Naukoznawstwo (Etnolingwistyka V)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

25 listopada 2006

Na dzień dobry

Zanim zaczniemy trudy Przygody Edukacyjnej popatrzmy na spokojny Czarny Staw Gąsienicowy (jesienią 2005 roku):

Procedury Poznawcze

I. Operacje na danych: $\leftarrow$ (o tym będzie dzisiaj)

- algorytmy,
- klasyfikacje, podobieństwa, opozycje,
- hierarchizacja i szeregowanie,
- struktury relacyjne.

II. A. Definicje $\leftarrow$ (o tym będzie dzisiaj)

II. B. Pytania i odpowiedzi $\leftarrow$ (o tym będzie dzisiaj)

III. Typy uzasadnień $\leftarrow$ (o tym będzie 9 grudnia 2006)

IV. Refleksja metateoretyczna $\leftarrow$ (o tym będzie 9 grudnia 2006)

V. Granice poznania $\leftarrow$ (o tym będzie 6 stycznia 2007).

Operacje na danych

1. O pojęciu procedury poznawczej
2. O pojęciu algorytmu
3. Klasyfikowanie
4. Podobieństwa i opozycje
5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe
6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Czym są operacje poznawcze?

- I. Masz jakieś DANE. Musisz je uporządkować, poddać kategoryzacji, klasyfikowaniu, szeregowaniu, itp.
- II. Masz OPIS danych. Formułujesz przeróżne definicje, stawiasz hipotezy (tj. zadajesz pytania), itd.
- III. PRZETWARZASZ informację: budujesz uzasadnienia, wyjaśnienia, przeprowadzasz wnioskowania, itp.
- IV. Masz jakąś WIEDZĘ. Kontemplujesz ją, badasz, czy jest ona np. niesprzeczna, trafna, zupełna, itd.

Operacje poznawcze

Operacja poznawcza jest to działanie zmierzające do udzielenia odpowiedzi na pytania epistemologiczne.

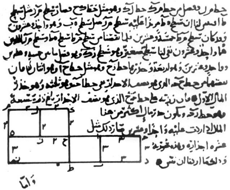
Przykłady pytań epistemologicznych:

- **Dlaczego** dane zjawisko zachodzi?
- **Czy** istnieje X?
- **Jak** X działa na Y?
- **Po co** istnieje X?
- **Co** jest przyczyną danego zdarzenia?

Udzielanie odpowiedzi na takie pytania wymaga m.in. uporządkowania danych (założeń, hipotez, sprawozdań z obserwacji, itd.).

2. Pojęcie algorytmu

Słowo algorytm pochodzi od nazwiska arabskiego matematyka Al Chwarizmiego.



Metoda obliczalna (efektywna): w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków daje odpowiedź dla dowolnych danych ustalonej postaci.

Wejście $\longrightarrow$ Obliczenie $\longrightarrow$ Wyjście

Obliczenie za pomocą metody efektywnej nazywa się **algorytmem**.

Podane wyżej pojęcie obliczalności ma charakter **intuicyjny**. Możliwe są jego różne matematyczne precyzacje (zob. niżej).

2. Pojęcie algorytmu

Przykład metody efektywnej: algorytm ustalania, czy dana formuła języka Klasycznego Rachunku Zdań jest prawem (tautologią) tego rachunku.

- Wejście: formuła języka KRZ (o n zmiennych zdaniowych)
- Obliczenie: znajdowanie wartości logicznej tej formuły dla każdego z 2^n podstawień wartości logicznych za zmienne
- Wyjście: odpowiedź — TAK (gdy przy każdym takim podstawieniu formuła jest prawdziwa), NIE (w przeciwnym przypadku).

2. Pojęcie algorytmu

Przykład problemu, dla którego **nie istnieje** metoda obliczalna: ustalanie, czy dowolna formuła języka Klasycznego Rachunku Predykatów jest prawem (tautologią) tego rachunku.

Dla ustalenia, czy **dowolna** formuła języka KRP jest tautologią KRP potrzeba sprawdzić **nieskończoną** liczbę interpretacji, a więc istnienie algorytmu jest w tym przypadku wykluczone.

$\forall x \exists y\, A(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\, A(x,y)$ Ta formuła nie jest tautologią KRP.

