ideas, encourage one another, change points of view, learn new theories, translate problems from one language to another, become obsessed, bang their heads against walls, despair, and find light. Any one of these activities is itself enormously complex cognitively – and in social, cultural, and historical dimensions as well. In all this, what role metaphors play?
>
> Moving to a different perspective, I want to note that there are areas not even hinted at in the book where cognitive science is prepared to contribute to our understanding of mathematical thought. Consider this: Metaphorical ideas are frequently misleading, sometimes just plain wrong. Zariski spent most of his career creating a precise language and theory capable of holding the truths that the Italian geometers had glimpsed intuitively while avoiding the errors into which they fell. What cognitive mechanism enable people to recognize that a metaphor is not doing the job it is supposed to do and to respond by fashioning better conceptual tools? [. . .]
>
> If mathematical thinking is like other kinds of thinking in its use of metaphors, what distinguishes mathematical thinking may be the exquisite, conscious control that mathematicians exercise over how intuitive structures are used and interpreted. We can step back from our own thinking and critically examine our attempts at meaning-making. This, I would venture, is as fundamental a cognitive mechanism as any mentioned by Lakoff and Núñez.

3.2.7 Elglay, Quek

Większa część tej recenzji to zwięzłe omówienie treści *Where mathematics comes from*. Swoje uwagi krytyczne autorzy przedstawiają w formie krótkich punktów, piszą m.in., że (Elglay, Quek 2009, 6):

1. Lakoff i Núñez, pisząc o ucieleśnieniu matematyki nie zwracają uwagi na nasze wyposażenie biologiczne – czy np. miało ono wpływ na powszechność systemu dziesiątkowego?

2. Elglay i Quek nie zgadzają się z zasadnością metafory opisującej *zero*. Wskazują na dość złożony proces dochodzenia do tego pojęcia w rozwoju matematyki.

3. Możliwości metaforyzowania powinny być chyba także zależne od takich czynników jak np.: doświadczenie, wykształcenie, różnice kulturowe.

4. Podkreśla się, że w książce brakuje jakiejkolwiek informacji o tym, czy autorzy przeprowadzili badania dotyczące tego, jak o swojej aktywności intelektualnej mówią zawodowi matematycy. Podobnie, brak też informacji o tym, jak *uczymy* się matematyki.

5. Książka mogłaby właściwie zostać skrócona do pierwszego i dwóch ostatnich rozdziałów: rozdziały pośrodku właściwie powielają jeden i ten sam schemat eksplikacji. Nadto, podzielenie bibliografii na działy tematyczne utrudnia odnajdywanie informacji. Od siebie dodajmy, że bibliografia ta – w naszym uznaniu – zawiera poważne luki, co najmniej w części dotyczącej prac matematycznych.

3.2.8 Schiralli, Sinclair

Nie jest to recenzja, lecz artykuł nawiązujący do *Where mathematics comes from*. Autorzy deklarują, iż ich propozycje mają pozwolić na usunięcie wielu nieporozumień dotyczących koncepcji Lakoffa i Núñeza. Istotnie, ważnym prowadzonym przez nich rozróżnieniem (niedostrzeganym przez Lakoffa i Núñeza) jest dystynkcja pomiędzy *matematyką pojęciową* (*conceptual mathematics*) oraz *matematyką wyobrażeniową* (*ideational mathematics*). Mamy oczywiście wątpliwości, czy proponujemy dobre polskie tłumaczenie drugiego z tych terminów – można próbować szukać lepszego. Oto jak autorzy widzą owo rozróżnienie (Schiralli, Sinclair 2003, 81):

> [...] *conceptual mathematics* (CM): this is mathematics as a subject-matter or discipline. The discipline of mathematics in its core purposes is a public activity, an ongoing game in progress, whose rules are continuously negotiated as shared (even if not perfectly shared) meanings among the participants. According to Devlin's (1994) characterisation,

> the core purpose of mathematics is the pursuit of patterns: the patterns of number and counting are the subject matter of number theory, while geometry studies patterns of shapes. Devlin also identifies those patterns of reasonong that underlie mathematical logic and those patterns of motion that are subject matter of calculus. Patterns of position and closeness are the study of topology and probability theory attends to patterns of chance. [...]
>
> A mathematical concept, therefore, is a publicly accessible tool – with a history and a future – involved in pursuing, representing, exploring, and manipulating patterns and pattern possibilities. This tool may continue to have utility in its present form, may be improved in future, or even supplanted by newer tools as yet unrepresented. The significance of a mathematical concept lies in the way it connects with related concepts – with the logical patterns of the connective rules functioning as the medium within which mathematical inquiry publicly proceeds.
>
> Next, and this is very important: these CM concepts are not necessarily the same as the mathematical ideas that individual mathematicians (experienced or novice) may form of them. CM concepts are public representations; they exist outside in public space of shared meanings. As such they are best kept distinct from the internal representations that given people will form of them. How an individual represents these concepts to herself is what we will call *ideational mathematics* (IM) and will probably be influenced by many experiential and genetic factors.

