Wesołe Zagadki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

GLLI Opole 14 V 2013

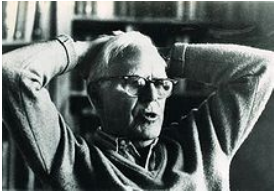
Plan na dziś:

- Omówimy kilkanaście zagadek matematycznych, zrozumiałych dla uczniów szkoły średniej.
- Zagadki będą dotyczyły: nieskończoności, ruchu, wielkości, uporządkowania, kształtu, prawdopodobieństwa.
- Rozwiązania niektórych zagadek stanowią wyzwanie dla intuicji utrwalanych poprzez doświadczenie potoczne.
- Wykorzystujemy ilustracje dostępne w sieci.

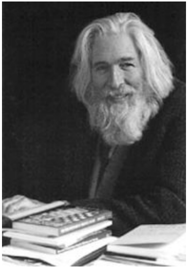
- Treść odczytu wiąże się z prowadzoną przez prelegenta w UAM dydaktyką: http://www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
- Pośrednio wiąże się też z jego działaniami, mającymi znamiona czynności badawczych.

Mistrzowie zagadek matematycznych:

Hugo
Steinhaus



Martin
Gardner



Raymond
Smullyan

Płaszczyzna porozumienia

Postaramy się pokazać, że zwykła, elementarna matematyka może bawić.

Nie kradnij więcej, niż potrafisz unieść

Wyobraź sobie, że ktoś zamierza ofiarować ci *nieskończoną* liczbę kopert: pierwsza zawiera 1 zł, druga 2 zł, trzecia 3 zł, itd. – n-ta koperta zawiera n złotych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje koperta, która pomieści n złotych.

Powiedzmy jednak, że ktoś inny daje ci *nieskończoną* liczbę kopert, z których pierwsza zawiera 2 zł, druga 4 zł, trzecia 6 zł, itd. – n-ta koperta zawiera $2n$ złotych.

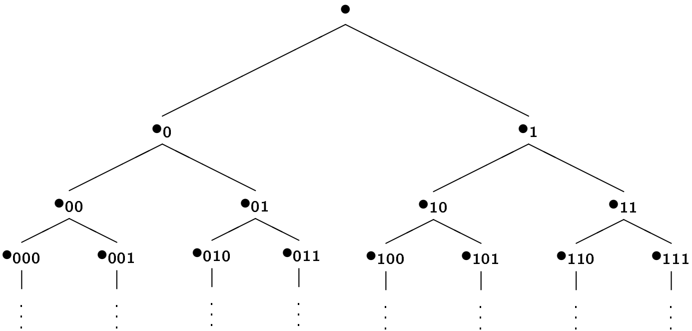
Co opłaca się wybrać? Z jednej strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *dwa razy więcej* pieniędzy niż w pierwszym. Z drugiej natomiast strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *tylko połowę* tego, co dostałbyś w pierwszym przypadku (bo znikają wszystkie koperty zawierające *nieparzystą* liczbę złotówek). Co wybierasz? Która z propozycji jest *obiektywnie* korzystniejsza?

Jak bardzo jesteś zakręcona?

Narysujmy półokrąg o promieniu r, o środku w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie (powiedzmy w górnej półpłaszczyźnie). Teraz narysujmy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{2}$) w dolnej półpłaszczyźnie, którego końce umieszczone są na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0,0)$ oraz $(r,0)$. W kolejnym kroku rysujemy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{4}$) w górnej półpłaszczyźnie, którego końce znajdują się na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0,0)$ oraz $(\frac{r}{2},0)$. Operację powtarzać możemy w nieskończoność – powstaje w ten sposób spirala o *nieskończenie wielu* zwojach, otaczających „coraz ciaśniej" pewien punkt na osi odciętych. Jaka jest długość tej spirali?

$$\frac{2\pi r}{2}+\frac{2\pi\frac{r}{2}}{2}+\frac{2\pi\frac{r}{4}}{2}+\ldots=\pi r(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots)=\pi r\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\pi r.$$

„...zrodziliśmy się bez wprawy i pomrzemy bez rutyny”



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy ciągami zer i jedynek. Jeśli jakiś wierzchołek ma kod s, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $s0$ oraz $s1$. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Czy możliwe jest ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi?

Metoda przekątniowa

- Przypuśćmy, że można ponumerować wszystkie gałęzie liczbami naturalnymi (każda a_i^j jest zerem lub jedynką):
  $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
  $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
  $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
  $\ldots$
- Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:
  - jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
  - jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Czy jest na sali fizyk?

Odległość z A do B wynosi 300 km. Z obu tych miejscowości wyjeżdżają jednocześnie dwa pociągi PKP Intercity i pędzą ku sobie z prędkością 50 km na godzinę. Jednocześnie mucha wylatuje z A, dolatuje do pociągu, który wyruszył z B, zawraca, dolatuje do pociągu, który wyruszył z A, i tak dalej. Mucha leci cały czas z prędkością 100 km na godzinę. Mucha kontynuuje lot do momentu, w którym pociągi zaczną się mijać. Ile kilometrów przeleci mucha? Porównaj matematyczną treść zagadki z jej interpretacją fizyczną.

