Logika algebraiczna 9

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- W rachunku SCI można mówić o sytuacjach (bo mamy do dyspozycji zmienne zdaniowe, których korelatami semantycznymi są sytuacje), ale nie można wyrażać np. zależności między sytuacjami a przedmiotami.
- Formalizacja ontologii w *Traktacie* Wittgensteina, zaproponowana przez Suszkę korzysta z o wiele bogatszego języka, zawierającego: zmienne zdaniowe i nazwowe, spójniki prawdziwościowe, predykat i spójnik identyczności, kwantyfikatory (wiążące oba rodzaje zmiennych) oraz inne jeszcze symbole zdaniowe i nazwowe. Te bogatsze języki nazywamy W-językami.
- W prezentacji tego materiału korzystamy głównie z monografii Mieczysława Omyły *Zarys logiki niefregowskiej*.
- W dalszym ciągu będziemy wykorzystywali notację stosowaną w tej monografii:

- α, β, γ,… formuły zdaniowe W-języka
- ξ, η, ζ, … formuły nazwowe W-języka
- formatory (zdaniotwórcze lub nazwotwórcze) są dwóch rodzajów: wiążące lub nie wiążące zmiennych
- funkcja określająca indeksy syntaktyczne $\sigma(F) = (k, m, n)$, gdzie $k = 0$ (gdy F jest formatorem zdaniotwórczym) lub $k = 1$ (gdy F jest formatorem nazwotwórczym), a m (liczba argumentów zdaniowych) i n (liczba argumentów nazwowych) są dowolnymi liczbami naturalnymi:
  - jeśli $\sigma(F) = (0, m, 0)$, to F jest m-argumentowym spójnikiem
  - jeśli $\sigma(F) = (1, 0, n)$, to F jest n-argumentowym predykatem
- jak poprzednio $\alpha[v/\varphi]$ oznacza wynik poprawnego podstawienia wyrażenia φ za zmienną v w formule α
- generalizacja formuły α to wynik poprzedzenia α dowolną skończoną liczbą kwantyfikatorów; reguła generalizacji: $\frac{\alpha(v)}{\forall v\ \alpha(v)}$
- $Gn(A)$ jest zbiorem wszystkich generalizacji formuł ze zbioru A
- zbiór X formuł zdaniowych nazywamy inwariantnym, gdy $Gn(X) \subseteq X$.

- Formatory, które nie wiążą zmiennych to: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv_0$ (spójnik identyczności), $\equiv_1$ (predykat identyczności).
- Alfabetem W-języka J nazywamy dowolny ciąg $A(J) = (V_0, V_1, \mathbf{F}, Q, \sigma)$ taki, że:
  1. $V_0, V_1, \mathbf{F}, Q$ są zbiorami rozłącznymi (odpowiednio: zmiennych zdaniowych, zmiennych nazwowych, formatorów nie wiążacych zmiennych, kwantyfikatorów)
  2. V_0, V_1 są zbiorami nieskończonymi (zwykle, choć nie zawsze, przeliczalnymi)
  3. $\mathbf{F}$ jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym takim, że $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv_0$, $\equiv_1$ są elementami $\mathbf{F}$
  4. $Q = \{\forall, \exists\}$
  5. σ jest wspomnianą wyżej funkcją określającą indeksy syntaktyczne formatorów.

- Definiujemy indukcyjnie zbiór $S(J)$ (formuł zdaniowych języka J) oraz $N(J)$ (formuł nazwowych języka J):
  1. $V_0 \subseteq S(J)$, $V_1 \subseteq N(J)$
  2. Jeżeli $F \in \mathbf{F}$ oraz $\sigma(F) = (k, m, n)$ to dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S(J)$ oraz $\eta_1, \ldots, \eta_n \in N(J)$:
     1. $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in S(J)$, gdy $k = 0$
     2. $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in N(J)$, gdy $k = 1$
  3. Jeśli $\alpha \in S(J)$ oraz $v \in V_0 \cup V_1$, to $\forall v\ \alpha \in S(J)$ oraz $\exists v\ \alpha \in S(J)$.
- Przez J_0 oznaczamy część otwartą W-języka J, powstałą przez pominięcie w alfabecie kwantyfikatorów (oraz odnośnej reguły budowania formuł).
- Parę $\mu = (\mathbf{F}, \sigma)$ nazywamy syntaksą języka J_0.