Ilustrują powyższe rozróżnienie rozumieniami pojęcia *pochodnej*, przywołując artykuł Thurston 1994, w którym sprawa ta jest wnikliwie i ciekawie omówiona. W dalszej części artykułu przypominają także o ważnych badaniach Sierpinskiej nad rozumieniem pojęć matematycznych (Sierpinska 1994). Wedle tej autorki, na akt rozumienia pojęcia składają się: identyfikacja, rozróżnienie, uogólnienie oraz synteza.

* * *

Nie omawiamy w tym miejscu wielu dalszych recenzji, komentarzy, przyczynków do książki Lakoffa i Núñeza. Zainteresowany czytelnik zechce zajrzeć np. do: Paulos 2002, Goldin 2001, Gold 2001. Odpowiedź autorów na tę ostatnią recenzję można znaleźć w sieci – Lakoff, Núñez 2001.

3.3 Wątpliwości filozoficzne

Podamy, tytułem przykładu, jedynie dwie takie wątpliwości, w bardzo skrótowej formie. Gdyby chcieć zaangażować się w bardziej poważną dyskusję na te tematy trzeba byłoby dokonywać nie tylko skrupulatnych porównań propozycji autorów z innymi współczesnymi poglądami w filozofii matematyki, ale również istotnie korzystać z olbrzymiego materiału historycznego, ukazującego w jaki sposób tworzono matematykę.

3.3.1 Agnostycyzm matematyczny

Nasza podstawowa wątpliwość dotyczy utożsamiania przez Lakoffa i Núñeza całości matematyki z matematyką ucieleśnioną. Otóż uważamy za nieco bałamutne utożsamianie przez nich – o ile dobrze rozumiemy – *poznawalnej* matematyki z *istniejącą* matematyką. Nasza propozycja jest skromniejsza – nie staramy się w tej kwestii dokonywać drastycznych rozstrzygnięć:

Pozwólmy sobie mianowicie na żywienie przekonania, że:

1. Być może, istnieje transcendentalna matematyka.
2. Jej istnienie jest całkowicie obojętne z punktu widzenia matematyki uprawianej przez ludzi.

Przekonanie to oddziela, jak sądzimy, praktykę badawczą matematyki (tej ludzkiej) od życzeniowych poglądów na temat matematyki (zarówno tej ludzkiej, jak i tej – być może istniejącej – transcendentalnej). Jest wyrazem *agnostycyzmu* matematycznego, jeśli można użyć tu takiego sformułowania.

3.3.2 Czymże miałaby być metaforyczna dedukcja?

Matematyka opiera się na różnych filarach: dedukcji, obliczeniach, intuicji, tworzeniu pojęć i operowaniu nimi. Koncepcja Lakoffa i Núñeza odnosi się przede wszystkim do analizy pojęć, natomiast niewiele – właściwie nic – mówi o najbardziej podstawowej procedurze matematyki, jaką jest *dowodzenie*.

Jak wiadomo, dowodzenie nie sprowadza się do operacji czysto algorytmicznych – jest działalnością twórczą, wymagającą kreatywności umysłu. Już zakończony, wyraźnie zapisany dowód stosunkowo łatwo rekonstruować pod względem logicznym. Trudno nam natomiast wyobrazić sobie, że tworzeniem dowodów w ogólności miałyby sterować jakieś – choćby i nawet formułowane w terminach metaforycznych – generalne reguły postępowania, skuteczne we wszystkich przypadkach. Można oczywiście pisać o heurystykach dowodowych (zob. np. Polya

1964) lub starać się dokonywać takich analiz, jakie w świetny sposób podano w Lakatos 1976. Można próbować ogarnąć podstawy matematyki lub jej fragmenty w postaci programów badawczych, jak już to wielokroć czyniono. Pozwolimy sobie stwierdzić, że prawdopodobnie pojęcie *dowodu matematycznego* będzie ulegało stałej ewolucji, wraz z rozwojem matematyki.

4 Matematyczny umysł i matematyczny świat

Propozycje Lakoffa i Núñeza warto skonfrontować z innymi stanowiskami w kwestii matematyczności umysłu oraz matematyczności świata. Są to oczywiście kwestie zawiłe, nie można ich należycie przedstawić w krótkim tekście, wymagają wnikliwego rozpatrzenia poglądów obecnych w filozofii matematyki. Tutaj ograniczymy się jedynie do uwag konfrontujących propozycje Lakoffa i Núñeza z niektórymi poglądami Michała Hellera, który – jak dobrze wiadomo – jest orędownikiem tezy o tym, iż Wszechświat jest matematyczny (por. np. Heller 1997, 1998) oraz do zacytowania kilku fragmentów z książki Michniewicz 2004. Przypomnijmy proponowaną przez Hellera typologię wszechświatów ze względu na ich „stopień matematyczności":

1. *Wszechświat całkowicie niematematyczny (całkowicie irracjonalny).* Byłby to Wszechświat, w którym nie obowiązują zasady (żadnej) matematyki i logiki. Twór taki byłby sprzeczny. Nie mógłby zatem istnieć.