Lampa Thomsona świeci, gdy jest włączona, nie świeci, gdy jest wyłączona. W momencie $t = 0$ jest włączona, w momencie $t = 1$ jest wyłączona, w momencie $t = \frac{3}{2}$ jest włączona, w momencie $t = \frac{7}{4}$ jest wyłączona, itd. Nie jest istotne, w jakich jednostkach mierzymy czas – powiedzmy, że będą to minuty. Tak więc, lampa świeci przez minutę, potem przez pół minuty nie świeci, potem przez ćwierć minuty świeci, potem przez jedną ósmą minuty nie świeci, itd. Czy w czasie $t = 2$ lampa świeci czy nie?

Głosujemy: dojdzie czy nie?

Po doskonale elastycznej linie o początkowej długości 1 km drepcze mrówka z prędkością 1 cm/sek (względem liny). Lina rozciąga się z prędkością 1 km/sek. Mrówka startuje z lewego, nieruchomego końca liny. Czy dojdzie w skończonym czasie do prawego jej końca?

Demony bywają pomocne

Rozwiązanie *ciągłe* wymaga całkowania równania różniczkowego, czyli rzeczy w polskiej szkole zabronionej. Załóżmy więc, że wraz z wybiciem każdej sekundy linę rozciąga Demon (o Demonach wolno mówić – zapytaj Panią Katechetkę): po pierwszej sekundzie z 1 do 2 km, po 2 sekundzie z 2 do 3 km, itd. A mrówka cały czas drepcze. . .

Jaką część długości całej liny przebywa mrówka w każdej kolejnej sekundzie?

W pierwszej sekundzie mrówka pokonuje 1 cm z 1 km, czyli $\frac{1}{100000}$ część całej długości liny.
W drugiej sekundzie mrówka pokonuje 1 cm z 2 km, czyli $\frac{1}{200000}$ część całej długości liny.
W trzeciej sekundzie mrówka pokonuje 1 cm z 3 km, czyli $\frac{1}{300000}$ część całej długości liny. Itd.: w n-tej sekundzie mrówka pokonuje 1 cm z n km, czyli $\frac{1}{n \cdot 100000}$ część całej długości liny.

O, już widać prawy koniec liny!

Czy istnieje liczba n taka, że suma: $\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100000}$ będzie równa 1, czyli całej długości liny?
Szukamy n takiej, dla której: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = 100000$.

- *Liczby harmoniczne*: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest *rozbieżny*. Porównajmy bowiem:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots >$$
$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

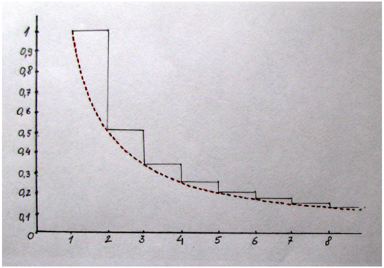
Istnieje zatem n taka, że $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100000$. Mrówka dojdzie do prawego końca! ***Piwa jej dać!***

- Liczby harmoniczne spełniają następującą równość, w której pojawia się *stała Eulera-Mascheroniego* γ:
  $$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0{,}5772156649501\ldots$$
  Obecnie (2013) nie wiadomo, czy γ jest liczbą algebraiczną czy przestępną, ani czy jest liczbą wymierną czy też niewymierną.
- Mrówka dotrze do prawego końca liny w czasie $e^{100000-\gamma}$ sekund, co w zapisie dziesiętnym daje liczbę o ponad czterdziestu tysiącach cyfr. Jest to czas tysiące razy dłuższy od czasu istnienia Wszechświata (licząc od Wielkiego Wybuchu).
- Skoro *przestrzeń* Wszechświata rozszerza się, a prędkość światła jest stała, to czy kiedyś nocne niebo będzie całkiem ciemne?

Szereg harmoniczny jest bardzo leniwy w swojej rozbieżności. Czy istnieje *szereg najwolniej rozbieżny*? Przemyśl to w domu, teraz napoimy arcybiskupa.

Wierni jednej z parafii na dalekiej północy kraju podarowali swojemu arcybiskupowi kształtną flaszkę wypełnioną winem. Składa się ona z walca o promieniu i wysokości równej jednostce (np. jednemu metrowi) oraz szyjki, która jest powierzchnią powstałą poprzez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale od 1 do nieskończoności. Czy arcybiskup będzie pił z niej wiecznie, zakładając, że codziennie pragnie, powiedzmy, ćwiarteczki?

Rozważmy *dyskretne* (górne, zewnętrzne) przybliżenie szyjki flaszki:



Problem dotyczy szyi, ekscelencjo...