- Operacja konsekwencji w W-językach jest określona aksjomatycznie. Jedyną regułą wnioskowania jest reguła odrywania MP: $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$.
- *A*1 *Aksjomaty dla spójników prawdziwościowych*: to zbiór wszystkich generalizacji formuł reprezentowanych przez schematy w zbiorze TFA (zob. aksjomaty dla SCI).
- *A*2 *Aksjomaty dla kwantyfikatorów*: to zbiór wszystkich generalizacji formuł reprezentowanych przez następujące schematy:

  1. $\forall v\ \alpha[v/\varphi]$
  2. $\forall v\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall v\ \alpha \rightarrow \forall v\ \beta)$
  3. $\alpha \rightarrow \forall v\ \alpha$ (o ile v nie jest zmienną wolną w α)
  4. $\exists v\ \alpha \leftrightarrow \neg \forall v\ \neg \alpha$.

- *A3 Aksjomaty dla spójnika i predykatu identyczności*: to zbiór wszystkich generalizacji formuł reprezentowanych przez następujące schematy:
  1. $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, o ile φ_1 i φ_2 różnią się co najwyżej zmiennymi związanymi
  2. $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$
  3. dla każdego $F \in \mathbf{F}$ schemat aksjomatu inwariancji:
     $$(\varphi_1 \equiv \psi_1) \wedge (\varphi_2 \equiv \psi_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi_m \equiv \psi_m) \to F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \equiv F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$$
  4. $\forall v\ (\alpha \equiv \beta) \to (\forall v\ \alpha \equiv \forall v\ \beta)$
  5. $\forall v\ (\alpha \equiv \beta) \to (\exists v\ \alpha \equiv \exists v\ \beta)$.
- Zbiorem aksjomatów logicznych W-języka J jest zbiór $AL = A1 \cup A2 \cup A3$.
- Operację konsekwencji Cn definiujemy w standardowy sposób. Dla dowolnych $\alpha \in S(J)$ oraz $X \subseteq S(J)$: $\alpha \in Cn(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wyprowadzalne z $AL \cup X$ w skończonej liczbie kroków, przy użyciu reguły MP.

- Cn-teorię T nazywamy inwariantną ze względu na regułę generalizacji, gdy $Gn(T) \subseteq T$.
- Operacja Cn ma te same własności co operacja C określona dla SCI, a ponadto:
  1. Zbiór $Cn(\emptyset)$ twierdzeń logicznych jest teorią inwariantną ze względu na regułę generalizacji.
  2. Jeżeli $\alpha(v) \in Cn(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ oraz zmienna v nie występuje w formułach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to $\forall v\, \alpha(v) \in Cn(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
- W W-języku występują zdania (formuły zdaniowe bez zmiennych wolnych) oraz nazwy (formuły nazwowe bez zmiennych wolnych).

- Dla otwartego W-języka J_0 określamy aksjomatycznie operację konsekwencji Cn_0, przyjmując jako jedyną regułę regułę odrywania oraz aksjomaty:
    1. aksjomaty ze zbioru TFA
    2. $\varphi \equiv \varphi$ dla dowolnej formuły (zdaniowej lub nazwowej) języka J_0
    3. $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
    4. dla dowolnego formatora F języka J_0:
    $$(\varphi_1 \equiv \psi_1) \wedge (\varphi_2 \equiv \psi_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi_m \equiv \psi_m) \rightarrow F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \equiv F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$$
- Dla dowolnego $X \subseteq S_0$ mamy: $Cn_0(X) = Cn(X) \cap S_0$, a zatem operacja Cn_0 jest nietwórczym rozszerzeniem operacji Cn.

- Aspekty semantyczne W-języków omówimy osobno dla otwartych takich języków, a następnie dla języków z kwantyfikatorami.
- Niech $\mu = (\mathbf{F}, \sigma)$ będzie syntaksą otwartego W-języka J_0. Nie nakładamy żadnych ograniczeń na moce zbiorów zmiennych.
- Niech A_0 i A_1 będą dowolnymi zbiorami rozłącznymi takimi, że $|A_0| \geqslant 2$ oraz $A_1 \neq \emptyset$. Zmienne zdaniowe będą interpretowane w zbiorze A_0, a zmienne nazwowe w zbiorze A_1.
- Dla dowolnego formatora F takiego, że $\sigma(F) = (k, m, n)$. Wtedy jego interpretacją jest funkcja $o_F : A_0^m \times A_1^n \to A_k$, gdzie $k = 0$ lub $k = 1$.
- Strukturę $(A_0, A_1, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}})$ nazywamy bialgebrą typu μ.
- Język J_0 jest bialgebrą absolutnie wolną w klasie $\mathcal{K}_\mu$ wszystkich bialgebr typu μ.
- Interpretację spójnika identyczności oznaczymy, jak poprzednio, przez $\circ$, a interpretację predykatu identyczności przez $\circledcirc$.