Uwaga: KRP jest **półrozstrzygalny** — jeśli formuła A **jest** tautologią KRP, to można to w **skończonej** liczbie kroków sprawdzić.

2. Pojęcie algorytmu

A jak to jest w tzw. życiu codziennym?

Procedury algorytmiczne (lub bliskie algorytmicznym):

- gotowanie zupy, pędzenie bimbru
- musztra wojskowa, zasady savoir vivre
- funkcjonowanie prawa.

2. Pojęcie algorytmu

A jak to jest w tzw. życiu codziennym?

Procedury niealgorytmiczne (lub bliskie niealgorytmicznym):

- problemy wymagające rozważenia nieskończonej liczby możliwości
- zakochiwanie się, planowanie morderstwa doskonałego
- działalność o znamionach magii, przepowiednie
- złożone procesy społeczne (?).

2. Pojęcie algorytmu

Kilka pytań metafizycznych:

- Czy prawa nauki mają charakter algorytmiczny?
- Czy wszelkie prawidłowości przyrody mają charakter algorytmiczny?
- Czy pojęcie racjonalności można eksplikować w terminach wyłącznie algorytmicznych?

2. Pojęcie algorytmu

Niektóre matematyczne precyzacje pojęcia obliczalności:

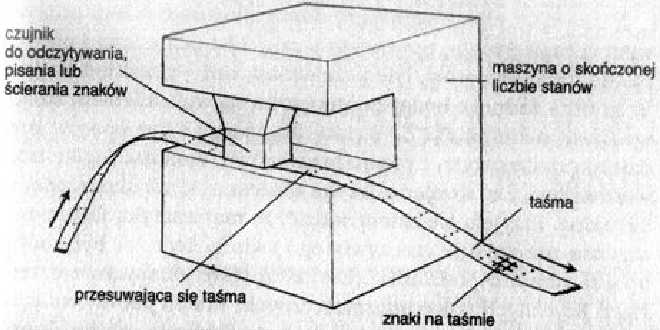
- Maszyny Turinga
- Algorytmy Markowa
- Funkcje rekurencyjne
- Numeracje Kleene'go i Posta.

Można **udowodnić**, że wymienione wyżej matematyczne typy obliczeń definiują **dokładnie taką samą** klasę procedur.
Stanowi to mocną konfirmację **Tezy Churcha**:

Funkcje obliczalne = Funkcje rekurencyjne.

Uwaga: teza Churcha **nie jest** twierdzeniem, lecz jedynie hipotezą empiryczną (bo pojęcie *obliczalności* ma charakter intuicyjny).

2. Pojęcie algorytmu



Rys. 5.12. Uniwersalna maszyna Alana Turinga, wymyślona przez niego w latach trzydziestych XX wieku. Składa się ona ze: skończonego zbioru znaków; skończonego zbioru stanów, w których może się znajdować; nieskończonej taśmy podzielonej na kratki, z których każda zawiera pojedynczy znak; czujnika, który analizuje taśmę kratka po kratce, odczytuje ją i ewentualnie pisze na niej; listy instrukcji podających reguły, które mówią, jaka zmiana (i czy w ogóle) ma nastąpić na taśmie, kiedy dany kwadracik został odczytany.

2. Pojęcie algorytmu

Pojęcie **rekurencyjnej przeliczalności.**

Problemy rozstrzygalne i nierozstrzygalne.

Złożoność obliczeń dla problemów rozstrzygalnych:

- wykładnicza
- wielomianowa.

Złożoność problemów nierozstrzygalnych:

- Hierarchia arytmetyczna
- Hierarchia analityczna.

Problem $P = NP$.

3. Klasyfikowanie

Klasyfikujemy przedmioty biorąc pod uwagę ich nieodróżnialność względem (z góry ustalonych) cech.
Tego typu nieodróżnialność jest relacją **równoważności** w danym uniwersum U, tj. relacją R spełniającą warunki:

- zwrotności — $\forall x \in U \;\; xRx$
- symetrii — $\forall x, y \in U \;\; xRy \rightarrow yRx$
- przechodniości — $\forall x, y, z \in U \;\; xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

Klasą równoważności przedmiotu $x \in U$ nazywamy zbiór:

$[x]_R = \{y \in U \; : \; xRy\}$.

Rodzinę $U/R = \{[x_R] \; : \; x \in U\}$ nazywamy **podziałem** U **wyznaczonym przez** R.

3. Klasyfikowanie

	fließend	stehend	natürlich	künst-lich	groß	klein
Fluß	+		+		+	
Bach	+		+			+
Kanal	+			+	+	
Graben	+			+		+
See		+	+		+	
Tümpel		+	+			+
Teich		+		+	+	
Becken		+		+		+

W tej tabeli podane są trzy podziały pewnych mokrych obiektów. Jakie są relacje równoważności, które wyznaczają te podziały?

3. Klasyfikowanie

Podziałem uniwersum U nazywamy każdą rodzinę niepustych, parami rozłącznych podzbiorów U, której suma równa jest U. Tak więc, $\mathcal{A}$ jest podziałem U, gdy:

- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \subseteq U$
- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} \ \ (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$
- $\bigcup \mathcal{A} = U$.

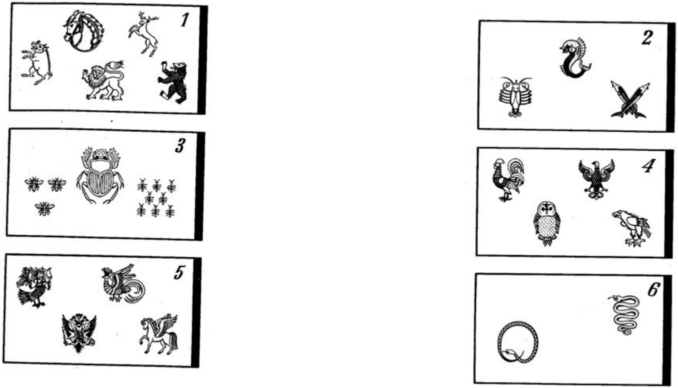
Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podziałami U a relacjami równoważności określonymi na U:

3. Klasyfikowanie

- Jeśli R jest relacją równoważności na U, to U/R jest podziałem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem U, to równoważnością jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem:
  $xR_{\mathcal{A}}y \quad \equiv \quad \exists A \in \mathcal{A} \;\; x, y \in A.$

Uwaga terminologiczna: terminu klasyfikacja używamy często zamiennie z terminem podział.

3. Klasyfikowanie



Przykład podziału (klasyfikacji) pewnego zbioru Stworzeń.

Czy widzisz, jaka relacja równoważności odpowiada temu podziałowi?

3. Klasyfikowanie

Skrzyżowaniem podziałów $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ zbioru U nazywamy rodzinę:

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \cup B \ : \ A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{B}\}$.

Mówimy, że podziały $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są **niezależne**, gdy $\emptyset \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, czyli gdy ich skrzyżowanie nie ma jako elementu zbioru pustego.

Operację krzyżowania podziałów można iterować, otrzymując w ten sposób **klasyfikacje wielopoziomowe**.

3. Klasyfikowanie

Sposoby przedstawiania klasyfikacji wielopoziomowych:

- tabele
- drzewa
- clusters

Przykłady klasyfikacji wielopoziomowych:

- biologia
- językoznawstwo
- ideogramy.

Niektóre pojęcia związane z klasyfikacjami:

- odległość taksonomiczna
- przybliżenia; rough sets
- pojęcia topologiczne: domknięcie, wnętrze, brzeg.

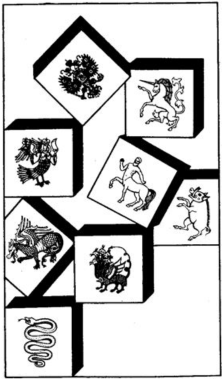
4. Podobieństwa i opozycje

Podobieństwo obiektów polega na posiadaniu co najmniej jednej wspólnej cechy (z ustalonej listy).

Opozycja między obiektami polega na różnieniu się co najmniej jedną cechą (z ustalonej listy).

Każdą zwrotną i symetryczną relację na zbiorze U nazywamy relacją **podobieństwa** (**tolerancji**) na U.

Rodzinę $\mathcal{A}$ niepustych podzbiorów U nazywamy **pokryciem** U, gdy jej suma równa jest U: $\bigcup \mathcal{A} = U$.



