Logika Matematyczna (I JiIN UAM)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

31V-1VI 2007

Plan na dziś

Plan na dziś:

- Informacja o aksjomatycznym ujęciu KRP.
- Informacja o wybranych własnościach metalogicznych KRP:
  - Trafność, pełność, zwartość i niesprzeczność.
  - Twierdzenie Löwenheima-Skolema.
  - Twierdzenie o postaci normalnej. Skolemizacja.
  - Twierdzenie Herbranda.
  - Nierozstrzygalność i pozytywna rozstrzygalność.
- Informacja o poprawności MDS.
- Informacja o tematach egzaminacyjnych.

Aksjomatyczne ujęcie KRP

W aksjomatycznym ujęciu KRP przyjmujemy:

- pewne formuły języka KRP jako aksjomaty;
- pewne reguły inferencji.

Aksjomaty powinny być tautologiami KRP.
Reguły inferencji powinny być niezawodne.

Aksjomaty można dobierać na różne sposoby.
Można np. za aksjomaty KRP przyjąć wszystkie podstawienia tautologii KRZ (za zmienne zdaniowe podstawiamy dowolne formuły języka KRP).

Aksjomatyczne ujęcie KRP

Reguły inferencji. Można przyjąć np. następujący zestaw reguł inferencji w aksjomatycznym ujęciu KRP:

Reguła podstawiania:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(t/x)},$$

gdzie t jest termem podstawialnym za x w φ.

Reguła odrywania:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}.$$

Reguła opuszczania dużego kwantyfikatora:

$$\frac{\varphi \rightarrow \forall x\ \psi}{\varphi \rightarrow \psi}.$$

Reguła dołączania dużego kwantyfikatora:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x\ \psi},$$

o ile x nie jest wolna w φ.

Reguła opuszczania małego kwantyfikatora:

$$\frac{(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi}.$$

Reguła dołączania małego kwantyfikatora:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\exists x\ \varphi) \rightarrow \psi},$$

o ile x nie jest wolna w ψ.

Aksjomatyczne ujęcie KRP

Dowodem formuły A ze zbioru formuł X jest dowolny skończony ciąg formuł $A_1, \ldots, A_n$ taki, że:

- A jest identyczna z A_n;
- każda z formuł A_i jest:
  - aksjomatem, lub
  - elementem zbioru X, lub
  - wnioskiem jakiejś reguły inferencji, której przesłankami są formuły występujące w ciągu $A_1, \ldots, A_n$ przed formułą A_i.

Jeśli istnieje dowód formuły A ze zbioru X, to mówimy, że A jest dowodliwa z X.

Tezą KRP jest każda formuła języka KRP, która ma dowód z aksjomatów KRP. Oznaczmy przez TW zbiór wszystkich tez KRP, a przez $TAUT$ zbiór wszystkich tautologii KRP.

Niesprzeczność KRP

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła A języka KRP taka, że zarówno A jak i $\neg A$ są dowodliwe z X. Zbiory, które nie są sprzeczne, nazywamy niesprzecznymi.

Twierdzenie. Zbiór TW tez KRP jest niesprzeczny.

Oznacza to, że w KRP nie istnieje dowód (z aksjomatów KRP) pary formuł wzajem sprzecznych.

Równoważnie, co najmniej jedna formuła języka KRP nie jest tezą KRP.

Wiemy zatem, że z samych aksjomatów logiki nie można wywieść sprzeczności.

Trafność KRP

Twierdzenie. Każda teza KRP jest tautologią KRP.

Dowód tego twierdzenia nie jest szczególnie trudny. Wystarczy mianowicie sprawdzić, że:

- każdy aksjomat KRP jest tautologią KRP;
- każda reguła inferencji KRP jest regułą niezawodną; w szczególności: jeśli jej przesłanki są tautologiami, to i jej wniosek jest tautologią.