- W-modelem typu μ nazywamy dowolną parę $\mathfrak{M}_0 = (\mathbf{M}, D)$ taką, że $\mathbf{M} = (A_0, A_1, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}})$ jest bialgebrą typu μ, $D \subseteq A_0$ (zbiór elementów wyróżnionych) oraz dla dowolnych $a, b \in A_0$ i $c, d \in A_1$:
  1. $\neg^{\mathbf{M}} a \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$
  2. $a \wedge^{\mathbf{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ oraz $b \in D$
  3. $a \vee^{\mathbf{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in D$ lub $b \in D$
  4. $a \rightarrow^{\mathbf{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$ lub $b \in D$
  5. $a \leftrightarrow^{\mathbf{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in D$ lub $a, b \notin D$
  6. $a \circ^{\mathbf{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$
  7. $c \circledcirc^{\mathbf{M}} d \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = d$
- Wartościowaniem zmiennych języka J_0 w modelu $\mathfrak{M}_0$ nazywamy dowolną funkcję $h : V_0 \cup V_1 \rightarrow A_0 \cup A_1$ taką, że $h(V_0) \subseteq A_0$ i $h(V_1) \subseteq A_1$.
- Jak zwykle, dowolne wartościowanie zmiennych języka J_0 można rozszerzyć do homomorfizmu tego języka w algebrę modelu $\mathfrak{M}_0$.

- Formułę α języka J_0 nazywamy:
  1. spełnioną w modelu $\mathfrak{M}_0 = (\mathbf{M}, D)$ dla wartościowania h, gdy $h(\alpha) \in D$; $Sat_h(\mathfrak{M}_0) = \{\alpha \in S_0 : h(\alpha) \in D\}$
  2. prawdziwą w modelu $\mathfrak{M}_0 = (\mathbf{M}, D)$, gdy α jest spełniona przez każde wartościowanie w tym modelu $TR(\mathfrak{M}_0) = \bigcap\limits_h Sat_h(\mathfrak{M}_0)$.
- Formuła zdaniowa α języka o syntaksie μ jest tautologią języka J_0, gdy jest prawdziwa w każdym modelu typu μ.
- Dla dowolnej teorii T w języku J_0 relacja $\sim_T$ określona na zbiorze $S_0 \cup N_0$ (gdzie N_0 jest zbiorem formuł nazwowych, a S_0 zbiorem formuł zdaniowych języka J_0) warunkiem $\varphi \sim_T \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \equiv \psi \in T$ jest kongruencją języka J_0 taką, że:
  1. jeśli $\varphi \sim_T \psi$, to $\varphi, \psi \in N_0$ lub $\varphi, \psi \in S_0$
  2. jeśli $\alpha \sim_T \beta$ i $\alpha \in T$, to $\beta \in T$.
- Oznaczmy strukturę ilorazową $(J_0/\sim_T, T/\sim_T)$ przez $\mathcal{M}(J_0, T)$.

- **Twierdzenie**. Dla dowolnego W-języka J_0 o syntaksie μ oraz dowolnych $\alpha \in S_0$ i $X \subseteq S_0$: $\alpha \in Cn_0(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego W-modelu $\mathfrak{M}_0$ typu μ zachodzi implikacja: jeżeli $X \subseteq Sat_h(\mathfrak{M}_0)$, to $\alpha \in Sat_h(\mathfrak{M}_0)$. □
- **Twierdzenie**. T jest teorią quasi-zupełną w J_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje W-model $\mathfrak{M}$ języka J_0 taki, że $T = TR(\mathfrak{M})$. □
- **Twierdzenie**. Jeżeli $\mathfrak{M}_0 = (\mathbf{M}, D)$ jest W-modelem typu μ, to istnieje język otwarty J_0 o syntaksie μ i teoria T w tym języku taka, że model Lindenbauma-Tarskiego $\mathcal{M}(J_0, T)$ oraz model $\mathfrak{M}_0$ są izomorficzne. □
- **Lemat**. T jest teorią zupełną w J_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje model $\mathfrak{M}_0$ taki, że dla pewnego wartościowania h zmiennych języka J_0 w modelu $\mathfrak{M}_0$: $Sat_h(\mathfrak{M}_0) = T$. □
- **Twierdzenie**. T jest teorią quasi-zupełną w J_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje teoria zupełna T_0 w J_0 taka, że $T \subseteq T_0$ i T jest największą teorią domknięta na podstawianie zawartą w T_0. □

