ZAGADKI

WYKŁAD 1: NIESKOŃCZONE

To jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. Zawsze było ono też źródłem wielu problemów filozoficznych. Budziło i budzi emocje: strach, podziw, itd. Żongluje się nim dość swobodnie w systemach religijnych. Czy potrafimy porządnie zdefiniować *nieskończoność*? Zastanów się przez chwilę, czy widzisz możliwość precyzyjnego określenia, że czegoś jest nieskończenie wiele, bez odwoływania się do np.: czasu, przestrzeni, uporządkowania. Prawdopodobnie w miarę łatwo przychodzi ci obcowanie z *nieskończonością potencjalną* – z przypadkiem, gdy można bez ograniczeń stale *powiększać* jakąś kolekcję obiektów. Możesz natomiast z pewnym-takim-wahaniem być skłonna do uznania, że istnieje również *nieskończoność aktualna* – oraz że możemy wykonywać pewne operacje na ujmowanych w całość obiektach nieskończonych. Z pewnością zaczniesz się buntować, gdy dowiesz się o istnieniu całej skali *różnych* (!) nieskończoności.

Nieskończone pojawia się w matematyce w różnych postaciach. Mówi się więc o zbiorach nieskończonych – wtedy myślimy o czymś *nieskończenie dużym*. Możemy jednak także próbować rozmyślać o czymś *nieskończenie małym*. Obiekty matematyczne mogą też być *nieskończenie złożone*. Matematycy nie znają strachu przed sumowaniem nieskończenie wielu wielkości, potrafią ustalać, kiedy takie sumowanie daje w wyniku wielkość skończoną, a kiedy tak nie jest. Świat fizyczny może być skończony, ale jego opisy mogą wymagać posłużenia się np. przestrzeniami o nieskończonej liczbie wymiarów. Teorie lingwistyczne zmuszone są do zakładania, że zbiór poprawnych syntaktycznie wyrażeń dowolnego języka jest nieskończony. Nawet tak banalna sfera Egzystencji Ludzkiej, jaką są finanse nie potrafi obyć się bez nieskończoności.

1 Nieskończone łapówki

Wyobraź sobie, że ktoś zamierza ofiarować ci *nieskończoną* liczbę kopert: pierwsza zawiera złotówkę, druga dwa złote, trzecia trzy złote, itd. – n-ta koperta zawiera n złotych. Pomijamy oczywiście czysto fizyczne aspekty darowizny, czyli zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje koperta, która pomieści n złotych. Taka darowizna urządza cię do końca życia (i długo potem). Powiedzmy jednak, że darczyńca daje ci wybór: albo pozostajesz przy obecnej wersji podarunku, albo przyjmujesz od niego *nieskończoną* liczbę kopert, z których pierwsza zawiera dwa złote, druga cztery złote, trzecia sześć złotych, itd. – n-ta koperta zawiera $2n$ złotych. Możesz też wyobrazić sobie, że masz do czynienia z dwoma łapówkarzami – jeden przedstawia ci pierwszą ofertę, a drugi drugą. Co opłaca się wybrać? Z jednej strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *dwa razy więcej* pieniędzy niż w pierwszym. Z drugiej natomiast strony, w drugim przypadku dostajesz w sumie *tylko połowę* tego, co dostałbyś w pierwszym przypadku (bo znikają wszystkie koperty zawierające *nieparzystą* liczbę złotówek). Co wybierasz? Która z propozycji jest *obiektywnie* korzystniejsza?

2 Spirala o nieskończonej liczbie zwojów

Narysujmy półokrąg o promieniu r, o środku w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie (powiedzmy w górnej półpłaszczyźnie). Teraz narysujmy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{2}$) w dolnej półpłaszczyźnie, którego końce umieszczone są na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0,0)$ oraz $(r,0)$. W kolejnym kroku rysujemy półokrąg (o promieniu $\frac{r}{4}$) w górnej półpłaszczyźnie, którego końce znajdują się na osi odciętych w punktach o współrzędnych $(0,0)$ oraz $(\frac{r}{2},0)$. Operacje te powtarzać możemy w nieskończoność – powstaje w ten sposób spirala o *nieskończenie wielu* zwojach, otaczających „coraz ciaśniej" pewien punkt na osi odciętych. Jaka jest długość tej spirali?

3 Spirala nieskończona

Niech $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}_+$ dla $n \in \mathbb{N}$. Budujemy spiralę z odcinków o długościach: $a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ (powiedzmy, prawoskrętną, kąt skrętu $-\frac{\pi}{2}$). Długość tej spirali to: $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Spirala mieści się na ograniczonym obszarze.

Dla ciągu $a_n = q^{n-1}$ oraz $q = \frac{95}{100}$ spirala ma długość 40. Stosujemy w tym przypadku znany ze szkoły wzór, wykorzystany w poprzednim punkcie.

A jaka jest jej długość dla ciągu $a_n = \frac{1}{n}$?

4 Gra Smullyana

Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką, itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, wedle następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać" poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej. Czy potrafisz uzasadnić, że zabawa musi zakończyć się po skończonej liczbie kroków?

