Klasyczny Rachunek Zdań:

Tablice Analityczne

(Logika Matematyczna: Wykłady 11,12)

Semestr Zimowy 2007–2008

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

11.0. Wprowadzenie

Omówimy teraz jeszcze jedną operację konsekwencji w KRZ, a mianowicie konsekwencję wyznaczoną przez ***tablice analityczne***.

Systematyczne badania nad tego typu konsekwencjami prowadzone są od prawie pół wieku. Sama metoda znana jest pod różnymi nazwami, mówi się np. o:

- tablicach analitycznych
- tablicach semantycznych
- tablicach Smullyana
- *dual tableaux*
- drzewach semantycznych.

Początki stosowania tej metody odnoszone są do prac Gentzena, jednak można jej zastosowania znaleźć już w wieku XIX u Lewisa Carrolla, jak wspominaliśmy na poprzednim wykładzie dotyczącym metody rezolucji.

Pierwsze użycia omawianej metody (około pół wieku temu) wiąże się zwykle z nazwiskami E. Betha, K. Schütte'go, J. Hintikki oraz S. Kripke'go. Informacje historyczne znaleźć można np. w podanych niżej pozycjach bibliograficznych: *Handbook of Tableau Methods* 1999, Marciszewski, Murawski 1995, Annelis 1990. Największą popularność omawiana metoda (pod nazwą *tablic analitycznych*) zyskała dzięki pracom Raymonda Smullyana (np. Smullyan 1968) oraz Richarda Jeffreya (zob. Jeffrey 1991). Logicy polscy także dość wcześnie zajmowali się (różnymi odmianami) tablic analitycznych (zobacz np. Rasiowa, Sikorski 1960, Lis 1960, Pawlak 1965).

Coraz większe zainteresowanie omawianą metodą wiąże się m.in. z jej zastosowaniami w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

11.0.1. O drzewach

Dotychczas posługiwaliśmy się pojęciem *drzewa* w sposób intuicyjny, podając przykłady: drzew syntaktycznych formuł oraz drzew dowodowych. Omawiana teraz metoda robi istotny użytek z tego pojęcia, należy je więc precyzyjnie zdefiniować.

Grafem nazywamy dowolną parę $\langle X, R\rangle$, gdzie X jest zbiorem, a R jest podzbiorem $X \times X$. Elementy zbioru X nazywamy ***wierzchołkami***, a elementy zbioru R ***krawędziami*** grafu $\langle X, R\rangle$.

Mówimy, że relacja R na zbiorze X jest (ostrym) ***częściowym porządkiem*** w X, jeśli jest ona asymetryczna i przechodnia w X (lub, co na to samo wychodzi: przeciwzwrotna i przechodnia w X).

Każdy spójny porządek częściowy nazywamy ***porządkiem liniowym***.

Liniowy porządek R w X nazywamy ***dobrym porządkiem*** w X, jeśli każdy niepusty podzbiór X ma element R-najmniejszy.

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0\rangle$ taki, że:

- $\langle X, R\rangle$ jest grafem;
- x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
- R jest przechodnia w X;
- R jest asymetryczna w X;
- dla każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$, zbiór jego wszystkich R-poprzedników jest dobrze uporządkowany przez relację R.

Zauważmy, że jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to:

- zbiór wszystkich R-poprzedników każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$ jest liniowo uporządkowany;
- relacja R jest przeciwzwrotna w X.

Niech $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ będzie drzewem o korzeniu x_0.

Liśćmi drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.

Jeśli D jest drzewem, to przez r_D oznaczmy wierzchołek D, a przez L_D zbiór wszystkich liści drzewa D.

Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***przodkiem*** y, a y nazywamy ***potomkiem*** x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy ***bezpośrednim przodkiem*** y, a y nazywamy ***bezpośrednim potomkiem*** x.

Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy ***łańcuchem*** w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy ***gałęzią*** w D. Zamiast terminu *łańcuch* używa się również terminu ***ścieżka***. Przez ***długość*** łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P.

Pniem drzewa D nazywamy część wspólną wszystkich gałęzi D.

Rzędem wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. ***Rzędem*** drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.

Drzewo D jest ***skończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest ***nieskończone***, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest ***rzędu skończonego***, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.

Przez indukcję definiujemy ***poziomy*** drzewa:

- poziom ***zerowy*** to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
- poziom ***k+1*** to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu ***k***.

Wysokością drzewa jest największa liczba n taka, że istnieje poziom n w drzewie. Jeśli drzewo ma wierzchołki poziomu n dla każdej liczby naturalnej n, to mówimy, że wysokość drzewa jest ***nieskończona*** (równa ω).

Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej n bezpośrednich potomków, nazywamy ***drzewem*** n***-arnym***. W szczególności:

- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma najwyżej dwóch bezpośrednich potomków nazwiemy ***drzewem nierozwojowym w sensie watykańskim***, w skrócie ***nw-drzewem***.
- Każde drzewo, w którym każdy wierzchołek nie będący liściem ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków nazywamy ***drzewem dwójkowym*** (używa się też terminu ***drzewo binarne***).

Ważnym twierdzeniem, z którego wielokrotnie będziemy korzystać, jest następujący:

Lemat Königa.

Jeśli drzewo D rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Dowód.

Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję.

Za element x_0 bierzemy korzeń drzewa D. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele ***bezpośrednich*** R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

Q.E.D.

Lemat Königa można też wysłowić następująco:

- Jeśli D jest drzewem rzędu skończonego i dla każdej liczby naturalnej n w D istnieją łańcuchy o co najmniej n elementach, to D ma łańcuch nieskończony.

Mówimy, że $\langle Y, Q, y_0\rangle$ jest ***poddrzewem*** drzewa $\langle X, R, x_0\rangle$, gdy:

1) $Y \subseteq X$, $Q = R \cap Y^2$
2) $\langle Y, Q, y_0\rangle$ jest drzewem o wierzchołku y_0.

Jeśli D_1 jest poddrzewem D_2, to piszemy $D_1 \ll D_2$.

Jeśli P jest gałęzią (skończoną) w drzewie D, to niech $P_{\mho}$ oznacza liść drzewa D należący do P.

Niech $D_1 = \langle X, R, x_0\rangle$ i $D_2 = \langle Y, Q, y_0\rangle$ będą drzewami, $X \cap Y = \emptyset$, niech P będzie gałęzią w D_1 i niech drzewo $D_3 = \langle Z, S, z_0\rangle$ będzie zdefiniowane w sposób następujący:

- $Z = X \cup Y$
- $z_0 = x_0$
- $S \cap X^2 = R$
- $S \cap Y^2 = Q$
- $(P_{\mho}, y_0) \in S$.

Mówimy wtedy, że drzewo D_3 jest ***przedłużeniem*** drzewa D_1 na gałęzi P o drzewo D_2 i piszemy $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$.

Przedłużanie polega zatem, intuicyjnie mówiąc, na „doczepianiu" drzewa do liści innego drzewa. Zauważmy, że jest to relacja czteroargumentowa.

Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3 oraz gałęzi P drzewa D_1, jeśli istnieje D_2 takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$, to piszemy $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$. Dla dowolnych drzew D_1 oraz D_3, piszemy $D_1 \sqsubset D_3$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqsubset_{P_{\mho}} D_3$.

Piszemy $D = D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2$, jeśli istnieje D_3 takie, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D_3$. Piszemy $D = D_1 \sqcup D_2$, jeśli istnieje gałąź P w D_1 taka, że $D_1 \sqcup_{P_{\mho}} D_2 \sqsubset D$.

Relacje $\ll$ oraz $\sqsubset$ są częściowymi porządkami (w ustalonej rodzinie drzew). Nie będą nam potrzebne żadne specjalne operacje na drzewach (m.in. wyznaczone przez te porządki), oprócz pewnego specjalnego sumowania drzew. Niech mianowicie $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ będzie rodziną (być może nieskończoną) drzew, dobrze uporządkowaną przez relację $\sqsubset$. Przez ***sumę*** rodziny $\mathcal{D}$ rozumiemy najmniejsze drzewo, które jest przedłużeniem wszystkich drzew z $\mathcal{D}$. Tak zdefiniowaną sumę rodziny $\mathcal{D}$ oznaczamy przez $\bigsqcup \mathcal{D}$.

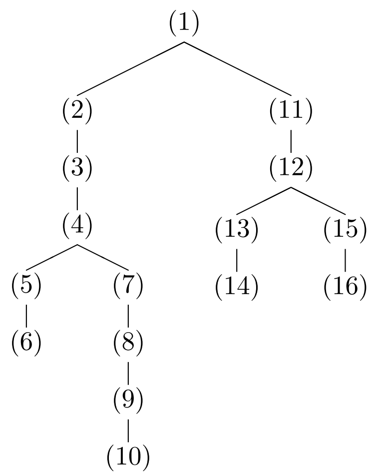
Wszystkie wierzchołki dowolnego drzewa można liniowo uporządkować (odpowiednio je kodując). Szczególnie ważne są dwa tego typu porządki:

- „Porządek poprzeczny”. Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Wierzchołek x f-poprzedza wierzchołek y wtedy i tylko wtedy, gdy: poziom x jest mniejszy od poziomu y lub, gdy x i y są na tym samym poziomie drzewa, $f(x) < f(y)$.
- „Porządek wzdłużny”. Niech dana będzie ściśle rosnąca funkcja f ze zbioru wierzchołków drzewa $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ w zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Tym razem f-porządek wierzchołków drzewa D określimy przez indukcję. Za bezpośredni f-następnik korzenia x_0 drzewa D (czyli za x_1) bierzemy ten z elementów pierwszego poziomu drzewa, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_2: będzie to ten z bezpośrednich R-następników wierzchołka x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Jeśli x_1 jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_2) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_0 różnych od x_1, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza. Przypuśćmy, że wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ zostały już ustawione w ciąg liniowy. Spośród bezpośrednich R-następników wierzchołka x_{n-1} wybieramy ten, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza i niech będzie to kolejny wierzchołek w budowanym f-porządku, tj. wierzchołek x_n. Jeśli wierzchołek ten nie jest liściem, to rozpatrujemy z kolei zbiór wszystkich jego bezpośrednich R-następników, dla znalezienia kolejnego elementu f-porządku, tj. elementu x_{n+1}. Jeśli x_n jest liściem, to za następny w f-porządku (czyli za x_{n+1}) bierzemy ten z bezpośrednich R-następników x_{n-1} różnych od x_n, dla którego wartość funkcji f jest najmniejsza.

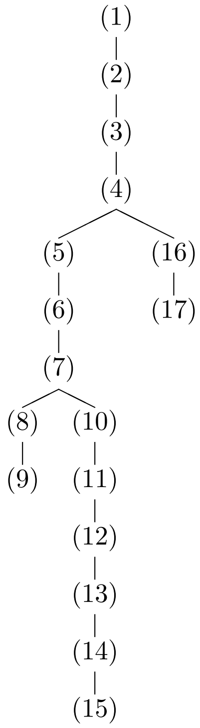
Rozważać będziemy tzw. ***drzewa znakowane***. Przez ***drzewo znakowane*** (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. Zwykle L będzie pewnym zbiorem formuł. Znakowanie drzew formułami pozwala w precyzyjny sposób mówić o ***wystąpieniach*** danej formuły w drzewie.

Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$ (przy tym, poprzedniki R umieszczane są nad następnikami).

Dla przykładu, pokażmy dwa rysunki drzew:

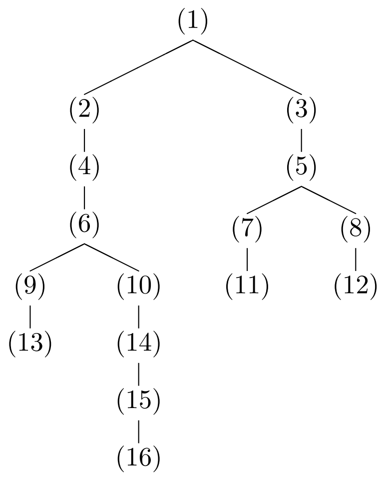


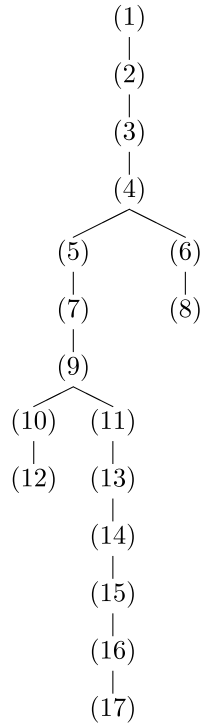
W tym drzewie są cztery gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)) i kończące się liśćmi drzewa: (6), (10), (14) oraz (16). Pień drzewa jest tu zbiorem jednoelementowym: $\{(1)\}$.



W drzewie powyższym są trzy gałęzie, zaczynające się w korzeniu drzewa (wierzchołek oznaczony przez (1)), kończące się liśćmi: (9), (15) oraz (17). Pień drzewa stanowią wierzchołki o numerach: (1), (2), (3) oraz (4).

W obu powyższych drzewach wierzchołki ponumerowano wedle porządku wzdłużnego. Popatrzmy, dla porównania, na takie same porządki drzewowe, których wierzchołki ponumerowane są wedle porządku poprzecznego:

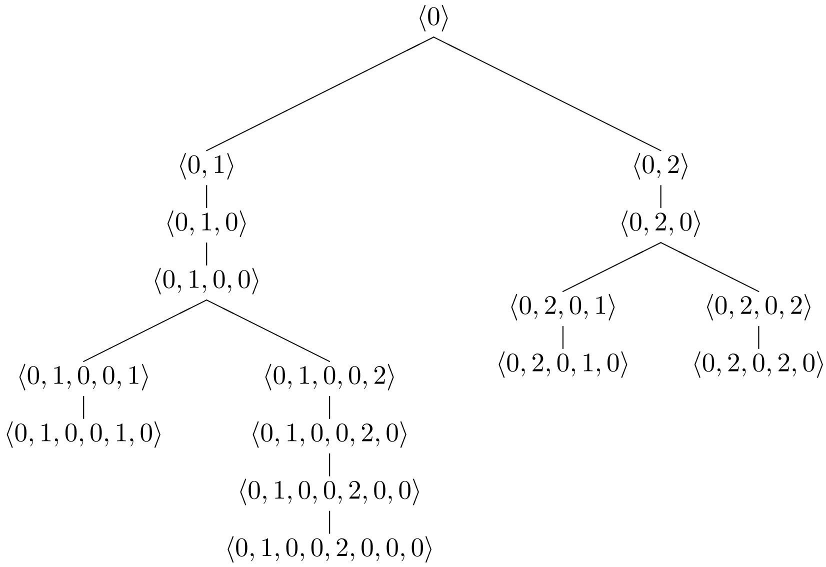




Wierzchołki nw-drzewa mogą być także kodowane ***ciągami*** liczb (tu: 0, 1 oraz 2) np. wedle następującej zasady:

- korzeń drzewa otrzymuje kod $\langle 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka, to ów potomek otrzymuje kod $\langle n_1, \ldots, n_m, 0 \rangle$
- jeśli wierzchołek o kodzie $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków, to otrzymują oni kody: $\langle n_1, \ldots, n_m, 1 \rangle$ oraz $\langle n_1, \ldots, n_m, 2 \rangle$.

Można też użyć w kodowaniach jedynie dwóch liczb, np. 0 i 1.
Wierzchołki pierwszego z powyżej rozważanych drzew zakodowane zostaną tak:



11.0.2. O rozumowaniach apagogicznych

Jak pamiętamy z poprzednich wykładów, dla dowolnej formuły α języka KRZ i dowolnego wartościowania w zmiennych zdaniowych, wartość formuły α przy tym wartościowaniu jest jednoznacznie określona. Jeśli pamiętasz tabelki prawdziwościowe spójników logicznych, to obliczenie wartości dowolnej formuły przy danym wartościowaniu wykonać możesz całkiem mechanicznie, bezmyślnie. Jest to przy tym procedura typu ***bottom up*** — ustalasz kolejno wartości coraz bardziej złożonych formuł. W metodzie tablic analitycznych mamy do czynienia z procedurą odwrotną: ***top to bottom***, w tym sensie, że znając wartość pewnej formuły ustalamy jakie są wartości jej podformuł. Dla przykładu, jeśli implikacja $\alpha \to \beta$ ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu formuła α ma wartość 1, a formuła β ma wartość 0. A jeśli implikacja $\alpha \to \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu ***nie może*** być tak, aby α była miała wartość 1 i β miała wartość 0. To z kolei oznacza, że zachodzi ***co najmniej*** jedno z dwojga: bądź α ma wartość 0, bądź β ma wartość 1. Nie jest jednak konieczne uwzględnianie ***trzech*** odpowiadających tej sytuacji przypadków — wystarczą wspomniane ***dwie***.

Podobnie, jeśli alternatywa $\alpha \vee \beta$ ma wartość 1 przy danym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, to przy tymże wartościowaniu bądź α jest ma wartość 1, bądź β ma wartość 1. Jeśli natomiast alternatywa $\alpha \vee \beta$ jest ma wartość 0 przy danym wartościowaniu zmiennych, to przy tymże wartościowaniu zarówno α jak i β mają wartość 0.

Dla dowolnej formuły α budujemy drzewo, w którego wierzchołku umieszczamy formułę α i którego pozostałe wierzchołki są podformułami lub negacjami podformuł formuły α; ile jest takich wierzchołków i jak są one połączone krawędziami określają precyzyjne reguły, które omówimy za chwilę. Ograniczmy się w tym miejscu do jednego przykładu; rozważmy mianowicie zaprzeczenie podanego na jednym z poprzednich wykładów prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, czyli rozważmy formułę:

$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q.$$

Jeśli przypuścimy, że jest ma wartość 1 (przy jakimś wartościowaniu zmiennych), to musimy kolejno uznać, że (przy tymże wartościowaniu):

(1) formuła $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$ ma wartość 0;

(2.1) formuła $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$ ma wartość 1, a jednocześnie (2.2) formuła q ma wartość 0;

(3.1) formuła $p \to q$ jest ma wartość 1 oraz (3.2) formuła $\neg p \to q$ ma wartość 1;

(4) skoro $p \to q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 0, bądź (4.2) q ma wartość 1;

(5) warunki (2.2) oraz (4.2) są wzajem sprzeczne;

(6) skoro $\neg p \to q$ ma wartość 1, to bądź: (6.1) $\neg p$ ma wartość 0, bądź (6.2) q ma wartość 1;

(7) warunki (2.2) oraz (6.2) są wzajem sprzeczne;

(8) skoro $\neg p$ ma wartość 0 (z (6.1)), to (8.1) p ma wartość 1;

(9) warunki (4.1) oraz (8.1) są wzajem sprzeczne;

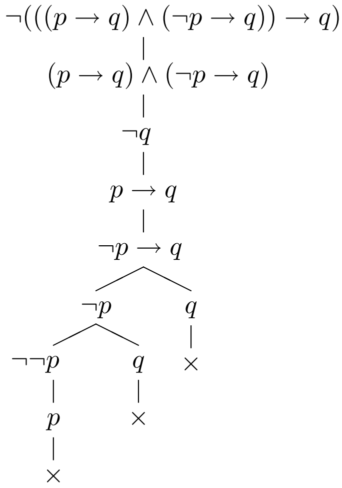
(10) przypuszczenie (1) musimy odrzucić;

(11) nie ma wartościowania, przy którym formuła: $\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$ miałaby wartość 1;

(12) zatem formuła $\neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q)$ jest ma wartość 0 przy każdym wartościowaniu;

(13) zatem formuła $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$ jest ma wartość 1 przy każdym wartościowaniu.

Powyższe rozumowanie reprezentowane może być poprzez drzewo następującej postaci:



Gałęzie tego drzewa odpowiadają ciągom kroków przeprowadzanego wyżej rozumowania. W miejscach, gdzie dany wierzchołek ma dwóch potomków, odpowiadający tej sytuacji krok rozumowania polegał na rozpatrzeniu alternatywy przypadków. Każda gałąź tego drzewa kończy się liściem $\times$, umownie oznaczającym, iż na gałęzi jest para formuł wzajem sprzecznych.

Proszę zauważyć, że krok (8) w powyższym rozumowaniu jest zbędny: skoro ustaliliśmy w (4.1), że p ma wartość 0 oraz w (6.1), że $\neg p$ ma wartość 0, to już w tym momencie otrzymaliśmy sprzeczność: nie ma wartościowania, przy którym p oraz $\neg p$ miałyby wartość 1.

