Metalogika (1)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Cel: wprowadzenie pojęć algebraicznych

- Struktury relacyjne i algebry.
- Niektóre operacje na strukturach relacyjnych (morfizmy, podstruktury, struktury ilorazowe, produkty proste).
- Struktury porządkowe. Kraty i algebry Boole'a.
- Filtry i ultrafiltry.
- Konstrukcja ultraproduktu. Twierdzenie Łosia.

Znakomitym wstępem algebraicznym jest monografia:

- St. Burris, H.P. Sankappanavar: *A Course in Universal Algebra*, plik pdf dostępny na stronie internetowej tych wykładów: http://www.logic.amu.edu.pl/images/4/49/Universalalgebra.pdf

Algebry

Pojęcie *struktury relacyjnej* jest znane. *Algebrą* jest struktura relacyjna sygnatury zawierajacej co najwyżej symbole funkcyjne i stałe indywidualne. Często stosujemy notację *infiksową*: symbol operacji dwuargumentowej (czyli interpretacji 2-arg. symbolu funkcyjnego) piszemy między jego argumentami (jak w arytmetyce szkolnej).

Przykłady:

- $\langle\{0,1\}; \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \underline{\neg}\rangle$ — algebra wartości logicznych, gdzie $\underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \underline{\neg}$ są funkcjami prawdziwościowymi, będącymi interpretacjami funktorów prawdziwościowych: $\wedge$ (koniunkcji), $\vee$ (alternatywy), $\rightarrow$ (implikacji), $\neg$ (negacji), odpowiednio.
- $\langle\wp(X); \cap, \cup, '\rangle$ — algebra wszystkich podzbiorów zbioru X, gdzie $\cap$, $\cup$ i $'$ są, odpowiednio, operacjami: iloczynu, sumy i dopełnienia.

Morfizmy i podstruktury

Niech:
$\mathfrak{A} = \langle A; R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_i^{\mathfrak{A}}, F_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, F_j^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}} \rangle$,
$\mathfrak{B} = \langle B; R_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, R_i^{\mathfrak{B}}, F_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, F_j^{\mathfrak{B}}, c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{B}} \rangle$
będą strukturami o tej samej sygnaturze, gdzie:

- R_m jest predykatem p_m-argumentowym ($0 \leqslant m \leqslant i$, p_m dowolna)
- F_n jest symbolem funkcyjnym p_n-argumentowym ($0 \leqslant n \leqslant j$, p_n dowolna)
- c_l jest stałą indywidualną ($0 \leqslant l \leqslant k$).

Pojęcia: homomorfizmu, izomorfizmu, podstruktury, itd. można określić dla struktur w tak ogólnej postaci, ale ze względów dydaktycznych podamy je dla sygnatury σ_0 zawierającej jedynie: predykat 1-arg. P, predykat 2-arg. R, symbol funkcyjny 2-arg. F i stałą indywidualną c.

Morfizmy i podstruktury

Mówimy, że funkcja $f : A \to B$ jest *homomorfizmem* struktury $\mathfrak{A} = \langle A; P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, F^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$ w strukturę $\mathfrak{B} = \langle B; P^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}}, F^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}} \rangle$, gdy dla wszystkich $x, y \in A$:

- jeśli $P^{\mathfrak{A}}(x)$, to $P^{\mathfrak{B}}(f(x))$
- jeśli $R^{\mathfrak{A}}(x, y)$, to $R^{\mathfrak{B}}(f(x), f(y))$
- $f(F^{\mathfrak{A}}(x, y)) = F^{\mathfrak{B}}(f(x, y))$
- $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

- Homomorfizm $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, który jest bijekcją nazywamy *izomorfizmem*.
- $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są *izomorficzne*, jeśli istnieje izomorfizm $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$.

