Definicje nieskończoności

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Funkcje rekurencyjne

Plan na dziś:

- Przypomnienie: aksjomatyka teorii mnogości ZF.
- Aksjomatyka arytmetyki Robinsona.
- Hotel Hilberta.
- Pojęcie równoliczności.
- Definicja nieskończoności: Frege.
- Definicja nieskończoności: Dedekind.
- Definicja nieskończoności: Zermelo.
- Twierdzenie Cantora.
- Zbiory nieprzeliczalne.
- Definicja nieskończoności: von Neumann.
- Definicja nieskończoności: Tarski.

Aksjomatyka teorii mnogości ZF

Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow \exists u \, (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists u \, (u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n))$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x \, (\exists y \, (y \in x \wedge \neg \exists z \, (z \in y)) \wedge \forall y \, (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u \, (u \in z \leftrightarrow u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:
$\forall u(\forall x \forall y \forall z\, (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v\, (v \in w \leftrightarrow \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$
Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.
Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:
$\forall x(\exists u\, (u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z\, (z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$
Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć **Aksjomat wyboru**:
$\forall x((\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,(z \in y)) \wedge \forall y \forall u\,(y \in x \wedge u \in x \rightarrow y = u \vee \neg\exists v\,(v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w(\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,(z \in y \wedge z \in w \wedge \forall v\,(v \in y \wedge v \in w \rightarrow v = z)))))$
To otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także aksjomaty dla identyczności:

- $\forall x\; x = x$
- $\forall x \forall y\; x = y \rightarrow y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\; x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$;
- $\forall x \forall y \forall z\; (x = y \wedge x \in z \rightarrow y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\; (x = y \wedge z \in x \rightarrow z \in y)$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: nieskończony i przeliczalny należą do metajęzyka.

Aksjomatyka arytmetyki Robinsona

Dodawania i mnożenia liczb naturalnych uczysz się w wieku kilku lat.

Chociaż, gdy się chwilę zastanowisz, to być może dopadnie cię refleksja: skąd właściwie wiesz, jaki jest wynik wykonywania tych operacji (tj. dodawania i mnożenia) na liczbach naturalnych?

Prawdopodobnie, nauczono cię tabliczek dodawania i mnożenia podobnie jak naucza się wierszyków, „na pamięć''.

Stosowano przy tym różne heurystyki; np. rysunki jabłuszek, kotków, monet, itp. No i teraz umiesz dodawać i mnożyć.

Czyżby jednak ta ***wiedza*** miała uzasadnienie wyłącznie w owych dogmatycznych rysunkach?

To temat na zajęcia z filozofii matematyki lub, ogólniej, z filozofii nauki. Te zajęcia dotyczą tylko obliczalności, a więc nie znajdziesz w nich wyczerpującej odpowiedzi na tego typu pytania metafizyczne.

Ograniczymy się do stwierdzenia, że arytmetykę można zbudować na bazie aksjomatycznej, jako teorię pierwszego rzędu (a więc teorię w języku KRP, z predykatem identyczności oraz symbolami funkcyjnymi).

Tabliczki dodawania i mnożenia zbudować można w Arytmetyce Robinsona. Jest to system aksjomatyczny w języku KRP z identycznością oraz następującymi symbolami funkcyjnymi:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: *następnik* t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *suma* t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *iloczyn* t_1 i t_2.

Nadto, w języku Arytmetyki Robinsona używamy stałej indywiduowej $\bigcirc$. Jest to symbol, który czytamy: *zero*.

Aksjomaty.

Aksjomaty dotyczące jedynie predykatu identyczności:

- $\forall x\, x = x$
- $\forall x \forall y\, x = y \rightarrow y = x$
- $\forall x \forall y \forall z\, x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$.

Uwaga. Ta grupa aksjomatów występuje we wszystkich teoriach, w których używamy predykatu identyczności.

Warto pamiętać, że ani te aksjomaty, ani inne, w których występuje symbol $=$ identyczności nie gwarantują, że denotacja tego symbolu jest „prawdziwą" równością $=$.

Dla pełnej poprawności, powinniśmy używać innego symbolu dla predykatu identyczności w języku przedmiotowym (np.: $\doteq$), a innego dla relacji identyczności $=$, używanego w metajęzyku.

Nie robimy tego, ufając, iż Słuchaczki są już oswojone z różnicą między językiem przedmiotowym i metajęzykiem i że życzliwie, ze zrozumieniem tolerują tego typu drobne świństewka notacyjne.

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$:

- $\forall x \forall y \; x = y \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y)$
- $\forall x \forall y \forall z \; x = y \rightarrow \oplus(x, z) = \oplus(y, z)$
- $\forall x \forall y \forall z \; x = y \rightarrow \oplus(z, x) = \oplus(z, y)$
- $\forall x \forall y \forall z \; x = y \rightarrow \otimes(x, z) = \otimes(y, z)$
- $\forall x \forall y \forall z \; x = y \rightarrow \otimes(z, x) = \otimes(z, y)$.

Uwaga. W aksjomatach tych nie występuje symbol $\bigcirc$, bo nie ma takiej potrzeby; stosowne „Leibnizjańskie" warunki dla $\bigcirc$ są konsekwencją pozostałych aksjomatów.

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

- A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$
- A_2: $\forall x\ \bigcirc \neq \sigma(x)$
- A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$
- A_4: $\forall x\ \oplus(x, \bigcirc) = x$
- A_5: $\forall x \forall y\ \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$
- A_6: $\forall x\ \otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc$
- A_7: $\forall x \forall y\ \otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x)$.

Modelem zamierzonym dla tych aksjomatów jest struktura, której uniwersum jest zbiór wszystkich (i tylko!) liczb naturalnych, a denotacjami poszczególnych terminów pozalogicznych są:

- symbolu $\bigcirc$ — liczba zero;
- symbolu σ — operacja następnika;
- symbolu $\oplus$ — operacja dodawania;
- symbolu $\otimes$ — operacja mnożenia.

Jeśli aksjomaty te wydają ci się oczywiste, to witaj we Wspólnocie Intelektualnej Ludzkości!
Nie są chyba znani osobnicy, którym zdania te wydawałyby się fałszywe, przy podanej powyżej interpretacji zamierzonej.

Powstaje naturalnie pytanie: czy z tych aksjomatów ***wynikają*** (przy interpretacji symbolu $=$ jako relacji identyczności) **dokładnie wszystkie** prawdy arytmetyczne?

Odpowiedzi na to, wydawałoby się proste, pytanie dostarczają ważne twierdzenia metalogiczne (o których opowiemy na dalszych wykładach).

Odpowiedź jest **negatywna**; chociaż każde zdanie wyprowadzalne z aksjomatów jest prawdziwe w zamierzonej interpretacji, to jednak nie wszystkie zdania prawdziwe w tej interpretacji są wyprowadzalne z aksjomatów.
Ma to też związek z **nierozstrzygalnością** KRP.

Pierwsze trzy z powyższych aksjomatów mają gwarantować, że uniwersum interpretacji zamierzonej jest poprawnie utworzoną kolejką: na początku jest zero, potem następnik zera (czyli jedynka), potem następnik następnika zera (czyli następnik jedynki, a więc dwójka), i tak dalej. Za każdą liczbą naturalną jest dokładnie jedna liczba większa od niej o jeden, a od każdej liczby naturalnej jest tylko *skończenie* wiele „kroków wstecz", do zera. Uwaga: pojęcia **skończoności** nie można wyrazić w języku pierwszego rzędu; ten intuicyjny komentarz czyniony jest w metajęzyku.

Aksjomaty A_4 oraz A_5 charakteryzują dodawanie, natomiast A_6 oraz A_7 ustalają własności mnożenia. Nie obawiaj się: w charakterystykach tych ***nie*** popełnia się błędnego koła.
Pokażemy teraz, jak uzyskać dowód prostej prawdy arytmetycznej w Arytmetyce Robinsona.
Oto dowód, iż $\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$, czyli że dwa i dwa jest cztery:

1.	$\forall x \; \oplus(x, \bigcirc) = x$	aksjomat A_4
2.	$\forall x \forall y \; \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$	aksjomat A_5
3.	$\neg(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc)))))$	z. d. n.
4.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc) = \sigma(\sigma(\bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_4
5.	$\forall y \; \oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), y))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_5
6.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	$R(\forall)$ dla $\bigcirc$ w 5.
7.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)))$	$R(\forall)$ dla $\sigma(\bigcirc)$ w 5.
8.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	6. i 7., $R(=)$
9.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$	4. i 8., $R(=)$
10.	$\times_{3,9}$	Sprzeczność: $3, 9$.

Rozszerzymy teraz system arytmetyki Robinsona poprzez dodanie do jego aksjomatów ***schematu*** aksjomatów, zwanego ***zasadą indukcji***. Otrzymany w ten sposób system nazywa się **Arytmetyką Peana**.

Stałe pozalogiczne Arytmetyki Peana są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona. Również pierwsze siedem aksjomatów jest wspólnych dla obu systemów. Nowy w aksjomatyce Peana jest:

- P_8: $A(\bigcirc) \wedge \forall x\, (A(x) \rightarrow A(\sigma(x))) \rightarrow \forall x\, A(x)$

(dla dowolnej formuły A, o jednej zmiennej wolnej, języka Arytmetyki Peana).
P_8 nie jest jednym aksjomatem, lecz schematem (przeliczalnie wielu) aksjomatów. P_8 nazywamy **zasadą indukcji**.

O Arytmetyce Peana będziemy mówić nieco później.

Hotel Hilberta

Do mówienia o obliczalności potrzebna nam będzie refleksja nad pojęciem nieskończoności (potencjalnej i aktualnej). Na początek, odwiedzimy Hotel Hilberta, coś w rodzaju matematycznej Wieży Babel (jednak udanej).

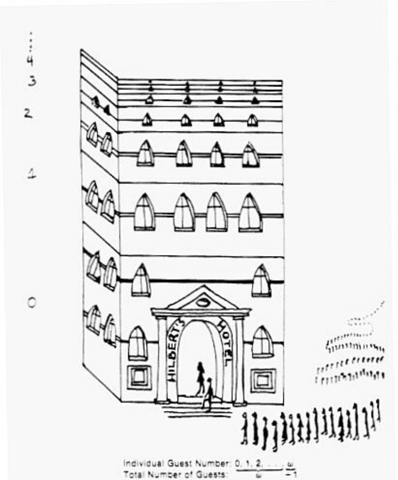

Figure 45.

Przykład: Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Przypuśćmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb n, które mają dokładnie dwa podzielniki: 1 oraz n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...,p

Zatem p jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn: $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot p$ (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.

Liczba $m + 1$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...,p. Nadto, $m + 1$ jest większa od p.

Otrzymujemy sprzeczność: $m + 1$ jest liczbą pierwszą **większą** od (rzekomo) największej liczby pierwszej p. Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

Hotel Hilberta

Hotel Hilberta ma nieskończoną liczbę pokoi:

1	2	3	4	5	...

Jest jasne, że nawet gdy wszystkie pokoje są zajęte, to można umieścić w nim nowego gościa, w dowolnym pokoju o numerze n: wystarczy, aby każdy z gości zamieszkujących pokoje o numerach n, $n+1$, $n+2$, ... przemieścił się do pokoju o numerze o jeden większym od numeru swojego dotychczasowego pokoju. Wtedy pokój o numerze n staje się wolny.

Jest też jasne, że nawet gdy wszystkie pokoje są zajęte, to można umieścić w nim dowolną **skończoną** liczbę nowych gości. Pytanie: w jaki sposób?

Hotel Hilberta

Pytanie (tylko trochę) trudniejsze: czy w zapełnionym już Hotelu Hilberta pomieścić można nieskończoną (przeliczalną, tj. równoliczną ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych; lub, co na jedno wychodzi, równoliczną ze zbiorem wszystkich pokoi w Hotelu Hilberta) liczbę nowych gości?

Oczywiście, TAK. Można np. umieścić wszystkich dotychczasowych gości w pokojach o numerach nieparzystych, a gości nowych w pokojach o numerach parzystych.

Kolejne (znów, odrobinę trudniejsze) pytanie: czy w zapełnionym już Hotelu Hilberta można pomieścić dodatkowo **przeliczalną** liczbę **przeliczalnych** zbiorów nowych gości?

I w tym przypadku odpowiedź brzmi: TAK. Widzicie, jak to zrobić?

Hotel Hilberta

Czyżby więc w zapełnionym już Hotelu Hilberta można było pomieścić dodatkowo DOWOLNĄ liczbę nowych gości?
Odpowiedź brzmi: NIE. Można pokazać (przy użyciu metody przekątniowej), że zbiór $\mathbb{R}$ WSZYSTKICH przeliczalnych ciągów (kolejek) nowych gości nie zmieści się w Hotelu Hilberta. Argument jest prosty. Po pierwsze, jest jasne, że możemy utożsamiać każdy element zbioru $\mathbb{R}$ z jakimś ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Wyliczmy wszystkie elementy zbioru $\mathbb{R}$, w dowolnej kolejności:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \langle\, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \,\rangle \\
A_2 &= \langle\, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \,\rangle \\
A_3 &= \langle\, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots \,\rangle \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Hotel Hilberta

Rozważmy teraz ciąg
$A = \langle\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots\ \rangle$
i zbudujmy ciąg
$A^{\delta} = \langle\ a^{\delta}_{11},\ a^{\delta}_{22},\ a^{\delta}_{33},\ \ldots\ \rangle$
wedle reguły:

- jeśli $a_{nn} = 8$, to $a^{\delta}_{nn} = 7$
- jeśli $a_{nn} \neq 8$, to $a^{\delta}_{nn} = 8$.

Wtedy ciąg A^{δ} jest różny od każdego ciągu A_n (dla wszystkich n), a więc nie mógł wystąpić na liście (rzekomo) wszystkich elementów $\mathbb{R}$.

Liczba elementów zbioru $\mathbb{R}$ jest oczywiście nieskończona. Jest ona jednak (w intuicyjnym sensie) „większa" od liczby pokoi Hotelu Hilberta.

Nie możemy tu opowiedzieć o arytmetyce liczb będących licznościami (mocami) zbiorów nieskończonych — zob. dowolny porządny podręcznik teorii mnogości. Powiedzmy tylko, że skala kolejnych nieskończoności jest pozaskończona (nie daje się przedstawić jako równoliczna z jakąkolwiek liczbą nieskończoną).

Hotel Hilberta jest metaforą nieskończoności potencjalnej: wyobrażamy sobie sytuację, gdy po każdym kroku możemy wykonać następny, bez ograniczenia (nie ma znaku stop w Hotelu Hilberta).
Gdy bierzemy pod uwagę Hotel Hilberta jako całość, to zaczynamy operować nieskończonością aktualną. Mamy wtedy możliwość (gwarantowaną stosownymi aksjomatami teorii mnogości) tworzenia coraz to nowych nieskończoności.

Dwa zbiory są **równoliczne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja z jednego z nich na drugi.

Widzieliśmy, że w przypadku zbiorów, których liczba elementów nie jest skończona (na razie: w intuicyjnym sensie) możemy mieć do czynienia z dwoma przypadkami:

- dwa zbiory nieskończone mogą być równoliczne (np. zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb parzystych);
- dwa zbiory nieskończone mogą nie być równoliczne (np. zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach będących dodatnimi liczbami naturalnymi).

Tak więc, **nie jest prawdą**, iż wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne!

Uwaga. Proszę zauważyć, że fakt nierównoliczności dwóch zbiorów oznacza, że w całym uniwersum zbiorów nie istnieje funkcja (czyli zbiór par uporządkowanych) ustalająca ich równoliczność.

Definicja nieskończoności: Frege

Definicja Fregego. Zbiór jest skończony, gdy ma n elementów, dla pewnej liczby naturalnej n. W przeciwnym przypadku jest nieskończony.

Ta definicja zakłada, że wiemy, czym są liczby naturalne.

Otóż wcale nie jest bezdyskusyjne, jaki jest status tej wiedzy. Problematyka ta należy do filozofii matematyki i nie może tu być omawiana.

Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, cała reszta jest dziełem człowieka — napisał kiedyś Leopold Kronecker.

Definicja nieskończoności: Dedekind

Definicja Dedekinda. Zbiór jest nieskończony, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest skończony.

Na „paradoksalną" własność pewnych zbiorów, polegającą na tym, iż są one równoliczne z jakimś swoim podzbiorem właściwym, zwracano uwagę już wcześniej (Galileusz, Bolzano).

Można, jak się okazuje, przyjąć tę własność jako cechę definicyjną zbiorów nieskończonych.

Na marginesie zauważmy, że wykazanie równoważności tej definicji z innymi definicjami pojęcia nieskończoności wymaga użycia pewnika wyboru.

Definicja nieskończoności: Zermelo

Definicja Zermela. Niech $X_\zeta = \{X\}$, dla dowolnego X. Iteracje operacji $_\zeta$ określamy następująco:

- $X_0 = X$
- $X_1 = X_\zeta$
- $X_{n+1} = (X_n)_\zeta$.

Zbiór jest skończony, gdy jest równoliczny z $\emptyset_n$, dla pewnego n; w przeciwnym przypadku jest nieskończony.

Uwaga. Odwołanie się do liczb naturalnych jest w tej definicji jedynie pozorne. W nieuproszczonej, poprawnej wersji definicji Zermela odwołujemy się do kumulatywnej hierarchii zbiorów, której określenie wymaga stosowania indukcji pozaskończonej.

Twierdzenie Cantora

Twierdzenie Cantora.
Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

Dowód. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy teraz następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ \neg x \in f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż:

$$x_f \in X_f \ \leftrightarrow \ \neg x_f \in X_f.$$

a to jest sprzeczność. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Zbiory nieprzeliczalne

Zbiór nieskończony nazywamy **przeliczalnym**, jeśli jest on równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Zbiór jest **nieprzeliczalny**, gdy jest nieskończony i nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Przykład zbioru nieprzeliczalnego poznaliśmy podczas wizyty w Hotelu Hilberta: nieprzeliczalny jest np. zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów dodatnich liczb naturalnych. Podobnie, zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów o wyrazach 0 lub 1 jest nieprzeliczalny.

Istnienie zbiorów nieprzeliczalnych jest konsekwencją aksjomatu nieskończoności, aksjomatu zbioru potęgowego oraz Twierdzenia Cantora.

Liczby niewymierne

Istnieją liczby niewymierne. Przypomnimy szkolny dowód, iż $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, tj. nie jest równa ilorazowi $\frac{a}{b}$ dla żadnych liczb całkowitych a oraz b takich, że $b \neq 0$ oraz a i b są względnie pierwsze (tzn. nie mają wspólnego podzielnika różnego od którejkolwiek z nich i > 1). Przypuśćmy, a contrario, że **istnieją** takie a oraz b. Wtedy:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2 \cdot b^2 = a^2$$

Ponieważ lewa strona tego równania jest liczbą parzystą, więc prawa też. Jeśli a^2 jest parzysta, to i a jest parzysta. Stąd $a = 2 \cdot c$ dla pewnego c i mamy:

$$2 \cdot b^2 = (2 \cdot c)^2$$

$$2 \cdot b^2 = 4 \cdot c^2$$

$$b^2 = 2 \cdot c^2$$

Liczby niewymierne

Prawa strona tego równania jest liczbą parzystą, a więc także b^2 jest liczbą parzystą. Stąd, b jest liczbą parzystą i otrzymujemy sprzeczność z przypuszczeniem, iż a oraz b są względnie pierwsze: wszak pokazaliśmy przed chwilą, że obie są parzyste (a więc obie dzielą się bez reszty przez 2). Zatem musimy odrzucić uczynione przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Ostatecznie, $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Uwaga. Odkrycie liczb niewymiernych, dokonane przez Pitagorejczyków, było — można bez przesady użyć tego określenia — szokiem cywilizacyjnym. To tak, jakbyś ujrzała DUCHA: oto okazuje się, że w Kosmosie, który (wedle Pitagorejczyków) rządzony jest wyłącznie przez Liczby (wymierne) istnieją byty, niedostępne dotychczasowemu rozumieniu pojęcia liczby.

Definicja nieskończoności: von Neumann

Definicja von Neumanna. Dla dowolnego zbioru X, niech $X^* = X \cup \{X\}$. Iteracje operacji * określamy indukcyjnie:

- $X^0 = X$
- $X^1 = X^*$
- $X^{n+1} = (X^n)^*$.

Zbiór jest skończony, gdy jest równoliczny z $\emptyset^n$, dla pewnego n, gdzie $\emptyset$ jest zbiorem pustym. W przeciwnym przypadku, jest nieskończony.

Uwaga. Również w definicji von Neumanna tylko z pozoru odwołujemy się do liczb naturalnych: w poprawnej, nieuproszczonej wersji (której nie będziemy tu podawać) definicja ta używa tylko pojęć teoriomnogościowych; liczby naturalne zostają wtedy zdefiniowane (na gruncie teorii mnogości).

Definicja nieskończoności: Tarski

Definicja Tarskiego. Zbiór jest skończony, gdy każdy $\subseteq$-łańcuch w rodzinie jego podzbiorów jest domknięty na kres górny. W przeciwnym przypadku jest nieskończony.

Podobnie jak u Zermela i von Neumanna, definicja Tarskiego wykorzystuje jedynie pojęcia teoriomnogościowe.

Proszę zauważyć, że np. ciąg zbiorów:

$$\{\{k \ : \ k \leqslant n\} \ : \ n \geqslant 0\}$$

nie jest domknięty na kres górny; kresem górnym (względem porządku $\subseteq$) tego ciągu jest jego teoriomnogościowa suma, a nie jest ona jednym z elementów tego ciągu.

Opuszczamy Hotel Hilberta

Już starczy, prawda?

To, co najważniejsze: mamy precyzyjne definicje nieskończoności, nie odwołujące się ani do czasu, ani do przestrzeni. Definicji tych możemy używać w dalszych rozważaniach dotyczących pojęcia obliczalności.

I jeszcze uwaga dotycząca Hotelu Hilberta. Ponieważ mamy nieskończoną liczbę gości, więc dochody właściciela są nieskończone. Są też jednak pewne utrudnienia. Np.: jakiej długości powinien być wąż przeciwpożarowy? Ile płacić pokojówce, która ma posprzątać wszystkie pokoje?


"HILBERT'S HOTEL" ©2002 CAROL LAY
THE INFINITE HOTEL WAS ALWAYS FILLED TO CAPACITY.
HILBERT'S HOTEL ∞
NO VACANCY
WWW.WAYLAY.COM
YET, IF A NEW GUEST ARRIVED, SHE WAS ALWAYS GIVEN A ROOM.
AFTER ALL, THERE WERE AN INFINITE NUMBER OF ROOMS.
ROOM 8437229486714392645, 913653898652732 NEEDS FRESH TOWELS.
THIS PARADOX ASSUMED THAT MANAGEMENT COULD ALWAYS ADD ONE OR MORE TO INFINITY.
WE'LL SIMPLY PUT YOU IN ROOM 1, THEN ASK EVERYONE TO SHIFT OVER ONE ROOM.
THE BRAIN-BRUISING HOTEL ATTRACTED A LOT OF MATHEMATICIANS AND PHILOSOPHERS.
JUST A MOMENT, PLEASE.
THEY LIKED TO ARGUE INTO THE WEE HOURS ABOUT THE NATURE OF INFINITY.
UNFORTUNATELY, THEY WERE A BUNCH OF SLOBS.
OH, DEAR.
TSK
MANAGEMENT HAD TO HIRE A NEW MAID TO KEEP UP WITH THE MESS.
RING IF YOU GET LOST...
DAUNTED BY THE NUMBER OF ROOMS TO CLEAN...
RM. 632946851743 2
NOK NOK
THE MAID SET FIRE TO THE JOINT.
SCREW IT.
ETHER
THE PHILOSOPHERS ESCAPED...
BUT THE HOTEL BURNED FOREVER.

Na następnym wykładzie będziemy zajmować się następującym tematem:

- Nieskończona złożoność strukturalna. Fraktale.