2. *Wszechświat całkowicie niepoznawalny (bardzo złośliwy).* Heller przywołuje tu jako przykład hipotetyczny świat, który znajdować może się w jedynie dwóch stanach, powiedzmy 0 oraz 1, przy czym ciąg tych stanów nie jest *algorytmicznie ściesnialny*. Ma to oznaczać, że nie istnieje algorytm pozwalający przewidywać kolejne przyszłe stany świata. Zbiór liczb ścieśnialnych w odcinku $[0, 1]$ ma miarę zero, a więc prawie wszystkie liczby z tego odcinka (zapisane jako ciągi zerojedynkowe) miałyby reprezentować takie właśnie „złośliwe", niepoznawalne matematycznie Wszechświaty. Ich teoria musiałaby – pisze Heller – być tożsama (co do swojej złożoności) z nimi samymi. Fizyk zbudować może teorię prostszą od opisywanego przez nią obiektu tylko w przypadku, gdy ma do czynienia właśnie z ciągiem algorytmicznie ścieśnialnym. Fizyka odeszła jednak od opisów czysto jakościowych, uwzględniając różne zabiegi idealizacji oraz aproksymacji. To umożliwia tworzenie modeli matematycznych przybliżających opisywane zjawiska.

3. *Wszechświaty „łagodnie złośliwe".* Tu jako przykład podaje Heller Wszechświat, w którym siła grawitacji pomiędzy dwiema masami nie działa (zgod-

> nie z prawem Newtona) odwrotnie proporcjonalnie do drugiej potęgi odległości między nimi, lecz odwrotnie proporcjonalnie do odległości między nimi podniesionej do potęgi $1,999$. Ma to oczywiście konsekwencje dla skomplikowania kształtu orbit planet, które stają się krzywymi na ogół nieokresowymi i niezamkniętymi. To z kolei powoduje, że szukanie praw opisujących prawidłowości takiego Wszechświata staje się wielce mozolne.

Heller uważa matematyczność świata za tę jego cechę, dzięki której można go badać za pomocą metod matematyczno-empirycznych. Z przykładów powyższych widać jednak także, że mogą istnieć światy, posiadające strukturę matematyczną, ale nie poddające się badaniu przez racjonalne podmioty. Heller wyróżnia więc dwa rodzaje światów:

1. *świat poznawczo matematyczny* – może być badany metodami matematycznymi,
2. *świat ontycznie matematyczny* – świat, który nie jest całkowicie niematematyczny.

Światy ontycznie matematyczne, lecz nie poznawczo matematyczne mogą istnieć. Nie mogą natomiast istnieć, wedle Hellera, światy pozbawione matematyczności w sensie ontologicznym.

Dystynkcje przeprowadzone przez Hellera są klarowne. Ciekawym zadaniem byłoby, jak sądzimy, dokładniejsze scharakteryzowanie światów „złośliwych" matematycznie – np. zaproponowanie bardziej subtelnych miar „stopnia niedostępności" takich światów. Naturalnymi kandydatami na środki opisu zdają się być tutaj konstrukcje rozważane w teorii rekursji (stopnie obliczalności itp.) lub w badaniach liczb przestępnych, liczb obliczalnych, liczb definiowalnych.

Powinno być widoczne, że propozycje Hellera nie pozostają w zgodzie z wizją Lakoffa i Núñeza. Osobiście skłaniamy się raczej ku koncepcji matematyczności świata niż ku koncepcji, iż ucieleśniona matematyka wyczerpuje całość matematyki.

Obszernie o matematyczności świata – odwołując się przede wszystkim do ustaleń fizyki współczesnej – pisze Tomasz Michniewicz (Michniewicz 2004). Odnosi się m.in. do (matematycznych aspektów) związków między umysłem a światem, pisząc (Michniewicz 2004, 39):

> Niektórzy uważają wprawdzie, iż zagadnienie „matematyczności przyrody" jest nieporozumieniem. Przedstawiana jest wówczas następująca argumentacja: przyroda nie jest matematyczna, to jedynie nasz sposób myślenia i postrzegania jest matematyczny (my, ludzie, sami

„wymyśliliśmy” matematykę), zatem w zmysłowym i intelektualnym poznawaniu świata następuje „rzutowanie” matematyki mózgu na postrzegane otoczenie. Rozumowanie takie nie wydaje się spójne w sensie antropicznym [Tu przypis: W rozumieniu tzw. zasady antropicznej]. Jeśli bowiem uznać, iż człowiek (rozum) jest elementem świata i pojawił się jako wynik określonej ewolucji kosmicznej, wówczas jego „strukturalna” odmienność od otoczenia (matematyczny rozum w niematematycznym świecie) byłaby rzeczą zaskakującą, wręcz wymagającą „ręcznej” ingerencji ze strony Absolutu w proces powstawania człowieka. Jak każde założenie komplikujące model, również i to, w kontekście wiedzy metodologicznej oraz treści zasady prostoty (zwanej też brzytwą Ockhama) wydaje się mało prawdopodobne [Tu przypis: Pojęcia tego nie należy mylić z idealnością w sensie platońskim. W tym kontekście wszystkie obiekty matematyczne są „idealne”; wówczas zwrot „idealizacja struktur matematyki” jest określeniem groteskowym. Termin stanowi nazwę własną o znaczeniu jak w tekście].