Rozpatrzmy jeszcze jeden tylko przykład: sprawdźmy, czy formuła

$$(p \to q) \wedge (p \vee q)$$

jest ma wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Rozumujemy wtedy tak:

(1) jeśli $(p \to q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1, to (1.1) $p \to q$ ma wartość 1 oraz (1.2) $p \vee q$ ma wartość 1;

(2) skoro $p \to q$ ma wartość 1, to bądź: (2.1) p ma wartość 0, bądź (2.2) q ma wartość 1;

(3) w przypadku (2.1) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (3.1.) p ma wartość 1, bądź (3.2) q ma wartość 1;

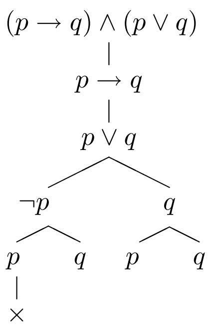
(4) w przypadku (2.2) mamy, skoro $p \vee q$ ma wartość 1, to bądź: (4.1) p ma wartość 1, bądź (4.2) q ma wartość 1;

(5) przypadki (2.1) oraz (3.1) są wzajem sprzeczne;

(6) wszystkie (trzy) pozostałe powyższe przypadki są możliwe;

(7) formuła $(p \to q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 1 przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych.

Rozumowanie to reprezentowane jest przez drzewo:



Jak z takiego drzewa odszukać *wszystkie* wartościowania, przy których formuła z korzenia ma wartość 1, stanie się oczywiste w dalszej części tekstu.

Dodajmy jeszcze parę ogólnych uwag o metodzie tablic analitycznych. Dwie najważniejsze cechy tej metody to:

- apagogiczność;
- analityczność.

Apagogiczność polega na tym, że omawiana metoda jest ***metodą nie wprost***: sprowadza się do ***wykluczania*** zajścia pewnych sytuacji. W pierwszym z rozważanych wyżej przykładów ***wykluczyliśmy***, że prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** ma wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych zdaniowych. W drugim z powyższych przykładów ***wykluczyliśmy***, że formuła $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ ma wartość 0 przy wszystkich wartościowaniach. O różnicach między metodami wprost i nie wprost (i o przewagach tych drugich) słyszeliście na wykładach w ponure czwartkowe popołudnia jesienią 2007 roku.

Analityczność metody polega na tym, że przy ustalaniu własności semantycznych formuł (tu: wykluczaniu, że mają wartość 1 lub wykluczaniu, że mają wartość 0) odwołujemy się jedynie do własności semantycznych ***podformuł*** (oraz negacji podformuł) badanej formuły.

W przypadku KRZ dochodzi jeszcze ***algorytmiczność***, w przypadku KRP (Klasycznego Rachunku Predykatów) jedynie ***półalgorytmiczność***. Dowiemy się o tym więcej w semestrze letnim.

Uwaga. Odwołania do ***semantycznych*** własności formuł (ich spełnialności przez wartościowania) w powyższych sformułowaniach są jedynie ***chwytem reklamowym***. Omawiana metoda jest metodą ***syntaktyczną***. Określimy pewną relację konsekwencji wyznaczoną przez tablice analityczne oraz pojęcie tezy systemu tablicowego, a dopiero potem pokażemy, że pojęcia te są dobrane rozumnie i adekwatnie, tj. iż zachodzą twierdzenia o trafności oraz pełności metody tablicowej.

11.1. Tablice analityczne: definicje

Definicja tablic analitycznych jest indukcyjna. Najpierw definiujemy tablice atomowe.

Definicja 11.1.1. ***Tablice atomowe.***

Niech α oraz β będą dowolnymi formułami, a p dowolną zmienną zdaniową języka KRZ. ***Tablicami atomowymi*** są wszystkie drzewa (znakowane) postaci:

$$p \qquad\qquad \neg p \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ | \\ \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ | \\ \alpha \\ | \\ \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ | \\ \alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \vee \beta) \\ | \\ \neg\alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \qquad \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\alpha \qquad \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\alpha \wedge \beta) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\alpha \qquad \neg\beta \end{array}$$

Drzewo atomowe o wierzchołku (znakowanym przez) α będziemy oznaczać przez D_α.

Uwaga. Tablice atomowe mogą zatem być drzewami:

- składającymi się wyłącznie z korzenia;
- „liniowymi", tj. składającymi się z pewnej formuły (jako korzenia) oraz pewnej kombinacji jej podformuł oraz negacji jej podformuł, tworzących jeden łańcuch;
- „rozgałęziającymi", tj. składającymi się z pewnej formuły (jako korzenia) oraz pewnej kombinacji jej podformuł oraz negacji jej podformuł, tworzących rozgałęzienie.

Uwaga. Z pewnych powodów (na potrzeby twierdzeń o trafności i pełności) wygodnie jest uważać $\equiv$ za termin ***zdefiniowany*** (np. przez $\rightarrow$ i $\wedge$) i nie rozważać drzew atomowych dla $\equiv$. W praktyce, możemy (i będziemy) stosować reguły dotyczące formuł w postaci równoważności oraz zanegowanej równoważności:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \alpha \equiv \beta & \\
\swarrow & & \searrow \\
\alpha & & \neg\alpha \\
| & & | \\
\beta & & \neg\beta
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg(\alpha \equiv \beta) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\alpha & & \neg\alpha \\
| & & | \\
\neg\beta & & \beta
\end{array}
$$

Uwaga. Można budować rachunek tablic analitycznych dla dowolnego zupełnego układu spójników prawdziwościowych. Posługiwanie się symbolami zdefiniowanymi wymaga wtedy dodania ***reguł zastępowania***.

Uwaga. Można przyjąć umowę, że dla atomowych tabel rozgałęziających dany jest ***kanoniczny*** porządek (poprzeczny lub wzdłużny), tj. że w rozgałęzieniach zawsze piszemy w lewej gałęzi np. pierwszy argument (lub negację pierwszego argumentu) formuły z korzenia tabeli atomowej. Umowa taka pozwoliłaby mówić w sposób jednoznaczny np. o „najbardziej lewej" gałęzi drzew złożonych.

Definicja 11.1.2. ***Tablice analityczne.***

Tablicą analityczną jest każde (znakowane) nw-drzewo powstające przez zastosowanie poniższych konstrukcji:

- (1) Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną.
- (2) Jeśli D jest tablicą analityczną, P jest gałęzią w D zawierającą wierzchołek (znakowany przez) α, to $D \sqcup_{P_\mho} D_\alpha$ jest tablicą analityczną.
- (3) Jeśli $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jest ciągiem tablic analitycznych takim, że D_{n+1} powstaje z D_n (dla $n \geqslant 0$) przez zastosowanie kroku (2), to $\bigsqcup D_n$ jest tablicą analityczną.

Uwaga. Często, dla uproszczenia wysławiania się, będziemy opuszczać zwrot „znakowana przez". Nie powinno to prowadzić do nieporozumień. Zauważmy jednak, że znakowanie wierzchołków drzewa formułami ***jest*** istotne: jeśli np. na gałęzi P w tablicy D występują formuły $\alpha \wedge \beta$ oraz $\alpha \wedge \gamma$ i $P' = P \sqcup_{P_\mho} D_{\alpha\wedge\beta}$, to na gałęzi i $P' \sqcup_{P'_\mho} D_{\alpha\wedge\gamma}$ formuła α wystąpi ***dwukrotnie***.

Uwaga. W myśl powyższej definicji, wykonanie kroku (2) każe ***powtarzać*** wystąpienie formuły na branej pod uwagę (przedłużanej) gałęzi. W praktyce, będziemy dopisywać do gałęzi nie całe drzewo atomowe D_α, ale jedynie graf powstający z D_α poprzez usunięcie korzenia r_{D_α}. Sytuacja będzie nieco inna dla tablic analitycznych w Klasycznym Rachunku Predykatów, ale tym będziemy się martwić, za przyzwoleniem Losu, dopiero wiosną tego roku.

Definicja 11.1.3. ***Tablice zakończone.***

Niech D będzie tablicą analityczną, P gałęzią w D, a α formułą występującą w P. Mówimy, że:

- Formuła α jest ***zredukowana*** w P, jeśli D_α jest poddrzewem D.
- Gałąź P jest ***zredukowana*** w D, jeśli wszystkie formuły występujące w P są zredukowane.
- Tablica D jest ***zakończona***, jeśli wszystkie jej gałęzie są zredukowane.

UWAGA. Rozważamy jedynie tzw. ***ścisłe*** tablice analityczne, tj. takie, w których redukcji formuły na danej gałęzi dokonujemy ***tylko raz***. Teoretycznie, moglibyśmy jedną i tę samą formułę redukować wielokrotnie na danej gałęzi. Możliwość taką jednak wykluczamy: do raz zredukowanej na danej gałęzi formuły już nie wracamy. Zastrzeżenie to jest istotne dla procedur implementacji metody tablicowej, w jej zastosowaniach w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Tak więc, formuła α jest zredukowana w gałęzi P, jeśli, mówiąc intuicyjnie, wykonano wszystkie kroki dotyczące rozkładu α na formuły „prostsze" i stosowne drzewo rozkładu jest poddrzewem drzewa D.

Gałąź P jest zredukowana, jeśli wszystkie występujące na niej formuły zostały, w powyższym sensie, rozłożone.

Tablica D jest zakończona, gdy wszystkie formuły występujące na wszystkich gałęziach D zostały, w powyższym sensie, rozłożone.

DEFINICJA 11.1.4. ***Tablice sprzeczne.***

Niech D będzie tablicą analityczną, a P gałęzią w D. Mówimy, że:

- P jest ***sprzeczna***, gdy istnieje formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są elementami P.
- Tablica D jest ***sprzeczna***, jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.

UWAGA. Zamiast „gałąź sprzeczna" mówimy też „gałąź ***zamknięta***", a gdy P nie jest sprzeczna, to mówimy, że P jest gałęzią ***otwartą***.

DEFINICJA 11.1.5. ***Dowody tablicowe.***

- ***Dowodem tablicowym*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu $\neg\alpha$.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo dowodliwa***, jeśli istnieje tablicowy dowód α. Jeśli α jest tablicowo dowodliwa, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$.
- ***Tablicowym odrzuceniem*** formuły α nazywamy każdą tablicę sprzeczną o korzeniu α.
- Mówimy, że α jest ***tablicowo odrzucalna***, jeśli istnieje tablicowe odrzucenie α. Jeśli α jest tablicowo odrzucalna, to piszemy $\dashv_{tab} \alpha$.

Definicje powyższe wprowadzają zatem (syntaktyczne!) pojęcia ***tez*** (formuł tablicowo dowodliwych) oraz ***antytez*** (formuł tablicowo odrzucalnych) systemu tablicowego. Trzeba oczywiście pokazać, że pojęcia te dobrane są w sposób rozsądny i adekwatny, a więc udowodnić twierdzenia o trafności i pełności (zob. niżej, w punktach 11.4. i 11.5.).

Pojęcie tablicy systematycznej definiujemy przez indukcję.

DEFINICJA 11.1.6. ***Tablice systematyczne.***

Niech α będzie formułą. ***Systematyczna tablica analityczna*** (o korzeniu α), oznaczana przez D^α, zdefiniowana jest następująco:

- (i) $D^0(\alpha) = D_\alpha$
- (ii) Przypuśćmy, że $D^m(\alpha)$ została zdefiniowana. Niech n będzie najmniejszym poziomem tablicy $D^m(\alpha)$ zawierającym formułę, która nie jest zredukowana na jakiejś gałęzi otwartej w $D^m(\alpha)$. Niech β będzie najbardziej lewą taką formułą na poziomie n. Definiujemy $D^{m+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^m(\alpha) \sqcup_P D_\beta)$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w $D^m(\alpha)$.

- (iii) $D^\alpha = \bigsqcup D^n(\alpha)$.

Pojęcie to będzie wykorzystywane w dowodach pewnych własności tablic analitycznych. Będziemy używać oznaczenia $D^k(\alpha)$ dla ***cząstkowych*** tablic systematycznych, tworzonych na mocy kroku następnikowego (ii). Będziemy też używać dla takich tablic symbolu D^k, gdy nie będzie istotne, jaka formuła jest korzeniem, z którego budujemy tablicę systematyczną.

UWAGA. W definicji tablicy systematycznej *implicite* korzystamy z faktu, że tablice analityczne są drzewami znakowanymi oraz że dany jest jakiś ***porządek poprzeczny*** wierzchołków rozważanych drzew. Tak więc, gdyby być pedantycznie poprawnym, należałoby mówić o tablicach systematycznych jako o parach (D^α, f^α), gdzie f^α byłaby funkcją ustalającą porządek poprzeczny w drzewie D^α. Definicja funkcji f^α mogłaby wykorzystywać kanoniczny porządek poprzeczny wyznaczony przez tablice atomowe.

W dowodach dalszych twierdzeń będzie nam potrzebne pojęcie zdefiniowane niżej.

DEFINICJA 11.1.7. ***Stopień formuły.***

Pojęcie $d(\alpha)$, ***stopnia formuły*** α definiujemy przez indukcję:

- Jeśli α jest zmienną zdaniową, to $d(\alpha) = 0$.
- Jeśli α jest postaci $\neg\beta$, to $d(\alpha) = d(\beta) + 1$.
- Jeśli α jest jednej z postaci: $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\beta \to \gamma$ lub $\beta \equiv \gamma$, to $d(\alpha) = d(\beta) + d(\gamma)$.

Jeśli P jest gałęzią w drzewie D, to przez $d(P)$ (***stopień gałęzi*** P) rozumiemy sumę stopni tych formuł z P, które nie są zredukowane w P.

11.2. Tablice analityczne: notacja i przykłady

Omówimy teraz jedną z możliwych notacji, stosowanych w praktycznych zastosowaniach metody tablic analitycznych. Notacja uwzględniać będzie:

- numerację wykonywanych kroków
- informację dotyczącą reguł wykorzystywanych w poszczególnych krokach
- wyniki wykonania poszczególnych kroków.

UWAGA. Wymienione wyżej informacje ***nie*** są elementami składowymi tablic analitycznych. Stanowią (metajęzykowe) komentarze, ułatwiające odczytywanie dowodów tablicowych.

UMOWY NOTACYJNE. Stosujemy następujące konwencje:

- Formuła umieszczana w korzeniu tablicy otrzymuje numer (0), z ***lewej*** strony. W dalszym ciągu (zob. 11.7.), gdy będziemy rozpoczynać budowę tablicy z założeń, poszczególne założenia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ otrzymają numery: $(0.1), (0.2), \ldots, (0.n)$, odpowiednio.
- Numer każdego kroku (w tworzeniu tablicy) piszemy ***z prawej*** strony formuły, do której stosujemy ów krok. Jest to liczba z kropką, umieszczana w górnej frakcji. Za tym numerem dodajemy informację, jaka reguła jest wykorzystywana w danym kroku. Jest to oczywiście informacja nadmiarowa, ponieważ dla dowolnej formuły można zastosować ***tylko jedną*** regułę rozkładu, ale — jak sądzimy — przydatna dydaktycznie, co najmniej na początkowym etapie uczenia się rozważanej metody.
- Wynik wykonania kroku o numerze n. (a więc pewna formuła lub formuły) jest numerowany z ***lewej*** strony, liczbą w nawiasach okrągłych: (n).

Przyjmujemy następujące konwencje dotyczące numeracji wyników wykonania poszczególnych kroków:

- Jeśli w kroku n. zastosowano regułę nierozgałęziającą tworzenia tablicy atomowej dla podwójnej negacji, to wynik wykonania kroku n. otrzymuje numer (n).
- Jeśli w kroku n. zastosowano (inną niż powyższa) regułę nierozgałęziającą (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: koniunkcji, zaprzeczonej implikacji lub zaprzeczonej alternatywy), to wynikiem jest para formuł, które zapisujemy jedna pod drugą na danej gałęzi i które numerujemy: (n_g) i (n_d).
- Jeśli w kroku n. zastosowano regułę rozgałęziającą (a więc regułę tworzenia tablicy atomowej dla: zaprzeczonej koniunkcji, implikacji lub alternatywy), to wynikiem jest para formuł, tworząca rozgałęzienie; formuły te uzyskują numery: (n_l) i (n_p).
- Zgodnie z zastrzeżeniem dotyczącym równoważności $\equiv$, podanym po definicji tablic atomowych, nie powinniśmy budować tablic analitycznych dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$, używając w takich przypadkach tablicy np. dla formuły $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. Niejedno już w życiu popełniliśmy świństewko (a i wciąż jeszcze trochę życia przed nami), i w tym przypadku również na świństewko sobie pozwolimy. ***Będziemy*** budować tablice dla formuł postaci $\alpha \equiv \beta$ oraz $\neg(\alpha \equiv \beta)$. Przy tym:
  - Wynikiem wykonania kroku n. dla formuły postaci $\alpha \equiv \beta$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.
  - Wynikiem wykonania kroku n. dla formuły postaci $\neg(\alpha \equiv \beta)$ jest para par formuł, tworząca rozgałęzienie. Formuły pierwszej pary, w gałęzi lewej otrzymują numery: (n_{lg}) i (n_{ld}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi lewej. Formuły drugiej pary, w gałęzi prawej otrzymują numery: (n_{pg}) i (n_{pd}) i podpisywane są jedna pod drugą na gałęzi prawej.

Gałąź zamkniętą tablicy opatrujemy liściem $\times_{m,n}$, gdzie m oraz n są numerami wzajem sprzecznych formuł, występujących na tej gałęzi.

Gałęzie otwarte tablicy opatrujemy liśćmi $\circ$, numerowanymi kolejno, jeśli jest ich więcej niż jedna. Czasem stosujemy też inne znaczki dla gałęzi otwartych, np.: $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ i $\spadesuit$.

Uwaga. Wymienione wyżej symbole dla oznaczania gałęzi zamkniętych i otwartych tablicy ***nie są*** elementami tablicy, są (metajęzykowymi) komentarzami, mającymi ułatwiać czytanie dowodów.

Uwaga. Wynik wykonania kroku n. powinien zostać umieszczony na ***każdej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany. W praktyce, nie będziemy stosować się do tej powinności w odniesieniu do gałęzi zamkniętych: wynik wykonania kroku n. będzie umieszczany na ***każdej otwartej*** gałęzi, która zawiera formułę (dokładniej: wystąpienie formuły), do której ów krok jest stosowany.

Uwaga. Tablice analityczne są ***całościami***, tworami, by tak rzec, ***statycznymi***. Gdy mówimy o ***budowaniu*** tablicy analitycznej, to traktujemy ją ***dynamicznie***, jako twór, który jest krok po kroku ***konstruowany***. Rzecz ma się tu dokładnie tak samo, jak w przypadku dowodów dotychczas omawianych (aksjomatycznych lub założeniowych).

Uwaga. Procedura budowy tabeli analitycznej ***nie jest*** deterministyczna: możemy w różnej kolejności wybierać z danego łańcucha formuły i stosować odpowiednie reguły. Zarówno ze względów estetycznych, jak i biorąc pod uwagę ekonomię konstrukcji tablic, zaleca się stosowanie: najpierw reguł nierozgałęziających, a w dalszej kolejności reguł rozgałęziających.

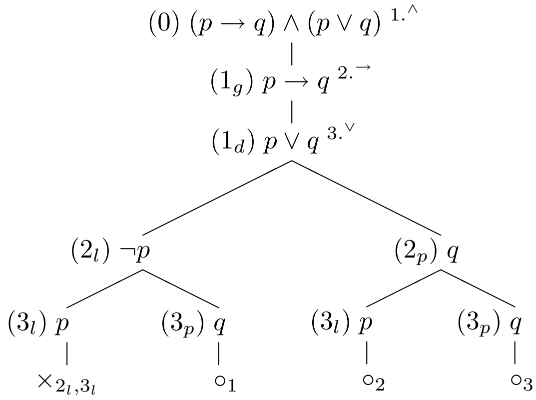
Uwaga. Innym zaleceniem w budowie tablic analitycznych jest: sprawdzaj w każdym kroku, czy na którejś z budowanych gałęzi nie wystąpiła już para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli tak jest, to oznacz tę gałąź liściem $\times$ jako zamkniętą (sprzeczną) i nie uwzględniaj jej w dalszej konstrukcji.

Przykład 11.2.1.