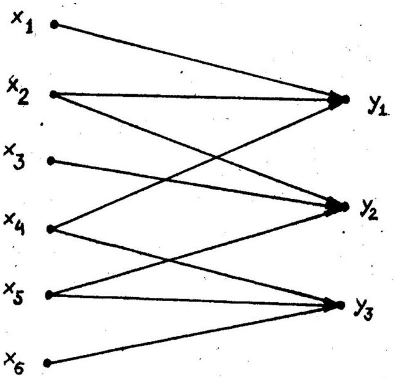
Szukaj podobieństw między obiektami w każdym z obu powyższych przypadków.

4. Podobieństwa i opozycje

Zarówno podobieństwa, jak i opozycje można reprezentować przez systemy postaci $\langle O, F, \phi \rangle$, gdzie:

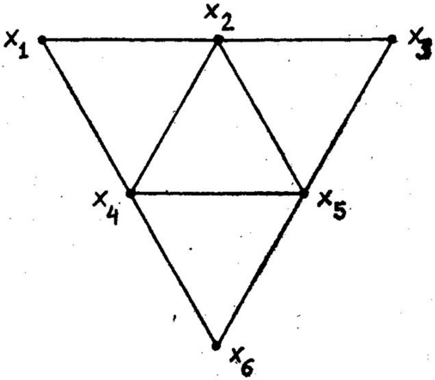
- O jest zbiorem obiektów;
- F jest zbiorem cech;
- relacja $\phi \subseteq O \times F$ zachodzi między obiektem $x \in O$ a cechą $f \in F$ gdy x ma cechę f.

4. Podobieństwa i opozycje



Przykład przypisania obiektom cech.

4. Podobieństwa i opozycje



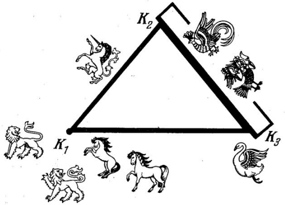
To graf relacji podobieństwa wyznaczonej przez przypisanie obiektom cech (z poprzedniego slajdu).

4. Podobieństwa i opozycje

Niech R będzie relacją podobieństwa na U. Mówimy, że:

- $A \subseteq U$ jest R-**preklasą**, gdy $\forall x, y \in A\ xRy$.
- $A \subseteq U$ jest R-**klasą**, gdy A jest maksymalną (względem inkluzji) preklasą.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-**rozproszonym**, gdy $\forall x, y \in A\ (x \neq y \rightarrow \neg xRy)$.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-**pochłaniającym**, gdy $\forall x \in U \exists y \in A\ yRx$.
- Relację R^+ zdefiniowaną warunkiem: $xR^+y \equiv \forall z \in U\ (xRz \equiv yRz)$ nazywamy relacją **stowarzyszoną** z R. Jest ona równoważnością na U. Jej klasy równoważności nazywamy R-**jądrami**.
- Przechodnie domknięcie relacji podobieństwa R oznaczamy przez R^{tr}. To także jest relacja równoważności.

4. Podobieństwa i opozycje



Rys. III.9. Podział według klas tolerancji

Rodzina klas tolerancji (podobieństwa) określonej na pewnym zbiorze Stworzeń.

Rodzinę klas $U//R$ relacji podobieństwa R na U nazywa się czasami **typologią** obiektów z U.

4. Podobieństwa i opozycje

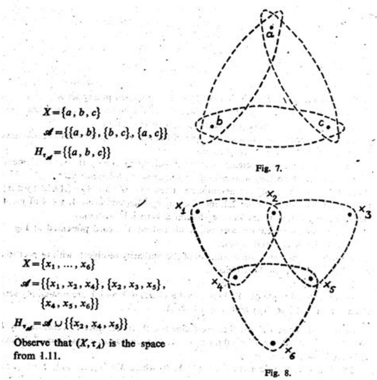
Niech $U//R$ oznacza rodzinę wszystkich R-klas.

Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między pokryciami U a relacjami podobieństwa określonymi na U:

- Jeśli R jest relacją podobieństwa na U, to $U//R$ jest pokryciem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest pokryciem U, to podobieństwem jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem: $xR_{\mathcal{A}}y \equiv \exists A \in \mathcal{A}\; x, y \in A$.

Każdą minimalną (względem inkluzji) rodzinę $\mathcal{B} \subseteq U//R$ taką, że dla dowolnych $x, y \in U$ zachodzi $xRy \equiv \exists A \in \mathcal{B}\; x, y \in A$ nazywamy R-**bazą**.