Za ciekawe uznajemy też uwagi Michniewicza dotyczące tego, jak fizycy traktują obiekty swojej dyscypliny, której – jak wiadomo – bez stosowania aparatu zaawansowanej matematyki uprawiać nie sposób. Autor twierdzi (na stronie 43), że:

1. Fizycy traktują matematykę po platońsku, realistycznie, jako niezależną od poznającego podmiotu.
2. Ujmują ją jednocześnie nominalistycznie, czego wyrazem miałoby być jednakowe traktowanie obiektów matematycznych i fizycznych.
3. Fizycy traktują matematykę empirycznie: kryterium prawdy staje się eksperyment. Matematyka „czysta” w takim ujęciu nie istnieje.

Autor zwraca uwagę na niektóre niekonsekwencje w podejściu fizyków do matematyki, wspomnianym powyżej. Ze swej strony dodajmy, że trudno nam zgodzić się z poglądem o nieistnieniu „czystej” matematyki. Nie chodzi przy tym o to, że pewne pojęcia, konstrukcje, wyniki matematyczne nie mają (dzisiaj) bezpośredniego przełożenia na stany rzeczy badane w fizyce (np. rozważania w teorii mnogości dotyczące istnienia dużych liczb kardynalnych). Uważamy, że nie można *a priori* wykluczyć, że pewne działy matematyki w żadnym sensie nie byłyby inspirowane rzeczywistością badaną przez fizyków. Autor używa terminu „matematyka nadwyżkowa” dla oznaczenia tych fragmentów matematyki, które nie reprezentują jakichś faktów fizycznych. Ocenia też następująco podejście fizyków do matematyki (Michniewicz 2004, 43–44):

> Fizycy zatem są wysoce niekonsekwentni w swym podejściu: przypisując matematyce charakter uniwersalny i aprioryczny, traktują ją również, w razie potrzeby, jako środek pozyskiwania wiedzy o faktach przyrodniczych (matematyka jako język plus narzędzia poznawcze). Jest więc dla nich matematyka swoiście oryginalnym tworem: nauką *a priori* wykorzystywaną do konstruowania aposteriorycznych dyscyplin służących poznawaniu świata.
>
> Takiej dwoistości ujęcia sprzyja brak epistemologicznego kryterium matematyki w kontekście jej obiektywności. Nie potrafimy bowiem, posługując się własnym intelektem, przetestować hipotezy obiektywności tej nauki. Nie potrafimy nawet w sposób ogólny odnieść się do hipotez bardziej szczegółowych, na przykład: czy relacja obiektów matematycznych do fizycznych jest taką samą jak relacja obliczeń (tzw. rachunków) do procesów.
>
> Wnioski te, artykułowane przez filozofów nauki i w niemy sposób akceptowane przez samych fizyków, usprawiedliwiane są coraz głębszym, w miarę rozwoju nauki, odchodzeniem od „zdroworozsądkowego” pojmowania rzeczywistości naukowej. Szczególnie istotne jest tu postępujące rozmywanie się (lub zanik) pojęć klasycznych, jak na przykład materialności [Tu przypis: Pociąga to zatratę rozróżnienia obiektów na matematyczne (konstrukty) i fizyczne (faktualne) i upłynnia granicę między obiema naukami: matematyką i fizyką.], czasowości lub przyczynowości.

Michniewicz twierdzi, że konstruowanie struktur modelowych (w badaniach fizycznych) przebiega etapami, przy czym na każdym z nich czynione są stosowne założenia. Wspomniana rozprawa zawiera szereg ciekawych obserwacji na temat „tworzywa” modeli matematycznych reprezentujących rzeczywistość fizyczną. Przypomina o zależności owych modeli od dostępności środków obecnych w matematyce danego okresu. Dostrzega matematyczne aspekty, kryjące się za brakiem uzgodnienia między opisem na poziomie kwantowym oraz na poziomie relatywistycznym. Część trzecia rozprawy Michniewicza zawiera m.in. uwagi na temat sposobów klasyfikowania modeli wykorzystywanych w fizyce. Subtelne analizy autora dotyczące współczesnej postaci paradygmatu relatywistycznego, paradygmatu kwantowego, prób unifikacji całości fizyki prowadzą go do uznania hipotezy o matematyczności świata za dość dobrze potwierdzoną, por. np. (Michniewicz 2004, 133):

> Refleksja w odniesieniu do naukowej ewolucji modeli klasyfikowanych w sensie jak powyżej ponownie prowadzi do oczywistego teraz stwierdzenia (artykułowanego już w poprzednich częściach pracy), iż matematyczność poznania nie ma charakteru akcydentalnego, a przy tym raczej nie jest „projekcją" ludzkich nawyków mentalnych na świat i struktury nauki. Można dyskutować, czy gdyby matematyczność została „narzucona" poznaniu przez człowieka, wciąż powstawałyby modele błędne. W naturalnym dążeniu staralibyśmy się bowiem kreować wyłącznie struktury doskonałe i jedynie naszej nieudolności i niedbałości przypisywać by można pojawianie się modeli próbnych lub jawnie chybionych. Wówczas jednak, jak się wydaje, moglibyśmy oczekiwać stopniowej optymalizacji naszego postępowania do sytuacji, w której modelowanie udawałoby nam się „coraz lepiej". Tego jednak nie obserwujemy [Tu przypis: Przeciwnie, z im trudniejszymi merytorycznie i odleglejszymi od zmysłowo postrzegalnych obszarami emulacji mamy do czynienia, tym trudniejszy i bardziej pracochłonny (wymagający większej liczby prób) wydaje się proces kreowania struktur modelowych.]. Struktury modelowe wydają się zatem obecne w świecie matematyki w niejako naturalny sposób i zdają się równie „naturalnie" identyfikować ogólne własności rzeczywistości, w której się znajdujemy. My staramy się jedynie wyróżniać je spośród innych struktur. Jeśli wyróżnienie takie nam się udaje, posługujemy się odkrytym modelem w celach poznawczych, jeśli nie, pozostają nam dalsze poszukiwania. Tym samym identyfikacja modeli matematycznych i poznanie naukowe w pewnym sensie się utożsamiają, a matematyczność poznania jest tego ostatniego naturalną („zewnętrzną") i niepomijalną własnością. Wszechświat (a nie jedynie nasz intelekt) rzeczywiście wydaje się być głęboko „matematyczny".

W naszym subiektywnym odczuciu, teza o matematyczności świata, wspierana wynikami nauk szczegółowych wydaje się bardziej przekonująca od deklaracji Lakoffa i Núñeza o całkowitym ucieleśnieniu matematyki oraz przydawaniu wszelkiej matematyce transcendentalnej statusu urojenia.

5 Uwagi o dydaktyce matematyki

Propozycje związane z rozumieniem matematyki jako ucieleśnionej zdążyły już doczekać się zastosowań w dydaktyce matematyki, przynajmniej w postaci zaleceń, jak ową dydaktykę skutecznie uprawiać – por. np. Núñez, Edwards, Matos 1999. Poglądy na to, jaka powinna być dydaktyka matematyki ulegały w dziejach zmianom. Uczono matematyki opierając się na wzorcu z *Elementów* Euklidesa, proponowano uwzględnianie metod heurystycznych, indukcyjnych, eksperymentowano z programem Nowej Matematyki (*New Math*), itd. Wykorzystywano przy tym ustalenia psychologii poznawczej, brano pod uwagę rozwój technologiczny, czasami o kształcie dydaktyki decydowały czynniki natury politycznej, a ponadto – co oczywiste – dydaktyka matematyki musiała jakoś odzwierciedlać rozwój samej matematyki.

W cytowanym wyżej artykule znajdujemy pewne deklaracje dotyczące zastosowań ustaleń matematyki ucieleśnionej w dydaktyce (Núñez, Edwards, Matos 1999, 61–62):

> The study of the conceptual structure of mathematics from an embodied point of view shows how mathematics is built up of such informal, everyday experiences and ideas. For this reason, mathematics cannot be as a pure and 'abstract' discipline. Our mathematical conceptual system, like the rest of our conceptual system, is grounded in our bodily functioning and experiences. Seen from this perspective, situated cognition is not about 'situating' mind-free truths in meaningful contexts, but rather about examining how the human creation of mathematics arises from sense-making which is not arbitrary precisely *because* it is bodily grounded.
>
> This view has important entailments for mathematics education. Rather than looking for better ways to help students learn 'rigorous' definition of pre-given mathematical ideas, we need to examine the kinds of understanding and sense-making we want students to develop. We should look at the everyday experiences that provide the initial grounding for the abstractions that constitute mathematics. This is not necessarily an easy undertaking, since the grounding structures are often unconscious and taken-for-granted. At times, this grounding can be found in immediate physical experience, as in the case of work with early arithmetic, space, size, and motion. At other times, the grounding for a mathematical idea takes place indirectly, through a chain of conceptual mappings whose nature may be obscured by conventional language, but which can be revealed by utilizing the analytic tools of contemporary embodied cognitive science. In either case, what is important is to re-examine mathematical ideas in order to create instruction that complements the ways our conceptual systems naturally work.
>
> In addition, we should provide a learning environment in which mathematical ideas are taught and discussed with all their human embodied

> and social features. Students (and teachers) should know that mathematical theorems, proofs, and objects are about ideas, and that these ideas are situated and meaningful because they are grounded in our bodily experience as social animals. Providing an understanding of the historical processes through which embodied ideas have emerged can support this aim. This does not mean simply presenting a few names and dates as a prelude to teaching the 'real' mathematics. It means talking about the motivations, zeitgeist, controversies, difficulties, and disputes that motivated and made possible particular developments in mathematics.

Przytaczamy tak obszerny cytat, aby nie zostać posądzonymi o wyrywanie z kontekstu stwierdzeń autorów. W naszym przekonaniu, deklaracje te są przede wszystkim wyrazem myślenia życzeniowego. Odnosimy też wrażenie, że poglądy te stanowią jakby przeciwległy biegun dla – porzuconego jako nieskuteczny – programu *New Math*. Podobnie jak ów nieszczęsny program wydają się być nawoływaniem do swoistego radykalizmu w nauczaniu matematyki: uczniowie mieliby poznawać matematykę przede wszystkim poprzez oswajanie się z metaforycznym ujmowaniem pojęć. Nie sądzimy, aby dobrze to wróżyło uzyskanemu przez nich w ten sposób poziomowi wykształcenia matematycznego. Dodajmy wreszcie, że nie sądzimy również, aby zawodowy matematyk tworzył matematykę jakoś lepiej, sprawniej, w głębszy sposób, bardziej odkrywczo, itp. gdyby w każdym momencie konfrontował swoje działania z koncepcją ucieleśnionej matematyki.

6 Garść metafor matematycznych

Pozwólmy sobie w tym miejscu przytoczyć pewne – z reguły dobrze znane – wypowiedzi matematyków i filozofów o matematyce, które same w sobie metaforycznie oddają specyfikę tej dyscypliny. Wybrane zostały one całkowicie *ad hoc*, bez żadnej systematyczności bądź prób ich klasyfikowania.

1. Matematyka podobna jest do wieży, której fundamenty położono przed wiekami, a do której dobudowuje się coraz wyższe piętra. Aby zobaczyć postęp budowy, trzeba iść na piętro najwyższe, a schody są strome i składają się z licznych stopni. Rzeczą popularyzatora jest zabrać słuchacza do windy, z której nie zobaczy ani pośrednich pięter, ani pracą wieków ozdobionych komnat, ale przekona się, że gmach jest wysoki i że wciąż rośnie. Hugo Steinhaus: *Czem jest matematyka i na czem polega jej postęp?*

2. Między duchem a materią pośredniczy matematyka. Hugo Steinhaus.

3. Boga nie obchodzą nasze problemy matematyczne. On całkuje empirycznie. Albert Einstein.

4. Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit. Georg Cantor.

5. Jednostka urojona jest nieomal pomostem między bytem i niebytem, pięknym i cudownym wynalazkiem boskiego ducha. Gottfried Wilhelm Leibniz.

6. Matematyka nie posiada symboli na mętne myśli. Henri Poincaré.

7. Matematyka powstaje w procesie dialogu z materią matematyczną. Imre Lakatos.

8. Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki. Immanuel Kant.

9. Twierdzenia matematyczne uważane są za prawdziwe, ponieważ w niczyim interesie nie leży, by uważać je za fałszywe. Monteskiusz.

10. W szkole nie matematyka ma być nowoczesna, ale jej nauczanie. René Thom.

11. The idea that theorems follow from the postulates does not correspond to simple observation. If the Pythagorean theorem were found to not follow from the postulates, we would again search for a way to alter the postulates until it was true. Euclid's postulates came from the Pythagorean theorem, not the other way around. Richard Hamming: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. *The American Mathematical Monthly* **87** (2), February 1980, 81–90.

12. Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty —a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry. Bertrand Russell: *Study of Mathematics*.

13. Anyone who cannot cope with mathematics is not fully human. At best he is a tolerable sub-human who has learned to wear shoes, bathe, and not make messes in the house. Robert Heinlein: *Time Enough For Love* (1973).

14. U podstaw wszelkiego rozumowania mamy zgadywanie nie poddane żadnym regułom, albo dedukcję poddaną rygorowi reguł. Andrzej Grzegorczyk.

15. Przez każde trzy punkty przechodzi prosta, o ile jest dostatecznie gruba. Aksjomat Steinhausa.

16. Matematyka jest produktem myśli ludzkiej, niezależnej od doświadczenia, jednak wspaniale pasuje do świata realnego i tak świetnie go tłumaczy. Albert Einstein.

17. Wszystko należy upraszczać jak tylko można, ale nie bardziej. Albert Einstein.

18. Matematyka jest sztuką nadawania tych samych nazw różnym rzeczom. Henri Poincaré.

19. Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty, matematyk wybitny – analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami. Stefan Banach.

20. Matematyk to ślepiec w ciemnym pokoju szukający czarnego kota, którego tam w ogóle nie ma. Karol Darwin.

21. Fizyka jest zasadniczo nauką opartą na intuicji i konkretnych faktach. Matematyka stanowi jedynie narzędzie dla zapisywania praw, które rządzą zjawiskami w przyrodzie. Albert Einstein.

7 Słowo końcowe

Jakie ewentualne konkluzje przynosi powyższy tekst? Postarajmy się, w możliwie krótki sposób zrekapitulować poczynione ustalenia:

1. Metafory pojęciowe istotnie pełnią jakąś rolę przy tworzeniu niektórych pojęć matematycznych. Jednak to nie tylko one pełnią tę rolę. *Abstrakcja*, *uogólnianie*, *analogia*, *wyobrażanie sobie* – to bodaj ważniejsze w tym względzie procedury. Tworzenie metafor poznawczych na sposób rozumiany przez autorów nie zdaje sprawy np. z różnicy między *opisywaniem* a *definiowaniem* obiektów (a co za tym idzie, również pojęć).

2. Wiele aktywności matematycznych związanych jest właśnie z *porzuceniem* metaforyzowania, wyraźnym rozdzieleniu intuicji oraz roboty formalnej. Podać można niezliczone przykłady, gdy intuicje bazowane na doświadczeniu potocznym *zwodzą* nas, nawet w przypadku rozważania całkiem prostych obiektów i konstrukcji matematycznych.

3. Metafory być może dobrze zdają sprawę z tworzenia prostych pojęć matematycznych. Jednak od pewnego *poziomu zaawansowania* teorii (a czasem nawet przy tworzeniu całkiem nowych teorii) to chyba nie one odpowiadają za twórczą działalność matematyków.

4. Na drodze jedynie tworzenia metafor nie można chyba wytłumaczyć ani *zmienności* naszych intuicji matematycznych, ani faktu *konfliktu* między pewnymi intuicjami. Tworzenie pojęć matematycznych jest silnie osadzone w historii matematyki.

5. Być może ładnie dobrane metafory pojęciowe mogą wspomagać *dydaktykę* matematyki. Ich rola jednak pozostaje pomocnicza – nie wyczerpują one ogółu umiejętności matematycznych. Potwierdzono, iż uczący się matematyki mogą różnić się między sobą w stosowaniu metafor.

6. Podaliśmy szereg przykładów, w których tworzenie metafor pojęciowych w stylu Lakoffa i Núñeza nie wystarcza do *rozumienia* złożonych pojęć matematycznych (np.: nieprzeliczalność, struktury topologiczne i różniczkowe, itd.). Można szukać dalszych tego typu przykładów, w każdej właściwie dyscyplinie matematycznej.

7. Koncepcja Lakoffa i Núñeza dla swojego uprawomocnienia wymaga konkretnych badań *empirycznych*, poddać takim badaniom należy zarówno proces tworzenia matematyki, jak i proces nabywania wiedzy matematycznej.

8. Deklaracje filozoficzne autorów nie mają, w naszej opinii, należytego wsparcia. W szczególności, ich krytyka Platonizmu matematycznego ma wiele cech *myślenia życzeniowego*.

9. To, że koncepcja tworzenia metafor pojęciowych dobrze tłumaczy wiele faktów dotyczących rozumienia w językach etnicznych, *nie oznacza* jeszcze, że jest ona możliwa do zastosowania w identyczny sposób do innych systemów pojęciowych, w tym do matematyki. Podobne zastrzeżenia można chyba będzie sformułować, gdy ktoś napisze książkę *Where physics comes from. How the embodied mind brings physics into being*, w której będzie zarówno próbował wywodzić na drodze konstrukcji metafor pojęciowych wszelkie idee fizyki teoretycznej, łącznie z mechaniką kwantową, teorią względności, teorią strun, itd., jak też historię fizyki, łącznie z niezliczonymi jej hipotezami, które okazywały się po kolei błędne, lecz bynajmniej nie tamowały dalszego rozwoju tej dyscypliny.

10. Nasze uwagi krytyczne mogą wydawać się bezładną zbieraniną poczynionych *ad hoc* zarzutów, lecz nie było naszym zamiarem podanie jakiejś spójnej, w miarę kompletnej alternatywy dla koncepcji ucieleśnionej matematyki, to przekracza nasze skromne możliwości. Książka Lakoffa i Núñeza zasługuje na krytykę, lecz zasługuje również na uwagę. Jest odważną (w wielu miejscach niestety pochopnie brawurową) próbą zmierzenia się z fundamentalnymi pytaniami dotyczącymi, m.in.: epistemologii matematyki, jej ontologii, fascynującego zjawiska jakim jest twórczość matematyczna, bardzo trudnych problemów związanych ze skutecznym nauczaniem matematyki, wreszcie miejsca matematyki w całości kultury.

Bibliografia

Abbot, E.A. 1952. *Flatland. A Romance of Many Dimensions*. Dover Publications, Inc., New York.

Aubry, M. 2009. Metaphors in Mathematics: Introduction and the Case of Algebraic Geometry (September 26, 2009). Available at SSRN:

http://ssrn.com/abstract=1478871

http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1478871

Auslander, J. 2001. Embodied mathematics. *American Scientist* **89**, 366–367.

Batóg, T. 2000. *Dwa paradygmaty matematyki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Błaszczyk, P. 2007. *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda "Stetigkeit und irrationale Zahlen"*. Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Cantor, G. 1882. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* **XX**, 113–121.

Dedekind, R. 1872. *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig. Wydanie 10.

Devlin, K. 1994. *Mathematics: The Science of Patterns*. W.H. Freeman, New York.

Devlin, K. 2008. How do learn math? *Mathematical Association of America*. Dostępne na:

http://www.maa.org/devlin_12_08.html

Dewdney, A.K. 1984. *The Planiverse*. Poseidon.

Dewdney, A.K. 2000. The Planiverse Project: Then and Now. *The Mathematical Intelligencer.* **22**, 46–51.

Elglaly, Y.N., Quek, F. 2009. Review of "Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being" by George Lakoff and Rafael E. Nuñez. *CHI 2009*, Boston.

Gardner, M. 1997. *The Last Recreations. Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications.* Springer-Verlag, New York. Tłumaczenie polskie (bez daty wydania): *Ostatnie rozrywki. Hydry, jajka i inne mistyfikacje matematyczne*. Prószyński i S-ka.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Gold, B. 2001. Review of Lakoff, Núñez 2000. Dostępne na:

www.maa.org/reviews/wheremath.html

Goldin, G.A. 2001. Counting on the metaphorical. *Nature* **413**, 18–19.

Grygiel, W., Hohol, M., Piechowicz, R. 2011. Zmatematyzowana metafora i zmetaforyzowana matematyka. *Logos and Ethos* vol. **31**, no. **2**, 147–168.

Heller, M. 1997. Czy świat jest racjonalny? *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* **XX**, 66–78.

Heller, M. 1998. Czy świat jest matematyczny? *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* **XXII** (1998), 3–14.

Henderson, D.W. 2002. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *The Mathematical Intelligencer* **24** (1), 75–76.

Hilbert, D. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* **95**, 161–190. Polskie tłumaczenie w: Murawski, R. 2003. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 319–340.

Hinton, C.H. 1907. *An Episode of Flatland. How a Plane Folk Discovered the Third Dimension: to which is added, an outline of the history of Unæa*. Swan Sonnenschein and Co., London.

Hohol, M.L. 2011. Matematyczność ucieleśniona. W: B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, M. L. Hohol (red.) *Oblicza racjonalności.* Copernicus Center Press, Kraków, 143–166.

Kajfosz, J. 2010. *U wrót przestrzeni. Przesłanie Biblii w świetle geometrii wielowymiarowej*. Oficyna Wydawnicza VOCATIO, Warszawa.

Kanamori, A. 1994. *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Springer-Verlag, Berlin.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge.

Lakoff, G., Johnson, M. 1980. *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2001. Replay to Bonnie Gold's Review. Dostępne na: www.maa.org/reviews/wheremath_reply.html

Lanczos, C. 1967. *Albert Einstein i porządek wszechświata*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Madden, J.J. 2001. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *Notices of the AMS* **48**, 1182–1188.

Manin, Y.I. 1991. Mathematics as Metaphor. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Japan 1990*, The Mathematical Society of Japan.

Michniowski, T. 2004. *Wszechświat matematyczny*. Wydawnictwo KUL, Lublin.

Mioduszewski, J. 1996. *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116.

Núñez, R.E. 2005. Creating mathematical infinities: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics* **37**, 1717–1741.

Núñez, R.E., Edwards, L.D., Matos, J.F. 1999. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics* **39**, 45–65.

Paulos, J.A. 2001. Math at 98.6°. *The American Scholar* **70** (1), 151–152.

Polya, G. 1964. *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pogonowski, J. 2011. Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* **23**, 106–147. Dostępne na stronach:

http://inveling.amu.edu.pl/

http://www.logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf

Schiralli, M., Sinclair, N. 2003. A constructive response to ‘Where Mathematics Comes From’. *Educational Studies in Mathematics* **52**, 79–91.

Siegfried, T. 2001. Math may be not in the stars, but in ourselves. *The Dallas Morning News*, May 3, 2011.

Sierpinska, A. 1994. *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Voorhees, B. 2004. Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies* **11**, No. 9, 83–88.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. New York: Oxford University Press.

Tan, L. 1996. The Group of Rational Points on the Unit Circle. *Mathematics Magazine* **69**, No. 3, 163–171.

Thurston, W.P. 1994. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* **30** (2), 161–177.

Weber, H. 1898. *Lehrbuch der Algebra. Einleitung.* Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig.