W Ł O D Z I M I E R Z   L A P I S

Matematyka dla laika

(z wprowadzeniem z zakresu logiki i metodologii nauk)

Podręcznik podstaw matematyki dla humanistów
(aby nie byli ignorantami)

"Nie przejmuj się, jeśli masz problemy z matematyką.
Zapewniam Cię, że ja mam jeszcze większe."
Albert Einstein

INNE SENTENCJE

Od Mentum (z http://forum.liceum36.pl/):

1) Matematyka jest wiedzą, w której, jeżeli się wie, to się wie, że się wie.
2) "Czy człowiek nie umiejący liczyć, który znalazł czterolistną koniczynę, ma też prawo do szczęścia?"
3) "więcej potu na ćwiczeniach, mniej goryczy na pisemnej maturze" .
4) Przysłowie mówi :"Człowiek uczy się na błędach", ale dodaje: "Życie jest krótkie i lepiej uczyć się na cudzych błędach"

Marcina Wójcika, autora skeczy i założyciela kabaretu Ani Mru-Mru, matura 1993
"tylu baranów przede mną zdawało, to i mi też się jakoś uda".

Opanowanie tak trudnej dziedziny jak matematyka
daje prawo do wkraczania na inne obszary.
/B. A. Russell/

SPIS TREŚCI

Spis treści
Oznaczenia

I. PRELIMINARIA
1. Wprowadzenie
2. Wstęp
3. Logiczne podstawy matematyki:
   A. rachunek zdań
   B. rachunek kwantyfikatorów
4. Metodologiczne podstawy matematyki

II. ZBIORY I LICZBY
5. Teoria mnogości
6. Algebra zbiorów
7. Nieelementarna arytmetyka liczb naturalnych (teoria Peano)

III. RELACJE
8. Relacje – podstawowe informacje
9. Własności formalne relacji
10. Równoważność
11. Porządek i częściowy porządek
12. Funkcja

IV. ROZSZERZENIE
13. Moce zbiorów
14. Algebra Boole'a i izomorfizm systemów
15. Elementy lingwistyki matematycznej i teorii automatów (w przygotowaniu)
16. Elementy mereologii (w przygotowaniu)

OZNACZENIA

W opracowaniu tym:

- część materiału ujęta została w prostokątne ramki z cieniem, dla lepszego uwypuklenia materiału typu „metodyka matematyka", który „nie zmieścił się" w rozdziale „Metodologiczne podstawy matematyki"

- część materiału ujęta została w prostokątne ramki z zaokrąglonymi rogami, dla lepszego uwypuklenia materiału wtrąconego (spoza głównego wątku rozważań), a nie będącego kategorii „metodyka matematyka"

Dodatkowo:

1) Znaki ☺ oznaczać będziemy żart / dowcip (zawsze się przyda)

2) Znakiem ! – wytłumaczenia pojęć matematycznych

3) A znakiem ? – ważne rzeczy do zapamiętania (również spoza matematyki)

4) Dla często stosowanego w tekście wyrażenia „wtedy i tylko wtedy, gdy" – będziemy stosować skrót „witw gdy"

I. PRELIMINARIA

1. Wprowadzenie, czyli dlaczego warto uczyć się matematyki

11 listopada 2001 r. w tygodniku „Wprost” ukazał się tekst Krzysztofa Łozińskiego pt. „Lek na ignorancję; Dlaczego maturzyści powinni zdawać matematykę”, który napisał w nim:

Kilkanaście lat temu uczestniczyłem w spotkaniu z kilkunastoma wykształconymi Chińczykami z Singapuru i Hongkongu, kilkoma Hindusami, Japończykami oraz kilkoma Polakami. Oczywiście wszyscy rodacy legitymowali się wyższym wykształceniem i uważali się za światłych ludzi. W pewnym momencie jeden z nich powiedział: „Nigdy nie mogłem zrozumieć matematyki, ale na szczęście nie była mi do niczego potrzebna”. U Chińczyków, Hindusów i Japończyków zdanie to wywołało szok. Ludzie ci, a zwłaszcza Japończycy, uważają, że przyznanie się do niemożności opanowania matematyki na poziomie szkolnym kompromituje każdego, kto chce uchodzić za światłego człowieka.

Minister Krystyna Łybacka tłumaczyła tymczasem dziennikarzom, że „wprowadzenie obowiązkowego egzaminu z matematyki w szkole ponadgimnazjalnej skończy się katowaniem humanistów matematyką”. Zacytowanie tej opinii przez prasę amerykańską groziłoby powstaniem nowych polish jokes [niewybredne amerykańskie żarty o Polakach – W.L.]. *Łatwo sobie wyobrazić na przykład taki dowcip:*

„Co mówi Polak, kiedy nie umie obliczyć podatku VAT?”.
„Jestem humanistą” – tak brzmiałaby prawidłowa odpowiedź. ☺

Problem ujawniony przez minister edukacji jest znacznie poważniejszy niż tylko to, czy na maturze ma być egzamin z matematyki, czy nie. Konieczne jest radykalne przewartościowanie pojęć: ***ktoś, kto nie może opanować szkolnej matematyki, to*** *nie humanista, lecz* ***ignorant***. [wytłuszczenie moje – W.L.]

Wbrew powszechnym wyobrażeniom matematyka w szkole nie służy jedynie do tego, byśmy nauczyli się liczyć. Gdyby tak było, wystarczyłoby kupić każdemu kalkulator zamiast sterty podręczników. Matematyka uczy logicznego myślenia i dyscypliny naukowej. Ich brak widać w produkcji naukowej humanistów i przedstawicieli nauk społecznych. Dominują prace bez tezy i dowodu, czyli bezwartościowe. (...)

Żaden kraj, a tym bardziej kraj na dorobku, nie może sobie pozwolić na ignorowanie matematyki i związanej z nią logiki. W takim kraju nie ma miejsca dla „naukowców” szukających wartościowości helu, obalających zasady termodynamiki czy przeprowadzających operacje statystyczne na trzech liczbach. Usunięcie matematyki z egzaminu maturalnego jest więc uderzeniem w polską gospodarkę, uderzeniem w społeczeństwo i jego przyszłość.

Tekst ten zawiera wiele wątków. Wśród nich przewija się:

1) tłuczenie się z nieznajomości matematyki słowami „jestem humanistą” świadczy o kompletnej ignorancji wypowiadającej te słowa osoby,
2) warto uczyć się matematyki, gdyż nie dość, że przydaje się różnych dziedzinach wiedzy, to jeszcze odpowiednio rzeźbi bruzdy w naszym mózgu.

Zobacz 20 najważniejszych powodów dlaczego warto zdawać matematykę na maturze, przytoczonych za rektorem Politechniki Gdańskiej, prof. Januszem Rachoniem (podanych gdy matura z matematyki jeszcze nie była obowiązkowa):

1. Matura z matematyki jest furtką do kariery zawodowej.
2. Matura z matematyki daje większe możliwości na znalezienie atrakcyjnej pracy.
3. Matura z matematyki decyduje w dużej mierze o przyszłym sukcesie zawodowym.
4. Matura z matematyki decyduje o naszym być albo nie być na europejskim, a nawet .światowym rynku pracy.
5. Matura z matematyki daje przeciętnie wyższe zarobki w przyszłym życiu zawodowym.
6. Matura z matematyki znacząco zmniejsza szanse na zasilenie szeregów bezrobotnych z wyższym wykształceniem.
7. Matura z matematyki zmniejsza groźbę przymusowej emigracji zarobkowej po skończeniu studiów.
8. Matura z matematyki dowodzi rzeczywistej dojrzałości w kształtowaniu swojej przyszłości.
9. Matura z matematyki sprawia, że studia techniczne są w zasięgu naszych możliwości.
10. Matura z matematyki ułatwia studiowanie na kierunkach ścisłych i technicznych.
11. Matura z matematyki daje świadectwo analitycznego sposobu myślenia przydatnego wszędzie, niezależnie od rodzaju pracy.

12. Matura z matematyki daje motywację do nauki samej matematyki.
13. Matura z matematyki wyzwala od zahamowań w kontaktach z matematyką na co dzień.
14. Matura z matematyki pozwala lepiej radzić sobie w życiu codziennym.
15. Matura z matematyki dowodzi umiejętności logicznego rozumowania i jasnego formułowania myśli.
16. Matura z matematyki chroni przed analfabetyzmem matematycznym.
17. Matura z matematyki nie pozwala na manipulowanie nami przez środki masowego przekazu i polityków.
18. Matura z matematyki daje poczucie bezpieczeństwa w obcowaniu z otaczającym nas światem liczb.
19. Matura z matematyki daje trzeźwe spojrzenie na wszechobecne dane statystyczne.
20. Matura z matematyki, pobudzając do myślenia, wybudza z letargu intelektualnego.

To, co daje Ci matura z matematyki, daje Ci i sama matematyka.

Tak jak zapewne nie wyobrażasz sobie nieznajomości języka ojczystego, czy co najmniej jednego z międzynarodowych języków obcych – tak samo jak widzisz trudno jest sobie wyobrazić wykształconym osobom kogoś, kto jest ignorantem matematycznym.

Przy tym, co tu bardzo ważne!, matematyka przydaje się nie tylko matematykom (by gnębić humanistów) czy adeptom nauk ścisłych czy technicznych, ale ma zastosowanie w KAŻDEJ dziedzinie wiedzy. Pomyśl sobie choćby o lekarzu, *który w ciągu dwudziestu minut wyraża się o planowanym zabiegu, że:*
a) wiąże się z ryzykiem jak jeden do miliona,
b) jest w 99% bezpieczny,
c) zazwyczaj przebiega bez komplikacji,
to na ile lekarz ten powinien być wiarygodny dla pacjenta w podejmowaniu decyzji, jakie mogą zaważyć na jego zdrowiu czy nawet życiu? A może kolejnym krokiem będzie zapisanie na recepcie 10% roztworu pewnego leku zamiast 0,1%? Czy takie świadectwo matematycznej ignorancji należy przyjąć jako normę? (tekst z artykułu Barbary Ćwikieł pt. „Czy warto zdawać matematykę na maturze”)

Wtedy – niestety – jak najbardziej na miejscu jest żart, który otrzymałem w przesłanym mi e-zinie (eHumor.pl, numer 125/2002):

> *Spotykają się dwaj kumple ze studiów.*
> *Jeden do drugiego:* ☺
> *"Wiesz co Jasiu, jak sobie pomyślę jaki ze mnie inżynier, to się k* boję iść do lekarza..."*

W kwestii nauczania / uczenia się matematyki nie chodzi więc o to, by iść na łatwiznę, ale by zdobywać wiedzę i umiejętności. Jak widać, „czkawką” może to się odbić na każdym z nas.
Do tego, Ty Studencie, spójrz na matematykę przyjaznym okiem i zgłębiaj (wyselekcjonowane tu dla Ciebie) jej fragmenty, choćby bardzo przyziemnie „egoistycznie” myśleć o sobie samym:
1. żeby móc zaliczyć ten przedmiot (co jest podstawą do ukończenia roku, a to z kolei do ukończenia studiów),
2. żeby nie mieć etykietki „ignorant”,
3. żeby radzić sobie na innych przedmiotach i w ogóle w życiu.

Aby jeszcze bardziej Cię „nagrzać” na matematykę, poniżej przytaczam jeszcze (korelujący z listą 20 powodów prof. Rachonia) tekst Marka Legutko, który znalazłem w Przeglądzie Tygodniowym z 7 kwietnia 1999 r. (s. 20):

Matematyka rozwija szczególnie umiejętności:
1. *rozpoznawania, czy dany obiekt spełnia określone kryteria (przy posługiwaniu się definicjami);*
2. *klasyfikowania obiektów (przy formułowaniu definicji);*
3. *argumentowania, korzystając z danych faktów (przy posługiwaniu się twierdzeniami);*
4. *dostrzegania ogólnych prawidłowości, podobieństw i analogii dotyczących danych obiektów (przy formułowaniu hipotez, wniosków i ogólnych zasad);*
5. *wskazywania i uznawania konsekwencji przyjętych założeń (przy logicznym wnioskowaniu);*
6. *określania instrukcji i kroków postępowania;*
7. *postępowania według danych reguł;*
8. *opisywania danych obiektów i procesów za pomocą liczb, funkcji i figur geometrycznych (tzw. matematyzowanie);*
9. *korzystanie z danych ilościowych i jakościowych opisanych w różny sposób (przy interpretacji danych statystycznych);*
10. *posługiwania się językiem w sposób jasny, zwięzły, właściwy dla danej sytuacji (matematyka sprzyja kształtowaniu szacunku dla języka).*

Ucz się więc matematyki! Marek Piekarczyk (lider heavy-metalowego zespołu TSA) powiedział swego czasu (wypowiedź z artykułu „Wszyscy muszą” z „Gazety na Mazowszu” - wkładki do „Gazety Wyborczej” z 31VIII – 1 IX 1991 r.):

Ludzie! Najpiękniejsza rzecz na świecie to uczyć się i poznawać świat. Róbcie wszystko, aby wam belfry tego nie obrzydziły. Jak ktoś przestanie się uczyć, poznawać, to już koniec, starość. Już nic nowego nie zobaczy. Nawet jak się ma te gówniane trójki, nie przejmować się, robić swoje, i kochać tę matmę niezależnie od baby która jej uczy i chce ci ją obrzydzić.

Być może myślisz sobie: „No dobrze, ale jak ja sobie z tym poradzę, jeśli jestem ignorantem?!”. Po prostu spróbuj przekonać się do matematyki (jeśli jeszcze to nie nastąpiło po przeczytaniu tych „paru” słów mego wprowadzenia).

Aby zachęcić Cię jeszcze bardziej – na koniec jeszcze kilka wypowiedzi znanych osób.

Były minister edukacji - prof. Mirosław Handke – swego czasu powiedział:

1. *Matematyka jest piękna, tam jest czysta logika.*
2. *Nie ma ludzi, którzy nie są matematycznie uzdolnieni, są tylko ci, którzy mieli pecha i trafili na złego nauczyciela lub przespali część lekcji.*

Z kolei w „Gazecie Wyborczej” z 12-13 VI 2004 r., w artykule „O czym nie mówi szkoła” (str. 19-20), znajdziemy następujące ciekawe wypowiedzi nt. nauczania matematyki:

1) Prof. Łukasz Andrzej TURSKI:
Uważam, że każdy powinien znać matematykę. Nieszczęścia, które spotkały cywilizacje, związane były z tym, że społeczeństwa głupiały. I to głupiały na własne życzenie, głównie dlatego, że nie znały matematyki.

2) Danuta ZAGRODZKA:
W czasach, w których co pięć minut pojawiają się jakieś nowe przedmioty czy nowe technologie, bez matematyki i nauk ścisłych daleko nie zajdziemy. Zostaniemy w tyle, a świat będzie nam dalej uciekał.

3) Prof. Wiktor OSIATYŃSKI:
Jest dla mnie oczywiste, że człowiek, który kończy szkołę, powinien mieć elementarne umiejętności logicznego myślenia, wiedzy matematycznej i umiejętność posługiwania się językiem matematycznym na niezbyt skomplikowanym poziomie.

2. Wstęp

Książka ta została napisana celem przybliżenia matematyki studentom początkowych lat kierunków humanistycznych. Ze względu na ograniczoność czasową takiego kursu na uczelni, również zawarty w niej materiał został poważnie ograniczony. Z biegiem lat zamierzam go jednak rozszerzyć, tak aby poszczególni wykładowy – którzy będą chcieli z niej korzystać – mieli możliwość wybierania tych partii materiału, które uznają za najbardziej pożądane dla swoich studentów (jak sądzę, już zapewne tak jest z tą edycją, jako że zawiera ona więcej materiału niż można zrobić w ciągu tradycyjnego 30-godzinnego, jednosemestralnego kursu; w przypadku kursu dłuższego, oczywiście można wybrać więcej materiału).

Niniejsze wydanie składa się z czterech części. W pierwszej z nich, zatytułowanej „**PRELIMINARIA**".

1. Zaczęliśmy od **wprowadzenia**, w którym dowiedziałeś się już, że WARTO SIĘ UCZYĆ MATEMATYKI.
2. We **wstępie** (czyli teraz) znajdziesz opis zawartości tej książki i wytłumaczenie dlaczego akurat takie (a nie inne) partie materiału się w niej znalazły.

W następnych dwóch rozdziałach omówimy warsztat matematyka.

3. W pierwszym z nich omówmy **logiczne podstawy matematyki**, które stanowią odpowiednio dwa rachunki – **rachunek zdań** i **rachunek kwantyfikatorów**.
4. W następnym rozdziale zajmiemy się **metodologicznymi podstawami matematyki**, gdzie omówimy szereg podstawowych pojęć, z którymi spotykamy się mając kontakt z matematyką.

Wiedząc już, jak się poruszać po terenie matematyki, na właściwy jej podbój wyruszymy w kolejnych częściach niniejszej książki.

W części II, zatytułowanej „**ZBIORY I LICZNY**":

5. w rozdziale „**teoria mnogości**" omówimy teorię mnogości, zajmującą się zbiorami, gdzie dodatkowo w praktyczny sposób zaznajomimy się z zasadami budowy teorii formalnej,
6. wiedząc już jak zbudowana jest teoria mnogości, w następnym rozdziale („**algebra zbiorów**") przejdziemy do jej praktycznego wykorzystania w opisie zbiorów i wykonywaniu operacji na nich,
7. w rozdziale „**nieelementarna arytmetyka liczb naturalnych (teoria Peano)**" dowiesz się jak wykorzystać teorię mnogości do konstrukcji zbioru liczb naturalnych, nauczysz się dodawać i mnożyć i dowiesz się, co to znaczy „działać indukcyjnie",

W III części, zatytułowanej „**RELACJE**":

8. w rozdziale „**relacje – podstawowe informacje**" dowiesz się, że Kartezjusza należy cenić nie tylko za wprowadzenie do matematyki „kartezjańskiego układu współrzędnych", lecz również za wprowadzenie „iloczynu kartezjańskiego"; dowiesz się co to jest relacja (jeśli nie studiowałeś wcześniej matematyki, jestem skłonny założyć się, że tego nie wiesz!) oraz jak można ją scharakteryzować;
9. w rozdziale „**własności formalne relacji**" oraz jak można scharakteryzować dowolną relację, jak również w jaki sposób można reprezentować dane (m.in. w oparciu o grafy, którymi zajmuje się „matematyka dyskretna" /ciekawa nazwa, nieprawdaż?/, ale póki co na razie jej nie rozwinę, gdyż w myśl jednej z zasad dydaktyki, „lepiej nie dopowiedzieć niż przegadać", a zaintrygowany czytelnik zapewne sam zacznie szukać jej wyjaśnienia),

   Kolejne trzy rozdziały

10. „**równoważność**",
11. „**funkcja**"
12. i „**porządek i częściowy porządek**"

poświęcone są szczególnym rodzajom relacji, a omówione w nich zagadnienia (j. np. klasy abstrakcji, zasada abstrakcji, bijekcja, surjekcja, iniekcja, i inne) powinny Cię szczerze zainteresować (na pewno zaintrygują!), a jeśli „sumy, iloczyny i produkty uogólnione" nie odstraszą Cię – to już będzie bardzo dobrze!,

Po takiej już – sporej – porcji matematyki, w IV (ostatniej już) części książki, zatytułowanej „**ROZSZERZENIE**":

13. w rozdziale zatytułowanym „**moce zbiorów**", zmierzymy się z badaniem ich liczebności, dochodząc przy tym do wielu ciekawych spostrzeżeń (np., że liczb całkowitych jest tyle samo, co naturalnych, choć naturalne, to zaledwie ich „podzbiór właściwy", czy też że istnieje nieskończenie wiele rodzajów nieskończoności) oraz poznamy ciekawe określenia (np. liczby /a nie błędy!/ kardynalne, continuum, czy alef zero),

14. w rozdziale „**algebra Boole'a**" zapoznamy się z tym działem matematyki (cóż za piękny truizm!), a teorię tę omawiamy tu ze względu na jej izomorfizm z innymi systemami z zakresu logiki czy też matematyki (co to jest izomorfizm też się dowiesz z tej książki).

Truizm – banalna prawda, na którą „nie warto strzępić sobie języka"

?

15. w następnym rozdziale omówimy „**elementy lingwistyki matematycznej i teorii automatów**", aby studenci autentycznie wiedzieli, o czy mówią i rozumieli to, co z kolei się do nich mówi.
    Tu dygresja – cytat z książki (Michael J. Gelb, „Myśleć jak Leonardo da Vinci; siedem kroków do genialności na co dzień", przełożył Piotr Turski, Dom Wydawniczy REBIS, Poznań 2002, s. 99):

    > *(...) Leonardo* [da Vinci – W.L.] *ze smutkiem zauważył, że przeciętny człowiek*
    > *„patrzy, nie widząc, słucha, nie słysząc, dotyka, nie czując, je, nie smakując,*
    > *porusza się bez świadomości swojego ciała, wdycha, nie zdając sobie sprawy*
    > *z zapachu ani aromatu, i wreszcie mówi, lecz nie myśli".*
    > *Teraz, gdy minęło już kilka stuleci, opinia ta brzmi jak zachęta do doskonalenia zmysłów, a przy okazji –rozwijania umysłu i wzbogacania doświadczeń.*

16. dopełnienie kursu, na wyraźne życzenie prof. dra hab. Jerzego Bańczerowskiego, stanowi rozdział „**elementy mereologii**", czyli nauki opisującej świat za pomocą pojęć „bycia częścią" i „następstwa czasowego" (niezmiernie przydatny dla humanistów – językoznawców).

UWAGA!
Paragrafy 15. i 16. jako opracowane zostaną dodane dopiero w następnych wydaniach niniejszego podręcznika!

Przez cały kurs przewijać się będzie „zagadnienie metod reprezentacji danych", co jak najbardziej jest tu na miejscu, gdyż matematyka jest właśnie narzędziem służącym nam do opisu otaczającej nas rzeczywistości

Widzisz więc zapewne, że czeka nas ogrom pracy, ale – jak podałem we wprowadzeniu – z moją i Bożą pomocą na pewno dasz sobie radę, oczywiście, jeśli i sam się przyłożysz do pracy, gdyż – jak mi to ktoś kiedyś powiedział – *są tylko nie-uki i samo-uki*, czyli innymi słowy, nikt nikogo nie jest w stanie na siłę niczego nauczyć, jeśli *de facto* ten sam się do tego nie przyłoży.

Niniejsza książka (rozdziały 5 – 10 i 12 – 13) powstała w oparciu o moje notatki z wykładu ze „wstępu do matematyki" prof. Czajsnera na kierunku „matematyka" UAM w Poznaniu, w których to zajęciach w roku akademickim 1985/86 miałem przyjemność uczestniczyć.

Dodam, że wiele pojęć i zagadnień z zakresu matematyki znajdziesz na http://pl.wikipedia.org/wiki/Podstawowe_zagadnienia_z_zakresu_matematyki. Inne podręczniki z matematyki (szczerze polecam):

- do przedmiotu „wstępu do matematyki" znajdziesz na www.math.uni.wroc.pl/~kraszew/sources/Main.pdf
- a odnoszące się głównie do logiki:
  - na www.cyf-kr.edu.pl/~atolszad/dl/wyklady_z_logiki_dla_roku_pierwszego_v6.pdf
  - i na www.republika.pl/logikadlaopornych .

Książka ta jest z serii „… dla laika".

LAIK (zgodnie ze „Słownikiem wyrazów obcych" Tokarskiego), to (w stosownym u nas znaczeniu) „człowiek nie znający się na danej rzeczy, niekompetentny w danej dziedzinie; dyletant".

?

Drogi czytelniku. Proszę, nie przyjmuj tego określenia do Siebie jako pejoratywnego

Pejoratywny – w negatywnym znaczeniu

?

lecz jedynie jako wpasowanie się w swój poziom, wiedząc, że gdybyś zaczął czytać mądre książki, napisane bardzo mądrym językiem, to zapewne (a może i nawet na pewno)

„zapewne" pisze się razem, a „na pewno" oddzielnie

!

nic (lub prawie nic) byś z niej nie zrozumiał. Po co więc by Ci ona była potrzebna? A tak – proszę bardzo. Masz książkę dla siebie „jak ulał”. Ot, i cała „filozofia”.
Ja – wcale nie będąc laikiem – mentalnie wszedłem w skórę laika, aby móc do niego (=do Ciebie) przemówić, i to w ten sposób, abyś mógł mnie zrozumieć.

3. Logiczne podstawy matematyki

Tak jak matematyka jest królową nauk, tak królową matematyki jest **logika**. Najogólniej można powiedzieć, że jest ona nauką zajmującą się metodologią badania prawdy(a jako że dokonuje się tego poprzez dowodzenie – jest ona nauką o dowodzeniu). Składa się ona z wielu działów, spośród których pokrótce omówimy tylko dwa, które stanowią podstawę do dalszych naszych rozważań. Są to konkretnie dwa „rachunki": **rachunek zdań** i **rachunek predykatów** (często zwany też **rachunkiem kwantyfikatorów**, choć „predykat" i „kwantyfikator" to określenia odnoszące się do czegoś innego). Poniżej rachunki te omawiamy JEDYNIE POKRÓTCE, pamiętając, że książka ta nie nazywa się „logika dla laika", lecz „matematyka dla laika" (choć i o napisaniu „Logiki dla laika" poważnie myśli autor niniejszego opracowania).

A. RACHUNEK ZDAŃ

W logice zajmujemy się jedynie tymi zdaniami języka naturalnego, o których można orzec, że są prawdziwe lub że są fałszywe. Zdaniami w sensie logicznym są więc jedynie zdania orzekające (tak twierdzące, jak i przeczące), a nie są nimi ani pytania, ani polecenia. O zdaniu „Księżyc świeci światłem odbitym", możesz orzec (w oparciu o swój zasób wiedzy), że jest ono prawdziwe, a o zdaniu „najstarszy człowiek żyjący na świecie ma 300 lat", że jest fałszywe. Z kolei nie sposób jest orzec prawdziwość zdania „Co jutro Jasiu Kowalski robi po obiedzie?" (pytanie), czy też zdania „Podejdź do mnie!" (zdanie rozkazujące).

W potencjalnym sformułowaniu „zbadać prawdziwość zdania",
kryje się polecenie „orzec, czy jest ono prawdziwe, czy też fałszywe".

?

O zdaniach prawdziwych będziemy mówić, że mają wartość logiczną 1, a o zdaniach fałszywych – że mają wartość logiczną 0. (W niektórych podręcznikach można spotkać też oznaczenia *T* w przypadku zdań prawdziwych /z języka angielskiego, od *true* = *prawda*/ oraz *F* w przypadku zdań fałszywych /z języka angielskiego, od *false* = *fałsz*/).

Dotychczas mieliśmy do czynienia jedynie ze zdaniami prostymi. O prawdziwości tych zdań orzekaliśmy wchodząc w semantykę (znaczenie) i odwołując się do własnego zasobu wiedzy (czyli orzekając, „czy jest tak, jak mówi to zdanie, czy też nie?"). Na dobrą sprawę, ciekawie robi się dopiero w przypadku zdań złożonych. Logicy wyróżniają 4 podstawowe typy takich zdań, budowanych w oparciu o 2 zdania proste.

Na „pierwszy ogień" weźmy na przykład zdanie „Mam masę roboty i nie wiem co robić". Składa się ono z dwóch zdań prostych: „Mam masę roboty" i „Nie wiem co robić", połączonych spójnikiem „i". Z kolei w przypadku zdania „Jestem bogatym mężczyzną", które choć „na pierwszy rzut oka" jest zdaniem prostym, to jednak dla logika jest ono tej samej struktury, co poprzednie. *De facto* kryje ono bowiem w sobie 2 zdania proste: „Jestem bogaty" i „Jestem mężczyzną", gdyż o tych dwóch faktach orzeka. O zdaniach tego typu (a więc mówiących, że „zachodzi tak i tak"), będziemy mówić, że są one **koniunkcjami**, a „i" (występujące w pierwszym z nich) nazwiemy **spójnikiem koniunkcji**. Ponieważ drugie z omawianych tu zdań też jest koniunkcją, więc i w nim występuje spójnik koniunkcji, lecz w postaci niejawnej. Oczywiście, w języku naturalnym mamy jeszcze wiele innych spójników koniunkcji, j. np.: *jak także*, *jak również*, *tudzież*, *oraz*, *tak ... jak i ...*, *zarówno ... i ....* itp. Dodać do tego trzeba jeszcze spójniki *a*, *zaś* i *z kolei*, łączące zdania pozostające ze sobą w opozycji (np. „Ja jestem tu, a ty jesteś tam").

Zauważmy przy okazji, że zdanie „Jan jest pospolitym złoczyńcą" nie głosi wcale, że „Jan jest pospolity" i że „Jan jest złoczyńcą", a więc, że jest to koniunkcja dwóch zdań prostych. Określenie „pospolity złoczyńca" jest bowiem związkiem frazeologicznym, a więc wskazuje na „złoczyńcę", który wcale nie musi być osobą „pospolitą". Nie należy więc tu (i nie tylko tu!) działać mechanicznie, lecz zachowując uwagę działać rozważnie.

W rachunku zdań do oddawania zdań prostych używa się tzw. zmiennych zdaniowych, które oznaczamy małymi literami (a, b, c, ... lub częściej p, q, r, ...). Z kolei do połączenia ich w koniunkcję używamy tzw. **spójnika zdaniowego koniunkcji** (czy po prostu: **spójnika koniunkcji**) oznaczonego symbolem „$\wedge$" (jednego, uniwersalnego, nie bacząc na ukazane wyżej bogactwo jego oddania w języku naturalnym). Każde z przytoczonych w poprzednim akapicie zdań-koniunkcji zapiszemy więc w postaci: $p \wedge q$, gdzie w przypadku zdania pierwszego p = „Mam masę roboty", q = „Nie wiem co robić", a $p \wedge q$ jest **formułą rachunku zdań** (FRZ) będącą **schematem całego rozpatrywanego zdania**. Jeżeli zdanie jest koniunkcją, to o jego schemacie też powiemy że jest **koniunkcją**.

W analogiczny sposób buduje się zdania innych typów. Obrazuje to poniższa tabela, w której dodatkowo:

- ze względu na zachowanie jej komplementarności, dołączono omówioną już koniunkcję,
- a nadto – z uwagi na względną częstość stosowania (i możliwość pomylenia z alternatywą) – dołączono dyzjunkcję (inaczej: alternatywę wyłączającą).

Nazwa zdania	Spójnik zdaniowy	Sposób użycia spójnika zdaniowego w FRZ	Nazwy dla występujących tu p i q	Przykładowy (najczęściej stosowany) sposób odczytu FRZ	Przykładowe oddania spójnika zdaniowego w języku naturalnym	Przykład odpowiedniego zdania w języku naturalnym przy p = „Mam masę roboty”, q = „Nie wiem co robić”
koniunkcja	$\wedge$	$p \wedge q$	**czynniki**	p i q	a, zaś; tudzież, i, jak również, oraz, tak ... jak i ..., zarówno ... i ....;	Mam masę roboty i nie wiem co robić.
alternatywa	$\vee$	$p \vee q$	**składniki**	p lub q	lub, bądź, albo	Mam masę roboty lub nie wiem co robić.
implikacja	$\rightarrow$ i $\Rightarrow$	$p \rightarrow q$	**odpowiednio: lewa i prawa strona implikacji**	Jeśli p, to q	jeśli..., to ...; skoro..., zatem... ; o ile tylko .... wówczas ...; ponieważ..., zatem...	Jeśli (w tym przypadku raczej: gdy) mam masę roboty, to nie wiem co robić
równoważność	$\leftrightarrow$ i $\Leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	**odpowiednio: lewa i prawa strona równoważności**	p wtedy i tylko wtedy, gdy q	wtedy i tylko wtedy, gdy	Mam masę roboty wtedy i tylko wtedy, gdy nie wiem co robić.
dyzjunkcja (alternatywa wyłączająca)	$\dot{\vee}$	$p \dot{\vee} q$	**składniki**	Albo p albo q	Albo ... albo ...	Albo mam masę roboty albo nie wiem co robić.

Uwagi i wnioski:

1) sposób wyrażania w języku naturalnym musi być dopasowany do zdań składowych (zob. w powyższej tabeli przykład zdania dla implikacji);
2) spójniki zdaniowe implikacji i równoważności podane są w dwóch wariantach. Na co dzień stosujemy jednak te „z pojedynczą kreską poziomą”, gdyż wymagają mniej wysiłku przy pisaniu (nie jest to wcale żart, gdyż autentycznie taka jest przyczyna takiego postępowania!);
3) znaczek dyzjunkcji, to znaczek alternatywy rozszerzony o kropkę między ramionami „v-ki”.