- Zajmiemy się z kolei semantyką W-języków z kwantyfikatorami. Niech $\mathfrak{M}_0 = (A, B, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, D)$ będzie dowolnym modelem dla języka otwartego J_0.
- Trzeba rozszerzyć tę strukturę tak, aby otrzymać interpretacje kwantyfikatorów (wiążących zarówno zmienne zdaniowe, jak i nazwowe).
- Niech h będzie wartościowaniem zmiennych w modelu $\mathfrak{M}_0$. Wartość formuły (zdaniowej lub nazwowej) φ przy wartościowaniu h w modelu $\mathfrak{M}_0$ będziemy oznaczali przez $||\varphi, h||_{\mathfrak{M}_0}$. Indeks dolny będziemy pomijali, gdy model jest ustalony.
- Przez h^v_t oznaczamy wartościowanie różniące się od wartościowania h co najwyżej tym, że zmiennej v przyporządkowany jest element t, przy czym oczywiście $t \in A$ gdy v jest zmienną zdaniową, a $t \in B$, gdy v jest zmienną nazwową.

- Każda formuła α języka J_0 wyznacza, dla dowolnego wartościowania h, funkcję przyporządkowującą każdemu elementowi $t \in A$ wartość $||\alpha, h_t^v||$. Funkcję tę oznaczać będziemy przez $\lambda_t||\alpha, h_t^v||$. Zauważmy, że gdy zmienna v nie występuje w formule α, to funkcja $||\alpha, h_t^v||$ przyporządkowuje każdemu $t \in A$ wartość $||\alpha, h||$ (niezależną od v), a więc funkcja ta jest wtedy stała.
- Aby uzyskać poprawną i trafną interpretację semantyczną formuł skwantyfikowanych, trzeba dołączyć do modelu stosowne operacje. Powinny być przy tym spełnione następujące warunki, dla dowolnej formuły α, zmiennej zdaniowej p i wartościowania h:
  1. $||\forall p\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in A$: $||\alpha, h_t^p|| \in D$
  2. $||\exists p\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $t \in A$: $||\alpha, h_t^p|| \in D$.
- Warunki te można sformułować także w następującej postaci:
  1. $||\forall p\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} = A$
  2. $||\exists p\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{t \in A : ||\alpha, h_t^p|| \in D\} \neq \emptyset$.

- Natomiast w przypadku formuł z kwantyfikatorami wiążącymi zmienne nazwowe powinny być spełnione następujące warunki, dla dowolnej formuły α, zmiennej nazwowej x i wartościowania h:
  1. $||\forall x\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in B$: $||\alpha, h^x_t|| \in D$
  2. $||\exists x\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $t \in B$: $||\alpha, h^x_t|| \in D$.
- Warunki te można sformułować także w następującej postaci:
  1. $||\forall x\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{t \in B : ||\alpha, h^x_t|| \in D\} = B$
  2. $||\exists x\ \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{t \in B : ||\alpha, h^x_t|| \in D\} \neq \emptyset$.

- Częściowym pseudomodelem dla W-języka J w alfabecie $(V_0, V_1, \mathbf{F}, Q, \sigma)$ nazywamy dowolną strukturę o postaci $\mathfrak{M} = (A, B, \{o_F\}_{F\in\mathbf{F}}, \bigwedge^A, \bigvee^A, \bigwedge^B, \bigvee^B)$, spełniającą następujące warunki:
  1. struktura $(A, B, \{o_F\}_{F\in\mathbf{F}})$ jest bialgebrą podobną do otwartej części języka J;
  2. $\bigwedge^A, \bigvee^A$ są funkcjami określonymi na dowolnym lecz ustalonym podzbiorze $\triangle_A$ zbioru A^A funkcji z A do A, co oznacza, że jeśli $f \in \triangle_A$, to $\bigwedge^A f$ i $\bigvee^A f$ są elementami zbioru A;
  3. $\bigwedge^B, \bigvee^B$ są funkcjami określonymi na dowolnym lecz ustalonym podzbiorze $\triangle_B$ zbioru A^B funkcji z B do A, co oznacza, że jeśli $f \in \triangle_B$, to $\bigwedge^B f$ i $\bigvee^B f$ są elementami zbioru A.
- Funkcja $h : V_0 \cup V_1 \to A \cup B$ jest wartościowaniem zmiennych języka J w częściowym pseudomodelu $\mathfrak{M}$, jeśli $h(V_0) \subseteq A$ oraz $h(V_1) \subseteq B$.

- Niech wartościowanie h będzie ustalone. Wartość formuł języka J przy wartościowaniu h określamy indukcyjnie:
  1. Jeżeli $\varphi \in V_0 \cup V_1$, to $||\varphi, h|| = h(\varphi)$;
  2. Jeżeli $F \in \mathbf{F}$ i $\sigma(F) = (k, m, n)$, to $||F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \eta_1, \ldots, \eta_n), h|| = o_F(||\alpha, h||, \ldots, ||\alpha_m, h||, ||\eta_1, h||, \ldots, ||\eta_n, h||)$;
  3. Dla dowolnej formuły α, jeżeli $\lambda_t ||\alpha, h_t^p|| \in \triangle_A$, to
     $||\forall p\; \alpha, h|| = \bigwedge^A ||\alpha, h_t^p||$
     $||\exists p\; \alpha, h|| = \bigvee^A ||\alpha, h_t^p||$
  4. Dla dowolnej formuły α, jeżeli $\lambda_t ||\alpha, h_t^x|| \in \triangle_B$, to
     $||\forall x\; \alpha, h|| = \bigwedge^B ||\alpha, h_t^x||$
     $||\exists x\; \alpha, h|| = \bigvee^B ||\alpha, h_t^x||$.
- Jeśli wartość $||\varphi, h||$ jest określona dla każdej formuły φ (zdaniowej lub nazwowej) i dowolnego wartościowania h zmiennych, to $\mathfrak{M}$ nazywamy pseudomodelem dla języka J.

- Dla ustalnego pseudomodelu funkcję $f \in A^A$ nazywamy wyznaczoną przez formuły języka J, gdy istnieje formuła zdaniowa α tego języka i zmienna zdaniowa p takie, że dla każdego $t \in A$ zachodzi: $f(t) = ||\alpha, h_t^p||$. Podobnie dla funkcji ze zbiorów A^B i B^B wyznaczonych przez formuły języka J.
- Strukturę $\mathfrak{M} = (A, B, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, \bigwedge^A, \bigvee^A, \bigwedge^B, \bigvee^B, D)$ nazywamy modelem dla W-języka J, gdy spełnione są następujące warunki:
  1. $(A, B, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, \bigwedge^A, \bigvee^A, \bigwedge^B, \bigvee^B)$ jest pseudomodelem języka J;
  2. $(A, B, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, D)$ jest modelem dla otwartej części języka J;
  3. Dla dowolnej funkcji $f \in A^A$ wyznaczonej przez formuły języka J zachodzi:
     $\bigwedge^A f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla każdego $t \in A$
     $\bigvee^A f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla pewnego $t \in A$
  4. Dla dowolnej funkcji $f \in A^B$ wyznaczonej przez formuły języka J zachodzi:
     $\bigwedge^B f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla każdego $t \in B$
     $\bigvee^B f \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) \in D$ dla pewnego $t \in B$.

- Formułę α języka J nazywamy:
  1. spełnioną w modelu $\mathfrak{M}$ dla wartościowania h (piszemy wtedy $\alpha \in Sat_h(\mathfrak{M})$), gdy $||\alpha, h|| \in D$;
  2. prawdziwą w modelu $\mathfrak{M}$ (piszemy wtedy $\alpha \in TR(\mathfrak{M})$), gdy α jest spełniona dla każdego wartościowania zmiennych w modelu $\mathfrak{M}$;
  3. tautologią języka J (piszemy wtedy $\alpha \in Taut(J)$), gdy jest ona prawdziwa w każdym modelu języka J.
- Zgodnie z powyższymi definicjami mamy zatem:
  1. $Sat_h(\mathfrak{M}) = \{\alpha : ||\alpha, h|| \in D\}$
  2. $TR(\mathfrak{M}) = \bigcap\limits_{h} Sat_h(\mathfrak{M})$
  3. $Taut(J) = \bigcap\limits_{\mathfrak{M}} TR(\mathfrak{M})$.
- Model $\mathfrak{M}$ języka J nazywamy modelem zbioru formuł X, gdy $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$.

- **Twierdzenie** (Bloom 1971). Niech J będzie dowolnym W-językiem. Dla każdego zbioru X zdań tego języka i każdego zdania α tego języka: $\alpha \in Cn(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ języka J, jeżeli $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$, to $\alpha \in \mathfrak{M}$.
- **Szkic dowodu**. Na dowód całego twierdzenia składa się kilka lematów:
  1. **Lemat 1**. Każde twierdzenie logiczne W-języka J jest tautologią tego języka, czyli $Cn(\emptyset) \subseteq Taut(J)$.
  2. **Lemat 2**. Jeżeli X jest niesprzecznym zbiorem zdań W-języka J, to istnieje model $\mathfrak{M}$ języka J taki, że $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$.
  3. **Lemat 3**. Każda tautologia W-języka J jest twierdzeniem logicznym tego języka, czyli $Taut(J) \subseteq Cn(\emptyset)$.

Przedstawimy jedynie główne idee dowodu, szczegóły znajdą słuchacze w pracy Bloom 1971.

- **Szkic dowodu Lematu 1**. Po pierwsze, należy sprawdzić, że każdy schemat aksjomatu jest tautologią. Wszystkie przypadki dowodzone są w podobny sposób, przez rozumowanie nie wprost.
- Dla przykładu, udowodnimy, że schemat $\forall p\,(\alpha \to \beta) \to (\forall p\,\alpha \to \forall p\,\beta)$ jest tautologią.
- Niech $\mathfrak{M} = (A, B, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, \bigwedge^A, \bigvee^A, \bigwedge^B, \bigvee^B, D))$ będzie dowolnym W-modelem.
- Wtedy dla pewnego $F \in \mathbf{F}$ operacja o_F jest denotacją $\to$, czyli $o_F = \to^{\mathfrak{M}}$ i mamy na mocy definicji: $a \to^{\mathfrak{M}} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$ lub $b \in D$, dla dowolnych $a, b \in A$.
- Dla dowodu, że $\forall p\,(\alpha \to \beta) \to (\forall p\,\alpha \to \forall p\,\beta)$ jest tautologią wystarczy pokazać, że nie istnieje wartościowanie h takie, iż: $||\forall p\,\alpha, h|| \in D$, $||\forall p\,(\alpha \to \beta)|| \in D$ i $||\forall p\,\beta, h|| \notin D$.

- Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że dla pewnego wartościowania h mamy: $||\forall p\, \alpha, h|| \in D$, $||\forall p\, (\alpha \to \beta), h|| \in D$ ale $||\forall p\, \beta, h|| \notin D$.
- Skoro $||\forall p\, \alpha, h|| \in D$ oraz $||\forall p\, \beta, h|| \notin D$, to na mocy definicji operacji $\bigwedge_A$ mamy:
  1. $||\forall p\, \alpha, h|| \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $||\alpha, h^p_t|| \in D$ dla każdego $t \in A$
  2. $||\forall p\, \beta, h|| \notin D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $||\beta, h^p_{t_0}|| \notin D$ dla pewnego $t_0 \in A$.
- Wynika stąd, że dla pewnego $t_0 \in A$ mamy: $||\alpha, h^p_{t_0}|| \in D$ oraz $||\beta, h^p_{t_0}|| \notin D$.
- Oznacza to, że dla pewnego $t_0 \in A$ mamy: $(||\alpha, h^p_{t_0}|| \to^{\mathfrak{M}} ||\beta, h^p_{t_0}||) \notin D$, a to jest sprzeczne z założeniem, iż $||\forall p\, (\alpha \to \beta), h|| \in D$.
- Reguła odrywania nie wyprowadza poza tautologie, co wynika z określenia operacji $\to^{\mathfrak{M}}$. $\square$

- **Szkic dowodu Lematu 2**. W dowodzie wykorzystuje się znaną technikę Henkina konstruowania modelu dla teorii niesprzecznych w języku pierwszego rzędu.
- Alfabet języka J rozszerzamy poprzez dodanie przeliczalnego zbioru stałych zdaniowych $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ oraz przeliczalnego zbioru stałych indywiduowych $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Wprowadzamy oznaczenia:
    1. J^*: język J o alfabecie rozszerzonym o podane zbiory
    2. S: zbiór wszystkich zdań języka J^*
    3. N: zbiór wszystkich nazw języka J^*
    4. S_{J^*}: zbiór wszystkich formuł zdaniowych języka J^*
    5. N_{J^*}: zbiór wszystkich formuł zdaniowych języka J^*.
- Przeliczalny zbiór S ustawiamy w ciąg: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$
- Niech c_{i_1} będzie pierwszym wyrazem ciągu $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, który nie występuje w zdaniu γ_1. Jeśli określono już ciąg $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$, to niech $c_{i_{n+1}}$ będzie pierwszym wyrazem ciągu $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, który nie występuje w zdaniach $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ oraz $i_n < i_{n+1}$.

