Funkcje rekurencyjne (9) (JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

25 kwietnia 2007

Plan na dziś

Plan na dziś:

- reprezentowalność relacji i funkcji rekurencyjnych w PA;
- hierarchia arytmetyczna.

W tym oraz następnych wykładach odwoływać będziemy się do książki:

- Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Arytmetyka Peana

Na drugim wykładzie przypomnieliśmy, jak wygląda Arytmetyka Peana (PA), tj. podaliśmy:

- alfabet PA;
- aksjomaty logiczne;
- składnię PA;
- reguły wnioskowania;
- aksjomaty dla identyczności;
- aksjomaty pozalogiczne;
- relację $\vdash$ (dowodliwości w PA).

Do końca tych wykładów będziemy zajmować się związkami między matematycznymi reprezentacjami pojęcia obliczalności a mocą wyrażeniową i dedukcyjną Arytmetyki Peana. Przytoczymy pewne ważne twierdzenia metalogiczne, które odmieniły oblicze Świata. Tego Świata.

Reprezentowalność funkcji rekurencyjnych w PA

Definicja liczebników.

- Term 0 jest liczebnikiem.
- Jeśli term α jest liczebnikiem, to term $S(\alpha)$ jest liczebnikiem.
- Liczebnikami są tylko termy opisane w powyższy sposób.

Oznaczmy: $\bar{n} = \underbrace{S(S(\ldots S}_{n\ razy}(0)\ldots))$.

$\bar{n}$ jest zatem liczebnikiem nazywającym liczbę n.

Uwaga notacyjna. Symbol S oznacza odtąd operację **następnika**, a symbol 0 stałą pozalogiczną **zero**.
Poprzednio było nieco inaczej, ale ważna jest obecna umowa.
Gdy Szawła nazwiemy Pawłem (lub nawet Gawłem), to przecież wiemy, o kogo chodzi.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych słabo reprezentuje w PA relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$ zachodzi równoważność: $R(k_1, \ldots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy PA $\vdash \varphi(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_n})$.
- Relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$ nazywamy słabo reprezentowalną w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która słabo reprezentuje R.

Uwaga. Formuła φ słabo reprezentuje R w PA wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą implikacje:

- Jeśli $R(k_1, \ldots, k_n)$, to $\vdash \varphi(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_n})$.
- Jeśli $\vdash \varphi(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_n})$, to $R(k_1, \ldots, k_n)$.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych mocno reprezentuje w PA relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$ zachodzą implikacje:
  - Jeśli $R(k_1, \ldots, k_n)$, to PA $\vdash \varphi(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_n})$.
  - Jeśli $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, to PA $\vdash \neg\varphi(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_n})$.
- Relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$ nazywamy mocno reprezentowalną w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która mocno reprezentuje R.

Uwaga. Każda relacja mocno reprezentowalna w PA jest też słabo reprezentowalna w PA, lecz nie na odwrót.

Reprezentowalność

Jeśli PA jest niesprzeczna oraz R jest mocno reprezentowana w PA przez formułę φ, to zachodzą następujące równoważności:

- $R(k_1, \ldots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$.
- $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$.

Na mocy powyższego twierdzenia, relacja R jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA taka, że:

- R jest słabo reprezentowana przez φ,
- $\neg R$ jest słabo reprezentowana przez $\neg\varphi$.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o $n+1$ zmiennych wolnych reprezentuje w PA funkcję $f : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$:
  PA$\vdash \forall y\, (\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \equiv (y = \overline{f(k_1, \ldots, k_n)}))$.
- Funkcję $f : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}$ nazywamy reprezentowalną w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA o $n+1$ zmiennych wolnych taka, że φ reprezentuje f w PA.

- Relacja identyczności jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 = x_2$.
- Funkcja dodawania jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 + x_2 = x_3$.
- Funkcja mnożenia jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \cdot x_2 = x_3$.
- Relacja mniejszości jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 < x_2$.

Twierdzenie o reprezentowalności

Dowolna relacja $R \subseteq \mathcal{N}^n$ jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna jest reprezentowalna w PA.

Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n:
$\mathrm{PA} \vdash \varphi(0) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(n \bar{-} 1) \wedge x < \bar{n} \rightarrow \varphi(x)$.

Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli dla każdego $i < n$, $\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\bar{i})$ oraz $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\bar{n})$, to:
$\mathrm{PA} \vdash (\varphi(x) \wedge \forall y\, (y < x \rightarrow \neg\varphi(y))) \equiv (x = \bar{n})$.

Twierdzenie o reprezentowalności.

- Każda funkcja rekurencyjna jest reprezentowalna w PA.
- Każda relacja rekurencyjna jest mocno reprezentowalna w PA.

Hierarchia arytmetyczna

Z poprzedniego wykładu wiemy, że operacje kwantyfikatorów ograniczonych prowadzą od relacji rekurencyjnych do relacji rekurencyjnych.
Kwantyfikatory nieograniczone już nie mają tej własności — istotnie zwiększają stopień skomplikowania pojęć.
Można dokonać logicznej klasyfikacji pojęć uwzględniającej liczbę kwantyfikatorów nieograniczonych potrzebnych w ich definicjach.

Klasyfikacja ta przyjmuje postać hierarchii, której każde piętro ma nieskończenie wiele stopni.
Szczególnie istotne są dwa pierwsze piętra, nazywane:

- hierarchią arytmetyczną;
- hierarchią analityczną.

Hierarchia arytmetyczna

Definicja Hierarchii Arytmetycznej.

- $\sum_0^0 = \prod_0^0 =$ zbiór relacji rekurencyjnych;
- Relacja $R \subseteq \mathcal{N}^k$ jest klasy $\sum_{n+1}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$ klasy $\prod_n^0$ taka, że $R(a_1, \ldots, a_k) \equiv \exists x\ Q(a_1, \ldots, a_k, x)$.
- Relacja $R \subseteq \mathcal{N}^k$ jest klasy $\prod_{n+1}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$ klasy $\sum_n^0$ taka, że $R(a_1, \ldots, a_k) \equiv \exists x\ Q(a_1, \ldots, a_k, x)$.

- Relacje klasy $\sum_1^0$ to dokładnie relacje rekurencyjnie przeliczalne.
- Relacja R jest rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy R oraz $\neg R$ są rekurencyjnie przeliczalne.

Hierarchia arytmetyczna

- Jeżeli relacja R jest klasy $\sum_n^0$ (odpowiednio, $\prod_n^0$) zaś $f_1, \ldots, f_k$ są funkcjami rekurencyjnymi, to relacja P określona wzorem:

$$P(\vec{a}) \equiv R(f_1(\vec{a}), \ldots, f_k(\vec{a}))$$

jest również klasy $\sum_n^0$ (odpowiednio, $\prod_n^0$).

- Każda klasa hierarchii arytmetycznej jest zamknięta ze względu na koniunkcję i alternatywę.

Tu (i dalej) $\vec{a}$ oznacza ciąg argumentów o takiej długości, ile argumentów ma rozważana relacja lub funkcja.

Dla dowolnego zbioru X relacji przez zbiór uzupełnień relacji z X rozumiemy zbiór $\mathcal{C}X$ zdefiniowany następująco: $R \in \mathcal{C}X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \vec{a}\, (R(\vec{a}) \equiv \neg P(\vec{a}))$ dla pewnej relacji $P \in X$.

Hierarchia arytmetyczna

- Klasa $\sum_n^0$ jest identyczna z klasą uzupełnień relacji z klasy $\prod_n^0$ i *vice versa*.
- Operacja kwantyfikatora ogólnego nie wyprowadza poza klasę $\prod_n^0$ (dla $n > 0$).
- Operacja kwantyfikatora egzystencjalnego nie wyprowadza poza klasę $\sum_n^0$ (dla $n > 0$).

Prawdziwe są następujące inkluzje:

- $\prod_n^0 \subseteq \sum_{n+1}^0$,
- $\sum_n^0 \subseteq \prod_{n+1}^0$,
- $\prod_n^0 \subseteq \prod_{n+1}^0$,
- $\sum_n^0 \subseteq \sum_{n+1}^0$.

Hierarchia arytmetyczna

- Dla każdej klasy $\sum_n^0$ (odpowiednio, $\prod_n^0$) ($n > 0$) istnieje w $\sum_n^0$ (odpowiednio, $\prod_n^0$) relacja uniwersalna dla wszystkich relacji tej klasy.
- Dla każdego $n > 0$: $\prod_n^0 \neq \sum_n^0$.
- Dla każdego n: $\sum_n^0 \neq \sum_{n+1}^0$ oraz $\prod_n^0 \neq \prod_{n+1}^0$.

- Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy $\sum_n^0$ należy do $\sum_n^0$, ale nie należy ani do $\prod_n^0$ ani do $\sum_{n-1}^0$.
- Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy $\prod_n^0$ należy do $\prod_n^0$, ale nie należy ani do $\sum_n^0$ ani do $\prod_{n-1}^0$.
- Jeżeli relacja uniwersalna dla relacji klasy X sama należy do X, to $\mathcal{C}X \neq X$.

Hierarchia arytmetyczna

Przykład. Pojęcie granicy ciągu jest pojęciem klasy $\prod_3^0$ (i nie jest pojęciem ani klasy $\sum_3^0$ ani $\sum_2^0$ ani $\prod_2^0$:

$$a = \lim a_n \equiv \forall k \exists m \forall n \, (n > m \rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{k+1}).$$

Przykład. Jak zobaczymy wkrótce, zbiór twierdzeń Arytmetyki Peana jest klasy $\sum_1^0$, czyli jest rekurencyjnie przeliczalny (ale **nie** jest rekurencyjny!).

Przykład. Pojęcie prawdy nie może zostać scharakteryzowane na żadnym piętrze hierarchii arytmetycznej. Można udowodnić, że definicja tego pojęcia znajduje się na pierwszym piętrze hierarchii analitycznej.

Koniec

Na dziś wystarczy.

Na następnym wykładzie zobaczymy, jak w języku Arytmetyki Peana można mówić o samej Arytmetyce Peana.

Będzie to wstępem do prezentacji zapowiedzianych twierdzeń metalogicznych.