Teraz sprawa najważniejsza. Jaką wartość logiczną mają zdania złożone? Ponieważ w tej kwestii ludzka intuicja jest często zawodna, zatem w naukach formalnych, jakimi są logika i matematyka (aby uniknąć nieporozumień) potrzeba tego typu kwestie ściśle określić.

Zależności te ustala następująca **tabela prawdziwościowa** (dla formuł ze **spójnikami dwuargumentowymi**)

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\dot{\vee}$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*

W pierwszych jej dwóch kolumnach podano wszystkie możliwe kombinacje podstawień *0* i *1* za p i q. W następnych kolumnach oddane są wartości wyrażeń postaci „p – spójnik zdaniowy – q”. Przypatrzmy się im z bliska. Najpierw pokrótce, a następnie szerzej:

1) koniunkcja jest **prawdziwa** witw gdy oba jej **czynniki** są prawdziwe. (użycie tu zwrotu „wtedy i tylko wtedy, gdy” oznacza, że wtedy jest tak jak mówimy, a w pozostałych przypadkach tak nie jest, czyli że wówczas wyrażenie to przyjmuje wartość logiczną zero, czyli jest fałszywe).
2) Alternatywa jest **fałszywa** witw gdy obydwa jej **składniki** są fałszywe.
3) Implikacja jest **fałszywa** witw gdy jej **poprzednik** jest prawdziwy, a (mimo to) jej **następnik** jest fałszywy. Jeśli więc jej poprzednik jest fałszywy, to (bez względu na wartość jej następnika) jest prawdziwa. Oznacza to, że „z fałszu wynika (lub: można wyprowadzić) dowolne (a więc zarówno prawdziwe, jak i fałszywe) zdanie”.

4) Równoważność jest **prawdziwa** witw gdy obie jej **strony** (tak **lewa**, jak i **prawa**) mają tę samą wartość logiczną.
5) Dyzjunkcja jest **prawdziwa** witw gdy obie jej **strony** (tak **lewa**, jak i **prawa**) mają tę samą wartość logiczną

Omówmy szerzej te typy zdań.

1) Ponieważ koniunkcja mówi „jest tak i tak", więc aby była spełniona – musi być tak pierwsze „tak", jak i drugie „tak". Aby koniunkcja nie zachodziła (nie była spełniona) - musi zachodzić jedna z pozostałych trzech sytuacji (tj. nie zachodzić co najmniej jedno z dwu powyższych „tak").. W życiu codziennym często zamiast „lub" używa się „i". Np. zdanie „Na imprezę zaprosiłem kupli i dziewczyny", logik-formalista wypowiedziałby: „Na imprezę zaprosiłem kumpli lub dziewczyny". Moim jednak zdaniem, powinniśmy trzymać się ustalonych konwenansów, i w życiu stosować reguły życiowe, a w logice – logiczne.
2) Wiele osób wartościuje (na co dzień – w życiu, ale niestety i w logice) alternatywę tak, jak podaje tabela dla dyzjunkcji. Niestety, jest to błędem. Alternatywa zachodzi (= ma wartość logiczną *1*, jest prawdziwa) nie tylko wtedy, gdy jeden z składników jest prawdziwy, a drugi fałszywy, czy też na odwrót, ale też w (newralgicznej w tym opisie) sytuacji, gdy oba jej składniki są prawdziwe. Przypatrzmy się zdaniu: „do kina mogą iść ci, którzy mają bilet lub dysponują 20 złotymi". Kto może iść do kina? Wszyscy oprócz tych, co nie mają biletu, ani wystarczająco dużo pieniędzy. Tak więc są to:
   – ci, co mają tylko bilet,
   – ci, co mają tylko pieniądze,
   – jak również ci, co maja tak bilet, jak i pieniądze (ale wtedy - rzecz jasna - pieniędzy nie muszą już wykorzystywać).

   Takie jest właśnie znaczenie alternatywy.
3) W przypadku dyzjunkcji, którą czytamy za pomocą spójnika „albo... albo ..." (ewentualnie „... albo ...", gdy nie wprowadza to nieporozumień), sprawa ma się, jak w przypadku pewnego przepisu na ciasto, w którym znajduje się zdanie: „dodaj kostkę masła albo margaryny", gdzie oczywiście wypiek się uda tylko wtedy, gdy w cieście znajdzie się kostka jednego (dokładnie jednego!) z wymienionych tłuszczów. A więc albo 1 kostka masła albo 1 kostka margaryny, a nie po jednej kostce masła i margaryny (jak również nie bez żadnego z tych tłuszczów).
4) Z kolei równoważność orzeka, że obie jej strony muszą mieć identyczną wartość logiczną (tj., że musi być *1* z *1* lub *0* z *0*), a gdy jest inaczej (tj. gdy mamy zdania o różnej wartości logicznej) – wówczas równoważność nie jest spełniona lub (innymi słowy) jest fałszywa.

> Niebywale istotne jest rozróżnienie znaków $\leftrightarrow$ i $\Leftrightarrow$. Co prawda, w przedostatniej tabeli zostały podane jako wymienne, to jednak owa wymienność nigdy nie jest stosowana przez tego samego tzw. porządnego logika! Po prostu część logików w tej sytuacji, w jakiej ów znak równoważności został użyty w owej tabeli, używa go w postaci $\leftrightarrow$, a część w postaci $\Leftrightarrow$, i są w tym konsekwentni. My przyjmiemy, że w formułach będziemy używać go w postaci $\leftrightarrow$, a znaczek $\Leftrightarrow$ służyć nam będzie do wskazywania równoważności między całymi zdaniami, formułami, itp.

5) Implikacja, to najtrudniejszy rodzaj spośród omawianych tu typów zdań. Mówi ona:
   jeśli zachodzi poprzednik, to musi zachodzić następnik, (1)
   czyli (innymi słowy):
   nie może być tak, że zachodzi poprzednik, a mimo to nie zachodzi następnik. (2)
   I rzeczywiście, w tabeli tylko tę jedną sytuację oznaczyliśmy zerem, a pozostałe jedynkami. Z kolei wychodząc od zdania (1) – widzimy, że zaczyna się ono od słowa JEŚLI: „Jeśli jest TAK, to musi być SIAK". Owo „jeśli" ma tu dwie konsekwencji :
   - jeśli rzeczywiście jest TAK, to musi być SIAK, a więc nie może być wtedy inaczej (tj. jest /prawdziwe/ $1 \rightarrow 1$, a nie może być /a więc i nie jest/ $1 \rightarrow 0$),
   - z drugiej strony, to „jeśli" świadczy, że zdanie to mówi TYLKO co <u>musi</u> być gdy ów warunek będzie spełniony, nie mówi zaś nic o wartości następnika w przypadku, gdy poprzednim nie jest spełniony; dopuszcza więc dowolną jego wartość (tj. przy poprzedniku 0, formuła jest prawdziwa tak przy następniku równym *0*, jak i *1*, tj. prawdziwe są: $0 \rightarrow 0$ i $0 \rightarrow 1$).

   Spójrzmy obecnie na jakiś przykład odnośnie implikacji. Najlepszy, jaki dotychchczas udało mi się wymyślić jest następujący. Weźmy zdanie: „Jeśli zostałeś wybrany do sejmu, to znaczy że masz co najmniej 21 lat".

> „co najmniej" pisze się oddzielnie, podobnie jak „co najwyżej";
> Znamienne że „przynajmniej" pisze się jednak razem!

!

> Co najmniej x = x lub więcej
> Co najwyżej x = nie więcej niż x, czyli x lub mniej

?

Zapewne każdy się z nim zgadza (w takie „szczegóły”, że nie można być równocześnie pozbawionym praw obywatelskich, nie wnikamy tu). Co to zdanie oznacza? Popatrzmy po kolei:

Jeśli $\underbrace{\text{zostałeś wybrany do sejmu}}_{p}$, to znaczy że $\underbrace{\text{masz co najmniej 21 lat}}_{q}$

$$p \quad \rightarrow \quad q$$

p	*q*	Wybrany (p)	Przykładowy wiek	jest to co naj-niej 21 lat (q)	Może tak być	Zatem wartość $p \rightarrow q$
1	*1*	TAK	30 lat	TAK	TAK	*1*
1	*0*	TAK	5 lat	NIE	NIE	*0*
0	*1*	NIE	30 lat	TAK	TAK	*1*
0	*0*	NIE	5 lat	NIE	TAK	*1*

Gdzie (jak zwykle) *1* oznacza prawdziwość zdania, a *0* – jego fałszywość.

Poniżej zamieszczam **tabelę prawdziwościową dla negacji (spójnik jednoargumentowy)**

p	~
1	*0*
0	*1*

~ (tzw „falka” - standardowo) lub $\neg$ (tzw. „rosyjskie g”), to jednoargumentowy spójnik logiczny negacji. Jego dodanie (przed zdaniem, czy zmienną) powoduje zmianę jego wartości na **przeciwną**, tj. z prawdy (*1*) na fałsz (*0*) lub z fałszu (*0*) na prawdę (*1*).

Dwie liczby (*a* i *b*) nazywamy **przeciwnymi**, jeśli mają przeciwny znak, a tę samą wartość bezwzględna (tj. gdy spełniony jest warunek $a = -b$, czyli gdy $\boldsymbol{a + b = 0}$), a **odwrotnymi**
(pamiętasz zapewne, że „podzielić, to pomnożyć przez odwrotność dzielnika”,
czyli $a : b = a \cdot (1/b)$, czyli liczba odwrotna do *b*, to $1/b$),
jeśli b jest odwrotnością *a* (czyli $b = 1/a$), czy też (równoważnie) *a* jest odwrotnością *b* (tj. $a = 1/b$), co zresztą – z przekształcenia dowolnego z tych warunków – daje nam po prostu: $\boldsymbol{a \cdot b = 1}$.

Zadanie

Jak myślisz, dlaczego w logice mamy do czynienia z wartościami przeciwnymi, a nie odwrotnymi?

Spójnik negacji (oznaczany: ~ lub $\neg$) czytamy: *nie*; *nie jest tak, że*; *nie jest prawdą, że*; *nieprawda, że* .
Np. jeśli *p* = „Jan jest łysy” , to ~*p* = „nie jest prawdą, że Jan jest łysy” lub po prostu „Jan nie jest łysy”.
Trzeba jednak uważać! Nie zawsze jest bowiem tak, że gdy „nie jest *x*”, to „jest nie *x*”!