- Niech r_{i_1} będzie pierwszym wyrazem ciągu $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, który nie występuje w zdaniu γ_1. Jeśli określono już ciąg $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$, to niech $r_{i_{n+1}}$ będzie pierwszym wyrazem ciągu $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, który nie występuje w zdaniach $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$ oraz $i_n < i_{n+1}$.
- Określamy ciąg zbiorów $(A_i)_{i\geqslant 0}$ następująco. $A_0 = X$; jeśli A_n został już określony, to A_{n+1} określamy następująco:

  1. Jeśli zdanie γ_n ma postać $\forall x\ \alpha$, to $A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha[x/c_{i_n}] \rightarrow \forall x\ \alpha\}$
  2. Jeśli zdanie γ_n ma postać $\forall p\ \alpha$, to $A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha[p/r_{i_n}] \rightarrow \forall p\ \alpha\}$
  3. W pozostałych przypadkach $A_{n+1} = A_n$.

- Niech $A = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$. W standardowy sposób dowodzimy, że A jest niesprzeczny i rozszerzamy A do maksymalnego zbioru niesprzecznego T. Wtedy:

  1. $X \subseteq A \subseteq T \subseteq S$.
  2. Jeśli $\alpha \in S$ i $\alpha \notin T$, to $Cn(T \cup \{\neg\alpha\}) = S_{J^*}$.

Zbiór T (składający się ze zdań języka J^*) ma następujące własności:

- Istnieje teoria zupełna T^* w języku J^* taka, że $T = T^* \cap S$.
- Dla każdego zdania o postaci $\forall x\, \alpha$ języka J^* mamy: $\forall x\, \alpha \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha[x/a] \in T$ dla każdej nazwy $a \in N$.
  Jeśli mianowicie $\forall x\, \alpha \in T$, to na podstawie prawa $\forall x\, \alpha \rightarrow \alpha[x/a]$ mamy $\alpha[x/a] \in T$ dla każdej nazwy $a \in N$. Z kolei, jeśli $\alpha[x/a] \in T$ dla każdej nazwy $a \in N$, to $\alpha[x/c_{i_n}] \in T$ dla pewnego i_n, a zatem także $\forall x\, \alpha \in T$, na podstawie konstrukcji zbiorów A_n. Podobnie uzasadniamy, że:
- Dla każdego zdania o postaci $\forall p\, \alpha$ języka J^* mamy: $\forall p\, \alpha \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha[p/\gamma] \in T$ dla każdego zdania $\gamma \in S$.
- Dla każdego zdania o postaci $\exists x\, \alpha$ języka J^* mamy: $\exists x\, \alpha \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha[x/a] \in T$ dla pewnej nazwy $a \in N$.
- Dla każdego zdania o postaci $\exists p\, \alpha$ języka J^* mamy: $\exists p\, \alpha \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha[p/\gamma] \in T$ dla pewnego zdania $\gamma \in S$.

- Z dostępnego materiału językowego budujemy teraz strukturę $\mathfrak{M}^* = (S, N, \{o_F\}_{F \in \mathbf{F}}, \bigwedge_S, \bigwedge_N, \bigvee_S, \bigvee_N, T)$:
  1. Zbiór S stanowi uniwersum dla zmiennych zdaniowych języka J.
  2. Zbiór N stanowi uniwersum dla zmiennych nazwowych języka J.
  3. Zbiór T jest zbiorem wartości wyróżnionych w strukturze $\mathfrak{M}^*$.
  4. Jeśli $F \in \mathbf{F}$ i $\sigma(F) = (k, m, n)$, a $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in S$ oraz $\eta_1, \ldots, \eta_n \in N$, to: $o_F(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \eta_1, \ldots, \eta_n) = F(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \eta_1, \ldots, \eta_n)$.
  5. Dziedziną funkcji $\bigwedge_S$ i $\bigvee_S$ jest zbiór wszystkich funkcji typu $\lambda_t \gamma[p/t]$, gdzie $\gamma(p)$ jest formułą zdaniową języka J^* z jedyną zmienną wolną p, zaś $t \in S$. Wartości funkcji $\bigwedge_S$ i $\bigvee_S$ dla argumentu $\lambda_t \gamma[p/t]$ określone są następująco: $\bigwedge_S \lambda_t \gamma[p/t] = \forall p\, \gamma(p)$, $\bigvee_S \lambda_t \gamma[p/t] = \exists p\, \gamma(p)$.
  6. Podobnie, jeśli $\gamma[x/a]$ jest formułą zdaniową języka J^* o jedynej zmiennej nazwowej x, zaś $a \in N$, to: $\bigwedge_N \lambda_a \gamma[x/a] = \forall x\, \gamma(x)$, $\bigvee_N \lambda_a \gamma[x/a] = \exists x\, \gamma(x)$.
- Jeśli $\varphi, \psi \in S \cup N$, to kongruencją struktury $\mathfrak{M}^*$ jest relacja $\sim_T$ określona następująco: $\varphi \sim_T \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \equiv \psi \in T$.