Przypomnijmy formułę podaną w 11.0.2.:

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q).$$

Tablica analityczna tej formuły jest pokazanym już wcześniej drzewem, tym razem opatrzonym objaśnionymi wyżej komentarzami:



Sposób budowania tego drzewa jest widoczny z umieszczonych w nim komentarzy:

- W korzeniu umieszczamy formułę $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ i opatrujemy ją z lewej strony numerem (0).
- Głównym spójnikiem formuły (0) jest koniunkcja. Wykonujemy zatem krok 1. wedle zaleceń tablicy atomowej dla koniunkcji.
- Otrzymujemy formuły będące członami tej koniunkcji: $p \rightarrow q$ oraz $p \vee q$. Przypisujemy im numery: (1_g) oraz (1_d) i podpisujemy obie formuły pod korzeniem drzewa. Utworzyliśmy w ten sposób łańcuch składający się z formuł o numerach: (0), (1_g) i (1_d).
- Głównym spójnikiem formuły o numerze (1_g) jest implikacja. Wykonujemy zatem krok 2. wedle zaleceń tablicy atomowej dla implikacji, tworząc rozgałęzienie w drzewie.
- W lewej gałęzi umieszczamy zaprzeczony poprzednik implikacji (1_g), czyli formułę $\neg p$ i opatrujemy tę formułę numerem (2_l).
- W prawej gałęzi umieszczamy następnik implikacji (1_g), czyli formułę q i opatrujemy tę formułę numerem (2_p).
- Zbudowaliśmy w ten sposób dwa łańcuchy, złożone, odpowiednio, z formuł o numerach:
  - (0), (1_g), (1_d) i (2_l)
  - (0), (1_g), (1_d) i (2_p).
- Jedyną formułą, do której można jeszcze stosować jakieś reguły wyznaczone przez tablice atomowe jest formuła o numerze (1_d), czyli $p \vee q$. Jej spójnikiem głównym jest alternatywa. Wykonujemy zatem krok 3. wedle zaleceń tablicy atomowej dla alternatywy, tworząc ***dwa*** dalsze rozgałęzienia w drzewie: zarówno pod formułą o numerze (2_l), jak i pod formułą o numerze (2_p).
- W lewej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę p (pierwszy człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_l). W prawej gałęzi wyniku wykonania kroku 3. piszemy formułę q (drugi człon alternatywy $p \vee q$) i opatrujemy ją numerem (3_p).

- Do żadnej z formuł nie można już zastosować żadnej reguły rozkładu podanej w definicji tablic atomowych. Ponieważ na gałęzi złożonej z formuł o numerach: (0), (1_g), (1_d), (2_l) oraz (3_l) występuje para formuł wzajem sprzecznych (a mianowicie formuły o numerach: (2_l) i (3_l)), więc gałąź tę oznaczamy jako zamkniętą (sprzeczną), podpisując pod nią liść $\times_{2_l,3_l}$. Pozostałe (trzy) gałęzie są otwarte. Jeśli jest to potrzebne (np. dla podania wartościowań, przy których formuła z korzenia drzewa przyjmuje wartość 1, jak będziemy to później stosować), to gałęzie te jakoś numerujemy, np. tak, jak zrobiono to na rysunku.

Mamy nadzieję, że te drobiazgowe wyjaśnienia są wystarczające, aby pojąć, jak buduje się tablicę analityczną. W dalszych przykładach zamieszczamy kolejne komentarze i objaśnienia.

Sądzimy też, że dla ***praktycznego*** wykorzystania tablic analitycznych (w szczególności: dla budowania dowodów tablicowych) nie jest potrzebna ilustracja przykładami ***wszystkich*** pojęć teoretycznych, niezbędnych w precyzyjnym określeniu tablic analitycznych oraz dowodów tablicowych (a więc np. relacji $\sqsubset$ lub operacji $\sqcup$). Pomijamy zatem te ilustracje. Niech zostanie to uznane za naszą odpowiedź na apel JM Rektora UAM z 2007 roku (cytat z pamięci):

> „W Związku z Niżem Demograficznym Apeluję do Wszystkich Wykładowców, aby Byli Przyjaźnie Nastawieni do Studentów".

Przykład 11.2.2.

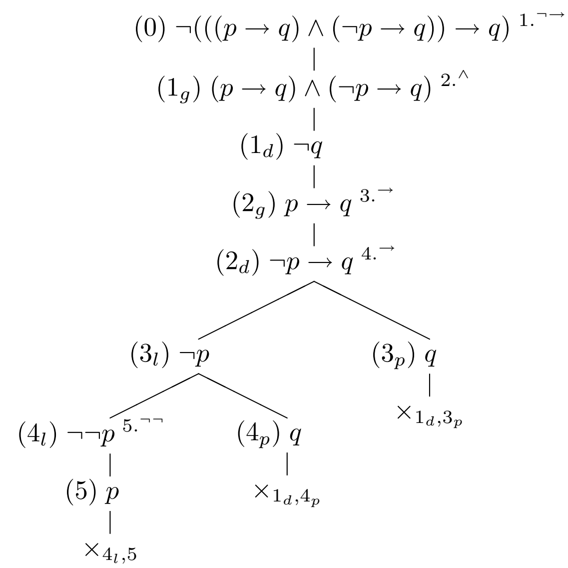
Przywołajmy po raz kolejny świetnie nam już znane prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, odgrywające jakże fundamentalną rolę w wielu wyborach:

$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q.$$

Zbudujemy tablicę analityczną dla zaprzeczenia tego prawa, tj. dla formuły:

$$(\bigstar) \quad \neg(((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q).$$

Budowę tablicy rozpoczynamy od korzenia, w którym umieszczamy formułę $(\bigstar)$, a następnie stosujemy reguły rozkładu formuł (wyliczone w zestawie tablic atomowych):



Także w przypadku tej tablicy podamy dość drobiazgowy komentarz. W dalszym ciągu, komentarze takie nie będą już potrzebne.

- W korzeniu tablicy umieszczamy formułę $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ i opatrujemy ją numerem (0). Jej spójnikiem głównym jest negacja (implikacji), a więc krok numer 1. wykorzystuje regułę podaną dla tablicy atomowej zanegowanej implikacji. Umieszczamy, jedna pod drugą, formuły:

  (1_g) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$ (poprzednik implikacji (0)) oraz (1_g) $\neg q$ (następnik implikacji (0)).

- Formuła o numerze (1_g) jest koniunkcją, a więc w kroku 2. stosujemy regułę podaną dla tablicy atomowej koniunkcji: umieszczamy, jedna pod drugą, formuły: (2_g) $p \rightarrow q$ (pierwszy człon koniunkcji (1_g)) oraz (2_d) $\neg p \rightarrow q$ (drugi człon koniunkcji (1_g)).

- Mamy teraz wybór: następny krok może dotyczyć bądź formuły o numerze (2_g), bądź formuły o numerze (2_d). Każda z tych możliwości owocuje rozgałęzieniem. Wybierzmy pierwszą z nich. W kroku 3. stosujemy zatem regułę podaną w tablicy atomowej dla implikacji do formuły: (2_g) $p \rightarrow q$. Wyniki wykonania tego kroku zapisujemy w rozgałęzieniach: w lewej gałęzi piszemy (3_l) $\neg p$, a w prawej piszemy (3_p) q.

- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,3_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

- Pozostaje zatem gałąź kończąca się formułą o numerze (3_l) oraz jedna tylko formuła *niezredukowana*, czyli taka, do której dotąd nie zastosowano żadnej reguły rozkładu podanej w spisie tablic atomowych. Jest to formuła o numerze (2_d), będąca implikacją. W kroku 4. stosujemy do niej regułę dla implikacji, podaną w spisie tablic atomowych: tworzymy rozgałęzienie, umieszczając w lewej jego gałęzi formułę (4_l) $\neg\neg p$ (czyli zaprzeczony poprzednik implikacji (2_d)), a w jego prawej gałęzi formułę (4_p) q (czyli następnik implikacji (2_d)).

- Zauważamy (!) w tym momencie, że gałąź prawa zawiera parę formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (1_d) oraz (3_p). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{1_d,4_p}$. W dalszej konstrukcji tabeli, gałęzi tej nie bierzemy już pod uwagę.

- Jedyna pozostała gałąź otwarta to ciąg formuł zaczynający się od formuły (0), a kończący się formułą (4_l). Do formuły o numerze (4_l), a więc do formuły $\neg\neg p$ stosujemy, w kroku 5., regułę dla podwójnej negacji, wymienioną w zestawie tablic atomowych. W rezultacie wykonania kroku 5. otrzymujemy formułę o numerze (5), czyli p, którą podpisujemy pod formułą o numerze (4_l).

- Zauważamy (!!) teraz dwie rzeczy:

  - Na gałęzi zaczynającej się od formuły (0), a kończącej się formułą (5) występuje para formuł wzajem sprzecznych: są to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l), a także formuły o numerach: (3_l) oraz (5). Zgodnie z podanym wyżej zaleceniem, gałąź tę ***zamykamy***, dopisując do niej liść informujący o wystąpieniu pary formuł wzajem sprzecznych: $\times_{3_l,5}$ (albo: $\times_{3_l,4_l}$).
  - ***Wszystkie*** gałęzie tablicy są zamknięte (sprzeczne). Zbudowaliśmy zatem ***sprzeczną*** tablicę analityczną o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$.

Koniec pracy. Pozostaje tylko ogłoszenie wyniku: skoro tablica o korzeniu $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ jest sprzeczna, to pokazaliśmy tym samym, że formuła:

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q,$$

nasze ulubione prawo ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz***, ma dowód tablicowy (jest nim właśnie zbudowana przed chwilą tablica). W innym jeszcze, równoznacznym, sformułowaniu: formuła ta jest tablicowo dowodliwa (jest tezą systemu tablic analitycznych):

$$\vdash_{tab} ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Uwaga. Zauważmy, że dla zamknięcia „najbardziej lewej” gałęzi powyższej tablicy nie było konieczne wykonanie kroku 5.; już wcześniej (przed wykonaniem tego kroku) na gałęzi tej znajdowała się para formuł wzajem sprzecznych: były to formuły o numerach (3_l) oraz (4_l).

Uwaga. Zaleca się porównanie konstrukcji powyższej tabeli analitycznej (w tym przypadku: dowodu tablicowego) z komentarzem dotyczącym prawa ***Demokratycznego Upoważnienia Poprzez Aplauz*** zamieszczonym wyżej, w punkcie 11.0.2.

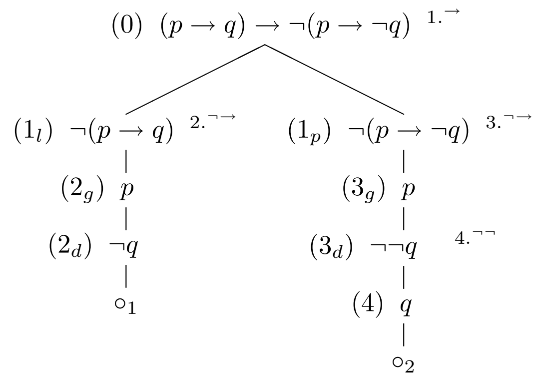
Uwaga. Staramy się, aby rysowane drzewa były, w miarę możności, estetyczne, a więc np.: gałąź pod daną formułą rozpoczynała się pod spójnikiem głównym tej formuły, formuły pod łańcuchami „biegnącymi” w lewo lub prawo znajdowały się mniej więcej w takim miejscu, aby dochodząca do nich krawędź wypadała w ich „środku”, itp. Nie zawsze się to udaje i porażka estetyczna nie jest powodem, aby chlipać i rozdzierać szatę. W przypadku tabeli wyżej pokazanej, np. korzeń drzewa należałoby usytuować na rysunku nieco inaczej niż to uczyniono.

Przykład 11.2.3.

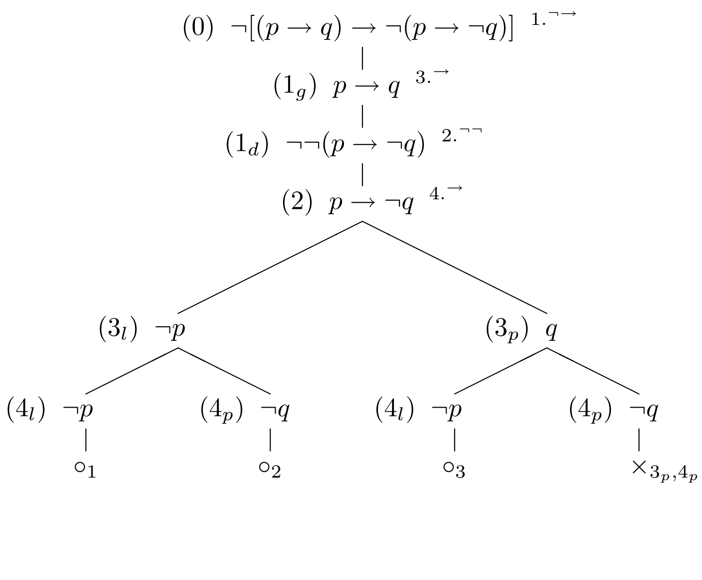
Zbudujemy tablice analityczne:

- (1) dla formuły $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ oraz
- (2) dla zaprzeczenia tej formuły, tj. dla formuły $\neg((p \to q) \to \neg(p \to \neg q))$.

Tablica analityczna dla $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$:



Tablica analityczna dla $\neg((p \to q) \to \neg(p \to \neg q))$:



Żadna z tych tablic nie jest, jak widać, sprzeczna. Zatem ani formuła $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$, ani jej zaprzeczenie nie posiadają dowodu tablicowego.

Przykład 11.2.4.

Zbudujemy dowód tablicowy prawa *modus ponendo ponens*: $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$.

Konstruujemy zatem tablicę, w której korzeniu umieszczamy zaprzeczenie formuły $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$:

$$
\begin{array}{c}
\neg((\alpha \to \beta) \wedge \alpha \to \beta) \;\; ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\;\; (\alpha \to \beta) \wedge \alpha \;\; ^{2.\wedge} \\
| \\
(1_d)\;\; \neg\beta \\
| \\
(2_g)\;\; \alpha \to \beta \;\; ^{3.\to} \\
| \\
(2_d)\;\; \alpha \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(3_l)\;\; \neg\alpha & (3_p)\;\; \beta \\
| & | \\
\times_{2_d,3_l} & \times_{1_d,3_p}
\end{array}
\end{array}
$$

Tablica jest sprzeczna, a więc dowód został zakończony.

Przykład 11.2.5.

Zbudujemy dowód tablicowy prawa *modus tollendo tollens*: $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$

Konstruujemy zatem tablicę, w której korzeniu umieszczamy zaprzeczenie formuły $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$:

$$
\begin{array}{c}
\neg(((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha) \;\; ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\;\; (\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \;\; ^{3.\wedge} \\
| \\
(1_d)\;\; \neg\neg\alpha \;\; ^{2.\neg\neg} \\
| \\
(2)\;\; \alpha \\
| \\
(3_g)\;\; \alpha \to \beta \;\; ^{4.\to} \\
| \\
(3_d)\;\; \neg\beta \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(4_l)\;\; \neg\alpha & (4_p)\;\; \beta \\
| & | \\
\times_{2,4_l} & \times_{3_d,4_p}
\end{array}
\end{array}
$$

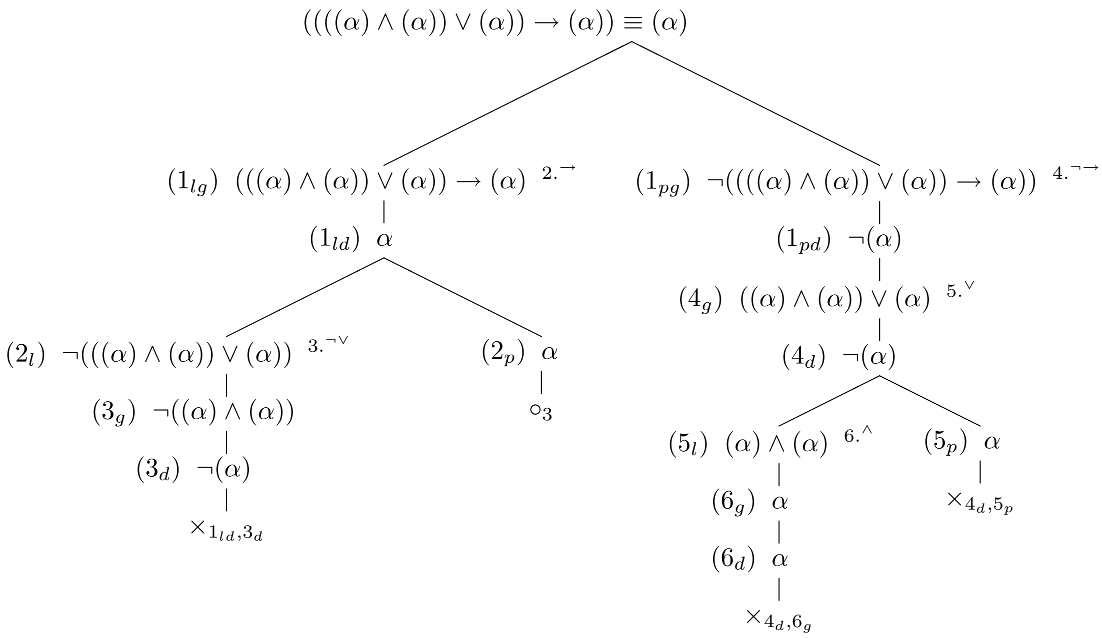
Tablica jest sprzeczna, a więc dowód został zakończony.

Przykład 11.2.6.

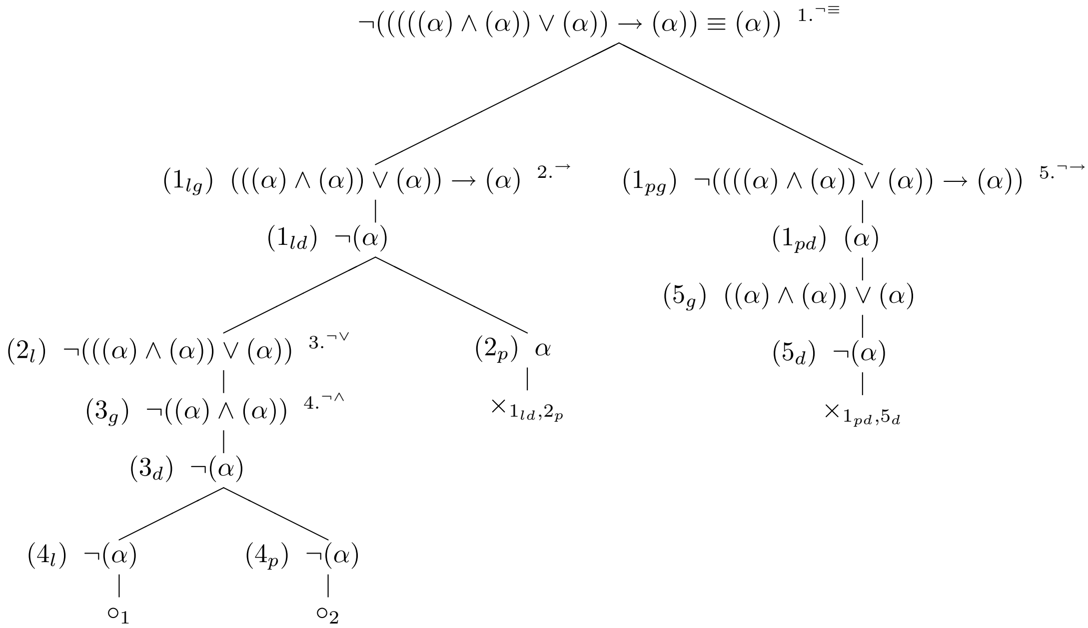
Zbudujemy tablice analityczne dla:

- (1) formuły $((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha)$
- (2) jej zaprzeczenia, tj. formuły $\neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha))$.

Tablica analityczna dla formuły $((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \to (\alpha)) \equiv (\alpha)$:



Tablica analityczna dla formuły $\neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \rightarrow (\alpha)) \equiv (\alpha))$:



Zauważmy, że w formule $\neg(((((\alpha) \wedge (\alpha)) \vee (\alpha)) \rightarrow (\alpha)) \equiv (\alpha))$ wystąpiły ***wszystkie*** ze spójników z rozważanego języka KRZ.

Żadna z powyższych tabel nie jest sprzeczna. To, czy rozważane formuły mają dowody tablicowe, zależy od budowy samej formuły α. Powrócimy do tego w punkcie 11.7. poniżej.

11.3. Tablice analityczne: niektóre własności

Twierdzenie 11.3.1.

Każda tablica systematyczna jest zakończona.

Dowód.

Niech α będzie dowolną formułą, występującą na pewnym poziomie n w otwartej gałęzi P tablicy systematycznej D. Musimy pokazać, że α jest zredukowana w P.

Istnieje najwyżej skończenie wiele formuł w D na poziomie n lub niższych poziomach. Stąd, istnieje liczba m_0 taka, że dla każdej liczby $m \geqslant m_0$, tablica D^m jest identyczna z tablicą D aż do poziomu n.

Dla $m \geqslant m_0$, ograniczenie gałęzi P do D^m (tj. część wspólna P i D^m) jest gałęzią w D^m, zawierającą formułę α.

Na każdym kroku $m \geqslant m_0$ w konstrukcji tabeli systematycznej redukujemy pewną formułę z najmniejszego w porządku poprzecznym wierzchołka, który zawiera formułę niezredukowaną na jakiejś gałęzi otwartej w tabeli D^m. Jeśli α nie została zredukowana w kroku m_0, to możemy wykonać jedynie skończenie wiele kroków w tej procedurze, aż do sytuacji, w której to α stanie się formułą niezredukowaną na najmniejszym w porządku poprzecznym wierzchołku. I w tym właśnie kroku dokonujemy redukcji α.

Twierdzenie 11.3.2.

Jeśli $D = \bigsqcup D^n$ jest tablicą sprzeczną, to D^m jest tablicą sprzeczną, dla pewnego m. W szczególności, jeśli tablica systematyczna jest dowodem tablicowym, to jest tablicą skończoną.

Dowód.

D jest drzewem rzędu skończonego. Rozważmy zbiór X wszystkich takich wierzchołków D, które nie mają pary formuł sprzecznych jako swoich poprzedników (w porządku drzewa D). Jeśli ten zbiór jest nieskończony, to, na mocy Lematu Königa, istnieje w nim gałąź nieskończona. To jednak stoi w sprzeczności z tym, że D jest tablicą sprzeczną (bo gałąź nieskończona nie jest gałęzią zamkniętą). Zatem zbiór X jest skończony. Tak więc, wszystkie jego elementy występują w D nie później niż na pewnym poziomie n. Wynika stąd, że każdy wierzchołek na poziomie $n+1$ ma, jako swoje poprzedniki, parę formuł sprzecznych.

Ponieważ tablica D do poziomu $n+1$ jest skończona, istnieje liczba m taka, że D^m jest identyczna z D aż do poziomu $n+1$.

Każda gałąź w D^m jest jednej z dwóch postaci:

- (1) jest gałęzią w D, zakończoną liściem z poziomu co najwyżej n
- (2) jest gałęzią zawierającą wierzchołek z poziomu $n+1$.

W przypadku (1) gałąź P jest sprzeczna na mocy założenia, że tablica D jest sprzeczna. W przypadku (2) gałąź P jest sprzeczna na mocy wyboru n oraz m.

Ostatecznie, D^m jest tablicą sprzeczną spełniającą tezę twierdzenia.

Uwaga. Jeśli $D = \bigsqcup D^n$ jest tablicą systematyczną budowaną w myśl definicji 11.1.6. oraz m jest najmniejszą liczbą taką, że D^m jest sprzeczna, to $D = D^m$.

Twierdzenie 11.3.3.

Każda tablica systematyczna jest skończona.

Dowód.

Niech $D = \bigsqcup D^n$ będzie tablicą systematyczną. Udowodnimy, że każda gałąź w D jest skończona (ma długość niewiększą od stopnia korzenia drzewa D). Wtedy, na mocy Lematu Königa, również drzewo D jest skończone.

Rozważmy dowolną gałąź P w D. Na mocy konstrukcji D, P jest sumą (w sensie operacji $\bigsqcup$) gałęzi P_m z tablic cząstkowych D^m. P_{m+1} może się różnić od P_m w przypadku, gdy dla pewnej formuły α niezredukowanej w P_m dodajemy do P_m drzewo atomowe D_α, czyli gdy $P_{m+1} = P_m \sqcup D_\alpha$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy pokazać, że:

$$(\star) \quad d(P_{m+1}) < d(P_m).$$

Jest tak, ponieważ $(\star)$ implikuje, iż operację dodawania (w sensie $\sqcup$) drzewa atomowego do każdej gałęzi P_m możemy wykonać jedynie skończoną liczbę razy (w istocie, najwyżej $d(r_D)$ razy), a stąd P jest skończona i w konsekwencji cała tablica D jest skończona.

Dla dowodu $(\star)$ zauważmy, że dodawanie drzewa atomowego D_α do gałęzi P_m redukuje formułę α na gałęzi P_{m+1}. Aby obliczyć $d(P_{m+1})$ należy zatem:

- odjąć od $d(P_m)$ liczbę $d(\alpha)$,
- i dodać do tego stopnie tych formuł występujących w D_α (i różnych od α), które wystąpią w P_{m+1}.

Tak więc, wystarczy zauważyć, że suma stopni formuł występujących w D_α (i różnych od α) jest mniejsza niż $d(\alpha)$. A to wynika bezpośrednio z definicji stopnia formuły oraz definicji tablic atomowych.

Uwaga. ***Tablice analityczne a kpn i apn.***

Niech dana będzie formuła α języka KRZ. Tworzymy tablicę systematyczną D^α. Dla każdej gałęzi P w D^α niech $K_P(\alpha)$ będzie koniunkcją wszystkich literałów występujących w P. Wreszcie, niech $A(\alpha)$ będzie alternatywą wszystkich formuł $K_P(\alpha)$, dla wszystkich gałęzi P w D^α. Wtedy $A(\alpha)$ jest alternatywną postacią normalną formuły α.

11.4. Tablice analityczne: trafność

Definicja 11.4.1. Powiemy, że wartościowanie h jest ***zgodne*** z formułą α, gdy $h(\alpha) = 1$. Oczywiście, jeśli h jest zgodne z α, to $h(\neg\alpha) = 0$.

Twierdzenie 11.4.1.

Jeśli h jest wartościowaniem zgodnym z korzeniem tablicy $D = \bigsqcup D_n$ (budowanej w myśl definicji 11.1.2.), to w D istnieje gałąź, której wszystkie elementy mają wartości zgodne z h.

Dowód.

Pokażemy przez indukcję, że istnieje ciąg gałęzi $\langle P_n \rangle$ taki, że:

- (1) P_{n+1} jest przedłużeniem P_n oraz
- (2) P_n jest gałęzią, której wszystkie elementy mają wartości zgodne z h.

Wtedy za żądaną w tezie twierdzenia gałąź P można wziąć sumę gałęzi P_n, tj.: $P = \bigsqcup P_n$.

Początkowy krok indukcji. Z założenia twierdzenia, h jest zgodne z korzeniem tablicy D. Bezpośrednio z definicji tablic atomowych wynika, że h jest zgodne z elementami każdej gałęzi tablicy atomowej D_{r_D}.

Następnikowy krok indukcji. Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy gałąź P_n w drzewie D_n taką, że zachodzą warunki (1) i (2). Jeśli P_{n+1} powstaje z P_n bez przedłużania P_n, to niech $P_{n+1} = P_n$. Jeśli P_n jest przedłużana w D_{n+1}, to P_{n+1} jest postaci $P_n \sqcup D_\alpha$ dla pewnej formuły α występującej w P_n. Z założenia indukcyjnego, h jest zgodne z α. Bezpośrednio z definicji tablic atomowych wynika, że h jest zgodne z elementami każdej gałęzi tablicy atomowej D_α.

Twierdzenie 11.4.2. ***Trafność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α ma dowód tablicowy, to α jest tautologią KRZ.

Dowód.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że α ma dowód tablicowy, i przypuśćmy, że α nie jest tautologią KRZ.

Skoro α ma dowód tablicowy, to istnieje sprzeczna tablica analityczna D o korzeniu $\neg\alpha$.

Jeśli α nie jest tautologią, to istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 0$. Oznacza to, że h jest zgodne z $\neg\alpha$. Na mocy twierdzenia 11.4.1., h jest zgodne z elementami pewnej gałęzi P w D. Ponieważ D jest sprzeczna, więc w gałęzi P jest para formuł wzajem sprzecznych. Jednak żadne wartościowanie nie może być zgodne z dwiema formułami wzajem sprzecznymi. Otrzymujemy sprzeczność, co oznacza, że trzeba odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost. Ostatecznie, α jest tautologią KRZ.

11.5. Tablice analityczne: pełność

TWIERDZENIE 11.5.1.

Niech P będzie niesprzeczną gałęzią zakończonej tablicy D. Zdefiniujmy wzz w w sposób następujący:

- $w_i = 1$, gdy p_i występuje w P
- $w_i = 0$ w przeciwnym przypadku.

Jeśli h_w jest wartościowaniem (jednoznacznie!) wyznaczonym przez wzz w (zob. wykład 2), to h_w jest zgodne ze wszystkimi elementami P.

DOWÓD.

Dowód przebiega przez indukcję po złożoności formuł należących do gałęzi P.

Formuły atomowe.
Jeśli α jest formułą atomową (czyli w tym przypadku: zmienną zdaniową) występującą w P, to $h_w(\alpha) = 1$ wprost z definicji.

Negacje formuł atomowych.
Jeśli α jest negacją formuły atomowej (czyli w tym przypadku: negacją zmiennej zdaniowej) występującą w P, to $h_w(\alpha) = 1$ wprost z definicji. Zauważmy, że jeśli $\neg p$ występuje w gałęzi ***otwartej*** P, to p ***nie*** występuje w P.

Koniunkcje i negacje koniunkcji.
Przypuśćmy, że $\alpha \wedge \beta$ występuje w P. Ponieważ D jest tablicą ***zakończoną***, więc zarówno α, jak i β występują w P. Na mocy założenia indukcyjnego $h_w(\alpha) = 1$ oraz $h_w(\beta) = 1$, a stąd $h_w(\alpha \wedge \beta) = 1$.

Przypuśćmy z kolei, że $\neg(\alpha \wedge \beta)$ występuje w P. Na mocy definicji tablicy zakończonej, albo $\neg\alpha$ albo $\neg\beta$ występuje w P. Na mocy założenia indukcyjnego, albo $h_w(\alpha) = 0$ albo $h_w(\beta) = 0$. W każdym z tych przypadków mamy: $h_w(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1$.

Alternatywy i negacje alternatyw.
Przypuśćmy, że $\alpha \vee \beta$ występuje w P. Na mocy definicji tablicy zakończonej, albo α albo β występuje w P. Na mocy założenia indukcyjnego, albo $h_w(\alpha) = 1$ albo $h_w(\beta) = 1$. W każdym z tych przypadków mamy: $h_w(\alpha \vee \beta) = 1$.

Przypuśćmy z kolei, że $\neg(\alpha \vee \beta)$ występuje w P. Ponieważ D jest tablicą ***zakończoną***, więc zarówno $\neg\alpha$, jak i $\neg\beta$ występują w P. Na mocy założenia indukcyjnego $h_w(\neg\alpha) = 1$ oraz $h_w(\neg\beta) = 1$, a stąd $h_w(\neg(\alpha \vee \beta)) = 1$.

Implikacje i negacje implikacji.
Przypuśćmy, że $\alpha \to \beta$ występuje w P. Na mocy definicji tablicy zakończonej, albo $\neg\alpha$ albo β występuje w P. Na mocy założenia indukcyjnego, albo $h_w(\alpha) = 0$ albo $h_w(\beta) = 1$. W każdym z tych przypadków mamy: $h_w(\alpha \to \beta) = 1$.

Przypuśćmy z kolei, że $\neg(\alpha \to \beta)$ występuje w P. Ponieważ D jest tablicą ***zakończoną***, więc zarówno α, jak i $neg\beta$ występują w P. Na mocy założenia indukcyjnego $h_w(\alpha) = 1$ oraz $h_w(\neg\beta) = 1$, a stąd $h_w(\neg(\alpha \to \beta)) = 1$.

TWIERDZENIE 11.5.2. ***Pełność Metody Tablic Analitycznych.***

Jeśli α jest tautologią KRZ, to α ma dowód tablicowy.

Dowód.

Niech α będzie tautologią KRZ. Znaczy to, że $h(\alpha) = 1$ dla każdego wartościowania h.

Rozważmy dowolną tablicę zakończoną D o korzeniu $\neg\alpha$. Gdyby D miała gałąź otwartą P, to, na mocy twierdzenia 11.5.1., istniałoby wartościowanie h_0 zgodne ze wszystkimi elementami gałęzi P, a więc w szczególności zgodne z korzeniem drzewa D, czyli z formułą $\neg\alpha$. Oznacza to, że $h_0(\neg\alpha) = 1$, skąd dostajemy $h_0(\alpha) = 0$, wbrew założeniu, że $h(\alpha) = 1$ dla każdego wartościowania h. Tak więc, każda zakończona tablica o korzeniu $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, czyli jest tablicą sprzeczną, a w konsekwencji, jest dowodem tablicowym formuły α. Pokazaliśmy zatem, że każda tautologia KRZ ma dowód tablicowy.

Uwaga. Twierdzenie o pełności ma ważkie konsekwencje, także praktyczne. Gdy poszukujemy dowodu tablicowego formuły α, tworzymy tablicę analityczną o korzeniu $\neg\alpha$. Są dwie możliwości dla takiej tablicy:

- (1) tablica o korzeniu $\neg\alpha$ jest sprzeczna;
- (2) tablica o korzeniu $\neg\alpha$ ma gałąź otwartą.

W przypadku (1) formuła α, jako tablicowo dowodliwa, jest, na mocy twierdzenia 11.5.2. o pełności, tautologią KRZ.

W przypadku (2) każda gałąź otwarta tablicy o korzeniu $\neg\alpha$ dostarcza przykładu wartościowania zmiennych zdaniowych, przy którym formuła α ma wartość 0, czyli przykład wartościowania, pokazującego odrzucalność α.

Procedura poszukiwania dowodu tablicowego dowolnej formuły (w KRZ) ma charakter ***algorytmiczny***. W skończonej liczbie (z góry określonych) kroków otrzymujemy, dla dowolnej formuły α ***rozstrzygnięcie***: Tak, α jest tautologią, ***lub*** Nie, α nie jest tautologią. W drugim przypadku algorytm podaje nadto ***kontrprzykład***, tj. wartościowanie, przy którym α ma wartość 0.

11.6. Tablice analityczne: zwartość

Definicja 11.6.1. ***Tablice analityczne ze zbioru założeń.***

Niech S będzie (być może nieskończonym) zbiorem formuł języka KRZ. Definiujemy ***tablice analityczne ze zbioru założeń*** S przez indukcję:

- Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S oraz $\alpha \in S$, to $\bigsqcup(D \sqcup_P \alpha)$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w D.
- Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S, P gałęzią w D, a $\alpha \in S$, to $D \sqcup_P D_\alpha$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S.

Definicja 11.6.2. ***Dowody tablicowe ze zbioru założeń.***

Dowodem tablicowym formuły α ***ze zbioru założeń*** S nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru założeń S o korzeniu $\neg\alpha$.

Definicja 11.6.3. ***Konsekwencja tablicowa.***

Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S, to mówimy że α jest ***konsekwencją tablicową*** S (lub: α jest ***tablicowo dowodliwa*** (***wyprowadzalna***) z S) i piszemy wtedy: $S \vdash_{tab} \alpha$. Operacja C_{tab} ***konsekwencji tablicowej*** zdefiniowana jest następująco:

$$C_{tab}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \vdash_{tab} \alpha\}.$$

Operacja ta spełnia warunki (C1)–(C4) podane na wykładzie dotyczącym ogólnego pojęcia konsekwencji.

Uwaga. Bezpośrednio z powyższych definicji wynikają następujące fakty:

- (11.6.1.) Każda systematyczna tablica ze zbioru założeń jest zakończona.
- (11.6.2.) Jeśli $h(\beta) = 1$ dla każdej formuły $\beta \in S$ i h jest zgodne z korzeniem tablicy D z założeń S, to w D istnieje gałąź otwarta P taka, że h jest zgodne ze wszystkimi elementami P.
- (11.6.3.) Niech P będzie gałęzią otwartą w zakończonej tablicy z założeń S. Definiujemy wartościowanie h tak, jak w twierdzeniu 11.5.1. Wtedy h jest zgodne ze wszystkimi formułami z P, a zatem mamy także $h(\beta) = 1$ dla wszystkich formuł $\beta \in S$.

TWIERDZENIE 11.6.1. ***Trafność dowodów tablicowych z założeń.***

Jeśli α ma dowód tablicowy z założeń S, to $S \models_{KRZ} \alpha$, czyli α wynika logicznie z S.

DOWÓD.

Załóżmy, że α ma dowód tablicowy z założeń S. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje wartościowanie h takie, że $h(\beta) = 1$ dla wszystkich $\beta \in S$ oraz $h(\alpha) = 0$.

Dalsza część dowodu jest powtórzeniem dowodu twierdzenia 11.4.2.

TWIERDZENIE 11.6.2. ***Pełność dowodów tablicowych z założeń.***

Jeśli α wynika logicznie z S (czyli $S \models_{KRZ} \alpha$), to α ma dowód tablicowy z założeń S.

DOWÓD.

Załóżmy, że $S \models_{KRZ} \alpha$. Wtedy dla każdego wartościowania h takiego, że $h(\beta) = 1$ dla wszystkich $\beta \in S$, mamy $h(\alpha) = 1$.

Rozważmy dowolną systematyczną tablicę z założeń S o korzeniu $\neg\alpha$. Na mocy uwagi (11.6.1.) jest ona zakończona.

Wystarczy teraz przeprowadzić dowód nie wprost (podobnie jak w twierdzeniu 11.5.2.), korzystając z uwagi (11.6.2.).

UWAGA. Jeśli S jest zbiorem skończonym, to oczywiście systematyczna tablica z założeń S również jest skończona. Gdy S jest zbiorem nieskończonym, to używając Lematu Königa pokazujemy (podobnie jak w twierdzeniu 11.3.2.), że:

- Jeśli $D = \bigsqcup D_n$ jest sprzeczną tablicą ze zbioru założeń S, to D_m jest skończoną sprzeczną tablicą z założeń S,dla pewnej liczby m. W szczególności, jeśli tablica systematyczna z założeń S jest dowodem tablicowym, to jest skończona.

Wykorzystamy Lemat Königa w dowodzie (semantycznego) twierdzenia o zwartości w KRZ.

TWIERDZENIE 11.6.3. ***Zwartość.***

Niech S będzie nieskończonym zbiorem formuł języka KRZ. S jest spełnialny (semantycznie niesprzeczny) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór G zbioru S jest spełnialny.

DOWÓD.

Oczywiście implikacja prosta składająca się na tezę twierdzenia jest banalna. Dowodu wymaga zatem jedynie implikacja odwrotna.

Załóżmy, że każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny. Trzeba pokazać, że również S jest spełnialny.

Niech $\langle p_i : i \in \mathcal{N} \rangle$ będzie ciągiem wszystkich zmiennych zdaniowych.

Jak wiadomo (ze *Wstępu do Matematyki*) dowolny zbiór ciągów o wyrazach 0 i 1 można częściowo uporządkować przez relację bycia podsłowem początkowym: jeśli x i y są ciągami o wyrazach 0 i 1, to mówimy, że x poprzedza y, gdy istnieje ciąg z taki, że $y = xz$ (dopisywanie ciągów oznacza tu ich konkatenację). Niech $lh(x)$ będzie długością ciągu x. Wreszcie, niech x_i będzie i-tym wyrazem ciągu x.

Zauważmy, że (skończone) ciągi o wyrazach 0 i 1 mogą być interpretowane jako ciągi wartości logicznych: jako segmenty początkowe wartościowań zmiennych zdaniowych (wzz). Pamiętamy, że każde wzz jest nieskończonym ciągiem o wyrazach 0 i 1.

Zbudujemy drzewo $\mathbb{T}$, którego wierzchołkami będą ciągi o wyrazach 0 i 1. Niech mianowicie $x \in \mathbb{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie h takie, że dla każdego $i \leqslant lh(x)$:

- $h(\alpha_i) = 1$ oraz
- $h(p_i) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = 1$.

Widać zatem, że ciąg x o długości n jest wierzchołkiem drzewa $\mathbb{T}$ wtedy, gdy istnieje wartościowanie h takie, że:

- $h(\alpha_1) = 1, h(\alpha_2) = 1, \ldots, h(\alpha_n) = 1$
- $h(p_1) = x_1, h(p_2) = x_2, \ldots, h(p_n) = x_n$.