- Powierzchnia P szyjki flaszki jest nieskończona, ponieważ:
  $P > \pi \cdot 1^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}) = \pi + 2\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
- Objętość V szyjki flaszki jest jednak skończona, ponieważ:
  $V < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\pi (\frac{1}{n})^2 \cdot 1) = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi \frac{\pi^2}{6}$

Dowód (Eulera), że $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ jest dość złożony. Pokażemy jedynie, że S jest liczbą skończoną:

$S = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) + \ldots <$
$1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}) + \ldots =$
$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Uciekamy zboczenicy

- Zboczenica goni cię w kole o promieniu, powiedzmy, jednego kilometra (np. na okrągłej wyspie, z której nie ma ucieczki). Wasze maksymalne prędkości są równe. Kto z was ma strategię zwycięską?
  Odpowiedź: możesz umknąć zboczenicy po pewnej łamanej, której odcinki mają długości wyznaczone przez liczby harmoniczne.
- Na skraju pustyni masz praktycznie nieograniczoną ilość paliwa. Dysponujesz jednym motocyklem i jednym dodatkowym kanistrem na paliwo. Czy możesz tak przygotować sobie trasę, umieszczając w stosownych odległościach zapasy paliwa, aby przebyć całą pustynię, jakkolwiek byłaby ona wielka?
  Odpowiedź: tak. Zapasy rozstawiamy w odległościach wyznaczonych przez liczby harmoniczne.

- Chcemy zbadać wytrzymałość prętów z dostarczonej partii ich tysiąca. Czy istnieje jakaś optymalna strategia ustalenia (z odpowiednim prawdopodobieństwem) minimalnej siły potrzebnej do złamania pręta z tej partii, przy której zniszczeniu ulega jak najmniejsza liczba prętów?

  Odpowiedź: można postępować tak, że zniszczeniu ulegnie mniej niż osiem prętów.

- W konkursie bierze udział tysiąc kandydatek. Czy można znaleźć optymalną strategię wyboru – taką, która nie zmuszając do przepytywania *wszystkich* kandydatek pozwoli, z określonym prawdopodobieństwem wybrać najlepszą z nich?

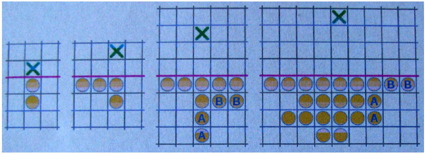
  Odpowiedź: przepytać i odrzucić pierwsze 368 kandydatek, a następnie przyjąć pierwszą, która jest lepsza od odrzuconych.

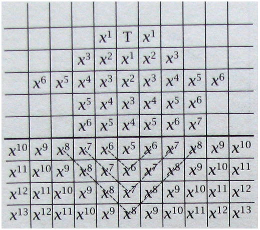
- Kładziemy na stole monetę tak, aby wystawała nieco poza krawędź stołu. Na niej kładziemy następną monetę tak, aby wystawała nieco poza krawędź pierwszej. I tak dalej. Jakiej długości nawis możemy w ten sposób utworzyć, bez zawalenia się całości pod wpływem siły grawitacji?

  Odpowiedź: można utworzyć nawis dowolnej długości.

Jak wysoko można zajść?

Ruchy: pionowo lub poziomo, usuwając przeskakiwany pionek.





				x^1	T	x^1				
			x^3	x^2	x^1	x^2	x^3			
	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	
			x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6		
			x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7		
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

$P_1 : \ x^5 + x^6 \qquad P_2 : \ x^5 + 2x^6 + x^7 \qquad P_3 : \ x^5 + 3x^6 + 3x^7 + x^8$

Reguły w bitwie o poziom piąty

1. $x^{n+2} + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^n
2. $x^n + x^{n-1}$ zostaje zastąpione przez x^n
3. $x^n + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^{n+2}.

Wartość $x > 0$ dobieramy tak, aby wartość otrzymanego wielomianu zmniejszała się w drugim i trzecim z powyższych przypadków, a pozostawała niezmieniona w pierwszym z nich. Skoro $x > 0$, to $x^n + x^{n-1} > x^n$. Jeśli ma być $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$, to $1 + x > x^2$, co daje nierówność $0 < x < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Wreszcie, dla pierwszego warunku nasz wielomian ma nie zmieniać wartości, czyli ma zachodzić $x^{n+2} + x^{n+1} = x^n$. To oznacza, że $x + x^2 = 1$, a więc jeśli przyjmiemy $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, to wszystkie wymagane warunki są spełnione oraz zachodzi $x + x^2 = 1$. Celowi T nadajemy wartość 1.

Wartość nieskończonej armii

- Każda z konfiguracji pionków opisana jest skończonym wielomianem. Jego wartość będzie zatem mniejsza od sumy szeregu nieskończonego (który interpretować możemy jako wartość nieskończonej armii): $P = x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 7x^8 + \ldots = x^5(1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots)$.
- $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$
- $xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$
- $S - xS = S(1 - x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$
- $S(1 - x) = 1 + 2(x + x^2 + x^3 + \ldots)$
- $S(1 - x) = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$
- $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$
- Ponieważ $P = x^5 S$, więc $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2}$.