- Tworzymy strukturę ilorazową $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* / \sim_T$. Mamy zatem: $\mathfrak{M} = (S/\sim_T, N/\sim_T, \{o_F/\sim_T\}_{F\in\mathbf{F}}, \bigwedge_S/\sim_T, \bigwedge_N/\sim_T, \bigvee_S/\sim_T, \bigvee_N/\sim_T, T/\sim_T)$.
- Dowodzi się, że struktura $\mathfrak{M}$ jest W-modelem oraz że $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$.
- Zauważmy, że:
  1. Elementy zbioru X są zdaniami, a więc ich wartość w dowolnym modelu nie zależy od poszczególnych wartościowań w tym modelu. Mamy mianowicie $||\alpha, h|| = [\alpha]_{\sim_T}$ dla każdego zdania $\alpha \in X$ oraz dowolnego wartościowania zmiennych h.
  2. Jeśli $\alpha \in X$, to $[\alpha]_{\sim_T} \in T/_{\sim_T}$. $\square$

- **Szkic dowodu Lematu 3**. Załóżmy, że formuła α jest tautologią W-języka J. Jeśli $\overline{\alpha}$ jest generalizacją formuły α, w której nie ma już zmiennych wolnych, to $\overline{\alpha}$ też jest W-tautologią języka J.
- Przypuśćmy, że $\overline{\alpha}$ nie jest twierdzeniem logicznym.
- Wtedy $\neg\overline{\alpha}$ jest zdaniem niesprzecznym, bo gdyby $\neg\overline{\alpha}$ było zdaniem sprzecznym, to $\neg\overline{\alpha} \in Cn(\{\neg\overline{\alpha}\})$, a na mocy twierdzenia o dedukcji mielibyśmy $(\neg\overline{\alpha} \rightarrow \overline{\alpha}) \in Cn(\emptyset)$.
- Wtedy jednak, na mocy twierdzenia $(\neg\overline{\alpha} \rightarrow \overline{\alpha}) \rightarrow \overline{\alpha}$ mielibyśmy, że $\overline{\alpha}$, a więc także α jest twierdzeniem logicznym.
- Pozostajemy zatem przy przypuszczeniu, że $\neg\overline{\alpha}$ jest zdaniem niesprzecznym.
- Wtedy na mocy Lematu 2 istnieje model $\mathfrak{M}$ języka J taki, że $\neg\overline{\alpha} \in TR(\mathfrak{M})$.
- Jednak wtedy w modelu $\mathfrak{M}$ byłyby prawdziwe oba zdania α i $\neg\alpha$, co jest niemożliwe.
- Tak więc, α jest twierdzeniem logicznym języka J. $\square$

- **Szkic dowodu twierdzenia o pełności**. Załóżmy, że $\alpha \notin Cn(X)$. Wtedy zbiór zdań $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest niesprzeczny.
- Na mocy Lematu 2 istnieje więc model $\mathfrak{M}$ taki, że $X \cup \{\neg\alpha\} \subseteq TR(\mathfrak{M})$, co oznacza, że istnieje model $\mathfrak{M}$ taki, iż $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$ oraz $\alpha \notin TR(\mathfrak{M})$.
- Załóżmy z kolei, że dla pewnego modelu $\mathfrak{M}$ mamy $X \subseteq TR(\mathfrak{M})$ oraz $\alpha \notin TR(\mathfrak{M})$.
- Wtedy oczywiście $\neg\alpha \in TR(\mathfrak{M})$, co implikuje, że zbiór $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest niesprzeczny.
- Istnieje zatem teoria zupełna T taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \subseteq T$.
- Wynika stąd, że $\alpha \notin Cn(X)$, ponieważ każda Cn-teoria jest iloczynem wszystkich zawierających ją teorii zupełnych.
- Pokazaliśmy zatem, że zachodzą obie implikacje ze sformułowania twierdzenia o pełności. $\square$

- Bloom, S. 1971. A completeness theorem for "Theories of kind *W*". *Studia Logica* 27, 43–55.
- Bloom, S., Suszko, R. 1972. Investigations into the sentential calculus with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13 (3), 289–308.
- Omyła, M. 1986. *Zarys logiki niefregowskiej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Suszko, R. 1968. Ontologia w Traktacie L. Wittgensteina. *Studia Filofoziczne* 1 (52), 97–121.
- Suszko, R. 1975. Abolition of the Fregean axiom. *Lecture Notes in Mathematics* 453, 169–239.