Udowodnimy teraz, że:

(✠) Istnieje gałąź nieskończona w $\mathbb{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy S jest spełnialny.

Dowód implikacji (✠) $\Leftarrow$.
Jeśli h spełnia S, to, na mocy definicji, zbiór wszystkich ciągów x takich, że $x_i = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(p_i) = 1$, jest gałęzią w $\mathbb{T}$. Gałąź ta jest oczywiście nieskończona.

Dowód implikacji (✠) $\Rightarrow$.
Przypuśćmy, że $\mathcal{H} = \langle x^i : i \in \mathcal{N} \rangle$ jest nieskończoną gałęzią w $\mathbb{T}$.
Niech h będzie wartościowaniem (jednoznacznie!) wyznaczonym przez $\mathcal{H}$, tj. takim, że $h(p_i) = 1$ wtedy i tylko wtedy $x^j_i = 1$ dla pewnego j. Równoważnie, można też określić h jako jedyne wartościowanie takie, że dla wszystkich $i \leqslant lh(x^j)$ mamy: $x^j_i = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^j_i = 1$.
Jeśli wartościowanie h nie spełnia wszystkich elementów zbioru S (czyli gdy $h[S] \nsubseteq \{1\}$), to istnieje $\alpha_j \in S$ taka, że $h(\alpha_j) = 0$. W każdej formule występuje tylko skończenie wiele zmiennych zdaniowych, a zatem to, że $h(\alpha_j) = 0$ zależy tylko wartości h dla skończenie wielu zmiennych zdaniowych. Załóżmy, że są to zmienne p_i dla $i \leqslant n$.
Z definicji $\mathbb{T}$ wynika, że wtedy żaden ciąg x taki, że $lh(x) \geqslant n$ nie należy do $\mathbb{T}$. Nadto, istnieje tylko skończenie wiele ciągów o długości niewiększej niż n. Otrzymaliśmy więc sprzeczność z założeniem, że $\mathcal{H} = \langle x^i : i \in \mathcal{N} \rangle$. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie, że h nie spełnia wszystkich elementów zbioru S. Ostatecznie, $h[S] \subseteq \{1\}$, czyli zbiór S jest spełnialny.
Udowodnimy teraz, że:

(♦) Dla każdej liczby n istnieje ciąg x taki, że $lh(x) = n$ oraz $x \in \mathbb{T}$.

Z założenia, każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny. Tak więc, dla każdej n istnieje wartościowanie h_n takie, że $h_n(\alpha_i) = 1$ dla wszystkich $i \leqslant n$. Wtedy ciąg x zdefiniowany warunkiem:

$$x_i = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } h_n(p_i) = 1$$

dla wszystkich $i \leqslant n$, jest elementem $\mathbb{T}$.
Na mocy Lematu Königa oraz (♦), w $\mathbb{T}$ istnieje gałąź nieskończona. Stąd, na mocy (✠), zbiór S jest spełnialny.

Uwaga. Twierdzenie o zwartości jest równie ważne, z metalogicznego punktu widzenia, jak twierdzenie o pełności. Ponadto, można pokazać, że twierdzenie o pełności jest konsekwencją twierdzenia o zwartości. Konstrukcja użyta w twierdzeniu 11.6.3. jest jedną z najważniejszych w klasycznej logice pierwszego rzędu. Można ją znaleźć (w różnych wersjach) w dowodach wielkich twierdzeń metalogicznych już od prawie stu lat.

11.7. Tablice analityczne: dalsze przykłady

Podobnie jak w punkcie 11.2., wykorzystamy przykłady z egzaminów z Logiki Matematycznej z lat ubiegłych.

Ponieważ udowodniliśmy twierdzenie o pełności metody tablicowej, możemy wykorzystywać dowody tablicowe dla rozstrzygania m.in. następujących pytań:

- Czy formuła α jest tautologią KRZ?
- Czy formuła α jest odrzucalna?
- Czy formuła α jest kontrtautologią KRZ?
- Czy formuła α jest spełnialna?
- Czy zbiór formuł S jest semantycznie sprzeczny?
- Czy zbiór formuł S jest semantycznie niesprzeczny?
- Czy formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł S?

Z rozważanych wcześniej przykładów wynika np., że:

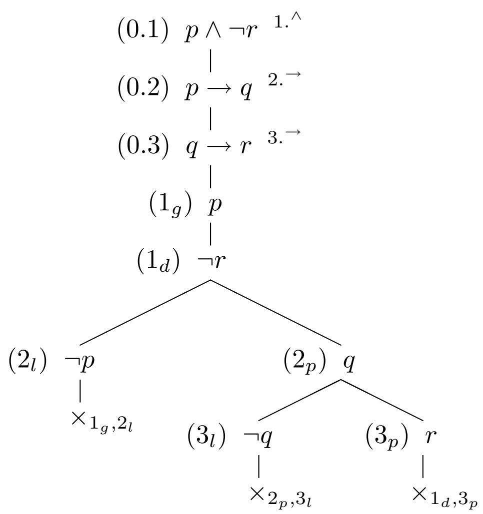
- formuła, rozważana w przykładzie 11.2.1. nie jest kontrtautologią KRZ (zachęcamy do pokazania, że nie jest ona też tautologią KRZ);
- formuła, rozważana w przykładzie 11.2.2. jest tautologią KRZ;
- formuła, rozważana w przykładzie 11.2.3. nie jest ani tautologią KRZ, ani kontrtautologią KRZ;
- formuły, rozważane w przykładach 11.2.4. i 11.2.5. są tautologiami KRZ.

Przykład 11.7.1.

Pokażemy, że następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny (nie jest spełnialny):

$$S = \{p \wedge \neg r, p \to q, q \to r\}.$$

Budujemy tablicę wychodząc z przypuszczenia, że istnieje wartościowanie, które spełnia te wszystkie formuły:



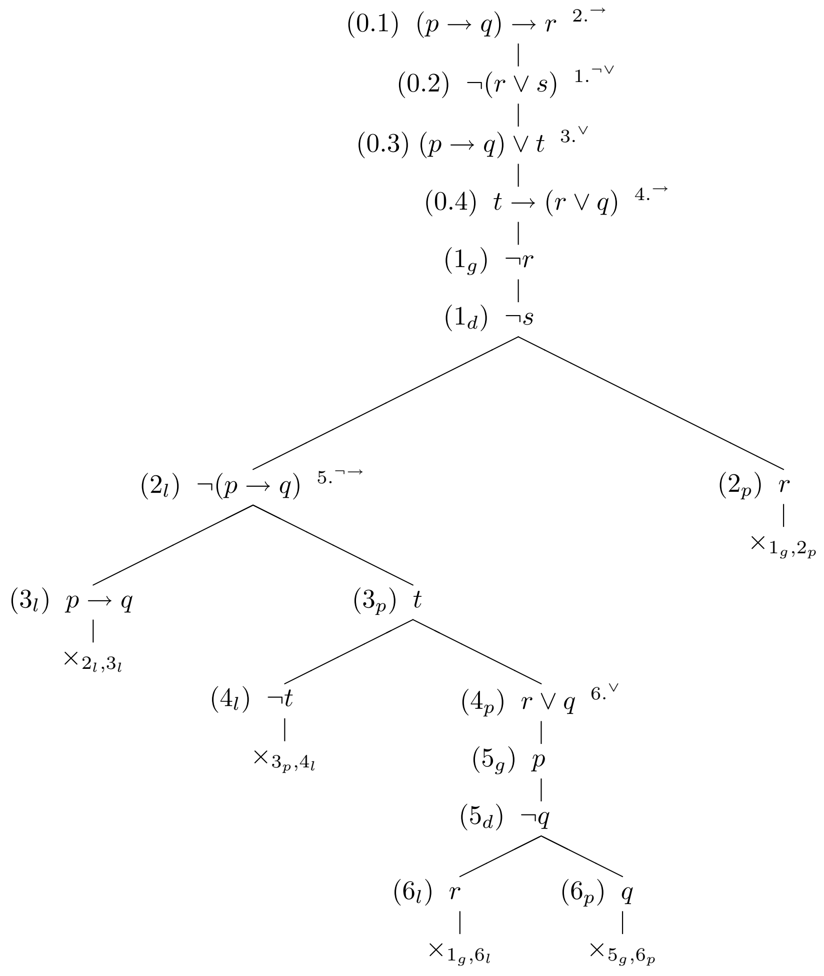
Tablica jest sprzeczna. Nie istnieje wartościowanie, które spełnia wszystkie formuły zbioru S. Zbiór S jest semantycznie sprzeczny.

Przykład 11.7.2.

Pokażemy, że następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny (nie jest spełnialny):

$$S = \{ \ (p \to q) \to r, \ \neg(r \vee s), \ (p \to q) \vee t, \ t \to (r \vee q) \ \}.$$

Budujemy tablicę wychodząc z przypuszczenia, że istnieje wartościowanie, które spełnia te wszystkie formuły:



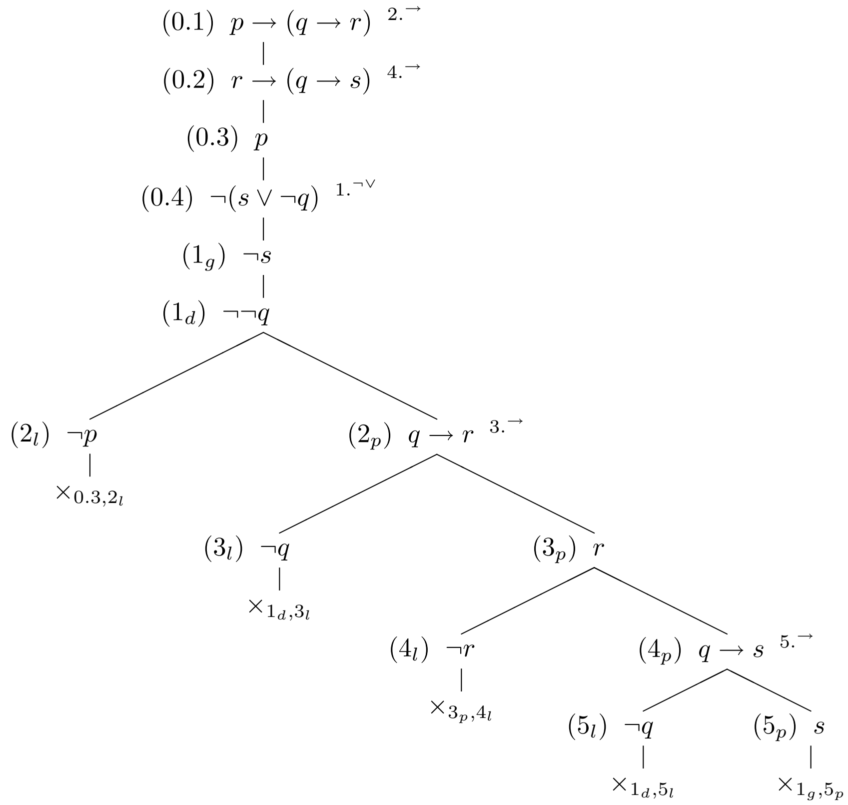
Tablica jest sprzeczna. Nie istnieje wartościowanie, które spełnia wszystkie formuły zbioru S. Zbiór S jest semantycznie sprzeczny.

Przykład 11.7.3.

Pokażemy, że następująca reguła jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ r \to (q \to s) \\ p \end{array}}{s \vee \neg q}$$

Aby wykazać niezawodność powyższej reguły wystarczy pokazać, że wniosek wynika logicznie z przesłanek, czyli, że nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że takie wartościowanie istnieje. Przypuszczenie to przekłada się na założenie, że tablica rozpoczynająca się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku ***nie jest*** sprzeczna. Budujemy tablicę, rozpoczynając od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

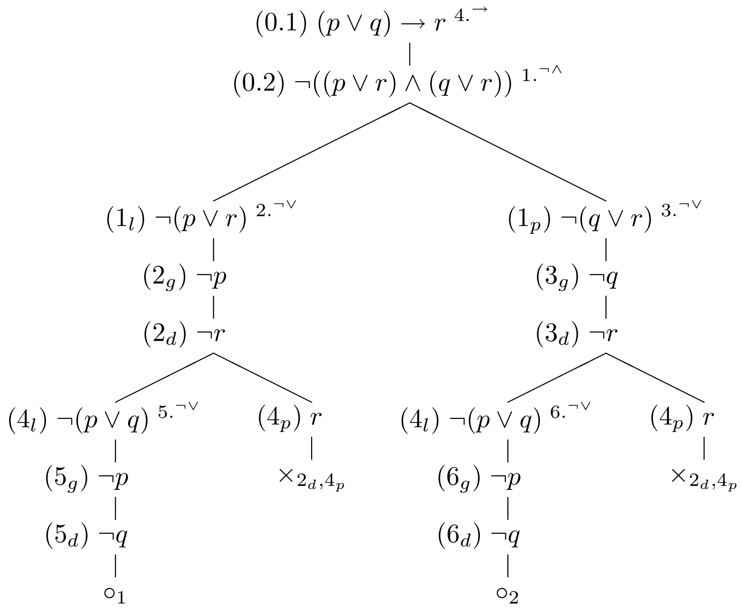


Wszystkie gałęzie są zamknięte. Tablica jest sprzeczna. Nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Wniosek wynika logicznie z przesłanek. Reguła jest niezawodna.

Przykład 11.7.4.

Ustalimy, czy formuła $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ wynika logicznie z formuły $(p \vee q) \to r$.

Stawiamy hipotezę, że wynikanie logiczne zachodzi. Dla jej potwierdzenia staramy się ***wykluczyć***, że istnieje wartościowanie, przy którym $(p \vee q) \to r$ ma wartość 1, a $(p \to r) \wedge (q \to r)$ ma wartość 0. Budujemy tablicę analityczną, zaczynając od formuły $p \to (q \wedge r)$ oraz zaprzeczenia formuły $(p \to r) \wedge (q \to r)$:



Otrzymane drzewo ma dwie gałęzie otwarte. Na każdej z nich znajdują się literały: $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$. Zatem dla wartościowania:

p	q	r
0	0	0

formuła $(p \vee q) \rightarrow r$ ma wartość 1, a formuła $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ma wartość 0. Widzimy zatem, że formuła $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ nie wynika logicznie z formuły $(p \vee q) \rightarrow r$.

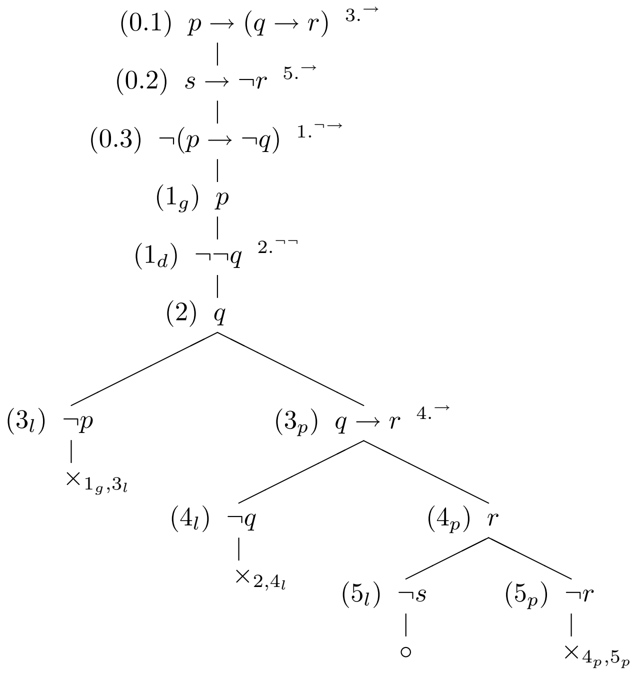
Zwróćmy uwagę na kolejność kroków w konstrukcji powyższej tabeli: gwarantuje ona jej optymalność (tj. wykonanie najmniejszej z możliwych liczby kroków).

Przykład 11.7.5.

Aby ustalić, czy reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ s \rightarrow \neg r \end{array}}{p \rightarrow \neg q}$$

jest niezawodna sprawdzamy, czy istnieje takie wartościowanie, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Gdyby tak było, to reguła powyższa byłaby zawodna. Dla potwierdzenia (bądź odrzucenia) tego przypuszczenia budujemy tablicę, rozpoczynając ją od przesłanek i zaprzeczonego wniosku:



Tablica ma jedną gałąź otwartą, oznaczoną przez ◦) i zawierającą literały: p, q, r oraz $\neg s$. Dla wartościowania:

p	q	r	s
1	1	1	0

wszystkie przesłanki przyjmują wartość 1, a wniosek — wartość 0. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Rozważana reguła jest zatem zawodna.

Przykład 11.7.6.

Ustalimy, czy z przesłanek:

Jeśli wykłujemy Pogonowskiemu oczy, ale nie wyrwiemy mu języka, to Pogonowski będzie mógł śpiewać, ale już nie poczyta.

Pogonowski jeszcze poczyta, chociaż nie będzie mógł śpiewać, o ile: nie wykłujemy mu oczu, ale wyrwiemy język.

Ani nie wykłujemy Pogonowskiemu oczu, ani nie wyrwiemy mu języka.

wynika logicznie wniosek:

Pogonowski będzie mógł śpiewać, jeśli jeszcze poczyta.

Trzeba zbadać, czy podane wnioskowanie przebiega wedle niezawodnej reguły wnioskowania. Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i zastępujemy je zmiennymi zdaniowymi:

- Wykłujemy Pogonowskiemu oczy — p,
- Wyrwiemy Pogonowskiemu język — q,
- Pogonowski będzie mógł śpiewać — r,
- Pogonowski jeszcze poczyta — s.

Przesłanki mają następujące struktury składniowe (zakładamy, że kolejność członów koniunkcji jest nieistotna):

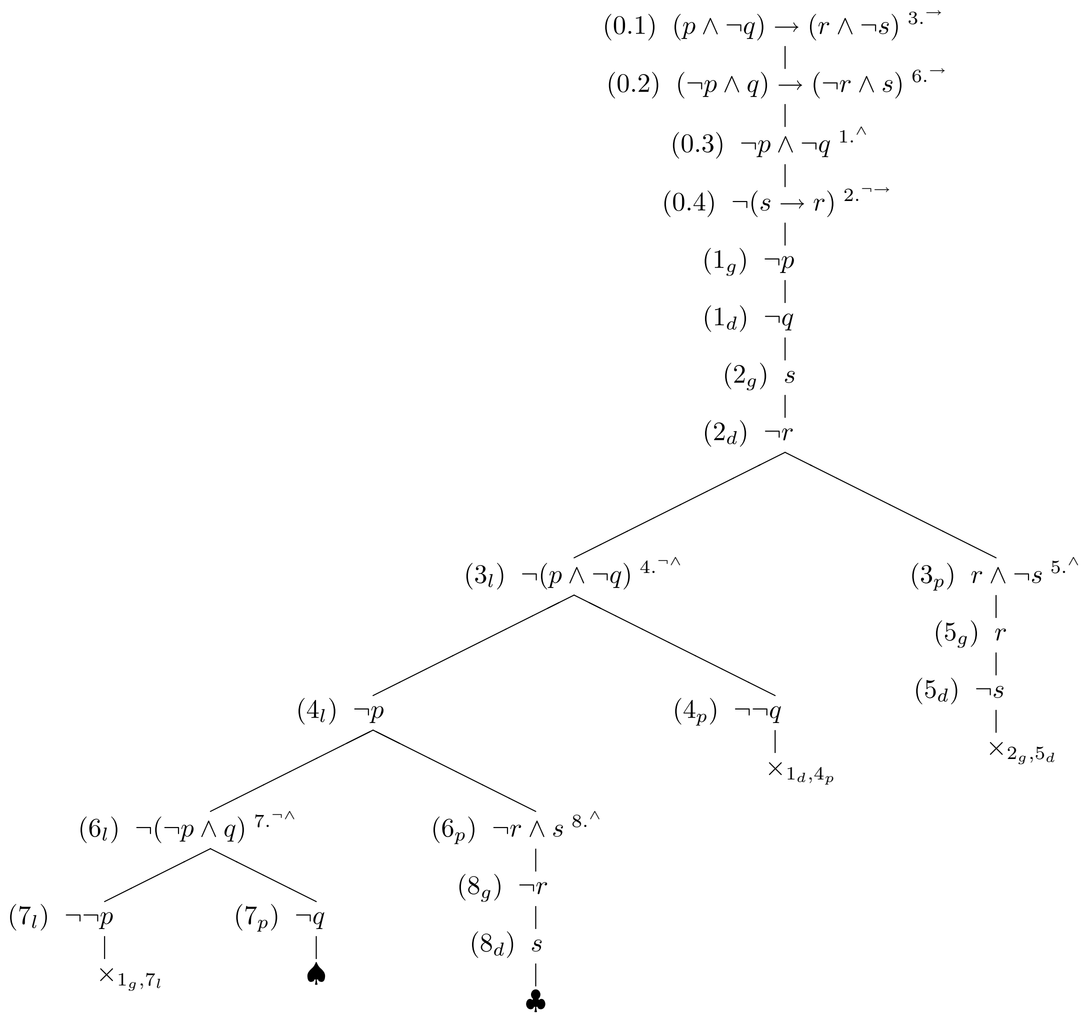
- $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$
- $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$
- $\neg p \wedge \neg q$.

Wniosek jest implikacją: $s \rightarrow r$.
Trzeba zatem sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)\\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)\\ \neg p \wedge \neg q\end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna.

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Jeśli to drzewo będzie zamknięte, to będzie to oznaczać, że nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeśli drzewo będzie miało co najmniej jedną gałąź otwartą, to będzie to oznaczać, że istnieje wartościowanie, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.



Widać, że drzewo ma gałęzie otwarte (zaznaczone liśćmi ♠ oraz ♣). Zatem rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna. Oto wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0:

p	q	r	s
0	0	0	1

Zauważmy, że na gałęzi ♠ występują takie same literały, jak na gałęzi ♣.

Badane wnioskowanie nie jest dedukcyjne: wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

PRZYKŁAD 11.7.7.

Leżysz w szpitalu. Doktor stoi przy łóżku i oglądając twoją kartę przypomina sobie wiadomości z wykładów:

> *Jeśli pacjentka ma przerzuty nowotworowe, to zaatakowana jest wątroba. Pacjentka ma krew w moczu, chociaż nie ma wysokiej gorączki. Nie jest tak, aby jednocześnie była krew w moczu a nie było przerzutów nowotworowych. Pacjentka ma wysoką gorączkę, o ile zaatakowana jest wątroba.*

Na to jedna z asystentek:

> *No cóż, z tego wynika, że pacjentka wyzdrowieje, jeśli usuniemy jej oba płuca. Czy tak, Panie doktorze?*

Czy asystentka ma rację?

Znajdujemy zdania proste w tekście:

p — Pacjentka ma przerzuty nowotworowe.

q — Zaatakowana jest wątroba.

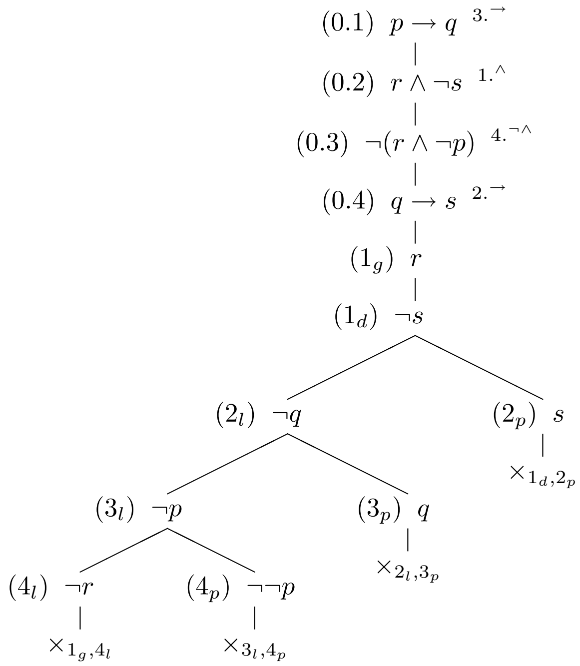
r — Pacjentka ma krew w moczu.

s — Pacjentka ma wysoką gorączkę.

Zdania złożone w tekście doktora mają następujące struktury składniowe:

1. $p \to q$
2. $r \wedge \neg s$
3. $\neg(r \wedge \neg p)$
4. $q \to s$.

Pokażemy, że tekst doktora jest semantycznie sprzeczny. Przypuśćmy, że formuły 1.–4. mają wszystkie wartość 1 przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły:



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, a zatem nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie formuły 1.–4. miałyby wartość 1. Zbiór tych formuł jest więc ***semantycznie sprzeczny***. Doktor miał wyraźnie zły dzień, przynajmniej jeśli chodzi o spójność jego wypowiedzi. Ponieważ wygłoszony przez niego tekst jest semantycznie sprzeczny, więc ***dowolne*** zdanie wynika zeń logicznie. ***Każda*** diagnoza postawiona na podstawie tego tekstu jest dopuszczalna: że umierasz, że symulujesz, że ***wyzdrowiejesz, gdy usuną Ci oba płuca***, itd. Chyżo uciekaj z tego szpitala.

Przykład 11.7.8.

Zbadamy, czy jest tautologią czy kontrtautologią KRZ następująca formuła:

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \to (\beta)) \vee (\beta)).$$

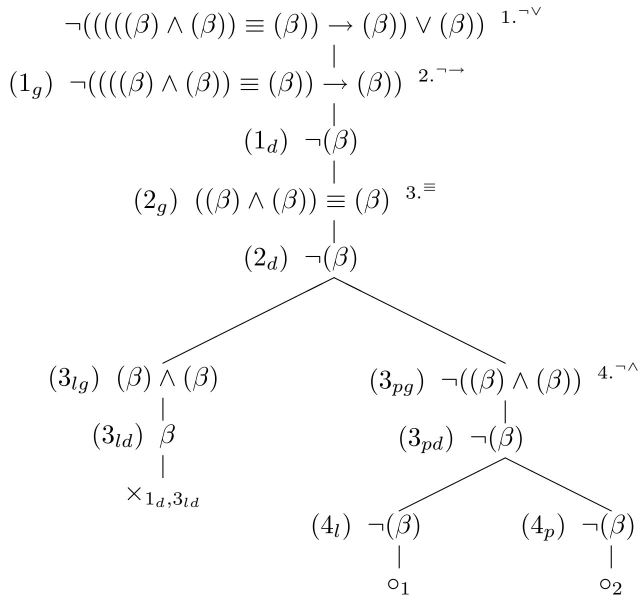
Jak zobaczymy, istotne będzie odróżnienie trzech przypadków:

1. β jest tautologią;
2. β jest kontrtautologią;
3. β nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Przypuśćmy, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \to (\beta)) \vee (\beta))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne tej formuły:



Nie została wykluczona sytuacja, że formuła (★) ma wartość 1. Drzewo ma dwie gałęzie otwarte i na każdej z nich mamy formułę $\neg(\beta)$. Zatem, formuła (★) ma wartość 1 przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których $\neg(\beta)$ ma wartość 1, czyli β ma wartość 0.

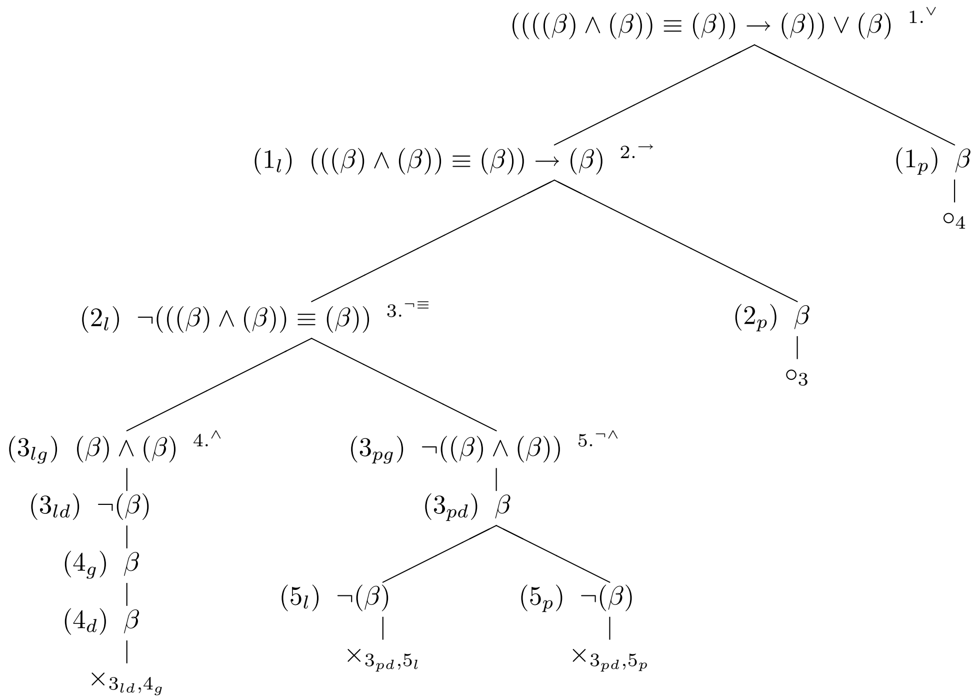
Przypuśćmy z kolei, że

$$(\bigstar) \quad \neg(((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta))$$

ma przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych wartość 0. Wtedy alternatywa

$$(\bigstar\bigstar) \quad ((((\beta) \wedge (\beta)) \equiv (\beta)) \rightarrow (\beta)) \vee (\beta)$$

ma (przy tymże wartościowaniu zmiennych zdaniowych) wartość 1. Budujemy drzewo semantyczne formuły (★★):



Nie została wykluczona sytuacja, że formuła ($\bigstar\bigstar$) ma wartość 1, czyli że formuła ($\bigstar$) ma wartość 0. Tablica analityczna formuły ($\bigstar\bigstar$) ma gałęzie otwarte, na których mamy formułę β. Zatem, formuła ($\bigstar\bigstar$) ma wartość 1 przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których β ma wartość 1. Oznacza to, że formuła ($\bigstar$) ma wartość 0 przy takich wartościowaniach zmiennych zdaniowych, przy których β ma wartość 0.

Pokazaliśmy zatem, że: jeśli β nie jest ani tautologią ani kontrtautologią (przypadek 3), to również ($\bigstar$) nie jest ani tautologią ani kontrtautologią, ponieważ tablice analityczne dla formuł ($\bigstar$) oraz ($\bigstar\bigstar$) mają gałęzie otwarte. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła β ma wartość 1, formuła ($\bigstar$) ma wartość 0. Dla każdego wartościowania, dla którego formuła $\neg(\beta)$ ma wartość 1 (czyli β ma wartość 0), formuła ($\bigstar$) ma wartość 1.

W przypadku 1, jeśli β jest tautologią (formułą mającą wartość 1 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałęzie w tablicy analitycznej formuły ($\bigstar$) zakończone liśćmi $\circ_1$ oraz $\circ_2$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tych gałęziach formuła $\neg(\beta)$ miałaby wartość 1. Wtedy tablica analityczna dla formuły ($\bigstar$) ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła ($\bigstar$) nie ma wartości 1 przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią.

W przypadku 2, jeśli β jest kontrtautologią (formułą mającą wartość 0 przy ***każdym*** wartościowaniu zmiennych zdaniowych), to gałęzie w tablicy analitycznej formuły ($\bigstar\bigstar$) zakończone liśćmi $\circ_3$ oraz $\circ_4$ ***trzeba*** zamknąć, ponieważ ***nie istnieje*** wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym znajdująca się na tych gałęziach formuła β miałaby wartość 1. Wtedy drzewo semantyczne dla formuły ($\bigstar\bigstar$) ma wszystkie gałęzie zamknięte, a to oznacza, że formuła ($\bigstar\bigstar$) nie ma wartości 1 przy żadnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest kontrtautologią. Ponieważ ($\bigstar\bigstar$) jest semantycznie równoważna negacji formuły ($\bigstar$), więc ($\bigstar$) jest w tym przypadku tautologią.

Podsumujmy:

- gdy β jest tautologią, to ($\bigstar$) jest kontrtautologią;
- gdy β jest kontrtautologią, to ($\bigstar$) jest tautologią;
- gdy β nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią, to ($\bigstar$) również nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią.

Podobnie wygląda analiza formuły rozważanej w przykładzie 11.2.6.

11.8. Uwagi

Jest wiele wersji metody tablic analitycznych. Łączy je, by tak rzec, wspólna ideologia, różnią zaś np. stosowane systemy notacji. Postaramy się, w wielkim skrócie, powiedzieć o tym kilka słów niżej.

FORMUŁY SYGNOWANE. Popularnym ujęciem metody tablic analitycznych jest rozważenie tzw. ***formuł sygnowanych***, czyli formuł z (metajęzykowym) komentarzem dotyczącym ich wartości logicznej:

- zapis $\mathbf{T}\alpha$ oznacza, że formuła α ma wartość 1 (przy rozważanym wartościowaniu)
- zapis $\mathbf{F}\alpha$ oznacza, że formuła α ma wartość 0 (przy rozważanym wartościowaniu).

Wtedy reguły tworzenia tablic atomowych przyjmują postać następującą:

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}(\alpha\wedge\beta) \\ | \\ \mathbf{T}\alpha \\ | \\ \mathbf{T}\beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{F}(\alpha\rightarrow\beta) \\ | \\ \mathbf{T}\alpha \\ | \\ \mathbf{F}\beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{F}(\alpha\vee\beta) \\ | \\ \mathbf{F}\alpha \\ | \\ \mathbf{F}\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}(\alpha \vee \beta) \\ \diagup \qquad \diagdown \\ \mathbf{T}\alpha \qquad \mathbf{T}\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{T}(\alpha \to \beta) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{F}\alpha \quad \mathbf{T}\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{F}(\alpha \wedge \beta) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{F}\alpha \quad \mathbf{F}\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}\neg\alpha \\ | \\ \mathbf{F}\alpha \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{T}\alpha \\ | \\ \mathbf{F}\neg\alpha \end{array}$$

Notacja ta ma pewne zalety: m.in. pozwala przejrzysty sposób formułować dowody twierdzeń dotyczących tablic analitycznych.

Notacja Smullyana. Reguły tworzenia tablic atomowych są dwojakiego rodzaju: rozgałęziające lub nierozgałęziające. W notacji zaproponowanej przez Smullyana rozważa się ***dwa typy*** formuł:

- α-***formuły***: formuły których tablice atomowe nie mają rozgałęzień (a więc formuły będące: koniunkcjami, zaprzeczonymi implikacjami, zaprzeczonymi alternatywami, podwójnymi negacjami)
- β-***formuły***: formuły których tablice atomowe mają rozgałęzienia (a więc formuły będące: alternatywami, implikacjami, zaprzeczonymi koniunkcjami).

Użycie α-β-notacji ułatwia formułowanie wielu twierdzeń oraz przeprowadzanie dowodów.

Tablice o Wierzchołkach Znakowanych Zbiorami Formuł. Zamiast tablic analitycznych znakowanych pojedynczymi formułami rozważa się też tablice, których wierzchołki znakowane są ***zbiorami*** formuł. Dla przykładu, drzewo atomowe koniunkcji $\alpha \wedge \beta$ ma postać:

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ | \\ \{\alpha, \beta\} \end{array}$$

a drzewo atomowe implikacji ma postać:

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \{\neg\alpha\} \quad \{\beta\} \end{array}$$

Takie podejście ma walory zarówno teoretyczne (związki z rachunkiem sekwentów), jak i praktyczne.

Zapis w Postaci Drzew a Zapis w Postaci Tabel. Zamiast drzew reprezentujących tablice analityczne używa się również ***tabel***. Stąd wzięła się też nazwa tej metody: E.W. Beth stosował taką właśnie notację. Tabela podzielona jest na dwie części: lewą i prawą. W jednej z nich (np. w lewej) piszemy formuły, które mają wartość 1 (przy rozważanym wartościowaniu), a w drugiej te, które mają wartość 0 (przy tymże wartościowaniu). Tabela jest ***sprzeczna***, jeśli jakaś formuła znajdzie się w obu częściach tabeli. Reguły rozgałęziające każą w wyjściowej tabeli tworzyć podtabele. Notacja w postaci drzew i notacja w postaci tabel są oczywiście równoważne.

Tablice Analityczne a Formalizm Gentzena. Nie mogąc wdawać się tu we wszystkie szczegóły powiemy jedynie, że metoda tablic analitycznych jest w pewnym sensie ***odwrotna*** do formalizmu stosowanego w rachunkach Gentzena. W tych ostatnich również buduje się drzewa dowodowe, zaczynając jednak od liści (którymi są aksjomaty) i otrzymując kolejne wierzchołki drzewa jako rezultaty zastosowań reguł (z ustalonego zestawu) do potomków tych wierzchołków. Przykładem systemu tablicowego inspirowanego rachunkami Gentzena są tzw. Dual Tableaux, zaproponowane przez Rasiową i Sikorskiego.

Tablice Analityczne a Pewne Twierdzenia Metalogiczne. Zobaczyliśmy pewne związki między metodą tablic analitycznych a niektórymi twierdzeniami metalogicznymi dotyczącymi KRZ. Można wykorzystać metodę tablic analitycznych w dowodach dalszych takich twierdzeń. Przykłady podane zostaną w semestrze letnim. Dodajmy w tym miejscu, że twierdzeń o trafności i pełności metody tablic analitycznych można dowodzić na różne sposoby. W tej prezentacji wzorowaliśmy się na sposobie podanym w Nerode, Shore 1997. Ciekawe są dowody tych twierdzeń np. w książkach: Smullyan 1968, Fitting 1990.

Tablice Analityczne: Implementacje. Jest przeogromne mnóstwo implementacji metody tablic analitycznych, w różnych jej wersjach. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do powszechnie dostępnych podręczników, np.: Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* lub *Handbook of Automated Reasoning.* 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.). Łatwo też znaleźć materiały na ten temat w Internecie.

11.9. Zadania (wraz z rozwiązaniami)

Jak w przypadku każdego wykładu, dołączamy to, co najbardziej lubicie, a mianowicie zadania do samodzielnego rozwiązania. Zaleca się również zastosowanie metody tablic analitycznych dla rozwiązania zadań podanych na poprzednich wykładach.

Uwaga. W zadaniach 3 oraz 4 pytamy o pewne własności wyrażeń języka polskiego. Zakładamy, że jest odpowiedniość między semantyką języka polskiego a semantyką KRZ, przynajmniej w jakimś zakresie. Państwo Studentki i Studenci zechcą wybaczyć, że w niniejszych wykładach z Logiki Matematycznej nie poświęcamy większej uwagi problematyce „przekładu" z języka polskiego na język KRZ i na odwrót. Na tym elementarnym poziomie, do którego należą prezentowane zadania jest to, jak sądzimy, całkiem niepotrzebne. Skoro otrzymałaś Świadectwo Dojrzałości, to posługujesz się sprawnie językiem polskim, m.in. w Czytaniu ze Zrozumieniem. Byłoby nietaktem z naszej strony (obrażającym Twój Intelekt) rozwodzenie się nad tym, które zdania języka polskiego mają strukturę implikacji, które są alternatywami, itp.