Nieosiągalny poziom piąty

- Przypomnijmy, że nasz wybór wartości dla x spełnia warunek $x + x^2 = x(1 + x) = 1$, a więc $1 + x = \frac{1}{x}$ oraz $1 - x = x^2$.
- Tak więc: $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{x^5(\frac{1}{x})}{(x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$.

- Oznacza to, że wartość przypisana każdej początkowej (skończonej!) konfiguracji pionków poniżej bariery musi być mniejsza od 1, a ponieważ każdy ruch albo zmniejsza wartość konfiguracji, albo pozostawia ją bez zmian, więc wartość żadnego z pionków nie osiągnie nigdy 1.
- A to znaczy, że żaden pionek ze skończonej armii pod barierą, niezależnie od tego jak licznej i jak sprytnie rozstawionej, nigdy nie osiągnie poziomu piątego.

Miss Watson dedukuje...

– Ile lat mają twoje dzieci?
– Mam trójkę dzieci, iloczyn ich lat wynosi 36.
– To nie wystarcza dla ustalenia wieku każdego z nich!
– Suma ich lat równa jest liczbie okien w kamienicy naprzeciwko.
– To też nie wystarcza!
– Najstarsze ma zeza.
– No, wreszcie! Teraz już wiem, ile lat ma każde z trójki.
Ile lat ma każde z dzieci?

Ustalamy wszystkie dzielniki liczby 36. Są to: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Zbudujmy tabelę, w której pierwszy wiersz to możliwy wiek jednego dziecka, pierwsza kolumna to możliwy wiek drugiego dziecka, a wiek trzeciego otrzymujemy dzieląc 36 przez iloczyn liczby lat pierwszego i drugiego z dzieci. Znak x stawiamy w sytuacji, gdy 36 nie dzieli się przez ten iloczyn (nie musimy wypełniać całej tabeli!):

	1	2	3	4	6	9	12	18	36
1	36	18	12	9	6	4	3	2	1
2		9	6	x	3	2	x	1	
3			4	3	2	x	1		
4				x	x	1			
6					1				
9									
12									
18									
36									

	1	1	1	1	1	2	2	3
	1	2	3	4	6	2	3	3
	36	18	12	9	6	9	6	4
suma:	38	21	16	14	13	13	11	10

Odpowiedź: dzieci mają: 2, 2 i 9 lat.

Opróżnianie pudełka

Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką, itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, wedle następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać" poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej.

Lemat Königa w działaniu

Zabawę tę przedstawić można w postaci drzewa o ponumerowanych wierzchołkach. Początkową zawartość pudełka reprezentują wierzchołki wychodzące bezpośrednio z korzenia drzewa. Zastępowanie jakiejś kuli (liścia drzewa) zbiorem innych polega na dołączeniu, w miejsce usuwanego liścia, całego zbioru nowych liści, reprezentujących kule, zastępujące usuwaną kulę. Drzewo „rośnie w górę” w miarę jak zastępujemy usuwane kule nowymi. Zauważmy, że na każdej gałęzi drzewa występują kule o coraz mniejszych numerach. Ponadto, każdy wierzchołek drzewa ma tylko skończenie wielu bezpośrednich potomków. Gdyby drzewo miało nieskończoną liczbę wierzchołków, to (na mocy *Lematu Königa*) musiałoby mieć gałąź nieskończoną. To jednak jest niemożliwe, ze względu na wspomniany już fakt, że numery na każdej gałęzi maleją, w miarę oddalania się od korzenia drzewa. Tak więc, zabawa w opróżnianie pudełka musi zakończyć się w skończonej liczbie kroków.

Trójkącik, kwadracik, gwiazdeczka

Wprowadźmy oznaczenia:

$\triangle n$ oznacza n^n

$\square n$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n

$\bigstar n$ oznacza iterowanie n razy operacji $\square$ dla argumentu n.

Czy potrafisz obliczyć $\bigstar 2$?

- $\bigstar 2 = \square\square 2 = \square(\triangle\triangle 2)$
- $\triangle\triangle 2 = \triangle 2^2 = \triangle 4 = 4^4 = 216$
- $\bigstar 2 = \square 216 = \triangle\triangle \ldots \triangle 216$, gdzie operacja $\triangle$ wykonywana jest 216 razy (*wieża potęgowa*).
- $\bigstar 2$ to zatem liczba gigantyczna, którą łatwo opisać, ale obliczyć ją, hm, trudniej. Poczytaj o notacji strzałkowej Knutha.

Kogo lubią dziewczyny?

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

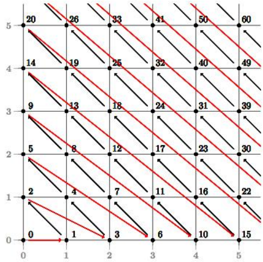
- X: $A > B > C$
- Y: $B > C > A$
- Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt? NIE, ponieważ:

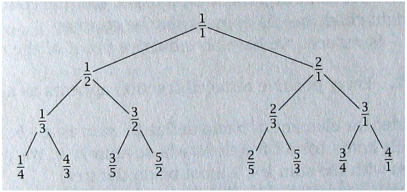
1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.
2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.
3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

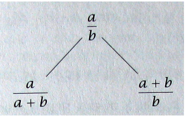
Jak grzecznie uporządkować wszystkie ułamki $\geqslant 0$?