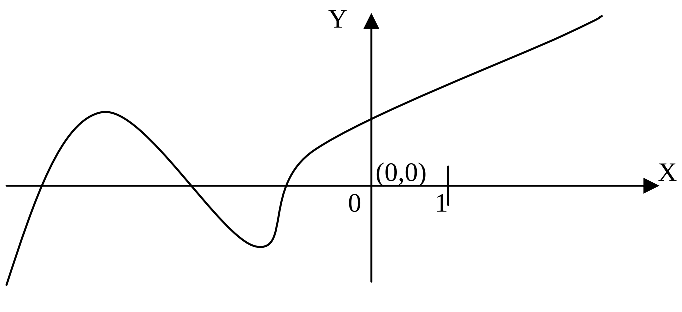
PRZYKŁAD!

Weźmy znane ze szkoły pojęcia: „funkcja parzysta” i „funkcja nieparzysta”.

f jest parzysta witw, gdy $\bigwedge_{x \in D} f(-x) = f(x)$, tj. gdy jej wykres jest symetryczny względem osi OY (tej pionowej).

f jest nieparzysta witw, gdy $\bigwedge_{x \in D} f(-x) = -f(x)$, tj. gdy jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych (tj. punktu (*0*,*0*)).

Mogą jednak być funkcje, które nie są „ani parzyste, ani nieparzyste”, np. taka, jaką znajdziesz na poniższym wykresie



Jej wykres nie jest ani symetryczny względem osi OY, ani względem punktu (0,0).

Tak więc pojęcia „funkcja parzysta" i „funkcja nieparzysta" wcale się nie dopełniają. Konsekwencją tego jest fakt, że czym innym jest stwierdzenie „X nie jest n", a czym innym „X jest nie-n", a zatem obydwa one wymagają oddzielnej definicji i olbrzymiej ostrożności z naszej strony (by ich nie pomylić). Taka działalność wcale nie jest nadmiarowa i (wbrew pozorom) nic tu nie jest „przegadane".

Podajmy jeszcze dwie **uwagi** nt. równoważności:

1) Równoważność nie jest tożsama z implikacją, gdyż różni się od niej w tabelce prawdziwościowej (w wierszu $p = 1$, $q = 0$). Mimo to, większość osób myśli, że jak ojciec mówi do syna: „Jak będziesz grzeczny (p), to dostaniesz na bilet do kina (q)" (jest to implikacja!), to
   - znaczy to, że wyraża tym samym pogląd, że „jak syn nie będzie grzeczny, to nie dostanie na bilet do kina"
   - a ponadto pozostałe sytuacje (oczywiście przy założeniu słowności ojca), że syn jest grzeczny, a nie dostaje, lub że syn nie jest grzeczny, a dostaje, nie wchodzą w rachubę.

   Otóż, odnośnie pierwszego z tych mniemań, jego prawdziwość można łatwo obalić, do czego wystarczy spojrzeć do naszej tabeli prawdziwościowej.

   > Tu mi się przypomniała pewna fraszka (jak dobrze pamiętam – Jana Sztaudyngiera):
   > *Ona mniema, że mnie ma, potem stwierdza oniemiała, że mnie nie ma i nie miała!*

   ☺

   Na obecnym etapie twojej wiedzy logicznej, analizę możemy poprowadzić na dwa sposoby (w zależności od „szerokości" naszego rozumienia pojęcia implikacji).
   1. (przy szerszym) Jeśli implikacja miałaby też zachodzić w drugą stronę – wówczas jej tabela musiałaby być symetryczna (tj. gdybyśmy zamienili miejscami zmienne zdaniowe p i q – wówczas w poszczególnych wierszach powinniśmy byli otrzymywać identyczne wyniki, jak poprzednio).
   2. (przy węższym) Zauważ, że jeśli warunek p nie jest spełniony, to q może mieć tak wartość 1, jak i 0. Nie jest więc ta wartość zdeterminowana na 1, podczas gdy w przypadku, gdy warunek p zachodzi, to wartość q jest zdeterminowana jako 1.

   Z kolei odnośnie drugiego z tych mniemań, to jest już całkiem inne zagadnienie, związane z rozumieniem implikacji, które to omówiliśmy za pomocą przykładu o wyborach do sejmu.
2) Równoważność (R) jest dopełnieniem dyzjunkcji (D), tj. te dwa zdania w danych sytuacjach zawsze przyjmują przeciwną wartość. Tak więc w wierszach w tabeli prawdziwościowej, w których R przyjmuje wartość 0 – D ma wartość 1, a w których R przyjmuje wartość 1 – D ma wartość 0.

Uwaga
Powyżej pisaliśmy tak $p = 1$, jak i p = „Jan jest łysy". Był to błąd! Właściwie, drugi zapis był poprawny (bo zmienna zdaniowa zastępuje zdanie), a pierwszy (w tej sytuacji) – nie! Formalnie rzecz biorąc, powinniśmy bowiem pisać w(*„Jan jest łysy"*) = 1 lub $w(p) = 1$, gdzie w jest funkcją określającą wartość logiczną swego argumentu (u nas – odpowiednio zdania i zmiennej zdaniowej, w każdym z tych przypadków = 1), przy czym zawsze musi ona przyjmować w tych przypadkach wartość 1 (prawda) lub wartość 0 (fałsz).
Przy zmiennych zdaniowych (i formułach rachunku zdań) przyjęło się jednak, że nie jesteśmy takimi formalistami-rygorystami, i w związku z tym, opisujemy ich wartość logiczną bezpośrednio, a więc bez owego w, czyli piszemy np.: $p = 1$, $(p \rightarrow q) = 0$, oczywiście przy wcześniej określonych p i q.

Gdy mamy zdania złożone z większej liczby zdań prostych lub z dwóch (czy nawet jednego), ale zbudowane bardziej skomplikowanie niż to podano w dotychczasowych naszych rozważaniach, to celem rozeznania jego wartości logicznej:
1) najpierw zdanie złożone zapisujemy przy pomocy odpowiadającego mu schematu rachunku zdań, poprzez konsekwentne podstawienie za poszczególne zdania proste odpowiadających im zmiennych zdaniowych (np.: $\sim\sim$ p, p $\wedge$ $(q \rightarrow r)$, p $\wedge$ $(q \vee p)$),
2) a następnie pod poszczególne zmienne zdaniowe podstawiamy wartości logiczne 0 i 1, w zależności czy odpowiadając im zdanie języka naturalnego jest fałszywe czy też prawdziwe.

Uwaga
Spójrzmy jeszcze, jakie są możliwe układy wartości logicznych poszczególnych zdań prostych (reprezentowanych w odpowiadającej im formule przez poszczególne zmienne zdaniowe: p, q, r itd.). Dane z tych rozważań

prezentować będziemy w poniższej tabeli. Otóż kolumny reprezentują poszczególne zmienne zdaniowe, a poszczególne wiersze – kolejne układy (kombinacje) zer i jedynek (w sumie wszystkie możliwe).
Gdybyśmy mieli tylko jedną zmienna (jest tak w podanej poniżej tabeli dla negacji) – mielibyśmy jedynie 2 wiersze – jedynie z odpowiednio 0 i 1. Teraz, w oparciu o tę tabelę, gdybyśmy tworzyli analogiczna dla dwóch zmiennych – wówczas ten układ przepisujemy poniżej, a obok (po lewej stronie) przy części starej zapisujemy jedynki, a przy nowej – zera (patrz – poniższa tabela, pola zaznaczone na szaro). Analogicznie będzie, gdy w oparciu o tabelę dla 2 zmiennych będziemy tworzyć tabelę dla 3 zmiennych – najpierw przepisujemy poniżej to, co już mamy (tj. przepisując część zacieniowaną, z wierszy q i r), a następnie po lewej stronie (tj. w kolumnie *p*) przy tym, co już wcześniej mieliśmy wpisujemy jedynki, a przy tym, co dopiero przed chwilą dopisaliśmy – wpisujemy zera. Procedura ta gwarantuje nam uzyskanie wszystkich wyników (zer i jedynek we wszystkich możliwych kombinacjach w poszczególnych wierszach tabeli).

p	*q*	*r*
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Z INFORMATYKI:

Algorytm, to ściśle określony sposób postępowania, dający gwarancję osiągnięcia zamierzonego rezultatu w skończonej liczbie kroków.

Procedura (pojęcie pochodne) – to wewnętrznie spójna część algorytmu, odpowiedzialna za realizację funkcjonalnej jej części (np. przy algorytmie rozwiązywania równania kwadratowego, jej część odpowiedzialna za wyliczenie delty).

Pojęcie procedura występuje też w znaczeniu potocznym, o takim znaczeniu, jak został określony powyżej algorytm. Wtedy określenie „**zalgorytmizowana procedura**” znaczy po prostu „**postępowanie algorytmiczne**”, czyli ściśle określone, dające gwarancję osiągnięcia zamierzonego celu w skończonej ilości kroków.

?

O każdej z tych kombinacji zer i jedynek (w tym również zestawieniu samych zer, czy też samych jedynek) mówimy, że jest **wartościowaniem** ciągu zmiennych zdaniowych (i to zarówno, gdy dzieje się to w tabelce, jak i w konkretnej FRZ). Liczba tych wartościowań wyraża się wyrażeniem 2^n, gdzie n jest liczbą zmiennych zdaniowych rozpatrywanych w danej formule (dla n=1 liczba wartościowań wynosi 2, dla 2 – 4, dla 3 – 8, dla 4 – 16, ...).

Oprócz zdań prostych i zdań złożonych z dwóch zdań prostych, można budować (czy też analizować) zdania bardziej złożone, i oczywiście odpowiadające im FRZ. Przy rozpatrywaniu FRZ, należy pamiętać o kolejności wykonywania działań, podobnie zresztą, jak to ma miejsce np. w arytmetyce, czy algebrze. Tak jak tam, tak i tu normalnie działania wykonuje się od lewej do prawej, chyba, że:

- są zmodyfikowane nawiasami (albo tylko okrągłymi, choćby wielokrotnie zagłębionymi, lub też z dodatkowym wykorzystaniem nawiasów kwadratowych i klamrowych.
- lub mocą wiązań: najsilniej wiąże negacja (~), potem koniunkcja ($\wedge$), następnie alternatywa ($\vee$), słabiej implikacja ($\rightarrow$), a najsłabiej równoważność ($\leftrightarrow$).

Zauważ, że stosujemy tu pewien skrót myślowy, gdyż mówimy „koniunkcja”, a na myśli mamy „spójnik koniunkcji”

?

Przykład

Zdanie „Jeśli jutro będzie piątek, to jeśli się dobrze wyśpię, a zawczasu dobrze przygotuję, to zdam”

$$\text{„Jeśli } \underbrace{\underbrace{\text{jutro będzie piątek}}_{p}}_{L}\text{, to } \underbrace{\text{jeśli } \underbrace{\underbrace{\text{się dobrze wyśpię}}_{q}\text{, a } \underbrace{\text{zawczasu dobrze przygotuję}}_{r}}_{L_w}\text{, to } \underbrace{\underbrace{\text{zdam}}_{s}}_{P_w}}_{P}\text{”}$$

ma postać: $p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow s)$, (3)
a zatem formuła ta (jak i całe rozważane zdanie) są implikacjami (o lewej stronie L i prawej stronie P, gdzie wyrażenie w nawiasie /P/ też jest implikacją o lewej stronie L_w /która z kolei jest koniunkcją/ i prawej stronie P_w; dolny indeks w został tu obrany ze względu na chęć ukazania, że mamy tu do czynienia z „implikacją **wewnętrzną**"; dodatkowy nawias obejmujący koniunkcję nie był tu potrzebny,).
Gdybyśmy z kolei mieli tę formułę, ale bez nawiasów, to byśmy ją rozumieli w następujący sposób (wg. zasady „od-lewej-do-prawej"): $((p \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow s$
i też nazywalibyśmy ją implikacją .