11.9.1. Zadania

1. Ustal, czy jest tautologią lub kontrtautologią KRZ:

- (a) $(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r$
- (b) $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

2. Ustal, czy podane reguły są niezawodne:

- (a) Dla zmiennych zdaniowych p, q i r:

$$\frac{(p \vee q) \rightarrow r}{\neg r \rightarrow p}$$

- (b) Dla zmiennych zdaniowych p, q, r i s:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \end{array}}{(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)}$$

- (c) Dla dowolnych formuł języka KRZ:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \gamma \to \delta \\ \alpha \vee \gamma \\ \neg(\beta \wedge \delta)\end{array}}{(\beta \to \alpha) \wedge (\delta \to \gamma)}$$

3. Ustal, czy podane teksty są semantycznie sprzeczne:

- (a) *Bracia i Siostry! Wtedy i tylko wtedy osiągacie zbawienie, gdy posłuszni jesteście Pasterzom. Jeśli taca jest pusta, to nie jesteście posłuszni Pasterzom. Kościół jest ubogi, jeśli taca jest pusta. Ale przecież — najmilsi — jesteście jednak posłuszni Pasterzom. Pamiętajcie! Jeśli jesteście posłuszni Pasterzom, to osiągacie zbawienie i jednocześnie Kościół nie jest ubogi. Idźcie tedy w pokoju, a nie zapomnijcie o tacy!*
- (b) *Lubię żyć dostatnio. A jeśli lubię żyć dostatnio, to wyjdę za Roberta lub za Mariana (każdy z nich ma większą kasę, niż ci wszyscy profesorkowie z Instytutu, razem wzięci!). Jeśli wyjdę za Mariana, to będę niańczyć bachory i spędzać cały czas przy garach. Niedoczekanie! Ani nie będę niańczyć bachorów ani nie będę całego czasu spędzać przy garach. Za Roberta też nie wyjdę. Kto chciałby żyć z takim dziwkarzem i pijakiem?*
- (c) *Kłamie dokładnie jedno z dwojga: Gazeta Wyborcza lub Radio Maryja. Jeśli Gazeta Wyborcza kłamie, to Rzeczpospolita kłamie. Radio Maryja nie kłamie, o ile Nasz Dziennik kłamie. Jeśli Rzeczpospolita kłamie, to Nasz Dziennik też kłamie.*

4. Ustal, czy podane wnioskowania są dedukcyjne:

- (a) *Panie piękny i młody! Jeśli dacie pieniążek, to Cyganka prawdę Wam powie. Będziecie szczęśliwi, o ile: nie dacie pieniążka lub kupicie ten lubczyk. Jeśli nie kupicie lubczyka, to Cyganka nie powie Wam prawdy. Wy, Panie, uczony, widzicie więc, że z tego com powiedziała wynika, że szczęśliwi będziecie. To jak będzie z tym pieniążkiem? A może lubczyk? A może...?*
- (b) *Jeśli dobrze zapłacisz, to: dokonasz cudu, o ile masz znajomości w Kurii. Jeśli dobrze zapłacisz, to: o ile zdążysz się ochrzcić, to zostaniesz świętą. Dobrze zapłacisz, a w dodatku co najmniej jedno z dwojga: zdążysz się ochrzcić lub masz znajomości w Kurii. Cudu to ty nie dokonasz. Ale nie martw się! Przecież już z tego, co przed chwilą ustaliliśmy jasno wynika, że zostaniesz świętą.*
- (c) *Jeżeli Niebo jest puste, to będę potępiona, ale jeśli Piekło jest puste, to będę zbawiona. O ile zdarzają się cuda, to: jeśli nie będę potępiona, to będę zbawiona. No cóż, cuda się nie zdarzają. Zatem ani Niebo ani Piekło nie są puste.*

11.9.2. Rozwiązania i wskazówki

1. (a) Stawiamy hipotezę, że formuła $(p \wedge \neg(q \to p)) \to r$ jest tautologią. Próbujemy ***wykluczyć***, że ma ona wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu.

Budujemy tablicę analityczną dla formuły $\neg((p \wedge \neg(q \to p)) \to r)$:

$$
\begin{array}{rl}
(0) & \neg((p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r)^{\ 1.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(1_g) & p \wedge \neg(q \rightarrow p)^{\ 2.\wedge} \\
 & | \\
(1_d) & \neg r \\
 & | \\
(2_g) & p \\
 & | \\
(2_d) & \neg(q \rightarrow p)^{\ 3.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(3_g) & q \\
 & | \\
(3_d) & \neg p \\
 & | \\
 & \times_{2_g, 3_d}
\end{array}
$$

Tablica jest sprzeczna, czyli jest dowodem tablicowym formuły $(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r$. Na mocy twierdzenia o pełności metody tablicowej, formuła ta jest więc tautologią KRZ.

1. (b) Stawiamy hipotezę, że formuła $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$ jest tautologią. Próbujemy ***wykluczyć***, że ma ona wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu.

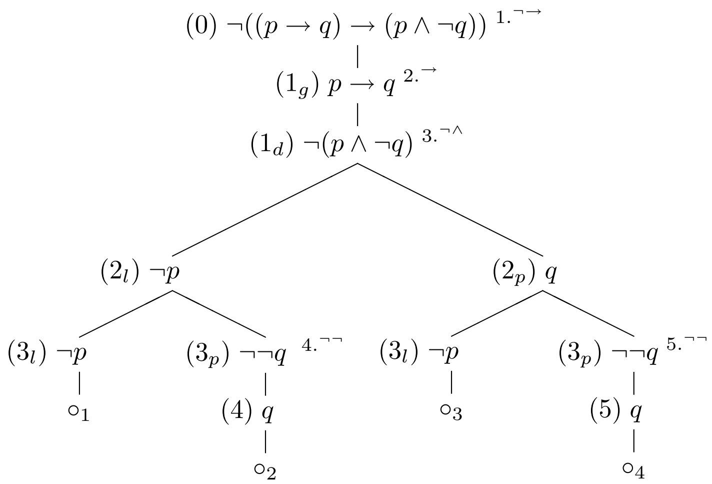
Budujemy tablicę analityczną dla formuły $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q)))$:

$$
\begin{array}{rl}
(0) & \neg(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q)))^{\ 1.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(1_g) & p \\
 & | \\
(1_d) & \neg(q \rightarrow (r \rightarrow q))^{\ 2.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(2_g) & \neg(r \rightarrow q)^{\ 3.\neg\rightarrow} \\
 & | \\
(3_g) & r \\
 & | \\
(3_d) & \neg q \\
 & | \\
 & \times_{2_g, 3_d}
\end{array}
$$

Tablica jest sprzeczna, czyli jest dowodem tablicowym formuły $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$. Na mocy twierdzenia o pełności metody tablicowej, formuła ta jest więc tautologią KRZ.

1. (c) Stawiamy hipotezę, że formuła $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ jest tautologią. Próbujemy ***wykluczyć***, że ma ona wartość 0 przy jakimkolwiek wartościowaniu.

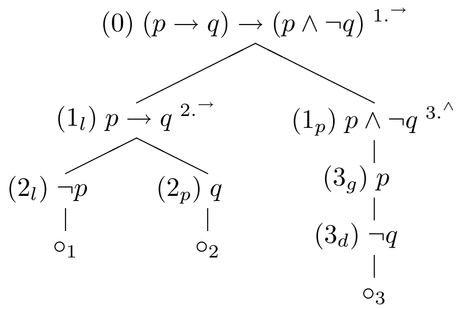
Budujemy tablicę analityczną dla formuły $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q))$:



Hipoteza, że formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ jest tautologią nie potwierdziła się. Powyższa tablica nie jest sprzeczna, a to oznacza, że formuła $\neg((p \to q) \to (p \wedge \neg q))$ ma wartość 1 przy pewnych wartościowaniach (jakich?). W konsekwencji, formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ ma przy tych wartościawaniach wartość 0, czyli nie jest tautologią KRZ.

Stawiamy hipotezę, że formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ jest kontrtautologią. Próbujemy ***wykluczyć***, że ma ona wartość 1 przy jakimkolwiek wartościowaniu.

Budujemy tablicę analityczną dla formuły $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$:



Hipoteza, że formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ jest kontrtautologią nie potwierdziła się. Powyższa tablica nie jest sprzeczna, a to oznacza, że formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ ma wartość 1 przy pewnych wartościowaniach (jakich?). W konsekwencji, formuła $(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$ nie jest kontrtautologią KRZ.

2. **(a)** Stawiamy hipotezę, że badana reguła jest niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że istnieje wartościowanie, dla którego przesłanka ma wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Gdyby istniało takie wartościowanie, to tablica analityczna rozpoczynająca się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku byłaby sprzeczna. Budujemy tę tablicę:

- $(0.1)\ (p \vee q) \to r\ ^{2.\to}$
- $(0.2)\ \neg(\neg r \to p)\ ^{1.\neg\to}$
- $(1_g)\ \neg r$
- $(1_d)\ \neg p$
  - $(2_l)\ \neg(p \vee q)\ ^{3.\neg\vee}$
    - $(3_g)\ \neg p$
    - $(3_d)\ \neg q$
    - $\circ$
  - $(2_p)\ r$
    - $\times_{1_g,2_p}$

Powyższa tablica nie jest sprzeczna, ma gałąź otwartą. Hipoteza, że badana reguła jest niezawodna nie potwierdziła się: istnieją wartościowania, przy których przesłanka reguły ma wartość 1, a jej wniosek ma wartość 0. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanki.

2. (b) Stawiamy hipotezę, że badana reguła jest niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że istnieje wartościowanie, dla którego wszystkie przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Gdyby istniało takie wartościowanie, to tablica analityczna rozpoczynająca się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku byłaby sprzeczna. Budujemy tę tablicę:

- $(0.1)\ p \to q\ ^{5.\to}$
- $(0.2)\ r \to s\ ^{3.\to}$
- $(0.3)\ \neg((p \vee q) \to (r \vee s))\ ^{1.\neg\to}$
- $(1_g)\ p \vee q\ ^{4.\vee}$
- $(1_d)\ \neg(r \vee s)\ ^{2.\neg\to}$
- $(2_g)\ \neg r$
- $(2_d)\ \neg s$
  - $(3_l)\ \neg r$
    - $(4_l)\ p$
      - $(5_l)\ \neg p$
        - $\times_{4_l,5_l}$
      - $(5_p)\ q$
        - $\circ_1$
    - $(4_p)\ q$
      - $(5_l)\ \neg p$
        - $\circ_2$
      - $(5_p)\ q$
        - $\circ_3$
  - $(3_p)\ s$
    - $\times_{2_g,3_p}$

Powyższa tablica nie jest sprzeczna, ma gałęzie otwarte. Hipoteza, że badana reguła jest niezawodna nie potwierdziła się: istnieją wartościowania, przy których przesłanki reguły mają wartość 1, a jej wniosek ma wartość 0. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

2. (c) Stawiamy hipotezę, że badana reguła jest niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że istnieje wartościowanie, dla którego wszystkie przesłanki mają wartość 1, a wniosek ma wartość 0. Gdyby istniało takie wartościowanie, to tablica analityczna rozpoczynająca się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku byłaby sprzeczna.

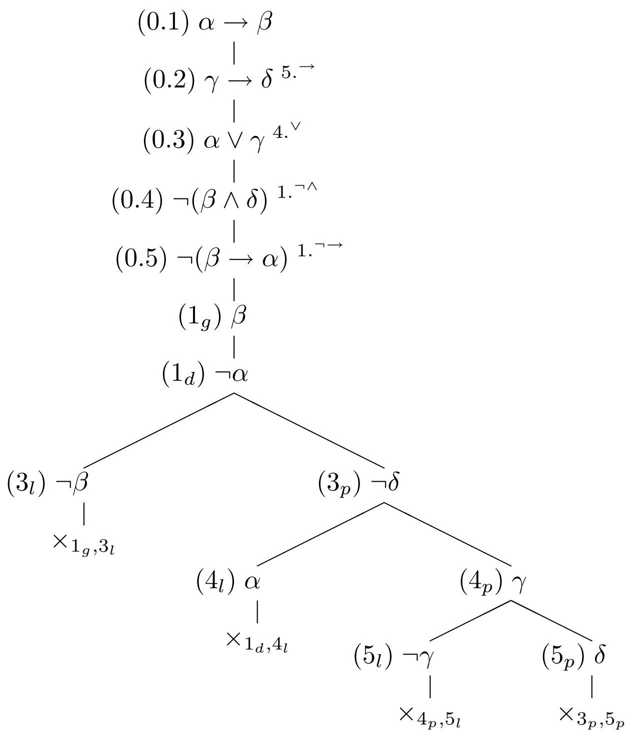
Ponieważ tablica analityczna jest w tym przypadku zbyt duża (jak na wymiary tej kartki), podzielimy pracę na etapy. Zauważmy, że aby wykazać niezawodność reguły:

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \gamma \to \delta \\ \alpha \lor \gamma \\ \neg(\beta \land \delta) \\ \hline (\beta \to \alpha) \land (\delta \to \gamma) \end{array}$$

wystarczy pokazać niezawodność dwóch następujących reguł:

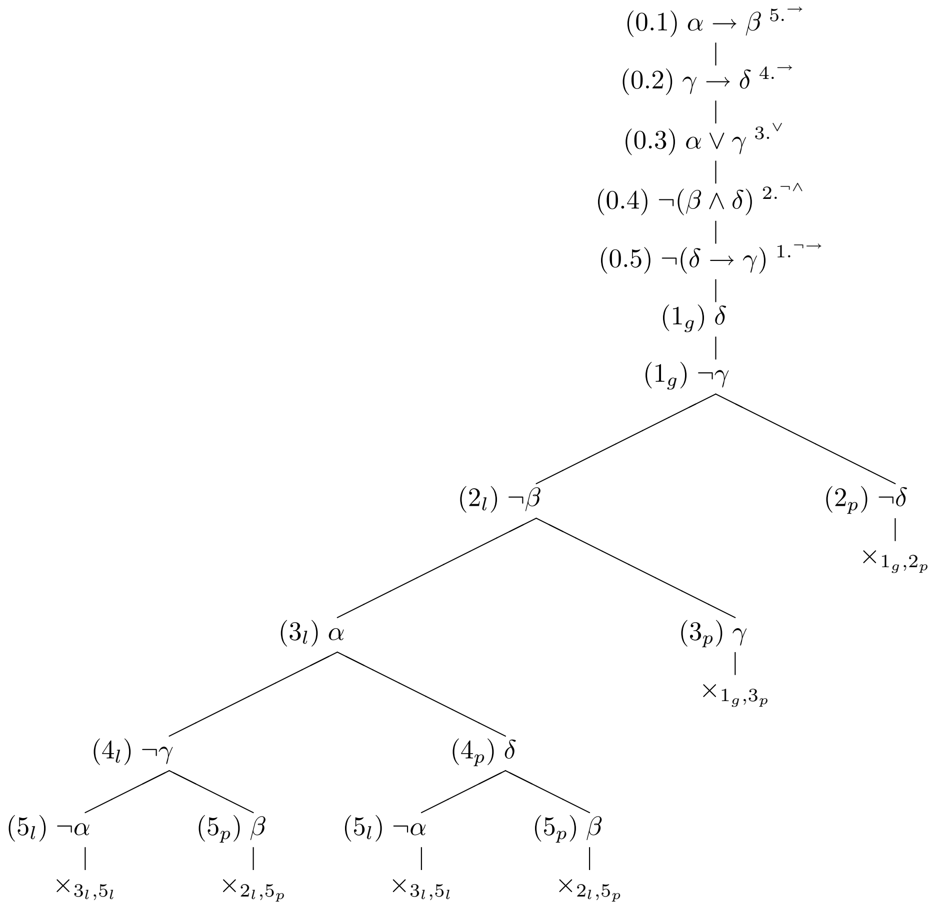
$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \gamma \to \delta \\ \alpha \lor \gamma \\ \neg(\beta \land \delta) \\ \hline \beta \to \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \gamma \to \delta \\ \alpha \lor \gamma \\ \neg(\beta \land \delta) \\ \hline \delta \to \gamma \end{array}$$

Budujemy pierwszą tablicę, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczenia formuły $\beta \to \alpha$:



Tablica jest sprzeczna, a zatem $\beta \to \alpha$ wynika logicznie z przesłanek reguły.

Budujemy drugą tablicę, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczenia formuły $\delta \to \gamma$:



Tablica jest sprzeczna, a zatem $\delta \to \gamma$ wynika logicznie z przesłanek reguły.

Na mocy prawa mnożenia następników otrzymujemy, że $(\beta \to \alpha) \wedge (\delta \to \gamma)$ wynika logicznie z przesłanek reguły, a więc badana reguła jest niezawodna.

Na mocy (semantycznego) twierdzenia o dedukcji otrzymujemy stąd, że prawem KRZ jest formuła:

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \wedge \neg(\beta \wedge \delta)) \to ((\beta \to \alpha) \wedge (\delta \to \gamma)).$$

Uważne słuchaczki tych wykładów rozpoznają w powyższej formule ***prawo Haubera odwracania implikacji***.

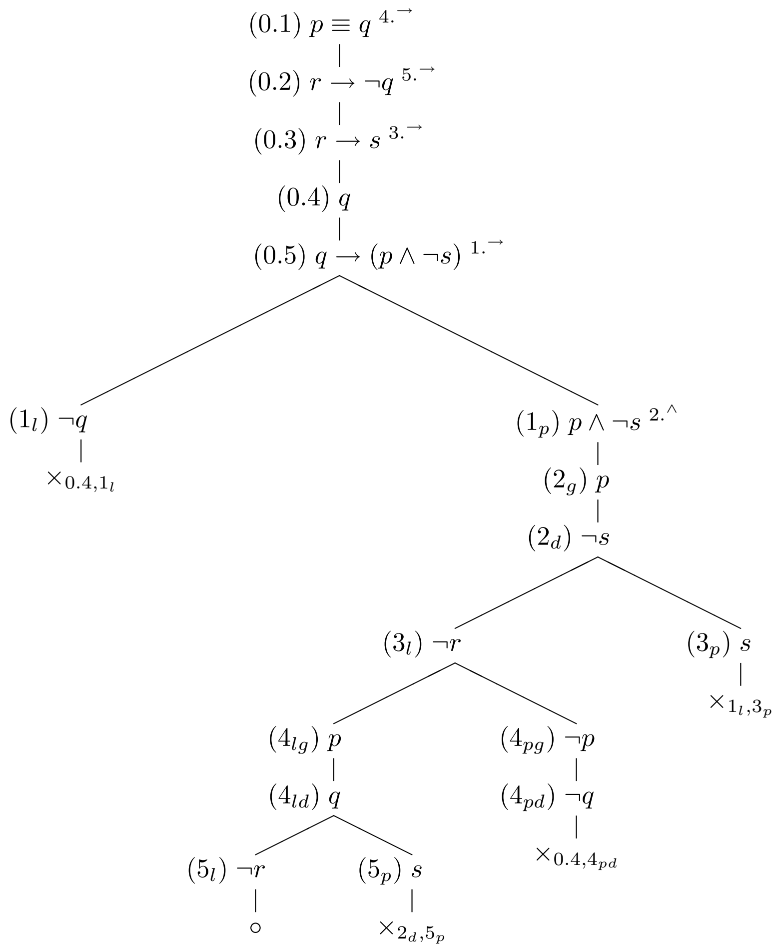
3. (a) Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Osiągacie zbawienie.
- q — Jesteście posłuszni Pasterzom.
- r — Taca jest pusta.
- s — Kościół jest ubogi.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych:

$$\begin{array}{l} p \equiv q \\ r \to \neg q \\ r \to s \\ q \\ q \to (p \wedge \neg s) \end{array}$$

Przypuszczamy życzliwie, że wszystkie te formuły mają wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Budowę tablicy analitycznej rozpoczynamy od tego właśnie przypuszczenia:



Tablica nie jest sprzeczna, ma jedną gałąź otwartą. Badany tekst jest zatem semantycznie niesprzeczny. Zauważ, że wszystkie zdania tego tekstu są *prawdziwe*, gdy:

- Osiągacie zbawienie.
- Jesteście posłuszni Pasterzom
- Taca nie jest pusta.
- Kościół nie jest ubogi.

Przemyśl to.

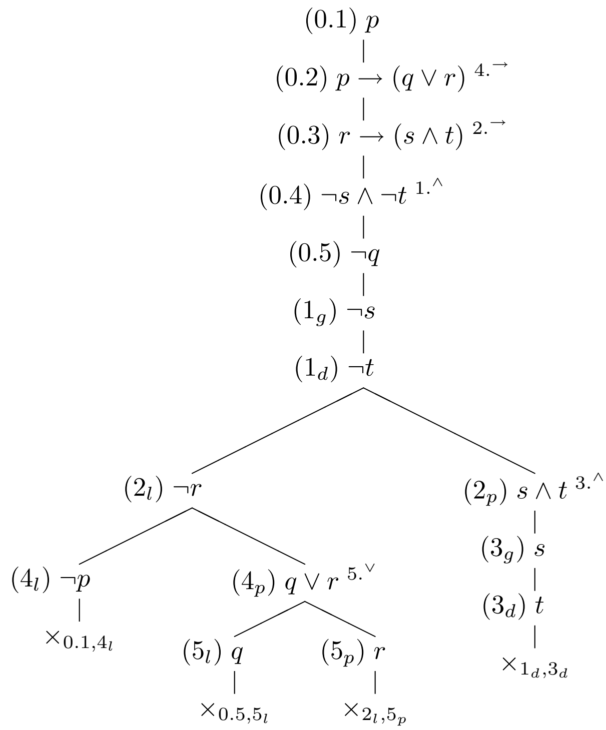
3. (b) Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Lubię żyć dostatnio.
- q — Wyjdę za Roberta.
- r — Wyjdę za Mariana.
- s — Będę niańczyć bachory.
- t — Będę spędzać cały czas przy garach.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych:

$$p$$
$$p \to (q \vee r)$$
$$r \to (s \wedge t)$$
$$\neg s \wedge \neg t$$
$$\neg q$$

Przypuszczamy nieśmiało, że wszystkie te formuły mają wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Budowę tablicy analitycznej rozpoczynamy od tego właśnie przypuszczenia:



Tablica jest sprzeczna. Nie istnieje zatem wartościowanie, przy którym wszystkie rozważane formuły mają wartość 1. Badany tekst jest semantycznie sprzeczny.