- Bijekcja $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $c(x, y) = y + \sum\limits_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1)$



Drzewo Calkina-Wilfa

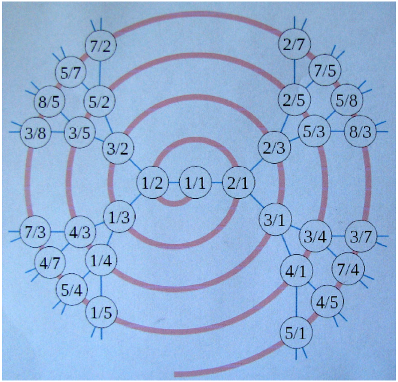




Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

$q(1) = 1$ oraz $q(n+1) = \frac{1}{\lfloor q(n) \rfloor - (q(n) - \lfloor q(n) \rfloor) + 1}$ dla $n \geqslant 1$,
gdzie $\lfloor x \rfloor$ to największa liczba naturalna $\leqslant x$.

Spirala ułamków

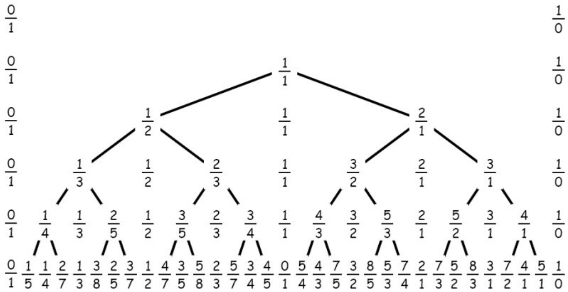


Każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ $(n \geqslant 0)$, gdzie $b(0) = b(1) = 1$ oraz:

$$b(2n+1) = b(n), \quad b(2n+2) = b(n) + b(n+1).$$

Zmowa matematyka z zegarmistrzem

Czy dodawanie $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ jest głupie?



Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

Jak trafić do wybranego ułamka?

- $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Do każdego ułamka prowadzi (dokładnie jeden!) ciąg skrętów (od korzenia $\frac{1}{1}$) w lewo L oraz w prawo P. Dla przykładu: $\frac{4}{7}$ to $LPLL$.
- Przy interpretacji $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ każdy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ reprezentowany jest macierzą $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$. Np.:

$$LPPL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{5}{7}$$

Mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Zrób łańcuszek z ułamka

- Ciąg przybliżeń liczby e w drzewie Sterna-Brocota to nieskończona gałąź:
  $e \mapsto PL^0PLP^2LPL^4PLP^6LPL^8PLP^{10}LPL^{12}\ldots$
- Drzewo Sterna-Brocota ma związek np. z:
  - przedstawieniem liczb wymiernych w postaci ułamków łańcuchowych
  - algorytmem Euklidesa
  - liczbami Fibonacciego $F_0 = 0, \ \ F_1 = 1, \ \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Może spróbujesz samodzielnie wykryć te związki?

Przypomnijmy: $\frac{153}{53} = 2 + \frac{47}{53} = 2 + \frac{1}{\frac{53}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{6}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{47}{6}}} =$
$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{\frac{6}{5}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}} = [2; 1, 7, 1, 5]$

Niepoznawalne Imię Boga w rozwinięciu π?

Liczba	rozwinięcie łańcuchowe
wymierna	skończone
niewymierny pierwiastek kwadratowy	okresowe
niewymierna	nieskończone

Dla przykładu: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}]$.
$e^{\frac{1}{n}} = [1; n-1, 1, 1, 3n-1, 1, 1, 5n-1, 1, 1, 7n-1, 1, 1, \ldots]$

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ddots}}}}$$

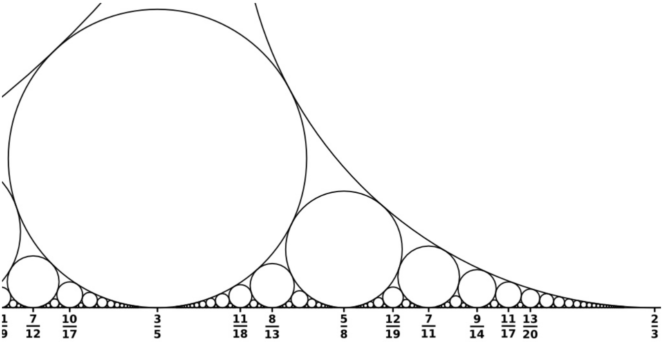
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots], \qquad e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}}$$

Gdzieś już widziałam coś podobnego. . .

Przez n-ty ciąg Fareya rozumiemy rosnący ciąg liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$, których mianowniki nie są większe od n.

F_1	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Turtles all the way down. . .

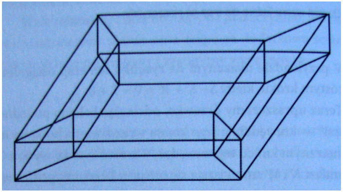


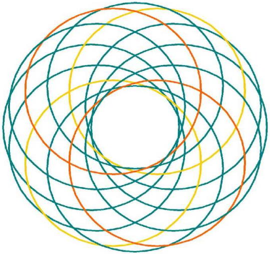
Okręgi o środkach w punktach $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ oraz promieniach $\frac{1}{2b^2}$. Zastanów się w domu, co łączy okręgi Forda z drzewem Sterna-Brocota oraz ciągami Fareya.

- Jakimi obiektami można całkowicie (i bez nakładania się na siebie) wypełnić przestrzeń trójwymiarową? Oczywiście *punktami*, mało zabawne. Twój następny pomysł: *sześcianami*. Zgoda, ale co trzeba o tych sześcianach założyć?

- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą*? Tak, to łatwe. *Widzisz* to?
- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą* w taki sposób, aby prosta ta przechodziła *wewnątrz* każdego z tych okręgów, a ponadto *każde* dwa z tych okręgów były względem siebie usytuowane jak ogniwa łańcucha? Tak, to trudniejsze. Poczytaj o *wiązce Hopfa*.
- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *prostopadłościanami z wyciętą wewnątrz prostopadłościenną dziurą*? Tak, to niezbyt trudne. Zastanów się, *jak* myślisz o tym problemie, *co robisz*, próbując go rozwiązać. Podaj warunki, które muszą spełniać te prostopadłościany.

Wypełniacze



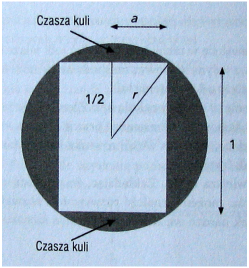


Wielościan z dziurą

Splątane okręgi

Obrączka

W kuli wydrążono otwór w kształcie walca, którego wysokość równa jest jednostce. Powstała w ten sposób bryła w kształcie obrączki. Jaka jest jej objętość?



$r^2 = a^2 + (\frac{1}{2})^2$, czyli $a^2 = r^2 - \frac{1}{4}$

Rachunek

1. Objętość kuli o promieniu r: $\frac{4}{3}\pi r^3$
2. Objętość walca o promieniu podstawy a oraz wysokości h: $\pi a^2 h$
3. Objętość czaszy kulistej o wysokości (strzałce) k w kuli o promieniu r: $\frac{1}{3}\pi k^2(3r - k)$.

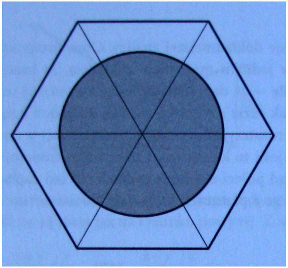
W rozważanym przez nas przypadku $h = 1$ oraz $k = r - \frac{1}{2}$. Poszukiwana objętość to zatem objętość kuli pomniejszona o objętość walca oraz dwóch czasz kulistych, czyli:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \pi a^2 h - \frac{2}{3}\pi k^2(3r - k).$$

Po wstawieniu wartości h, k oraz a i wykonaniu (łatwych lecz żmudnych) rachunków otrzymujemy w wyniku $\frac{\pi}{6}$, a więc istotnie objętość ta nie zależy od promienia kuli.

Pasący się punkt

Jesteś dumnym posiadaczem jednej kozy i łąki w kształcie trójkąta równobocznego o długości boku 100m. Chciałbyś dokładnie połowę łąki przeznaczyć na pastwisko dla kozy, a na drugiej połowie zasiać cokolwiek (tylko nie konopie). Koza jest uwiązana na sznurku zaczepionym do palika w jednym z wierzchołków rozważanego trójkąta. Jak długi powinien być sznurek, aby koza miała dostęp dokładnie do połowy twojego pola? Czynimy oczywiście śmieszne założenie, że koza jest punktem.



Rachunek

Zapomniałeś wzór na pole wycinka kołowego ($\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$). Ale pamiętasz:

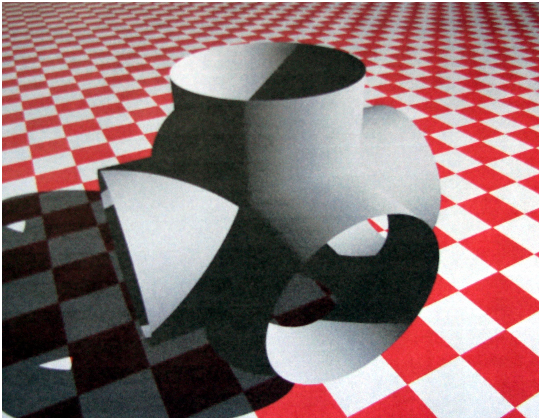
1. Pole okręgu o promieniu r: πr^2
2. Pole trójkąta równobocznego o długości boku a: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
3. Pole sześciokąta: $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dla $a = 100$ otrzymujemy pole sześciokąta: $15000\sqrt{3}$. Wiemy, że πr^2 ma być równe połowie tej wielkości, czyli $7500\sqrt{3}$. Z tego łatwo otrzymujemy:

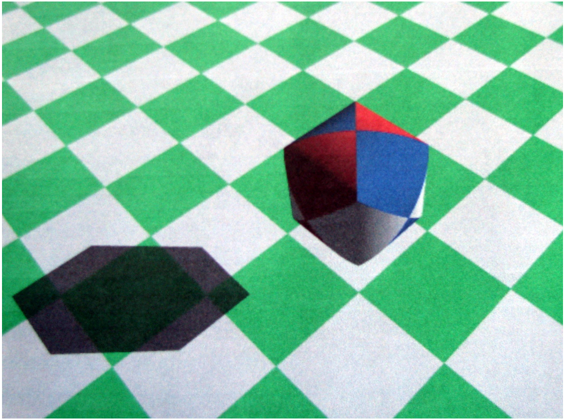
$$r = \sqrt{\frac{7500\sqrt{3}}{\pi}} \approx 64,3037.$$

Fantazja hydrauliczna

Jaką bryłę tworzy część wspólna trzech ortogonalnych walców?



Kajfosz: *Jezus był czterowymiarowy!*



Mam trzy pudełka, dokładnie w jednym z nich jest nagroda, pozostałe są puste. Ja wiem, w którym jest nagroda, ty nie. Chcesz dostać tę nagrodę. Gra odbywa się w dwóch ruchach. W pierwszym masz wybrać pudełko. Gdy to uczynisz, pokazuję ci, że jedno z pozostałych pudełek jest puste. W drugim ruchu masz podjąć decyzję co jest bardziej korzystne w celu uzyskania nagrody:

1. Pozostać przy pierwotnym wyborze.
2. Zmienić swój pierwszy wybór.

A może sądzisz, że szanse są takie same? Przypuśćmy, że najpierw wybrałaś A. Nagroda jest w A, B lub C, trzy możliwości.

A	B	C	Otwieram:	Przy zmianie A na:
1			B	C – Przegrywasz
	1		C	B – Wygrywasz
		1	B	C – Wygrywasz

Widać zatem, że zmiana pierwszego wyboru owocuje wygraną w dwóch na trzy przypadki. Tak samo, gdy najpierw wybrałaś B (lub C).

Bałagan w pudełkach

W każdym z trzech pudełek znajdują się dwie kule: w jednym dwie białe, w drugim dwie czarne, a w ostatnim jedną biała i jedna czarna. Na każdym z pudełek jest napis, informujący o jego zawartości. Każdy z tych napisów jest fałszywy. Ile minimalnie wystarczy wyciągnąć kul, aby ustalić zawartość wszystkich pudełek?

Wystarczy wyjąć jedną kulę z pudełka, na którym (fałszywie!) napisano, że zawiera jedną kulę czarna i jedną białą. Jeśli wyciągnięta kula jest biała, to pudełko zawierało dwie białe kule, jeśli jest czarna, to zawierało dwie czarne kule. Przypuśćmy, że wyciągnąłeś kulę czarną (przypadek z białą jest symetryczny). Wtedy od razu wiesz, że pudełko z napisem „dwie białe" musi zawierać jedną czarną i jedną białą kulę (nie mogą być dwie białe, bo napis jest fałszywy, ale też nie mogą być dwie czarne, bo pierwsze pudełko zawierało dwie czarne, co właśnie ustaliłeś). Wtedy pozostałe trzecie pudełko musi zawierać dwie białe kule.

Logika – to proste!

1. Niech ciotka Matylda lubi dokładnie wszystkich niesamolubów oraz nie lubi dokładnie żadnego samoluba. *Samolub* to ktoś, kto lubi siebie, a *niesamolub* to ktoś, kto nie jest samolubem. Zagadka polega na ustaleniu, w której suterenie na Rynku w Opolu mieszka ciotka Matylda. Rozwiązanie proszę podać bez opuszczania tej sali.
2. Nazwijmy *tarczą Abla* tarczę, której nic nie może przebić, a *włócznią Kaina* włócznię, która przebija wszystko. Co stanie się, gdy włócznia Kaina uderzy w tarczę Abla?
3. Co stanie się, gdy Pinokio powie: *Mój nos się wydłuża*?
4. Ustal, czy wniosek wynika z przesłanek: *Każdy kocha moje dziecko. Moje dziecko kocha tylko mnie. Jestem zatem swoim własnym dzieckiem.*

Koszmar nieśmiertelności

Przepis na nieśmiertelność. Gdy zastanowić się głębiej, trudno orzec, dlaczego nieśmiertelność uważana jest w wielu religiach za wartość pozytywną. Mniejsza z tym, niech każdy trudzi się nad problemem nieśmiertelności we własnym sumieniu. Dla tych, którzy jej pożądają podajemy (za Raymondem Smullyanem) prosty przepis na to, aby stać się nieśmiertelnym. Wystarczy, że spełnisz następujące dwa warunki:

1. Będziesz zawsze mówił prawdę.
2. Wypowiesz (teraz) zdanie: *Powtórzę to zdanie jutro*.

Skoro to takie proste, to dlaczego (żądni nieśmiertelności) ludzie nie postępują wedle tego przepisu? A może przepis jest zły? Co sądzisz?