5 Lampa Thomsona

Lampa Thomsona działa w sposób następujący. Świeci, gdy jest włączona, nie świeci, gdy jest wyłączona. W momencie $t = 0$ jest włączona, w momencie $t = 1$ jest wyłączona, w momencie $t = \frac{3}{2}$ jest włączona, w momencie $t = \frac{7}{4}$ jest wyłączona, itd. Nie jest istotne, w jakich jednostkach mierzymy czas – powiedzmy, że będą to minuty. Tak więc, lampa świeci przez minutę, potem przez pół minuty nie świeci, potem przez ćwierć minuty świeci, potem przez jedną ósmą minuty nie świeci, itd. Czy w czasie $t = 2$ lampa świeci czy nie?

6 Kule Laugdogoitii

Współcześnie rozważa się np. następujący paradoks (także podpadający pod kategorię *supertasks*), który sformułował Pérez Laugdogoitia. Wyobraźmy sobie, że na odcinku AB rozmieszczone są jednakowe masy punktowe w nieskończonej liczbie, w ten sposób, że pierwsza z nich znajduje się w punkcie B, druga w punkcie $\frac{|AB|}{2}$, trzecia w $\frac{|AB|}{4}$, czwarta w $\frac{|AB|}{8}$, itd. Jeśli wprawimy w ruch z prędkością v pierwszą z nich (tak, że podąży ona w kierunku drugiej), to – zgodnie z mechaniką Newtona – po zderzeniu pierwszej masy z drugą ta pierwsza zatrzyma się, a druga uzyska prędkość v, zderzy się z trzecią, druga zatrzyma się, a trzecia uzyska prędkość v, itd. W czasie $t = \frac{|AB|}{v}$ ustaną wszystkie zderzenia. Czy wtedy w punkcie A pojawi się któraś z tych mas punktowych? Ponadto, skoro równania ruchu nie zależą od kierunku upływu czasu, to czy masy punktowe rozmieszczone w podany wyżej sposób mogą spontanicznie („same z siebie") zapoczątkować serię zderzeń spowodowanych ich ruchem w kierunku przeciwnym do wcześniej rozważanego, tak, iż masa w punkcie B zacznie poruszać się (z dowolną właściwie prędkością)?

7 Mucha i PKP

Odległość z A do B wynosi 300 kilometrów. Z obu tych miejscowości wyjeżdżają jednocześnie dwa pociągi PKP Intercity i pędzą ku sobie z prędkością 50 kilometrów na godzinę. Jednocześnie mucha wylatuje z A, dolatuje do pociągu, który wyruszył z B, zawraca, dolatuje do pociągu, który wyruszył z A, i tak dalej. Mucha leci cały czas z prędkością 100 kilometrów na godzinę. Mucha powtarza swój lot do momentu, w którym pociągi się spotkają (tzn. zaczną się mijać, PKP Intercity nie przewiduje w rozkładzie jazdy zderzeń pociągów). Ile kilometrów przeleci mucha? Porównaj matematyczną treść zagadki z jej interpretacją fizyczną.

8 Pragnienie arcybiskupa

Wierni w jednej z parafii na dalekiej północy kraju podarowali swojemu arcybiskupowi kształtną flaszkę wypełnioną winem. Ma ona mianowicie kształt następujący: składa się z walca o promieniu i wysokości równej jednostce (np. jednemu metrowi) oraz szyjki, która jest powierzchnią powstałą poprzez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale od 1 do nieskończoności. Czy arcybiskup będzie pił z niej wiecznie, zakładając, że codziennie pragnie, powiedzmy, ćwiarteczki?

9 Maksymalny nawis

Tę zagadkę formułuje się zwykle dla kart lub monet układanych tak, aby tworzyły nawis wystający poza stół (ale spotykamy także inne zabawne fabuły – np. budowlane). Kładziemy na stole monetę w ten sposób, aby wystawała nieco poza krawędź stołu. Na niej kładziemy następną monetę tak, aby wystawała nieco poza krawędź pierwszej. I tak dalej. Jakiej wielkości nawis możemy w ten sposób utworzyć, bez zawalenia się całości pod wpływem siły grawitacji?

10 Sztuczki Eulera

Euler genialnie radził sobie z sumami (oraz iloczynami) nieskończonymi, choć w jego czasach nie dysponowano jeszcze ścisłymi kryteriami zbieżności. Euler udowodnił np.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (oraz wielką mnogość innych rezultatów – do dzisiaj nie zdołano opublikować wszystkich jego rękopisów). Czy potrafisz uzasadnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest wielkością skończoną?

Spierano się o wartość nieskończonego szeregu (Grandiego): $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Mamy bowiem: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, ale także: $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1$. Tak więc, jeśli S miałaby być sumą rozważanego szeregu, to $S = 1 - S$, czyli $S = \frac{1}{2}$.

Euler (który traktował ∞ jak liczbę oraz uznawał, że $1+2+3+4+5+\ldots = \infty$), uzasadniał, iż $\infty < -1$. Czy potrafisz podać argumentację, która mogłaby zostać w tym celu wykorzystana?

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
www.logic.amu.edu.pl