Morfizmy i podstruktury

Dziedzinę (*uniwersum*) struktury $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $dom(\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A} = \langle A; P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, F^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$ jest *podstrukturą* $\mathfrak{B} = \langle B; P^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}}, F^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}} \rangle$ (a $\mathfrak{B}$ jest *rozszerzeniem* $\mathfrak{A}$), gdy:

- $dom(\mathfrak{A}) \subseteq dom(\mathfrak{B})$
- $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap dom(\mathfrak{A})$
- $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap (dom(\mathfrak{A}) \times dom(\mathfrak{A}))$
- $F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}} \upharpoonright (dom(\mathfrak{A}) \times dom(\mathfrak{A}))$
- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

- Jeśli $\mathfrak{A}$ jest podstrukturą $\mathfrak{B}$, to piszemy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są algebrami oraz $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *podalgebrą* $\mathfrak{B}$.

Produkty proste

Produktem prostym struktur $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ sygnatury σ_0 nazywamy strukturę $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ taką, że dla wszystkich $x_1, x_2 \in dom(\mathfrak{A})$ oraz $y_1, y_2 \in dom(\mathfrak{B})$:

- $dom(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = dom(\mathfrak{A}) \times dom(\mathfrak{B})$
- $P^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((x_1, y_1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{A}}(x_1)$ oraz $P^{\mathfrak{B}}(y_1)$
- $R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{\mathfrak{A}}(x_1, x_2)$ oraz $R^{\mathfrak{B}}(y_1, y_2)$
- $F^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (F^{\mathfrak{A}}(x_1, x_2), F^{\mathfrak{B}}(y_1, y_2))$
- $c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} = (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$.

Podobnie dla produktu dowolnej skończonej rodziny struktur dowolnej sygnatury σ.

Produkty proste

Niech I będzie dowolnym zbiorem, a $\mathcal{A} = \{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ rodziną struktur sygnatury σ_0, gdzie $\mathfrak{A}_i = \langle A_i; P_i^{\mathfrak{A}}, R_i^{\mathfrak{A}}, F_i^{\mathfrak{A}}, c_i^{\mathfrak{A}} \rangle$. Przez produkt prosty rodziny $\mathcal{A}$ rozumiemy strukturę $\mathfrak{A}$ (oznaczaną np. przez $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$) taką, że $dom(\mathfrak{A}) = \bigotimes\limits_{i \in I} A_i = \{f : f \text{ funkcja o dziedzinie } I \text{ oraz } \forall i \in I\ (f(i) \in A_i)\}$ i dla wszystkich $f, g \in dom(\mathfrak{A})$ oraz wszystkich $i \in I$:

- $P^{\mathfrak{A}}(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{A}_i}(f(i))$
- $R^{\mathfrak{A}}(f, g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{\mathfrak{A}_i}(f(i), g(i))$
- $F^{\mathfrak{A}}(f, g) = G$, gdzie $G(i) = F^{\mathfrak{A}_i}(f(i), g(i))$
- $c^{\mathfrak{A}} = f_c$, gdzie $f_c(i) = c^{\mathfrak{A}_i}$.

Podobnie dla produktu dowolnej rodziny struktur dowolnej sygnatury σ.

Kongruencje

Mówimy, że relacja E równoważności na zbiorze A jest *kongruencją* struktury relacyjnej $\mathfrak{A} = \langle A; P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, F^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$, gdy dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$:

- jeśli $E(x_1, x_2)$ oraz $P^{\mathfrak{A}}(x_1)$, to $P^{\mathfrak{A}}(x_2)$
- jeśli $E(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$ i $R^{\mathfrak{A}}(x_1, x_2)$, to $R^{\mathfrak{A}}(y_1, y_2)$
- jeśli $E(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, to $E(F^{\mathfrak{A}}(x_1, x_2), F^{\mathfrak{A}}(y_1, y_2))$.

Ze względu na zwrotność E mamy $E(c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$.

Podobnie określamy kongruencje w strukturach o dowolnej sygnaturze.