4. Podobieństwa i opozycje



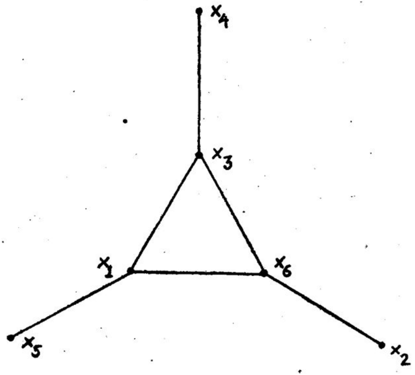
Pokrycia a relacje podobieństwa.

4. Podobieństwa i opozycje

Kilka faktów o relacjach podobieństwa:

- Dla każdej relacji podobieństwa R istnieje R-baza.
- Dla każdej relacji podobieństwa R: $R^{+} \subseteq R \subseteq R^{tr}$.
- Zbiory, które są jednocześnie maksymalnymi zbiorami R-rozproszonymi i minimalnymi zbiorami R-pochłaniającymi są najbardziej „ekonomicznymi opisami" relacji R.

4. Podobieństwa i opozycje



Znajdź zbiory, które są jednocześnie minimalnymi zbiorami pochłaniającymi i maksymalnymi zbiorami rozproszonymi.

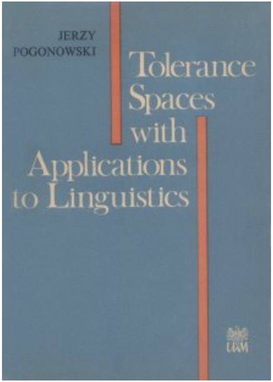
4. Podobieństwa i opozycje

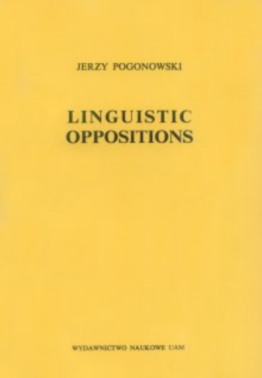
Rodzaje opozycji:

- kontekstowe (np. oparte na dystrybycji);
- parametryczne (np. bazujące na wymiarach semicznych);
- opozycje typu nieporównywalności (np. hiponimiczne).

4. Podobieństwa i opozycje

O matematycznej teorii relacji podobieństwa oraz opozycji, a także jej zastosowaniach poczytać możesz np. w:





5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Relacja $R \subseteq U^2$ jest **porządkiem częściowym** na U, gdy jest:

- przechodnia — $\forall x, y, z \in U \ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ oraz
- antysymetryczna — $\forall x, y \in U \ (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$.

Częściowy porządek R, który spełnia dodatkowo warunek *asymetrii*:

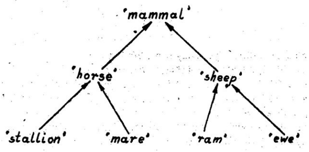
- $\forall x, y \in U \ (xRy \rightarrow \neg yRx)$

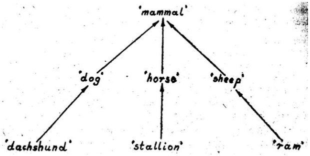
nazywamy **ostrym** porządkiem częściowym.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Przykłady:

- inkluzja $\subseteq$ jest porządkiem częściowym
- ostra inkluzja $\subset$ jest ostrym porządkiem częściowym.





Hiponimiczne uporządkowanie leksykonu.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

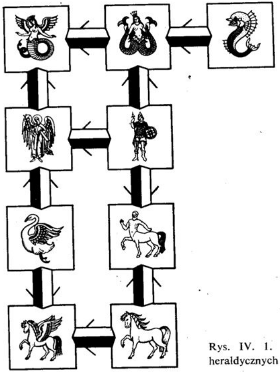
Niech R będzie częściowym porządkiem na U. Element $x \in U$ nazywamy:

- R-**minimalnym**, gdy $\neg\exists y \in U\ (x \neq y \wedge yRx)$
- R-**maksymalnym**, gdy $\neg\exists y \in U\ (x \neq y \wedge xRy)$
- R-**najmniejszym**, gdy $\forall y \in U\ (x \neq y \rightarrow xRy)$
- R-**największym**, gdy $\forall y \in U\ (x \neq y \rightarrow yRx)$.