Jakże to – wykład bez morału?

- Prelegent nie ma uprawnień ani kompetencji, aby oceniać dydaktykę matematyki w polskich szkołach. Podziela jednak troskę obecną w wypowiedziach fachowców na ten temat – np. w odniesieniu do testowej metody sprawdzania wiedzy ucznia.
- Lekcje matematyki wcale nie muszą być trudne i nudne – wielu nauczycieli naprawdę stara się o ich przystępność oraz urozmaicenie.

- Dzisiejszy odczyt miał jedynie bawić. Teraźniejszość i przyszłość polskiej edukacji matematycznej to tematy, które wymagają poważniejszego prelegenta.
- Pomiędzy frontem współczesnych badań matematycznych a przygotowaniem matematycznym oferowanym przez szkołę jest gigantyczna przepaść. Pewne otwarte problemy można jednak formułować w języku zrozumiałym dla gimnazjalistki, np.:

Hipoteza Goldbacha. Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Udowodniono, że hipoteza Goldbacha zachodzi dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $4 \cdot 10^{17}$.

Liczby doskonałe. Liczba naturalna jest *doskonała*, gdy jest sumą wszystkich jej dzielników od niej mniejszych. Najmniejszą liczbą doskonałą jest $6 = 1 + 2 + 3$, następną $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Jeśli $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, to $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ jest (oczywiście parzystą) liczbą doskonałą, to udowodnił już Euklides. Z kolei Leonhard Euler pokazał w XVIII wieku, że *każda* parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Nie wiadomo obecnie, czy istnieją *nieparzyste* liczby doskonałe – gdyby taka liczba istniała, to musiałaby być większa od 10^{1500}. Zapis każdej parzystej liczby doskonałej w notacji dwójkowej to układ jedynek, po którym następuje układ zer, np.:

$6_{10} = 110_2 \quad 28_{10} = 11100_2 \quad 496_{10} = 111110000_2$

$8128_{10} = 1111111000000_2$

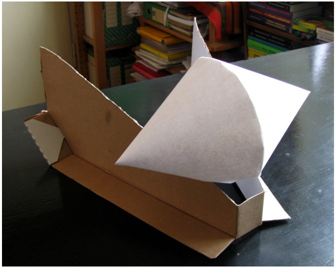
$33550336_{10} = 1111111111111000000000000_2$.

Problem Collatza-Ulama. Rozważmy całkiem dowolną liczbę naturalną $c_0 > 0$. Zdefiniujmy: $c_1 = \frac{c_0}{2}$, jeśli c_0 jest parzysta, a $c_1 = 3c_0 + 1$, jeśli c_0 jest nieparzysta. Ogólnie, niech: $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$, jeśli c_n jest parzysta, a $c_{n+1} = 3c_n + 1$, jeśli c_n jest nieparzysta. Hipoteza Collatza-Ulama głosi, że niezależnie od tego, jak początkowo wybierzemy liczbę c_0, to dla pewnego n otrzymamy $c_n = 1$. W konsekwencji, wszystkie dalsze wyrazy ciągu będą miały postać: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1,... Udowodniono, że hipoteza Collatza zachodzi dla wszystkich liczb mniejszych od $5 \cdot 2^{60}$.

Cegiełka Eulera. Przez *cegiełkę Eulera* rozumiemy prostopadłościan, w którym długości wszystkich krawędzi oraz wszystkich przekątnych ścian wyrażają się liczbami naturalnymi. Najmniejsza cegiełka Eulera ma krawędzie o długościach krawędzi 44, 117, 240 oraz długościach przekątnych ścian 125, 244, 267. *Doskonała cegiełka Eulera*, to taka cegiełka Eulera, w której również długość wewnętrznej przekątnej prostopadłościanu jest liczbą naturalną. Dotychczas nie wiadomo, czy istnieją doskonałe cegiełki Eulera.

Lewitujący oscypek

Znajdź wartości: kąta rozchylenia szyn, kąta wznoszenia się szyn oraz wymiarów podwójnego stożka, dla których toczył on się będzie (pozornie!) pod górę:



Wskazówka: znajdź równanie ruchu środka ciężkości oscypka. Cudów nie ma – ten punkt w górę nie pofrunie.

Żegnaj, Opole!

Uprzejmie dziękuję organizatorom za umożliwienie mi wygłoszenia tego odczytu oraz okazaną gościnność. Mam nadzieję, że nie wyrządziłem żadnych poważniejszych szkód dydaktycznych, a może nawet udało mi się zachęcić choćby parę osób do zainteresowania się matematyką.