3. (c) Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Kłamie *Gazeta Wyborcza*.
- q — Kłamie *Radio Maryja*.
- r — Kłamie *Rzeczpospolita*.
- s — Kłamie *Nasz Dziennik*.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych:

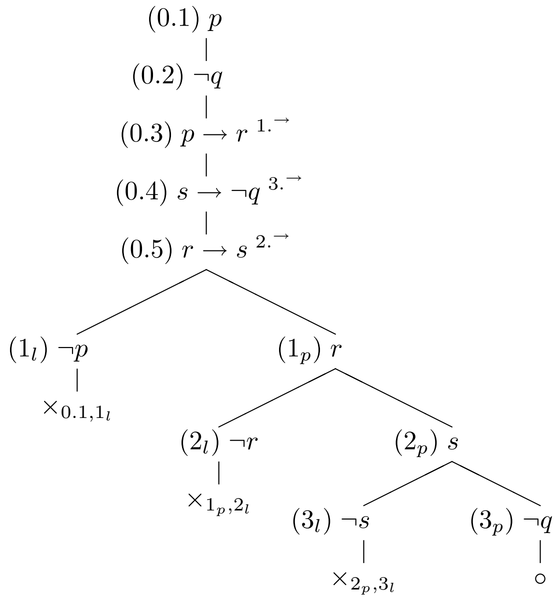
$$\neg(p \equiv q)$$
$$p \to r$$
$$s \to \neg q$$
$$r \to s$$

Przypuszczamy ze spokojem, że wszystkie te formuły mają wartość 1 przy jakimś wartościowaniu. Ponieważ tablica analityczna dla tego zbioru formuł jest zbyt duża (dla tej kartki) pracę podzielimy na dwa etapy:

- (1) zbudujemy tablicę dla formuł p, $\neg q$, $p \to r$, $s \to \neg q$ oraz $r \to s$;
- (2) zbudujemy tablicę dla formuł $\neg p$, q, $p \to r$, $s \to \neg q$ oraz $r \to s$.

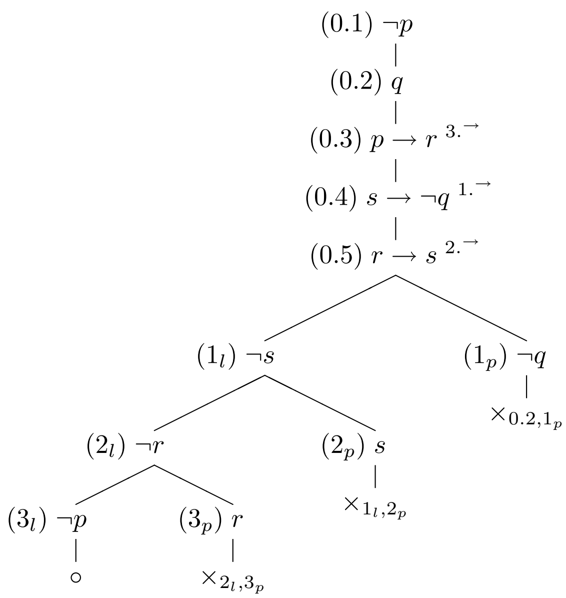
Zauważmy, że $\neg(p \equiv q)$ jest równoważna alternatywie: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Tak więc, tablice dla (1) i (2) dają łącznie tablicę dla $\neg(p \equiv q)$ oraz pozostałych przesłanek.

Budujemy tablicę analityczną dla (1):



Tablica nie jest sprzeczna, ma jedną gałąź otwartą.

Budujemy tablicę analityczną dla (2):



Tablica nie jest sprzeczna, ma jedną gałąź otwartą.

Badany tekst jest zatem semantycznie niesprzeczny. Proszę zauważyć, że z informacji zawartych w tabelach (1) i (2) widać, że w np. dwóch sytuacjach wszystkie rozważane zdania są *prawdziwe*:

- (1) Tylko *Radio Maryja* nie kłamie, pozostałe źródła informacji kłamią.
- (2) Tylko *Radio Maryja* kłamie, pozostałe źródła informacji nie kłamią.

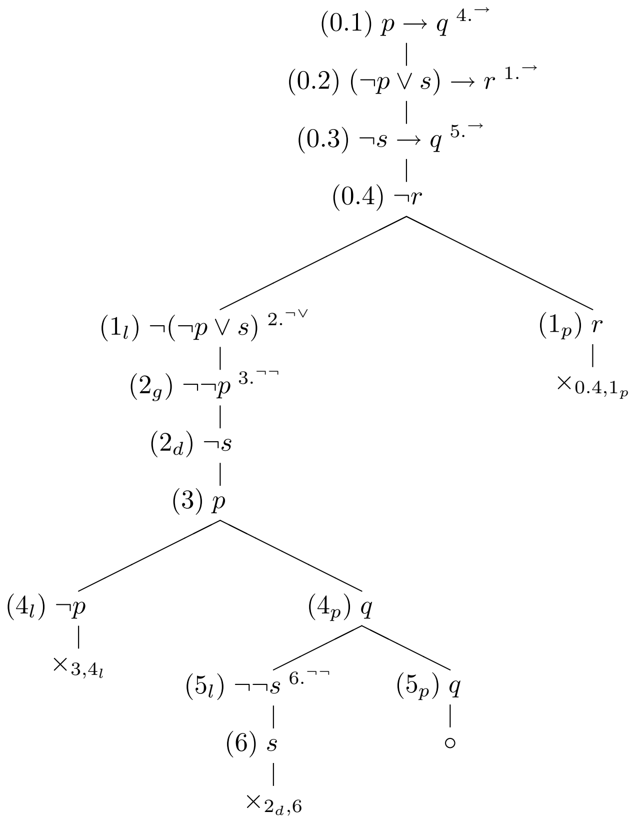
4. (a) Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Dasz pieniążek.
- q — Cyganka powie ci prawdę.
- r — Będziesz szczęśliwy.
- s — Kupisz lubczyk.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych i budujemy regułę, wedle której przebiega wnioskowanie:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ (\neg p \vee s) \to r \\ \neg s \to q \\ \hline r \end{array}$$

Stawiamy hipotezę, że jest to reguła niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że przesłanki mają przy jakimś wartościowaniu wartość 1, a wniosek ma przy tymże wartościowaniu wartość 0. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest sprzeczna, ma gałąź otwartą. Badana reguła wnioskowania nie jest zatem niezawodna. Wnioskowanie przeprowadzone wedle tej reguły nie jest więc dedukcyjne. Kontrprzykładem, pokazującym, iż wniosek nie wynika logicznie z przesłanek jest sytuacja, w której: kupiłeś lubczyk, dałeś pieniążek, usłyszałeś prawdę, a szczęśliwy nie jesteś (czyli sytuacja, w której wszystkie przesłanki są *prawdziwe*, a wniosek *fałszywy*).

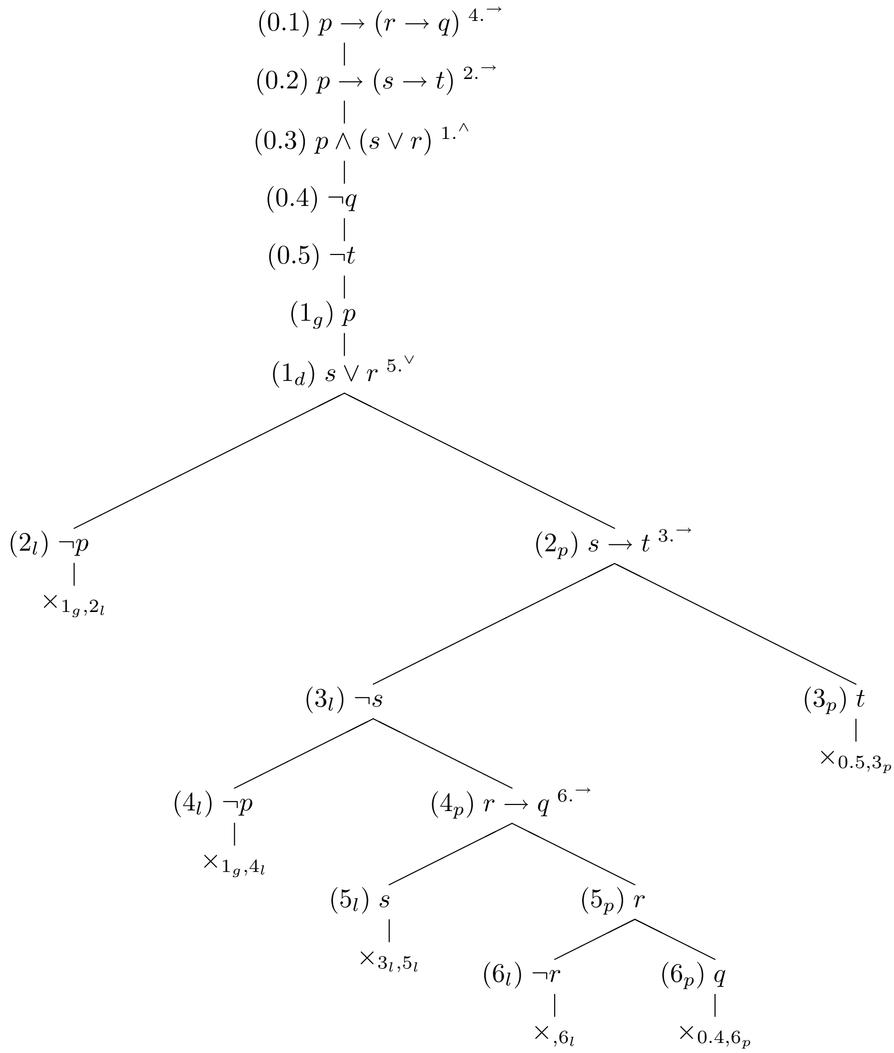
4. **(b)** Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Dobrze zapłacisz.
- q — Dokonasz cudu.
- r — Masz znajomości w Kurii.
- s — Zdążysz się ochrzcić.
- t — Zostaniesz świętą.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych i budujemy regułę, wedle której przebiega wnioskowanie:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (r \rightarrow q) \\ p \rightarrow (s \rightarrow t) \\ p \wedge (s \vee r) \\ \neg q \\ \hline t \end{array}$$

Stawiamy hipotezę, że jest to reguła niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że przesłanki mają przy jakimś wartościowaniu wartość 1, a wniosek ma przy tymże wartościowaniu wartość 0. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica jest sprzeczna. Pokazaliśmy tym samym, że badana reguła wnioskowania jest niezawodna: każde przeprowadzone wedle niej wnioskowanie jest dedukcyjne. Wniosek wynika logicznie z przesłanek.

4. (c) Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przyporządkowujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Niebo jest puste.
- q — Piekło jest puste.
- r — Będę potępiona.
- s — Będę zbawiona.
- t — Zdarzają się cuda.

Znajdujemy struktury składniowe poszczególnych zdań złożonych i budujemy regułę, wedle której przebiega wnioskowanie:

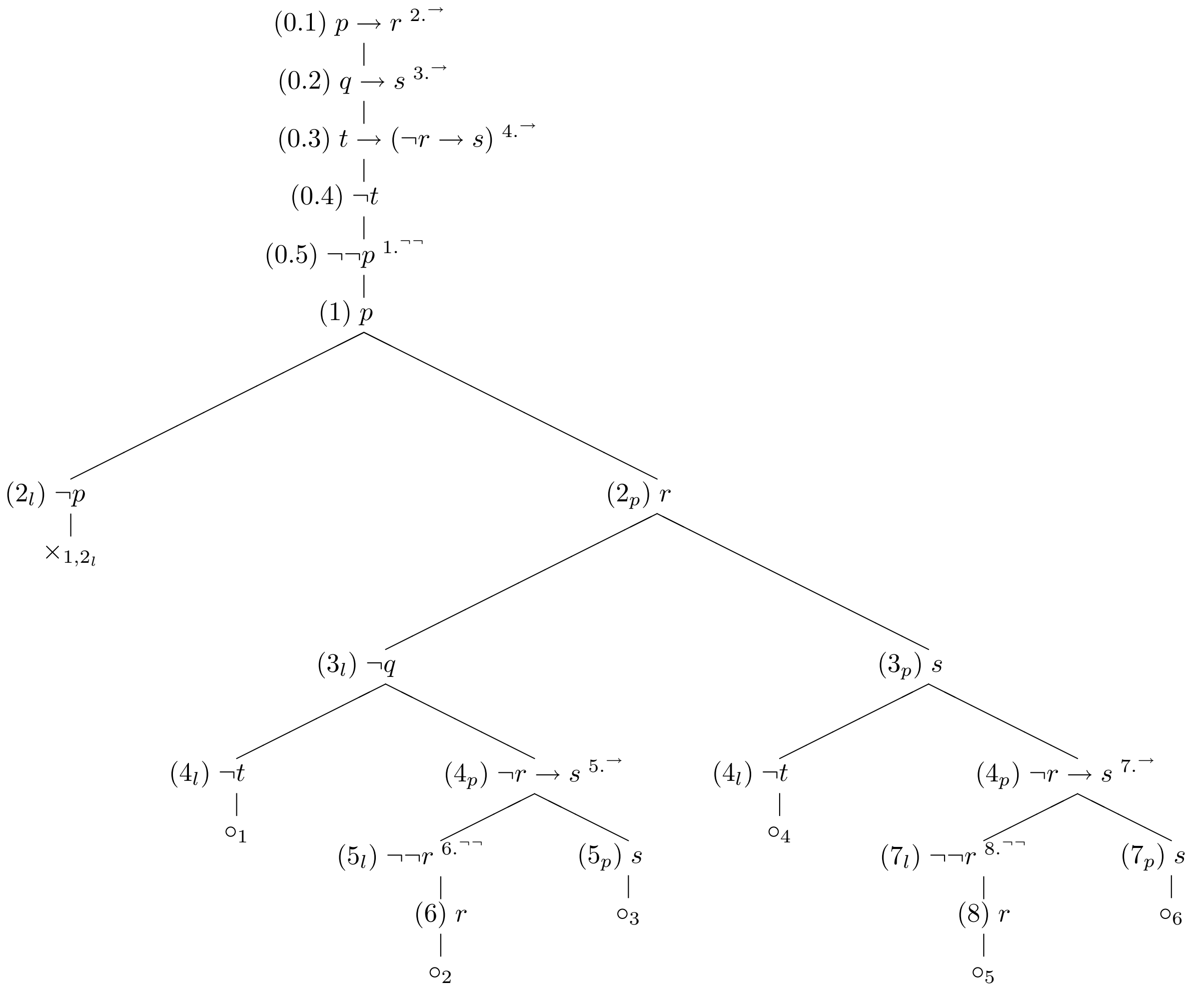
$$\begin{array}{c} p \to r \\ q \to s \\ t \to (\neg r \to s) \\ \neg t \\ \hline \neg p \wedge \neg q \end{array}$$

Stawiamy hipotezę, że jest to reguła niezawodna. Próbujemy zatem ***wykluczyć***, że przesłanki mają przy jakimś wartościowaniu wartość 1, a wniosek ma przy tymże wartościowaniu wartość 0.

Tablica analityczna potrzebna w tym przypadku jest za duża, jak na rozmiary tej kartki. Zauważmy jednak, że (ponieważ wniosek jest koniunkcją) badana reguła jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy niezawodne są obie poniższe reguły:

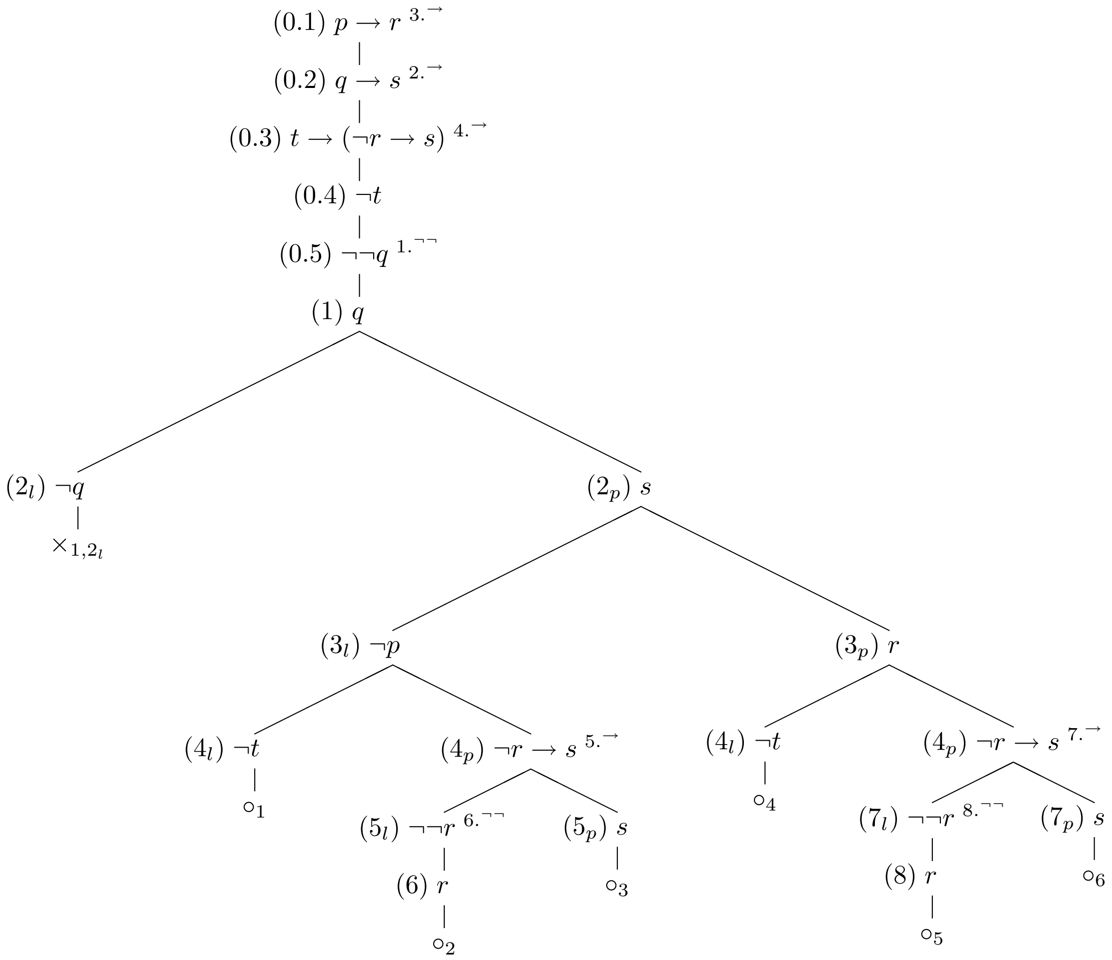
$$\begin{array}{c} p \to r \\ q \to s \\ t \to (\neg r \to s) \\ \neg t \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \to r \\ q \to s \\ t \to (\neg r \to s) \\ \neg t \\ \hline \neg q \end{array}$$

Zajmiemy się najpierw Niebem. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku $\neg\neg p$:



Tablica nie jest sprzeczna, ma gałęzie otwarte. Z przesłanek nie wynika logicznie, że Niebo nie jest puste.

Zajmiemy się teraz Piekłem. Budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku $\neg\neg q$:



Tablica nie jest sprzeczna, ma gałęzie otwarte. Z przesłanek nie wynika logicznie, że Piekło nie jest puste.

Z przesłanek nie wynika zatem, ani że Niebo nie jest puste, ani że Piekło nie jest puste.

Wykorzystywana literatura

Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Handbook of Automated Reasoning. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Marciszewski, W. 2004–2005. *Logika 2004/2005.* Teksty wykładów zamieszczone na stronie: www.calculemus.org/lect/logika04-05/index.html

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications.* Graduate Texts in Computer Science, Springer.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Olszewski, A. Wykład z logiki dla studentów pierwszego roku. http://www.cyf-kr.edu.pl/~atolszad/dydaktyka.php

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Trzęsicki, K. 1994. *Elementy logiki dla humanistów.* Warszawa.

Wiśniewski, A. Logika I.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_1/

Wiśniewski, A. Logika II.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_2/

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

* * *

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl