

Intuicja matematyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

22 marca 2011

Rola intuicji w matematyce

Celem projektu jest ukazanie intuicji matematycznej „w działaniu”, wraz ze skromnymi komentarzami historycznymi (w kilku wybranych dyscyplinach matematycznych).

Filary matematyki:

- intuicja matematyczna
- obliczenia
- dedukcja.

Dwa sposoby posługiwania się intuicją matematyczną (IM):

- *Globalnie*. Dla tworzenia idei oraz rozwijania nowych teorii.
- *Lokalnie*. Dla wspomagania rozumienia dowodów i konstrukcji.

Czym jest poznanie intuicyjne?

- Definicje słownikowe i encyklopedyczne: PEF, SWO, Oksfordzki słownik filozoficzny, Encyklopedia filozofii (red.: Ted Honderich), The Encyclopedia of Philosophy (red.: Paul Edwards).
- Wypowiedzi matematyków oraz filozofów na temat IM. Kto miałby ustalać czym jest IM?

Davis & Hersh *Świat matematyki* (340–341):

- Intuicyjność jest przeciwstawieniem ścisłości. Przy braku dowodu intuicyjne oznacza prawdopodobne lub przekonujące.
- Intuicyjne oznacza: niekompletne, wizualne, oparte na modelu fizycznym, holistyczne lub całościowe w przeciwstawieniu do szczegółowego lub analitycznego.

Jaki jest Świat, każdy widzi. . .



Restrukturyzacja Zakładu Ubezpieczeń Społecznych



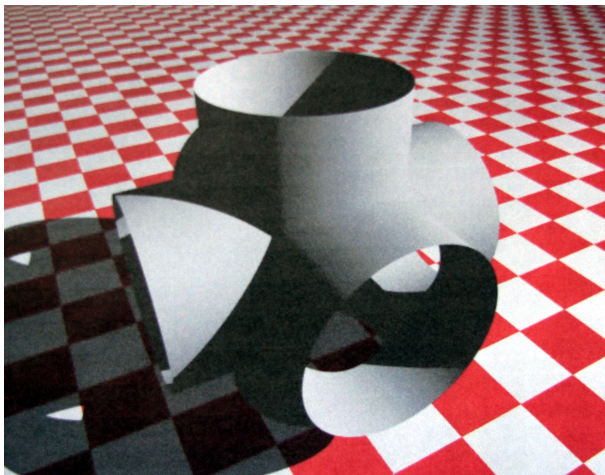
Poczuj siłę swojej IM

- Monty Hall Problem: skłonność do pochopnych ocen.
 - Ciągi von Misesa: pułapki myślenia życzeniowego.
 - W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa jest długości przeciwprostokątnej: pułapki przejść granicznych.
-
- „Dowód”, że złotówka równa się groszowi:
 $1\text{zł} = 100\text{gr} = (10\text{gr})^2 = (0.10\text{zł})^2 = 0.001\text{zł} = 1\text{gr}.$
 - Dlaczego lustro zmienia lewą stronę na prawą (i prawą na lewą), a nie zamienia ze sobą góry i dołu?
 - Mucha i PKP Intercity: ile masz w sobie z Johna von Neumanna?

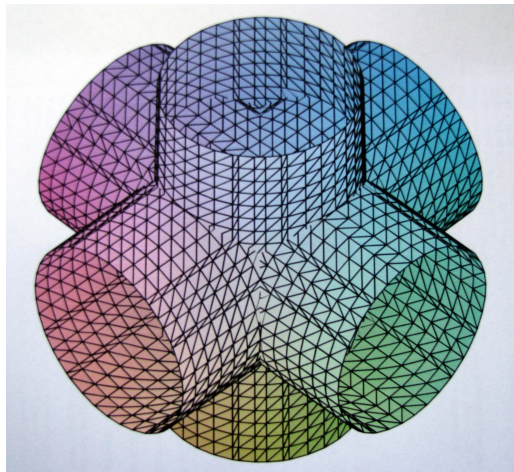
Poziomy IM: od precli do wiązek Hopfa

- Przekształć (bez rozrywania i sklejania) precel na precel, w którym jedno uszko będzie „przewleczone” przez drugie.
 - Posadź cztery drzewa tak, aby każde było w równej odległości do każdego pozostałego.
 - Wypełnij przestrzeń trójwymiarową całkowicie „pustakami” (prostopadłościanami z wyciętą prostopadłościenną dziurą).
-
- Wypełnij przestrzeń trójwymiarową całkowicie: okręgami oraz jedną prostą przechodzącą przez ich środki.
 - Wypełnij przestrzeń trójwymiarową całkowicie: okręgami oraz jedną prostą przechodzącą przez ograniczane przez nie koła, przy dodatkowym założeniu, że każde dwa okręgi są „przewleczone” przez siebie (jak ogniwa łańcucha).

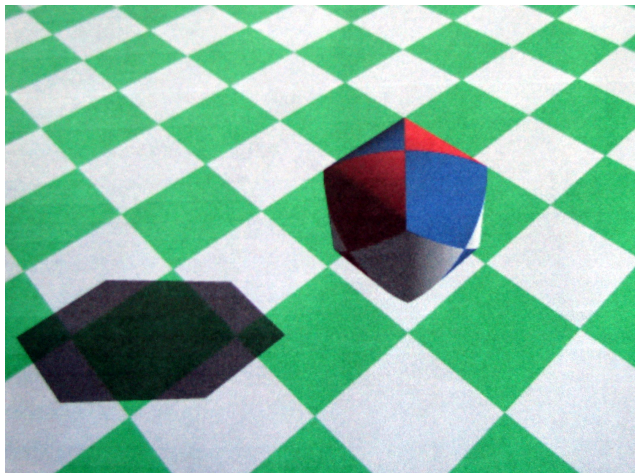
Czy masz wyobraźnię hydrauliczną?



Co jest częścią wspólną 3 ortogonalnych walców?



Widzisz to?



Hipoteza Riemanna

- *Funkcja ζ Riemanna:* $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. *Hipoteza Riemanna* głosi, że wszystkie (nietrywialne) zera tej funkcji leżą na prostej o równaniu $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$. [W argumentacji niżej pomijamy pewne kroki.]
- Funkcja Möbiusa $\mu(x) = 0$, gdy x dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej, $\mu(x) = 1$ (odp. (-1)), gdy rozkład x ma parzystą (odp. nieparzystą) liczbę różnych czynników. HR jest równoważna temu, że $\sum_{y \leq x} \mu(y)$ rośnie nie szybciej niż $x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, przy $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$. Prawdopodobieństwo, że $\mu(x) \neq 0$ jest równe: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \dots = \frac{6}{\pi^2}$. „Wartość oczekiwana” funkcji μ wynosi 0.
- Przy losowym wyborze N liczb ich suma z *prawdopodobieństwem* 1 rośnie nie szybciej niż $N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ przy N zmierzającej do nieskończoności.
- Daje to zatem „prawdziwość z prawdopodobieństwem 1” HR, przy *intuicyjnym przekonaniu*, że tablica wartości funkcji μ jest „losowa” (Davis, Hersh *Świat matematyki*, 315–321).

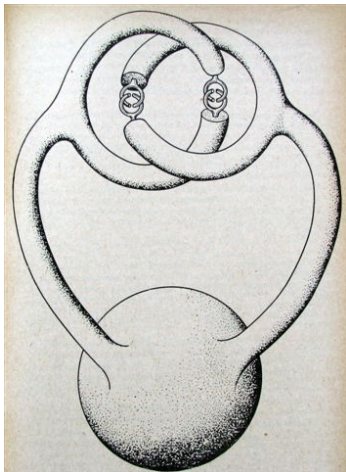
IM jest dynamiczna

- Przykłady porzuconych przekonań intuicyjnych: algebra, analiza, geometria, logika. Euler pisał (1765): *Pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie są zerem, ani nie są ujemne, ani dodatnie. W konsekwencji są to niemożliwe liczby. I tak dochodzimy do pojęcia liczb na ogół zwanych urojonymi albo wyobraźalnymi dlatego, że istnieją one tylko w wyobraźni.*
 - Trzy klasyczne przykłady:
 - niewymierność,
 - aksjomat wyróżniania,
 - rozumienie pojęcia nieskończoności.
-
- Paradoksy jako regulatory IM. Czego nauczył nas *Paradoks Skolema*?
 - O co *kłóćcą się* matematycy? Czy miewają wzajem sprzeczne IM? Która wtedy wygrywa?

All animals are equal but. . .

- IM podąża zwykle za standardem, normalnością, odwołuje się do obiektów „dobrze się zachowujących”. „Standardowość” i „normalność” nie muszą jednak oznaczać „większość”.
 - Sfera rogata Alexandera i twierdzenie Jordana-Schönfliessa.
 - *A teraz narysujemy zbiór Vitaliego. . .*
-
- Zbiory niemierzalne: kapitulacja intuicji *potocznych*.
 - Obiekty fraktalne: nowa *intuicja* wymiaru?
 - Struktury *niearchimedesowe*: koszmar pogoni sennej.
 - Czym są *błędy* IM?

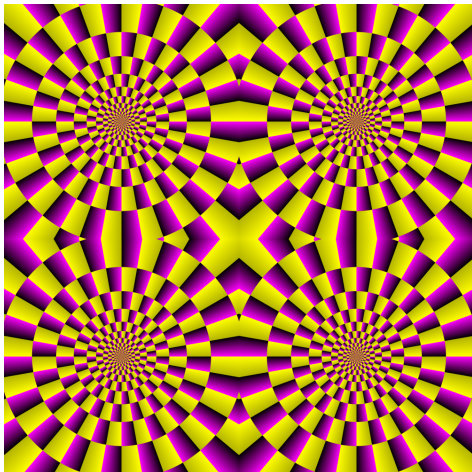
Sfera rogata Alexandera



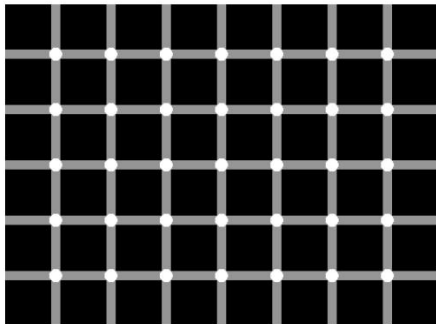
Iluzje



Iluzje

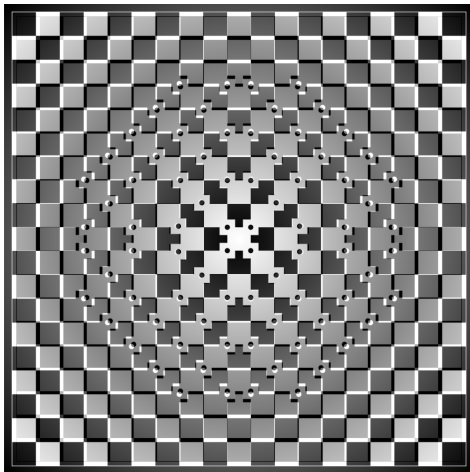


Iluzje



Count the black dots! :o)

Iluzje



Czy istnieją przepisy na odkrycia matematyczne?

- Testament Gaussa. *n -kąąt foremny jest konstruowalny cyrklem i linijką dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą o postaci $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, gdzie p_i są różnymi pierwszymi liczbami Fermata.*
 - 17 problem Hilberta. *Czy każda dodatnio określona funkcja wymierna jest sumą kwadratów funkcji wymiernych?*
 - Droga do liczb p -adycznych.
-
- IM a analogia oraz uogólnianie w matematyce.
 - IM w łączeniu faktów i metod z różnych dyscyplin.
 - Co począć ze zdaniami nierozstrzygalnymi?
 - Co stałoby się z matematyką, gdyby znikła IM, a pozostała jedynie dedukcja?

Skąd bierze się IM?

- Eksperymenty myślowe: rozumne kleksy, struktury nieprzemienne, matematyka Braci Mniejszych.
- Tajemnica skuteczności matematyki. Inspiracje z innych nauk.
- Kulturowe uwarunkowania matematyki. *Życie matematyczne dzikich.*

Davis & Hersh argumentują na rzecz tezy, że IM jest nabywana przede wszystkim w nauczaniu szkolnym.

- Stadia rozwoju intelektualnego.
- Trudności w uczeniu się matematyki.
- Jak układać programy nauczania matematyki?

Koniec

- W literaturze przedmiotu nie ma definitywnej odpowiedzi na pytanie czym jest intuicja matematyczna.
 - Z całą pewnością nie można jednak zredukować działalności matematyków do przeprowadzania wyłącznie dedukcji.
-
- Uprzejmie dziękuję Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu za zaproszenie do wygłoszenia tego odczytu.