Twierdzenie o trafności KRP pokazuje zatem, że aksjomatyka oraz zestaw reguł inferencji zostały dobrane trafnie.

Twierdzenie o trafności ustala prawdziwość inkluzji: $TW \subseteq TAUT$.

Pełność KRP

Twierdzenie. Każda tautologia KRP jest tezą KRP.

Twierdzenie to głosi, że dla każdej formuły języka KRP, która jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach istnieje jej dowód z aksjomatów KRP.

Jego dowód jest nieco trudniejszy, niż dowód twierdzenia o trafności. Nie wykracza jednak poza możliwości intelektualne osoby pełnoletniej, w tym również Filolożki.

Twierdzenie o pełności ustala prawdziwość inkluzji: $TAUT \subseteq TW$.

Twierdzenia o trafności oraz o pełności ustalają zatem łącznie prawdziwość równości: $TW = TAUT$.

Zwartość

Twierdzenie o zwartości. Wersja semantyczna. Zbiór formuł języka KRP ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model.

Wersję semantyczną Twierdzenia o zwartości można również sformułować tak:
Zbiór formuł języka KRP jest semantycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jakiś jego skończony podzbiór jest semantycznie sprzeczny.

Twierdzenie o zwartości. Wersja syntaktyczna. Zbiór formuł języka KRP jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wersję syntaktyczną Twierdzenia o zwartości można również sformułować tak:
Zbiór formuł języka KRP jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Twierdzenie Löwenheima-Skolema

Twierdzenie. Jeśli zbiór formuł języka KRP ma model, to ma model o uniwersum, będącym zbiorem przeliczalnym.

Konsekwencją tego twierdzenia jest to, że dowolny zbiór formuł języka KRP, który ma model, ma też model o uniwersum złożonym z liczb naturalnych.

Mówiąc nieco metaforycznie, z Twierdzenia Löwenheima-Skolema (wraz z pewnym twierdzeniem doń „dwoistym", udowodnionym przez Tarskiego) wynika, iż logika nie rozróżnia żadnych mocy nieskończonych.

Czasami zwraca się uwagę na rzekomo paradoksalne konsekwencje tego twierdzenia (łącznie z aksjomatem nieskończoności oraz Twierdzeniem Cantora o nierównoliczności dowolnego zbioru z rodziną wszystkich jego podzbiorów) w teorii mnogości.

Postacie normalne i skolemizacja

Mówimy, że formuła φ jest w postaci normalnej, jeśli jest ona formułą $Q_1 \ldots Q_n\, \psi$, gdzie ψ jest formułą nie zawierającą kwantyfikatorów, a $Q_1 \ldots Q_n$ jest ciągiem złożonym z kwantyfikatorów $\forall$ oraz $\exists$.

Twierdzenie o postaci normalnej. Dla każdej formuły φ języka KRP istnieje równoważna jej formuła ψ w postaci normalnej o takich samych zmiennych wolnych.
Termin „równoważna" oznacza tu, że w KRP dowodliwa jest równoważność $\varphi \equiv \psi$.

Poprzez rozszerzenie języka o nowe symbole funkcyjne można zastąpić pytanie o spełnianie formuły postaci $\forall x \exists y\, \varphi(x, y)$ pytaniem o spełnianie formuły $\forall x\, \varphi(x, f(x))$, gdzie f jest nowym symbolem funkcyjnym, niewystępującym w φ.
Procedurę tę nazywa się skolemizacją.

Postacie normalne i skolemizacja

Formułą *uniwersalną* nazywamy każdą formułę postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$, gdzie ψ jest formułą nie zawierającą kwantyfikatorów.

Twierdzenie o skolemizacji. Dla każdej formuły φ języka KRP o sygnaturze σ istnieje formuła uniwersalna ψ w języku KRP o sygnaturze powstającej przez dodanie do σ nowych symboli funkcyjnych niewystępujących w φ taka, że φ oraz ψ są spełnialne w dokładnie tych samych interpretacjach.

Procedura skolemizacji ma bardzo ważne zastosowania, zarówno w logice, jak i w informatyce.

Przypomnienie: modele Herbranda

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez *uniwersum Herbranda* dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

- (i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.
Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.

Przypomnienie: modele Herbranda

Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S.

Interpretacją Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

- $\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;
- $\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S.

Zauważmy, że uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP.

Twierdzenie Herbranda

Twierdzenie Herbranda. Niech S będzie zbiorem formuł otwartych (tj. formuł bez kwantyfikatorów). Wtedy zachodzi dokładnie jedno z dwojga:

- S ma model Herbranda;
- S jest niespełnialny (nie ma modelu), a nadto istnieje skończenie wiele formuł otrzymanych z elementów S poprzez zastąpienie zmiennych wolnych termami bez zmiennych takich, że koniunkcja tych formuł jest niespełnialna.

Drugi człon powyższej alternatywy równoważny jest warunkowi:

- Istnieje skończenie wiele formuł otrzymanych z elementów S poprzez zastąpienie zmiennych wolnych termami bez zmiennych takich, że alternatywa ich negacji jest tautologią KRP.

Ważną konsekwencją twierdzenia Herbranda jest możliwość wykazania niespełnialności zbioru formuł języka KRP w rachunku zdań.

Nierozstrzygalność KRP

Twierdzenie. Klasyczny Rachunek Predykatów jest nierozstrzygalny.

Oznacza to, że nie istnieje efektywna procedura, pozwalająca ustalać w skończonej liczbie kroków, czy dana formuła języka KRP jest, czy też nie jest tautologią tego rachunku.

Teza tego twierdzenia wydaje się intuicyjnie oczywista: skoro wszelkich możliwych interpretacji KRP jest nieskończenie wiele, to sprawdzenie, jaka (prawdziwa czy fałszywa) jest w nich wszystkich ustalona formuła nie może być dokonane w skończonej liczbie kroków.

Oczywiście, istnieje precyzyjny matematyczny dowód tego twierdzenia.

Pozytywna rozstrzygalność KRP

Istnieją efektywne procedury pozwalające w skończonej liczbie kroków ustalić dla dowolnej tautologii KRP, że jest ona tautologią.

Jedną z takich procedur jest omówiona na wykładach poprzednich metoda drzew semantycznych.

Inne z takich procedur to, m.in.:

- metoda aksjomatyczna;
- dedukcja naturalna;
- metoda rezolucji.

O poprawności MDS

W niniejszych wykładach czyniono istotny użytek z metody drzew semantycznych (MDS). Kazano słuchaczom **wierzyć**, że:

- formuła φ jest tautologią KRP wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo semantyczne formuły $\neg\varphi$ jest zamknięte;
- formuła φ jest kontrtautologią KRP wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo semantyczne formuły φ jest zamknięte;
- formuły $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tworzą zbiór semantycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo semantyczne formuły $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ jest zamknięte;
- formuła ψ wynika logicznie ze zbioru formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo semantyczne formuły $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ jest zamknięte.

Sformułujemy teraz (w znacznym uproszczeniu i bez dowodów) stosowne twierdzenia, ustalające, iż owa wiara ma mocne podstawy logiczne.

Trafność MDS

Dla wykazania trafności MDS należy udowodnić, że jeśli drzewo semantyczne formuły $\neg\psi$ jest zamknięte, to formuła ψ jest tautologią KRP. Aby takie twierdzenie poprawnie sformułować, trzeba najpierw podać precyzyjną definicję drzewa semantycznego. Dotąd pojęciem tym posługiwaliśmy się, jak to Humanistki, w sposób intuicyjny.

Zakładamy, że pojęcia: drzewa, gałęzi, itp. (objaśnione w pliku krp311.pdf) są słuchaczom znane.
Jeśli Γ jest gałęzią w drzewie τ, a τ^* jest drzewem, to przez $\tau(\Gamma \sqcup \tau^*)$ rozumiemy drzewo otrzymane z τ przez dołączenie do gałęzi Γ drzewa τ^*.

Indukcyjna definicja drzewa semantycznego. Zdefiniujemy najpierw atomowe drzewa semantyczne.

Dla dowolnych formuł φ, ψ języka KRP atomowymi drzewami semantycznymi są: ψ, $\neg\psi$,

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ | \\ \varphi \\ | \\ \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ | \\ \varphi \\ | \\ \neg\psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \vee \psi & \\ \diagup & & \diagdown \\ \varphi & & \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \varphi \rightarrow \psi & \\ \diagup & & \diagdown \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\neg\psi \\ | \\ \psi \end{array}$$

Trafność MDS

Uwaga. Z pewnych powodów wygodnie jest uważać $\equiv$ za termin zdefiniowany (np. przez $\rightarrow$ i $\wedge$) i nie rozważać drzew atomowych dla $\equiv$.
Pracujemy dalej w języku KRP bez $\equiv$.

Zakładamy również, że mamy do dyspozycji przeliczalny ciąg stałych indywiduowych $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$.

Założenie to potrzebne jest do zapewnienia poprawnego sformułowania reguł dotyczących kwantyfikatorów, a konkretnie reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$.

Dla dowolnych formuł φ, ψ języka KRP o zmiennej wolnej x oraz termu t podstawialnego w tych formułach za x atomowymi drzewami semantycznymi są:

$$\begin{array}{c} \forall x\ \psi(x) \\ | \\ \psi(t/x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists x\ \psi(x) \\ | \\ \psi(a/x) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\ \psi(x) \\ | \\ \neg\psi(a/x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\ \psi(x) \\ | \\ \neg\psi(t/x) \end{array}$$

W drzewach atomowych odpowiadających regułom $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$ żądamy, aby stała indywiduowa a nie występowała w φ — aby była jedną ze stałych z ciągu $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$.

Drzewo atomowe o korzeniu ψ będziemy oznaczać przez τ^{ψ}.

Trafność MDS

Definicja drzewa semantycznego.

- (1) Wszystkie atomowe drzewa semantyczne są drzewami semantycznymi.
- (2) Jeśli τ jest drzewem semantycznym, Γ gałęzią w τ, formuła ψ jest jednym z elementów gałęzi Γ, to drzewem semantycznym jest też każde drzewo postaci $\tau(\Gamma \sqcup \tau^{\psi})$, gdzie τ^{ψ} jest atomowym drzewem semantycznym o korzeniu ψ. Spełnione być przy tym muszą warunki nakładane na termy w regułach $R(\forall)$, $R(\exists)$, $R(\neg\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.
- (3) Jeżeli τ_0 jest drzewem semantycznym oraz dla wszystkich $n \geqslant 0$ drzewo τ_{n+1} powstaje z drzewa τ_n poprzez zastosowanie reguły (2), to $\bigsqcup \tau_n$ jest drzewem semantycznym.

W warunku (3) $\bigsqcup \tau_n$ jest najmniejszym drzewem zawierającym (jako poddrzewa) wszystkie drzewa τ_n, dla $n \geqslant 0$.

Trafność MDS

Definicja drzewa semantycznego ze zbioru S.

Jeśli S jest zbiorem formuł języka KRP, to drzewem semantycznym ze zbioru S nazywamy drzewo semantyczne, w którego tworzeniu możemy też wykorzystać następujący warunek:

- $(2')$ Jeśli τ jest drzewem semantycznym z S, Γ gałęzią w τ oraz ψ jest formułą należącą do S, to $\tau(\Gamma \sqcup \psi)$ jest drzewem semantycznym ze zbioru S (tu rozszerzamy gałąź Γ o atomowe drzewo złożone tylko z korzenia ψ).

Pojęcie drzewa ze zbioru formuł jest przydatne np. w przypadku, gdy pytamy o wynikanie logiczne jakiejś formuły z pewnego zbioru przesłanek.

Trafność MDS

Uwaga. Ten sposób mówienia o drzewach semantycznych w dalszym ciągu jest pewnym uproszczeniem. W istocie drzewa semantyczne są drzewami znakowanymi, tj. pewnymi drzewami, do wierzchołków których przypisujemy pewne formuły języka KRP.

Można też uważać drzewa semantyczne za funkcje ze skończonych zbiorów kodów (wierzchołków drzewa) w zbiór formuł języka KRP. Wtedy każdy wierzchołek drzewa semantycznego jest parą uporządkowaną $\langle i, \psi \rangle$, gdzie i jest kodem, a ψ formułą.

Jeśli para uporządkowana $\langle i, \psi \rangle$ jest wierzchołkiem tak rozumianego drzewa semantycznego τ (odpowiednio, gałęzi Γ), to powiemy, że jest ona i-tym wystąpieniem ψ w τ (odpowiednio, w Γ).
Uwaga. Indeks i określimy (za chwilę) jako pewien **ciąg** liczb.

Przypomnijmy, że wierzchołki drzewa nierozwojowego kodować możemy za pomocą ciągów o wyrazach z jakiegoś ustalonego zbioru trójelementowego, np. $\{0, 1, 2\}$:

- Korzeń drzewa otrzymuje kod $\langle 0 \rangle$.
- Niech wierzchołek x ma kod $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m \rangle$. Wtedy:
  - Jeśli x ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka y, to y otrzymuje kod $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m, 0 \rangle$.
  - Jeśli x ma dwóch bezpośrednich potomków, to otrzymują oni kody: $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m, 1 \rangle$ (tzw. lewy potomek) oraz $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m, 2 \rangle$ (tzw. prawy potomek).

Poziomy drzewa. Poziom zerowy drzewa τ to zbiór złożony z korzenia τ. Poziom $k + 1$ to zbiór bezpośrednich potomków elementów poziomu k.

Przy ustalonym kodowaniu wierzchołki drzewa możemy uporządkować liniowo (poziomowo-leksykograficznie): $x \prec y$, gdy albo poziom x jest mniejszy od poziomu y albo poziomy te są równe i ostatnia cyfra kodu x jest mniejsza od ostatniej cyfry kodu y.

Niech τ będzie drzewem semantycznym, Γ gałęzią w τ, a S zbiorem formuł języka KRP.

- Γ jest gałęzią **zamkniętą**, jeśli istnieje formuła ψ taka, że $\langle i, \psi \rangle$ oraz $\langle j, \neg\psi \rangle$ należą do Γ dla pewnych i oraz j. W przeciwnym przypadku Γ jest **otwarta**.
- τ jest **zamknięte**, jeśli każda gałąź w τ jest zamknięta.
- τ jest **drzewem dowodowym** (z S) formuły ψ, jeśli τ jest skończonym drzewem (z S) zamkniętym o korzeniu $\neg\psi$. Jeśli istnieje drzewo dowodowe (z S) formuły ψ, to mówimy, że ψ jest **T-dowodliwa** (z S) i piszemy $\blacktriangleright \psi$ (odpowiednio: $S \blacktriangleright \psi$).
- S jest **T-sprzeczny**, gdy $S \blacktriangleright \psi \wedge \neg\psi$ dla pewnego ψ.

Gdy $\langle i, \psi \rangle$ należy do Γ dla pewnego i, to mówimy też krótko, że ψ należy do Γ. Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n \ldots$ będzie wyliczeniem wszystkich termów domkniętych (tj. termów bez zmiennych) języka KRP (z włączeniem wszystkich stałych indywiduowych z ciągu $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$).

Trafność MDS

Niech $\tau = \bigsqcup \tau_n$ będzie drzewem (ze zbioru S), Γ gałęzią w τ oraz niech $\langle i, \psi \rangle$ będzie i-tym wystąpieniem formuły ψ w gałęzi Γ; $i = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Powiemy, że $\langle i, \psi \rangle$ jest zredukowane w Γ, gdy zachodzi alternatywa:

- ψ nie jest ani postaci $\forall x\ \varphi(x)$ ani $\neg\exists x\ \varphi(x)$ oraz istnieje n takie, że τ_{n+1} powstaje z τ_n przez zastosowanie reguły (2) z definicji drzewa semantycznego do formuły ψ oraz gałęzi Γ; innymi słowy $\tau_{n+1} = \tau_n(\Gamma \sqcup \tau^{\psi})$, gdzie τ^{ψ} jest drzewem atomowym o korzeniu ψ ; **lub**
- ψ jest jednej z postaci: $\forall x\ \varphi(x)$, $\neg\exists x\ \varphi(x)$, $\varphi(t_i)$, $\neg\varphi(t_i)$ oraz $\langle j, \psi \rangle$ należy do Γ, dla $j = \langle n_1, \ldots, n_k, 0 \rangle$.

Powiemy, że drzewo semantyczne τ jest zakończone, jeśli każde wystąpienie $\langle i, \psi \rangle$ na każdej gałęzi otwartej w τ jest zredukowane. W przeciwnym przypadku drzewo semantyczne jest niezakończone.

Systematyczne drzewo semantyczne formuły ψ jest drzewem $\bigsqcup \tau_n$ tworzonym następująco (pomijamy indeksowanie $\bigsqcup \tau_n$ oraz τ_n przez ψ):

- $\tau_0 = \tau^{\psi}$. [Jeśli τ^{ψ} powstaje na mocy $R(\forall)$ lub $R(\neg\exists)$, to używamy termu t_1, a jeśli na mocy $R(\exists)$ lub $R(\neg\forall)$, używamy stałej a_k dla najmniejszego dostępnego k.]
- Niech τ_n będzie określone. Drzewo τ_{n+1} budujemy w następujący sposób:
  - Jeśli każde wystąpienie $\langle i, \varphi \rangle$ na każdej gałęzi Γ w τ_n jest zredukowane, to $\tau_{n+1} = \tau_n$.
  - W przeciwnym przypadku, niech i będzie $\prec$-najmniejszym kodem takim, że $\langle i, \varphi \rangle$ jest niezredukowanym wystąpieniem na jakiejś otwartej gałęzi Γ w τ_n. Wtedy rozważamy dwa przypadki:

- (1) φ nie jest ani postaci $\forall x\, \chi(x)$ ani $\neg\exists x\, \chi(x)$;
- (2) φ jest postaci $\forall x\, \chi(x)$ lub $\neg\exists x\, \chi(x)$.

- W przypadku (1) dołączamy drzewo atomowe τ^{φ} do każdej otwartej gałęzi w τ_n, zawierającej wystąpienie $\langle i, \varphi \rangle$. Definiujemy: $\tau_n^{\sharp} = \bigsqcup\limits_{\Gamma}(\Gamma \sqcup \tau^{\varphi})$, gdzie Γ jest otwartą gałęzią w τ_n, zawierającą wystąpienie $\langle i, \varphi \rangle$. Wreszcie, $\tau_{n+1} = \bigsqcup\{\tau_n, \tau_n^{\sharp}\}$. Jeśli φ jest postaci $\exists x\ \chi(x)$ lub $\neg\forall x\ (x)$, to w stosownym dołączanym drzewie atomowym posługujemy się stałą indywiduową a_k nie występującą w τ_n o najmniejszym numerze k.
- W przypadku (2) dołączamy do każdej otwartej gałęzi Γ, zawierającej wystąpienie $\langle i, \forall x\ \chi(x) \rangle$ lub $\langle i, \neg\exists x\ \chi(x) \rangle$ odpowiednio:

$$\begin{array}{c} \forall x\ \chi(x) \\ | \\ \chi(t_{n_i}/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\ \chi(x) \\ | \\ \neg\chi(t_{n_i}/x) \end{array}$$

gdzie n_i jest pozycją kodu i w liniowym porządku $\prec$ (ponieważ $\prec$ jest porządkiem liniowym, więc kody wierzchołków można ponumerować liczbami 0, 1, 2, 3,...).

Trafność MDS

Jeśli ψ jest formułą, a S (liniowo uporządkowanym) zbiorem formuł języka KRP, to systematyczne drzewo semantyczne ψ z S jest drzewem $\bigsqcup \tau_n$ tworzonym następująco:

- Dla n parzystych drzewa τ_n budujemy wedle opisanej powyżej procedury.
- Dla n nieparzystych, a więc postaci $n = 2k + 1$, dodajemy do każdej otwartej gałęzi w τ_n formułę φ_k ze zbioru S.
- Procedurę tę iterujemy tak długo, aż wszystkie elementy zbioru S zostaną uwzględnione i wszystkie wystąpienia zostaną zredukowane.

Twierdzenie. Każde systematyczne drzewo semantyczne jest zakończone.

Uwaga. Dowody wszystkich twierdzeń dot. MDS z dzisiejszego wykładu znajdują się w IV rozdziale skryptu.

Trafność MDS

Twierdzenie o trafności MDS. Dla dowolnej formuły ψ oraz zbioru formuł S: jeśli ψ jest T-dowodliwa z S, to ψ wynika logicznie z S. W szczególności (dla $S = \emptyset$), jeśli $\blacktriangleright \psi$, to ψ jest tautologią KRP.

W dowodzie twierdzenia o trafności wykorzystuje się następujący lemat:

- Lemat. Jeśli $\tau = \bigsqcup \tau_n$ jest drzewem dowodowym ze zbioru formuł S o korzeniu $\neg\psi$, to dla dowolnego modelu $\mathfrak{M}$ zbioru $S \cup \{\neg\psi\}$ istnieje model $\mathfrak{N}$ (o tym samym uniwersum co $\mathfrak{M}$) tego zbioru w języku rozszerzonym o stałe $a_1, a_2, \ldots$, w którym spełnione są wszystkie elementy pewnej gałęzi Γ w τ.

Rozszerzenie, o którym tu mowa, polega na znalezieniu interpretacji dla ew. nowych stałych, wprowadzanych w Γ przez reguły $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$.

Trafność MDS

Dowód Twierdzenia o Trafności.

Przypuśćmy (dla dowodu nie wprost), że formuła φ jest T-dowodliwa z S, lecz nie wynika logicznie ze zbioru S.

Ponieważ $S \blacktriangleright \varphi$, więc istnieje dowód τ formuły φ ze zbioru S.

Z założenia dowodu nie wprost istnieje model $\mathfrak{M}$ zbioru $S \cup \{\neg\varphi\}$.

Na mocy powyższego lematu istnieją:

- interpretacja $\mathfrak{N}$ taka, że:
  - $\mathfrak{N} \models S$ oraz $\mathfrak{N} \models \neg\varphi$;
  - $\mathfrak{N}$ oraz $\mathfrak{M}$ mają identyczne dziedziny;
- gałąź Γ w τ taka, że każda formuła występująca na tej gałęzi jest spełniona w $\mathfrak{N}$.

Ponieważ Γ jest gałęzią zamkniętą (bo τ jest drzewem dowodowym φ), więc w $\mathfrak{N}$ spełniona jest para formuł wzajem sprzecznych, co jest wykluczone na mocy definicji spełniania. Sprzeczność.

Zatem założenie dowodu nie wprost trzeba odrzucić; formuła φ wynika logicznie z S.

Pełność MDS

Twierdzenie o pełności MDS. Niech Γ będzie otwartą gałęzią w systematycznym drzewie semantycznym τ ze zbioru S o korzeniu $\neg\psi$. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models S$ oraz $\mathfrak{M} \models \neg\psi$.

W dowodzie twierdzenia o pełności MDS wykorzystuje się:

- uniwersa Herbranda, tj. budowanie modelu z „materiału syntaktycznego";
- indukcję po złożoności formuł;
- zbiory modelowe Hintikki oraz Lemat Hintikki;
- Lemat Königa.

Twierdzenia o trafności i o pełności MDS stwierdzają łącznie, że relacja wynikania logicznego w KRP jest równa relacji T-dowodliwości ►.

Stanowi to uzasadnienie poprawności MDS.

Niektóre konsekwencje pełności MDS

Twierdzenie. Jeśli każda gałąź w systematycznym drzewie semantycznym jest zamknięta, to drzewo to jest skończone.

Twierdzenie. Dla dowolnego zdania ψ oraz zbioru zdań S języka KRP zachodzi alternatywa:

- systematyczne drzewo semantyczne z S o korzeniu $\neg\psi$ jest drzewem dowodowym z S dla ψ; **lub**
- istnieje gałąź otwarta w systematycznym drzewie semantycznym z S o korzeniu $\neg\psi$, której elementy wyznaczają (tj. dają się rozszerzyć do zbioru Hintikki) interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models S$ oraz $\mathfrak{M} \models \neg\psi$.

- Wniosek: Twierdzenie Löwenheima-Skolema. Jeśli przeliczalny zbiór formuł języka KRP ma model, to ma model przeliczalny.
- Wniosek: Zwartość. Zbiór formuł języka KRP ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model.

Pożegnanie z logiką

KRZ i KRP to **Elementarz Logiczny**. Jego znajomość zalecana jest w Świecie Cywilizowanym.

Do szeroko rozumianej logiki należy jeszcze wiele innych zagadnień, np.:

- analiza pytań i odpowiedzi;
- analiza definicji;
- analiza wnioskowań indukcyjnych;
- nieprzebrane mnóstwo logik tzw. nieklasycznych (np. modalnych, epistemicznych, deontycznych, wielowartościowych, temporalnych);
- problematyka pragmatyki logicznej, itd.

Państwo: Studentki i Studenci I roku JiIN UAM zechcą łaskawie wybaczyć, że podczas tego konwersatorium powiedziałem tak niewiele o logice matematycznej. Uczcie się dalej samodzielnie.

Tematy egzaminacyjne

Zakres egzaminu obejmuje:

- wiadomości przekazane na wykładach;
- część I zbioru *Ćwiczenia z logiki* Pani Profesor Barbary Stanosz, tj. zadania 1-123.

W szczególności, pytania egzaminacyjne będą dotyczyć:

- umiejętności ustalania: czy dana formuła języka KRZ jest tautologią lub kontrtautologią KRZ; czy dany zbiór formuł języka KRZ jest semantycznie sprzeczny, bądź semantycznie niesprzeczny; czy dana formuła języka KRZ wynika logicznie ze zbioru formuł tego języka;
- dowodów założeniowych w KRZ;
- stosowania metody drzew semantycznych w KRP dla ustalania: tautologiczności, semantycznej niesprzeczności, wynikania logicznego w KRP;
- rozumienia podstawowych pojęć logicznych omówionych na wykładzie.

Koniec

To już koniec wprowadzenia do elementarza logicznego.
Zainteresowanych pozyskaniem wiedzy logicznej zachęcam do lektury podręczników.

Przypominam, że zajęcia przygotowujące do egzaminu odbędą się 4, 5 i 6 czerwca 2007 roku (godz. 15:00-17:00 w sali 203B Collegium Novum).

Wszystkich uczestników kursu uprzejmie zapraszam na egzamin pisemny:

- 8 czerwca 2007 roku, o godz. 15:00 w sali 203B Collegium Novum.

Wpisanie ocen 13 czerwca 2007 roku o godz. 10:00 w sali 412,
ul. Międzychodzka 5.