Uwaga: element R-najmniejszy (resp. R-największy), o ile istnieje, jest też elementem R-minimalnym (resp. R-maksymalnym), lecz niekoniecznie na odwrót.

Gdy xRy oraz nie istnieje $z \in U$ taki, że $x \neq z$, $y \neq z$, xRz i zRy, to mówimy, że x jest **bezpośrednim** R-**poprzednikiem** y (a y **bezpośrednim** R-**następnikiem** x).

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe



Rys. IV. 1. Uporządkowanie symboli heraldycznych

Znajdź elementy: minimalne, maksymalne, największy oraz najmniejszy.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Porządek częściowy R nazywamy porządkiem **liniowym**, jeśli spełnia on warunek *spójności*:

- $\forall x, y \in U \ (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx)$.

Częściowy porządek R nazywamy **dobrym** porządkiem na U, jeśli każdy podzbiór U ma element R-najmniejszy.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Przykłady:

- Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest uporządkowany w sposób dobry przez relację mniejszości. Relacja ta porządkuje ów zbiór także liniowo.
- Zbiór wszystkich liczb całkowitych jest liniowo uporządkowany przez relację mniejszości. Uporządkowanie to nie jest dobrym porządkiem.

Uwaga: termin dobry nie ma tu charakteru ocennego.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Mówimy, że częściowy porządek R jest:

- **dyskretny**, gdy każdy element U ma bezpośredni R-poprzednik oraz R-następnik.
- **gęsty**, gdy $\forall x, y \in U\ (xRy \rightarrow \exists z \in U\ (x \neq z \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy))$.

Uwaga: żaden porządek nie może być jednocześnie dyskretny i gęsty, ale są porządki, które nie są ani dyskretne, ani gęste.

5. Porządkowanie: hierarchiczne i liniowe

Przykłady:

- Zbiór liczb całkowitych wszystkich (i każdy jego podzbiór) jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości.
- Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przez relację mniejszości uporządkowany w sposób gęsty.
- Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych także jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości. Ale liczb rzeczywistych jest istotnie więcej niż liczb wymiernych. Relacja mniejszości porządkuje wszystkie liczby rzeczywiste w sposób ciągły.

6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Systemy, którymi zajmuje się nauka mają postać układów złożonych z pewnych obiektów oraz wiążących te obiekty zależności. Matematycznymi odpowiednikami takich systemów są **struktury relacyjne**, czyli twory postaci:

$$S = \langle U, \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K} \rangle$$

- U jest zbiorem, zwanym **uniwersum** struktury S
- $\{R_i\}_{i \in I}$ jest rodziną **relacji** na zbiorze U
- $\{f_j\}_{j \in J}$ jest rodziną **funkcji** określonych na zbiorze U i o wartościach w tym zbiorze
- $\{a_k\}_{k \in K}$ jest rodziną **elementów wyróżnionych** zbioru U.

6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Kilka uwag (terminologicznych):

- Gdy $J = K = \emptyset$, to mówimy o strukturach relacyjnych **czystych**.
- Gdy $I = K = \emptyset$, to mówimy o **algebrach**.
- Często rozważamy struktury **wielosortowe**: zamiast zbioru U mamy wtedy rodzinę zbiorów $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$; wtedy odpowiednio określone są relacje oraz funkcje takiej wielosortowej struktury.
- Struktury relacyjne są interpretacjami języka Klasycznego Rachunku Predykatów (z identycznością).

6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Przykłady:

- układ fizyczny
- społeczeństwo
- więzienie
- zbiór problemów
- graf
- algebra Boole'a
- model standardowy Arytmetyki Peany.

6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Pojęcie **izomorfizmu** struktur relacyjnych omówimy w grubym uproszczeniu, dla struktur z jedną relacją dwuargumentową oraz jedną funkcją jednoargumentową. Powiemy, że struktury

$S_1 = \langle U_1, R^1, f^1 \rangle$ i $S_2 = \langle U_2, R^2, f^2 \rangle$

są **izomorficzne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja f z U_1 na U_2 taka, że dla dowolnych $x, y \in U_1$:

- $xR^1y \equiv f(x)R^2f(y)$
- $f^1(x) = y \equiv f^2(f(x)) = f(y)$.

6. Struktury relacyjne i pojęcie izomorfizmu

Matematyk bada świat *z dokładnością do izomorfizmu*.