Struktury ilorazowe

Strukturą ilorazową struktury $\mathfrak{A} = \langle A; P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, F^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\rangle$ względem kongruencji E nazywamy strukturę $\mathfrak{A}_{/E}$ taką, że dla wszystkich $x, y \in A$:

- $dom(\mathfrak{A}_{/E}) = A/E$ (= zbiór klas abstrakcji relacji E, czyli $\{[x]_E : x \in A\}$, gdzie $[x]_E = \{y \in A : E(x, y)\}$)
- $P^{\mathfrak{A}_{/E}}([x]_E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{A}}(x)$
- $R^{\mathfrak{A}_{/E}}([x]_E, [y]_E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{\mathfrak{A}}(x, y)$
- $F^{\mathfrak{A}_{/E}}([x]_E, [y]_E) = [F^{\mathfrak{A}}(x, y)]_E$.

Powyższe definicje są poprawne, tj. nie są zależne od wyboru reprezentantów z klas abstrakcji relacji E.

Podobnie określamy struktury ilorazowe struktur o dowolnej sygnaturze.

Struktury porządkowe

Zakładamy, że słuchacze znają pojęcia:

- *porządku częściowego* (relacja zwrotna, antysymetryczna i przechodnia), *porządku liniowego* (spójny porządek częściowy);
- *ostrego porządku częściowego* (asymetryczna i przechodnia);
- elementu: *minimalnego*, *maksymalnego*, *najmniejszego*, *największego*.

- Element a jest *ograniczeniem dolnym* podzbioru A zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X; \leqslant \rangle$, gdy $\forall x \in A\ (a \leqslant x)$
- Element a jest *ograniczeniem górnym* podzbioru A zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X; \leqslant \rangle$, gdy $\forall x \in A\ (x \leqslant a)$
- *kres dolny* A = największe ograniczenie dolne A (oznaczamy $glb\ A$)
- *kres górny* A = najmniejsze ograniczenie górne A (oznaczamy: $lub\ A$).

Kraty

Strukturę porządkową $\langle X; \leqslant \rangle$ nazywamy *kratą*, gdy dla każdych $x, y \in X$ istnieją: *glb* $\{x, y\}$ oraz *lub* $\{x, y\}$. Często używane oznaczenia dla *glb* $\{x, y\}$: $x \wedge y$ (albo $x \cap y$); dla *lub* $\{x, y\}$: $x \vee y$ (albo $x \cup y$).

- Element najmniejszy kraty nazywamy jej *zerem* ($\mathbf{0}$, o ile istnieje).
- Element największy kraty nazywamy jej *jedynką* ($\mathbf{1}$, o ile istnieje).
- Krata jest *ograniczona z góry (z dołu)* jeśli istnieje jej jedynka (zero).
- Elementy minimalne w $\langle X - \{\mathbf{0}\}; \leqslant \rangle$ nazywamy *atomami*.
- Elementy maksymalne w $\langle X - \{\mathbf{1}\}; \leqslant \rangle$ nazywamy *koatomami*.
- Krata jest *atomowa*, jeśli każdy jej niezerowy element jest niemniejszy od pewnego atomu.
- Krata jest *bezatomowa*, jeśli nie ma atomów.
- Krata jest *zupełna*, jeśli każdy jej podzbiór ma *glb* oraz *lub*.

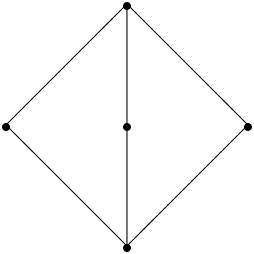
Przykłady

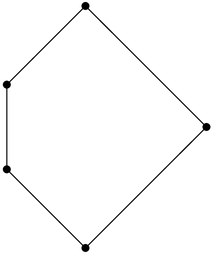
- Rodzina wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru, częściowo uporządkowana przez relację inkluzji. Kresem dolnym jest iloczyn, a kresem górnym suma zbiorów. Krata atomowa, z zerem i jedynką.
- Zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych częściowo uporządkowany przez relację podzielności (bez reszty). Największy wspólny dzielnik jest tu kresem dolnym, a najmniejsza wspólna wielokrotność kresem górnym. Krata atomowa, z zerem, bez jedynki.

- Przedział otwarty (a, b) zbioru liczb rzeczywistych ze zwykłą relacją $\leqslant$. Krata bezatomowa, bez zera i jedynki.
- Przedział domknięty $[a, b]$ zbioru liczb rzeczywistych ze zwykłą relacją $\leqslant$. Krata bezatomowa, z zerem i jedynką.
- Podaj przykład kraty, która nie jest ani atomowa, ani bezatomowa.

Diagramy Hassego

Zwykle reprezentuje się kraty graficznie, za pomocą *diagramów Hassego*. W diagramie takim węzły odpowiadają elementom kraty, a ich połączenia mają reprezentować porządek kratowy. Przyjmuje się przy tym umowę, że gdy $x \leqslant y$, to węzeł x jest na rysunku umieszczany niżej niż węzeł y.





Inne struktury porządkowe

Mówimy, że krata $\langle X; \leqslant\rangle$ jest *dystrybutywna*, jeśli dla wszystkich $x, y, z \in X$:
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

- Kratę dystrybutywną $\langle X; \leqslant\rangle$ nazywamy *algebrą Boole'a*, jeśli dla każdego elementu $x \in X$ istnieje jego *dopełnienie*, czyli element $-x$ taki, że dla wszystkich $y \in X$:
    - $(x \vee (-x)) \wedge y = y$
    - $(x \wedge (-x)) \vee y = y$.

Każda algebra Boole'a ma zero i jedynkę. Używa się innych jeszcze definicji algebr Boole'a. Później poznamy dalsze rodzaje struktur porządkowych.

Przykłady

- Algebra wartości logicznych jest algebrą Boole'a.
- $\langle \wp(X); \cap, \cup, ', \emptyset, X \rangle$ — algebra wszystkich podzbiorów zbioru X jest algebrą Boole'a.

Twierdzenie Stone'a. Każda algebra Boole'a $\langle X; \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów.

Twierdzenie Stone'a jest przykładem *twierdzenia o reprezentacji*.

Filtry i ultrafiltry

Niepusty podzbiór ∇ kraty $(X; \leqslant)$ nazywamy *filtrem*, gdy:

- jeśli $x, y \in \nabla$, to $x \wedge y \in \nabla$
- jeśli $x \in \nabla$ oraz $x \leqslant y$, to $y \in \nabla$.

- Jeśli krata $(X; \leqslant)$ ma jedynkę $\mathbf{1}$, to zbiór $\{\mathbf{1}\}$ jest jej filtrem, nazywanym *filtrem jednostkowym*.
- Filtr w algebrze Boole'a jest *właściwy*, jeśli nie należy do niego zero tej algebry.
- Dla dowolnego $x \in X$ zbiór $\{y \in X : x \leqslant y\}$ jest filtrem, nazywanym *filtrem głównym generowanym przez* x. Filtr, który nie jest główny, nazywamy *niegłównym*.
- *Ultrafiltrem* nazywamy każdy filtr maksymalny (względem inkluzji).

Przykłady

- Zamienne używanie terminów: „krata $\langle \wp(X); \cap, \cup \rangle$" i „krata $\langle \wp(X); \subseteq \rangle$" powinno być oczywiste. Podobnie dla algebr Boole'a.
- W kracie $\langle \wp(X); \cap, \cup \rangle$ ultrafiltrem głównym wyznaczonym przez $\{x\} \in \wp(X)$ jest rodzina $\{A \subseteq X : x \in A\}$.
- Zbiór jest *koskończony*, jeśli jego dopełnienie (w ustalonym uniwersum) jest skończone. Rodzina wszystkich koskończonych podzbiorów nieskończonego zbioru X jest filtrem niegłównym w kracie $\langle \wp(X); \cap, \cup \rangle$.

- Każdy filtr właściwy w algebrze Boole'a jest zawarty w pewnym ultrafiltrze.
- Jeśli ∇ jest ultrafiltrem w algebrze Boole'a $\mathfrak{B}$, to dla każdego $x \in dom(\mathfrak{B})$: albo $x \in \nabla$, albo $(-x) \in \nabla$.

Dualne do pojęcia filtru jest pojęcie ideału. Poznamy je później.

Produkty zredukowane

Niech I będzie dowolnym zbiorem, a $\mathcal{A} = \{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ rodziną struktur sygnatury σ_0, gdzie $\mathfrak{A}_i = \langle A_i; P_i^{\mathfrak{A}}, R_i^{\mathfrak{A}}, F_i^{\mathfrak{A}}, c_i^{\mathfrak{A}} \rangle$. Niech ∇ będzie filtrem w kracie $\langle \wp(I), \subseteq \rangle$. Dla dowolnych $f, g \in \bigotimes\limits_{i \in I} A_i$ zdefiniujmy:

$f \sim_\nabla g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \nabla$.
Wtedy $\sim_\nabla$ jest relacją równoważności na $\bigotimes\limits_{i \in I} A_i$. Przez *produkt zredukowany* rodziny $\mathcal{A}$ względem ∇ rozumiemy strukturę $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \nabla$ (oznaczaną też $\prod_\nabla \mathfrak{A}_i$) taką, że:

- $dom(\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \nabla) = \{[f]_{\sim_\nabla} : f \in \bigotimes\limits_{i \in I} A_i\}$,

a interpretacje P, R, F i c w $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \nabla$ są określone następująco (ze względów typograficznych piszemy niżej $\mathfrak{A}$ zamiast $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \nabla$):

Konstrukcja ultraproduktu

- $P^{\mathfrak{A}}([f]_{\sim_\nabla})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : P^{\mathfrak{A}_i}(f(i))\} \in \nabla$
- $R^{\mathfrak{A}}([f]_{\sim_\nabla}, [g]_{\sim_\nabla})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : R^{\mathfrak{A}_i}(f(i), g(i))\} \in \nabla$
- $F^{\mathfrak{A}}([f]_{\sim_\nabla}, [g]_{\sim_\nabla}) = [\overline{F}]_{\sim_\nabla}$, gdzie $\overline{F}(i) = F^{\mathfrak{A}_i}(i)$ dla wszystkich $i \in I$
- $c^{\mathfrak{A}} = [\overline{C}]_{\sim_\nabla}$, gdzie $\overline{C}(i) = c^{\mathfrak{A}_i}$ dla wszystkich $i \in I$.

- Produkt zredukowany $\prod_\nabla \mathfrak{A}_i$, gdzie ∇ jest ultrafiltrem, nazywamy *ultraproduktem.*
- Jeśli $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}$ dla wszystkich $i \in I$, to $\prod_\nabla \mathfrak{A}_i$ nazywamy *ultrapotęgą* (struktury $\mathfrak{B}$ względem ∇).

Przekonamy się później, jak istotne zastosowania ma ta konstrukcja oraz związane z nią Twierdzenie Łosia:

Twierdzenie Łosia

Z dowolną rodziną $\mathfrak{A}_i$-wartościowań $\{w_i : i \in I\}$ stowarzyszymy $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\nabla$-wartościowanie w: dla dowolnej zmiennej x, niech $w(x) = [\gamma_x]_{\sim_\nabla}$, gdzie γ_x jest funkcją zdefiniowaną przez: $\gamma_x(i) = w_i(x)$.

Twierdzenie Łosia. Dla dowolnego ultraproduktu $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\nabla$ oraz dowolnych $\mathfrak{A}_i$-wartościowań $\{w_i : i \in I\}$ i stowarzyszonego $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\nabla$-wartościowania w, następujące warunki są równoważne dla każdej formuły ψ:

- $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\nabla \models \psi[w]$
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[w_i]\} \in \nabla$.