O formule postaci (3) (a co za tym idzie, o zdaniu, które ona opisuje), możemy orzekać czy jest prawdziwa, czy też fałszywa. Musimy jednak znać wartości logiczne poszczególnych, składających się na nią zmiennych zdaniowych (przypomnijmy: reprezentujących zdania proste składające się na rozpatrywane zdanie). Jeśli więc np. p = 1 , q = 0, r= 1 i s= 0, to mamy:

$$1 \rightarrow (\underbrace{0 \wedge 1} \rightarrow 0)$$
$$1 \rightarrow (\underbrace{\;0 \quad \rightarrow 0})$$
$$\underbrace{1 \rightarrow \quad 1\quad}$$
$$1$$

Zdanie to więc jest (przy takim wartościowaniu) prawdziwe.

Zobaczmy, jak się „sprawy mają" przy innych wartościowaniach. W tym celu musimy postępowanie to powtórzyć dla pozostałych $2^4 - 1 = 15$ przypadków (tj. wartościowań). Łatwiej (nie zgubimy żadnego przypadku) i przejrzyściej jest to jednak zrobić w jednej tabeli (celem zachowania komplementarności, zamieścimy w niej również już „przerobiony" przypadek).
$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow s)$,

p	q	r	s	$q \wedge r$	$q \wedge r \rightarrow s$ lub krócej *(...)*	$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow s)$, lub krócej *C* (od: całość)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Jak widzisz, ta formuła akurat w jednej sytuacji jest fałszywa, a w pozostałych prawdziwa.
Są jednak i takie FRZ, które zawsze są prawdziwe (tj. przy każdym wartościowaniu mają wartość logiczną 1) – nazywamy je **tautologiami**, jak i takie, które zawsze są fałszywe (tj. przy każdym wartościowaniu mają wartość logiczną 0) – nazywamy je **kontrtautologiami**.

UWAGA!
Pojęcie kontrtautologii szerzej omawiane jest w rozdziale ‘zbiory i liczby' – teoria mnogości

Związek między tautologią a kontrtautologią.
Jeżeli przez T oznaczymy dowolną tautologię, a przez KT – kontrtautologię, to:

1) ~ T jest kontrtautologią (bo T daje same jedynki w ostatniej kolumnie tabeli, a jeśli formułę tę poszerzymy o znak ~ na początku, to w naszej tabeli będziemy musieli na końcu dodać jeszcze jedną kolumnę i w niej znajdą się same zera, jako właśnie negacje owych jedynek, a to oznacza, że jest ona kontrtautologią)
2) ~ KT jest tautologią (bo KT daje same zera w ostatniej kolumnie tabeli, a jeśli formułę tę poszerzymy o znak ~ na początku, to w naszej tabeli będziemy musieli na końcu dodać jeszcze jedną kolumnę i w niej znajdą się same jedynki, jako właśnie negacje owych zer, a to oznacza, że jest ona tautologią)

Jeśli teraz wprowadzimy oznaczenia: T_1, T_2 – dowolne tautologie (a więc być może nawet $T_1 = T_2$),
KT_1, KT_2 – dowolne kontrtautologie (a więc być może nawet $KT_1 = KT_2$), to:

1) $T_1 \leftrightarrow T_2$,
2) $KT_1 \leftrightarrow KT_2$,
3) $\sim T_1 \leftrightarrow KT_1$,
4) $\sim KT_1 \leftrightarrow T_1$.

Zadanie
Udowodnij powyższe 4 własności.

<u>CO WYRAŻAJĄ TAUTOLOGIE?</u>
Tautologie są zdaniami zawsze prawdziwymi. Są one prawami obowiązującymi w całym świecie, jednak o tym świecie nic konkretnego nie mówią (nie wnoszą nic nowego). Są tylko narzędziami, pozwalającymi nam przechodzić od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych.
Spójrzmy na podstawowe tautologie:

1) $p \vee \sim p$. Czytamy je: p lub nie p. Jest to niechybnie zdanie zawsze prawdziwe (a więc bez względu na to, co stoi na miejscu p – zdanie prawdziwe, czy też fałszywe; przy każdym z tych podstawień /wartościowań/ otrzymamy bowiem, że całe to wyrażenie ma wartość logiczną 1). Ponadto spójrzmy na przykłady tego typu zdań: „jestem gruby lub nie jestem gruby", „jest teraz zima lub nie ma teraz zimy", „pada deszcz lub nie pada deszcz" itp. Jest to typowa wypowiedź pytyjska.

   Wypowiedź pytyjska – to taka wypowiedź, która nic ciekawego nie wnosi, a zawsze jest prawdziwa, a to ze względu na swoją specyficzną składnię (np.: „jutro będzie padać lub nie będzie padać")

   ?

   Prawo to nazywamy „**prawem wyłączonego środka**" (ze względu na brak jakichkolwiek możliwości pośrednich).
2) $p \rightarrow p$. Jest to „**prawo tożsamości**". Zdanie to czytamy: Jeśli (jest) *p*, to (jest) *p*. Przykłady zdań: „jeśli jestem Polakiem, to jestem Polakiem", „jeśli słońce jest planetą, to słońce jest planetą", ... Pierwsze z nich jest typu $1 \rightarrow 1$, a drugie typu: $0 \rightarrow 0$, a zatem (w oparciu o tabelkę prawdziwościową) oba są prawdziwe. Prawdziwość tego dowolnego zadnia tego kształtu jest więc zagwarantowana (przez nasze sprawdzenie, że przy dowolnym wartościowaniu /tu jedynie dwóch: $p = 0$ i $p = 1$/ odpowiadająca jej FRZ jest zawsze prawdziwa). **Zresztą gdy poprzednik implikacji ma wartość logiczną zero, wówczas nie trzeba jej sprawdzać (czy też dowodzić), bo (zgodnie z tabelą prawdziwościową) i tak jest prawdziwa**

Zapewne już zauważyłeś, że tautologie rzeczywiście są po prostu banałami. Jakąż bowiem wartość poznawczą mają zdania: „noszę okulary lub nie noszę okularów", czy „jeśli jestem studentem, to jestem studentem", a co za tym idzie zadnia postaci: $p \vee \sim p$ czy $p \rightarrow p$? Zgodzę się z Tobą, że same w sobie – żadnej(bo są po prostu banałami).

Banał – prawda oczywista

?

Za „oczywiste" rozumiem tu „bezwarunkowe", a nie „widoczne na pierwszy rzut oka". W tych przypadkach rzeczywiście jest to również „widoczne na pierwszy rzut oka", jednak nie zawsze musi tak być.
W tym celu przypatrzmy się innym tautologiom (nie piszę pozostałym, bo tautologii – niestety – jest nieskończenie wiele, a więc nie bylibyśmy w stanie wszystkich ich wypisać).

<u>Prawa rachunku zdań</u>

LP	Prawo	Nazwa
1	$p \rightarrow p$	Prawo tożsamości
2	$p \vee \sim p$	Prawo wyłączonego środka
3	$\sim(p \wedge \sim p)$	Prawo sprzeczności
4	$\sim\sim p \rightarrow p$	Prawo podwójnej negacji
5	$(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$	Pierwsze prawo redukcji do absurdu

6	$((p \to q) \wedge (p \to \sim q)) \to \sim p$	Drugie prawo redukcji do absurdu
7	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	Prawo przemienności koniunkcji
8	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$	Prawo przemienności alternatywy
9	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$	Prawo transpozycji prostej
10	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	Prawo de Morgana dla koniunkcji
11	$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	Prawo de Morgana dla alternatywy
12	$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$	Prawo zaprzeczenia implikacji
13	$(p \to q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$	Prawo zastępowania implikacji
14	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$	j.w.
15	$(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$	Prawo zastępowania koniunkcji
16	$(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \to \sim q)$	j.w.
17	$(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$	Prawo zastępowania alternatywy
18	$(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \to q)$	j.w.
19	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$	Prawo zastępowania równoważności
20	$\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim(p \to q) \vee \sim(q \to p))$	Prawo zaprzeczania równoważności
21	$\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$	j.w.
22	$((p \to q) \wedge p) \to q$	*Modus ponendo ponens*
23	$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$	*Modus tollendo tollens*
24	$((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$	*Modus tollendo ponens*
25	$((\sim p \vee \sim q) \wedge p) \to \sim q$	*Modus ponendo tollens*
26	$((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \sim r) \to \sim q)$	Prawo transpozycji złożonej
27	$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (q \to (p \to r))$	Prawo komutacji
28	$((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$	Prawo eksportacji i importacji
29	$(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$	Prawo łączności koniunkcji
30	$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$	Prawo łączności alternatywy
31	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy
32	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji
33	$((p \to q) \wedge (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$	Prawo mnożenia następników
34	$((p \to r) \wedge (q \to r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \to r)$	Prawo dodawania poprzedników
35	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Sylogizm Fregego
36	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$	Koniunkcyjny sylogizm hipotetyczny
37	$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$	Bezkoniunkcyjny sylogizm hipotetyczny

Jak zapewne zauważyłeś, są one nazwane prawami rachunku zdań, a każda/każde z nich ma swoją nazwę własną. Przypatrzmy się tym dwóm ich aspektom.

1) **Prawo rachunku zdań**, to taka formuła rachunku zdań, która da się wyprowadzić z pewnego (z góry przyjętego, skończonego) zbioru aksjomatów (formuł, o których zakładamy, że są prawdziwe), stosując dozwolone narzędzia przekształceń tychże formuł. Szerzej na ten temat będziemy mówić w rozdziale metodologiczne podstawy matematyki.
2) Dowodzi się, że zbiory: zbiór tautologii rachunku zdań i zbiór praw rachunku zdań, są identyczne. Tak więc praw rachunku zdań jest (podobnie jak ich tautologii) nieskończenie wiele.

Jednak tylko część z nich ma swoje nazwy własne. – część ze względów historycznych, a część ze względu na swoje ważkie znaczenie. Jeśli jednak „ze względów historycznych”, to i „ze względu na swoje ważkie znaczenie”, jako że w przeciwnym razie historycznie by nie zaistniały.

Spróbujmy ją przeanalizować.

3) $\sim(p \wedge \sim p)$ – **prawo sprzeczności**.
Mówi ono, że niepodobna, aby zarazem zachodziło (było prawdziwe) dane zdanie i jego negacja

4) $\sim\sim p \to p$ – **prawo podwójnej negacji**.
Mówi ono, że podwójnie zanegować, to tak, jakby w ogóle nie negować. Można też powiedzieć, że „podwójna negacja się znosi”. Ta tak, jak mam włączone (lub wyłączone) światło, neguję ten stan poprzez jego zmianę na przeciwny (odpowiednio: wyłączony/włączony) i ponownie neguję go poprzez zmianę obecnego stanu na przeciwny (tym razem odpowiednio: włączony/wyłączony), dochodząc tym samym do stanu początkowego.

„w ogóle” pisze się oddzielnie

5) $(p \to \sim p) \to \sim p$ – **pierwsze prawo redukcji do absurdu**.
Możemy odczytać je następująco: jeśli z pewnego zdania można wyprowadzić jego negację, to zdanie to jest fałszywe.

„absurd” pisze się przez „b” (a nie przez „p”!) !

6) $((p \to q) \wedge (p \to \sim q)) \to \sim p$ – **drugie prawo redukcji do absurdu**.
Jeśli z danego zdania można wyprowadzić dwa zdanie, nawzajem przeciwne, to zdanie to nie zachodzi (tj. jest fałszywe).

7) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ – **prawo przemienności koniunkcji**.
Koniunkcja jest przemienna , tj. dowolnie w jakiej kolejności ją weźmiemy, zawsze będzie miała taką samą wartość logiczną.
Tutaj prośba o odrobinę ostrożności. Czy ktoś powie: „pobrali się i mieli dziecko”, czy też: „mieli dziecko i się pobrali”, to dla domorosłego logika, jest to samo. Jednak zapewne nawet i Ty Laiku dostrzegasz różnicę między stwierdzeniami tych zdań. W życiu bowiem często jedne spójniki logiczne wyraża się stosując inne spójniki (często w logice zarezerwowane dla czegoś innego), tak że dochodzi do istnego galimatiasu.
Kto mówi „pobrali się i mieli dziecko” ma zapewne na myśli, że zaszły obydwa te fakty, a przy tym zaistniały w przytoczonej tu kolejności.
Kto z kolei mówi „mieli dziecko i się pobrali”, ma zapewne na myśli nie tylko to, że zaszły owe dwa fakty, lecz i to, że drugi z nich (ślub) był niejako wymuszony pierwszym (dzieckiem). Jest to więc implikacja: „pobrali się, ponieważ mieli dziecko” (gdzie: ”mieli dziecko” – to jej poprzednik, a „pobrali się” – to jej następnik).

8) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ – **prawo przemienności alternatywy**.
Alternatywa jest przemienna , tj. dowolnie w jakiej kolejności ją weźmiemy, zawsze będzie miała taką samą wartość logiczną.

9) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ – **prawo transpozycji prostej**, często zwane po prostu **prawem transpozycji**.
Implikacja jest równoważna implikacji w drugą stronę, jednak z negacją jej stron. Jest to bardzo ważne prawo! Większość laików uważa, że $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$, bo to „takie logiczne”. Jednak (jak przystało na laików) – mylą się sromotnie. Zobacz. Zdanie (będące implikacją): „Jeśli coś jest kwadratem, to i jest prostokątem” jest oczywiście prawdziwe (bo każdy kwadrat jest spełnia definicję prostokąta). Z kolei (błędnie powstałe z niego) zdanie (prawdziwe według logików-laików) „jeśli cos nie jest kwadratem, to i nie jest prostokątem”, wcale prawdziwe nie jest! (zobacz np. prostokąt o bokach 2 i 3 jednostki), a więc owo prawo logików-laików jest rzeczywiście chybione. Z kolei – omawiane tu – prawo transpozycji, oczywiście jest prawdziwe. W sytuacji przytoczonego tu przykładu, mówi, że ‘jak coś jest kwadratem, to i jest prostokątem, to to samo, co: jak coś nie jest prostokątem, to i nie jest kwadratem” (bo i w jaki sposób?).

10) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ – **prawo de Morgana dla koniunkcji**. Lub: **prawo negacji koniunkcji**
Czytamy je krótko: negacja koniunkcji, to alternatywa negacji. „Całym zdaniem”: negacja koniunkcji dwóch zdań jest alternatywą negacji tych zdań. Spróbujmy je objąć intuicyjnie. Co oznacza, że nie zachodzi koniunkcja dwóch zdań? Czego potrzeba i wystarcza zarazem, aby ona nie zachodziła? – że choć jedno z nich będzie fałszywe (= nie będzie zachodzić), a to właśnie oddaje to prawo.

11) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ – **prawo de Morgana dla alternatywy**. Lub: **prawo negacji alternatywy**
Analogicznie, czytamy je krótko: negacja alternatywy, to koniunkcja negacji. „Całym zdaniem”: negacja alternatywy dwóch zdań jest koniunkcją negacji tych zdań. Spróbujmy i je objąć intuicyjnie. Od prawej - co oznacza, że nie zachodzi żadne z tych zdań (ani pierwsze, ani drugie). Otóż oznacza, że niepodobna, aby choć jedno z nich zachodziło, a to właśnie wyraża lewa strona tej równoważności.

12) $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ – **prawo zaprzeczenia implikacji**.
Gdy zanegujemy obydwie strony równoważności 13, i następnie do prawej strony tak otrzymanej równoważności zastosujemy prawo podwójnej negacji, to właśnie otrzymamy omawiane tu prawo. Prawo to mówi, że niezachodzenie implikacji, to innymi słowy zachodzenie jej poprzednika i niezachodzenie następnika.

13) $(p \to q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ – **prawo zastępowania implikacji (1)**

Niezmiernie ważne. Gdy spojrzysz na tabelę prawdziwościową dla implikacji, to zauważysz, że implikacja fałszywa jest tylko w jednej sytuacji – gdy zachodzi jej poprzednik, a mimo to nie zachodzi jej następnik. To spostrzeżenie oddaje właśnie to prawo mówiące, że zachodzenie implikacji równoważne jest niezachodzeniu (czyli: wyklucza się z sytuacją zachodzenia) jej poprzednika i negacji jej następnika. Krótko: implikacja oznacza, że nie może być tak, że zachodzi jej poprzednik, a nie zachodzi jej następnik.

14) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ – **prawo zastępowania implikacji (2)**

Przekształcimy powyższe prawo 13:

$(p \to q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim \sim q \leftrightarrow \sim p \vee q$

↓ ↓ ↓

prawo 13 z prawa 10 stosujemy prawo podwójnej negacji (tj prawo nr 4) do $\sim \sim q$

W ten sposób otrzymaliśmy omawiane tu prawo zastępowania implikacji.

15) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$ - **prawo zastępowania koniunkcji (1)**

Otrzymujemy je wprost z przekształcenia prawa 10 (prawa de Morgana dla koniunkcji), poprzez jego obustronne zanegowanie.

16) $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \to \sim q)$ – **prawo zastępowania koniunkcji (2)**

Gdy w prawie 12 (prawie zaprzeczania implikacji): $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

w miejsce q wstawimy ~q: $\sim(p \to \sim q) \leftrightarrow (p \wedge \sim \sim q)$

następnie zniesiemy podwójną negację przy q: $\sim(p \to \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

i w końcu odwrócimy strony równoważności miejscami: $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \to \sim q)$

to właśnie otrzymamy nasze prawo.

17) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$ – **prawo zastępowania alternatywy (1)**

Analogicznie, jak w 15, otrzymujemy je wprost z przekształcenia prawa 11 (prawa de Morgana dla alternatywy), poprzez jego obustronne zanegowanie.

18) $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \to q)$ – **prawo zastępowania alternatywy (2)**

Analogicznie, jak w 16:

gdy w prawie 14 (prawie zaprzeczania implikacji): $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

w miejsce p wstawimy ~p: $(\sim p \to q) \leftrightarrow (\sim\sim p \vee q)$

następnie zniesiemy podwójną negację przy p: $(\sim p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$

i w końcu odwrócimy strony równoważności miejscami: $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \to q)$

to właśnie otrzymamy nasze prawo.

19) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$ – **prawo zastępowania równoważności**

Równoważność świadczy o współzachodzeniu zdań: lewa i prawa jej strona zawsze muszą mieć tę samą wartość logiczną, aby i cała równoważność była prawdziwa. To już wiemy. Z kolei przytoczone tu prawo zastępowania równoważności ustanawia równoważność między równoważnością, a zachodzeniem implikacji w obydwie strony. Można zresztą powiedzieć, że równoważność, to implikacje w obydwie strony. Prawo to stwierdza, że równoważność, to nie to samo, co implikacja, lecz to samo, co implikacja w obydwie strony. Poprzez równoważność definiuje się pojęcia – definicja musi być równoważnością (= mieć postać równoważności), aby była adekwatna. Dzięki temu, że równoważność, to dwie implikacje – dzięki jednej z nich poprawna definicja nie jest za wąska, a dzięki drugiej z nich – definicja ta nie jest za szeroka.

20) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim(p \to q) \vee \sim(q \to p))$ – **prawo zaprzeczania równoważności (1)**

Biorąc powyższe prawo 19 (prawa zastępowania równoważności): $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

i negując jego obie strony, otrzymamy: $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim((p \to q) \wedge (q \to p))$

a po zastosowaniu do jego prawej strony prawo negacji koniunkcji (nr 10), otrzymamy nasze prawo.

21) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$ – **prawo zaprzeczania równoważności (2)**

Podstawiając w powyższym prawie 20, po prawej jego stronie, w miejsce negacji implikacji zgodnie z prawem 12 [$\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ – **prawo zaprzeczenia implikacji**], otrzymamy właśnie nasze prawo 21.

Poniższe cztery prawa mają łacińskie nazwy ze względu na ich doniosłość i historyczne znaczenie.

22) $((p \to q) \wedge p) \to q$ – ***modus ponendo ponens***

Modus ponendo ponens znaczy: sposób przez potwierdzenie potwierdzający. Prawo to mówi, że jeśli prawdziwa jest jakaś implikacja (tu: $p \to q$), a nadto zajdzie jej poprzednik (tu: p), to i musi zajść jej następnik.

Np. przykład: jeśli dzisiaj jest piątek, to jutro jest sobota ($p \to q$), a dzisiaj jest piątek (p), zatem jutro jest sobota (q). Dociekliwy laik zapyta zapewne, „a co, jak dzisiaj nie jest piątek?". Wtedy po prostu:

$((p \to q) \wedge p) \to q$

$0 \longleftarrow$ mamy więc

$0 \longleftarrow$ zatem i koniunkcja jest fałszywa

$1 \longleftarrow$ a jako że jest ona poprzednikiem implikacji, to i cała implikacja jest prawdziwa.

Prawo to w pewnej modyfikacji nosi nazwę reguły odrywania, którą odpowiednio czytamy i zapisujemy jak poniżej:

- jeśli zajdzie (= jest prawdziwe)	$p \to q$
- i	p
	———
- to i zajdzie (musi zajść)	q

Często regułę taką czyta się też: skoro … (to, co nad kreską) – zatem … (to, co pod kreską).
Służy ona do przeprowadzania wszelkiego rodzaju dowodów czy wyjaśnień, a co za tym idzie, matematyce bardzo ją sobie cenią (jako że lubują się w dowodzenie twierdzeń ☺).

23) $((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$ – ***modus tollendo tollens***

To z kolei jest „sposób przez zaprzeczenie zaprzeczający" . Jeśli mamy implikację ($p \to q$), i wiemy, że nie zachodzi jej następnik ($\sim q$), to możemy być pewni, że i jej poprzednik jest fałszywy ($\sim p$).
Łatwo je udowodnić.
Jeśli mianowicie mamy: $p \to q$
To w myśl prawa transpozycji prostej (prawo nr 9: $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$), mamy: $\sim q \to \sim p$.
Z kolei, jeśli zachodzi $\sim q$ (a że tak jest, wiemy z założenia), to w myśl dopiero co omówionego *modus ponendo ponens* [$((p \to q) \wedge p) \to q$] {lub: reguły odrywania} – zachodzi $\sim p$.

24) $((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$ – ***modus tollendo ponens***

Jak łatwo już odczytać (tak z kształtu formuły, jak i łaciny), prawo to nosi nazwę sposób przez zaprzeczenie potwierdzający. Rzeczywiście, jeśli mamy alternatywę (która „mówi": jest tak lub tak), i wiemy, że jej pierwszy składnik (a ze względu na prawo przemienności alternatywy – właściwie dowolny) jest fałszywy, to drugi z jej składników musi być prawdziwy (=zachodzić). Jeśli wiem, że w prawej kieszeni spodni masz pistolet lub nóż, a ty z całą stanowczością zaprzeczasz jakobyś miał w niej nóż (a – nawiasem mówiąc – jesteś przy tym prawdomówny), to mogę być pewien, że masz w niej pistolet! Oto w całej okazałości – *modus tollendo ponens.* Na pewno go znałeś i stosowałeś, ale nie umiałeś tak mądrze naukowo nazwać.

25) $((\sim p \vee \sim q) \wedge p) \to \sim q$ – ***modus ponendo tollens***

Ostatnim prawem z serii łacińskiej, jest *modus ponendo tollens* – sposób przez potwierdzenie zaprzeczający . Jest to formuła identyczna z poprzednią, z tą różnicą, że na poszczególnych pozycjach gdzie były negacje – teraz ich nie ma, a gdzie nie było – tam są. Sposób ten „mówi": jeśli co najmniej jednego z dwóch nie ma, a jest jeden z nich, to na pewno nie ma drugiego. Również (podobnie jak poprzedni sposób) i ten jest intuicyjnie oczywisty.

Zauważ laiku (już chyba nie całkiem "laiku" ☺), że te 4 sposoby, to już wszystkie możliwe. Cóż, w ich nazwie jest bowiem zawsze na początku *modus* (=sposób), potem może być *ponendo* lub *tollendo* (tj. przez potwierdzenie lub przez zaprzeczenie) – to więc na dwa sposoby, a potem w każdym z nich, na ostatniej – trzeciej – pozycji *ponens* lub *tollens*, a więc w każdym z tych 2 przypadków na 2 sposoby. Rzeczywiście są więc 4 możliwości (i tylko 4!).

26) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \sim r) \to \sim q)$ – **prawo transpozycji złożonej**

Jeśli omawiamy tu prawo transpozycji złożonej (PTZ), przypomnijmy wpierw prawo transpozycji prostej (PTP - prawo nr 9): $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$. W PTP poprzednik implikacji zamienia się miejscem z następnikiem implikacji, przy czy skutkuje to zanegowaniem tych wyrażeń. Z kolei w PTZ mamy do czynienia z analogiczną sytuacją, jednak następnik implikacji zamienia się miejscem jedynie z jednym z czynników poprzednika tejże implikacji (i w tym przypadku wyrażenia zamieniające się miejscami są negowane po zmianie miejsc).
Można wręcz powiedzieć, że PTP jest szczególnym przypadkiem PTZ, czy – jak kto woli – że PTZ jest rozszerzeniem PTP (o niezmienny /co do wartości i miejsca/ czynnik w poprzedniku implikacji – koniunkcji).

27) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ – **prawo komutacji**
Omówimy po następnym.

28) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ – **prawo eksportacji i importacji**
Zwróć uwagę na prawą stronę tej implikacji. Mówi ona, że jeśli zajdzie p, to jeśli zajdzie q, to (dopiero) wtedy zajdzie r. Tak więc zajście r jest gwarantowane poprzez zajście zarazem p i q. Prawo to jest równoważnością. Jako że równoważność możemy rozbić na dwie implikacje, zatem daje nam to możliwość otrzymania dwóch nowych praw:
- implikacja w prawą stronę – to **prawo eksportacji**: $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- implikacja w lewą stronę – to **prawo importacji**: $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$,
a właściwie (bo – formalnie rzecz biorąc – w rachunku zdań nie ma strzałki w lewą stronę : $\leftarrow$):
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

Nazwy wyszczególnionych tu praw tłumaczy się w sposób oczywisty:
- „importujemy" (czyli sprowadzamy) do poprzednika implikacji q,
- „eksportujemy" (czyli wyprowadzamy) z poprzednika implikacji q;
- a jako że import i eksport działają w przeciwne strony – tak i my mamy strzałki implikacji w obydwie (przeciwne) strony, dające razem równoważność.

Czas na poprzednie prawo komutacji. Otóż słowo „komutacja" pochodzi od łacińskiego *commutatio* = zmiana, przemiana. Tutaj właśnie zmieniają się miejscami dwie pierwsze zmienne zdaniowe (p i q) w prawej i lewej stronie owego prawa – równoważności. Czas je udowodnić.
Wyjdziemy od jego lewej strony i równoważnościami dojdźmy do prawej.
$L = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad \leftrightarrow \quad ((p \wedge q) \rightarrow r) \quad \leftrightarrow \quad ((q \wedge p) \rightarrow r) \quad \leftrightarrow \quad (q \rightarrow (p \rightarrow r)) = P$

↓	↓	↓
Z prawa 28 (prawo impostacji – eksportacji)	Z prawa 7 (przemienności koniunkcji) stosowanego dla poprzednika implikacji	Z prawa 28 (prawo impostacji – eksportacji)

Widać więc, że czy najpierw powiemy, że zaszedł warunek (poprzednik) pierwszy, a potem drugi, czy też podamy to w odwrotnej kolejności, nie ma najmniejszego znaczenia.
Przykład: jeśli ktoś jest dorosły, to, jeśli nie jest ubezwłasnowolniony, to może głosować
Jest równoważne stwierdzeniu: jeśli ktoś nie jest ubezwłasnowolniony, to jeśli jest dorosły, to może głosować.
Jasne i oczywiste (nawet dla zatwardziałego laika ☺)!

29) $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ – **prawo łączności koniunkcji**
Stwierdzenie: zaszło p oraz q i r oznacza to samo, co stwierdzenie: zaszło p i q, a nadto r.
Odpowiednikiem tego prawa w algebrze jest prawo: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (co znamienne - zgadza się też nazewnictwo członów – w obydwu przypadkach mamy do czynienia z „czynnikami").

30) $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ – **prawo łączności alternatywy**
Prawo analogiczne do poprzedniego.
Stwierdzenie: zaszło p lub zaszło q lur r oznacza to samo, co stwierdzenie: zaszło p lub q, lub zaszło r.
Odpowiednikiem tego prawa w algebrze jest prawo: $a+(b+c) = (a+b)+c$ (co znamienne - zgadza się też nazewnictwo członów – w obydwu przypadkach mamy do czynienia ze „składnikami").

31) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ – **prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy**
Proste! „Zrobię pierwsze (p) i [drugie (q) lub trzecie (r)]" oznacza to samo, co:

„Zrobię pierwsze (p) i drugie(q) lub zrobię pierwsze(p) i trzecie (r)”.
W algebrze jego odpowiednikiem jest prawo rozdzielności mnożenia względem sumy: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$,
I tak jak tu nie trzeba stawiać pewnych nawiasów (bo mnożenie silniej wiąże niż dodawanie), tak i z odpowiednich (odpowiadających mu) nawiasów można zrezygnować w prawie rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, otrzymując: $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$,
jednak dopóki jest się Laikiem (= nie do końca jeszcze „obstukanym” w arkanach logiki), warto jednak stosować nawet zbyteczne nawiasy, ba na pewno to nie zaszkodzi, a dopomóc może …

„na pewno” pisze się oddzielnie !

Zwróćmy jeszcze uwagę na etymologię nazwy tegoż prawa. Nosi ono nazwę „prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy”, gdyż w prawie tym występuje tak koniunkcja jak i alternatywa, ale to właśnie koniunkcja „się rozdzieliła” (była jedna – po lewej stronie, a są dwie – po prawej stronie).

32) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ – **prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji**
Jest to prawo analogiczne do poprzedniego, jednak nie ma swojego odpowiednika w algebrze. Musiałoby bowiem być: $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$, a tak nie jest! Również i to prawo ma etymologicznie poprawną nazwę. W tym bowiem przypadku „rozdziela się” alternatywa (była jedna, a są dwie!).

33) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ – **prawo mnożenia następników**
Wyprowadzić z p dwa zdania (q i r), znaczy wyprowadzić z p ich koniunkcję.
Jako równoważność – prawo to mieści w sobie dwie implikacje:
a) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ - jeśli z jednego zdania można wyprowadzić dwa zdania, to znaczy, że można i wyprowadzić z niego ich koniunkcję.
b) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$ - jeśli z jednego zdania można wyprowadzić koniunkcję dwóch zdań, to znaczy, że można i wyprowadzić z niego każde z nich z osobna.

Występujące tu wyrażenie „wyprowadzić z jednego zdania drugie” oznacza „z jednego zdania ZAWSZE można wyprowadzić drugie”, co oznacza, że mamy do czynienia z implikacja, a zatem można też stosować zamiennie inne określenia synonimiczne, jak np. z jednego zdania wynika drugie zdanie, czy też: pierwsze zdanie pociąga za sobą (lub: implikuje) drugie.

34) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ – **prawo dodawania poprzedników**
Prawo to (będące równoważnością), najlepiej jest rozważyć jako dwie („idące” w przeciwna stronę) implikacje:
a) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ – jeśli r można wywieść (tj. wyprowadzić) z dwóch (być może różnych) zdań (p i q), to można wyprowadzić je z dowolnego z tych zdań (czy tez innymi słowy – z ich alternatywy).
b) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$ – jeśli z zajścia dowolnego z dwóch danych zdań można wyprowadzić trzecie, to owo trzecie zdanie można wyprowadzić też z każdego z tych dwóch zdań z osobna.

35) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ – **sylogizm Fregego**
W celu zanalizowania powyższego prawa, posłużymy się tzw. metodą odrywania.
Gdy mamy implikację (a więc zdanie czy formułę postaci $p \rightarrow q$), wówczas gdy chcemy zbadać jej prawdziwość, to wcale nie musimy się martwić o jej wartość gdy p=0, bo wtedy i tak (zgodnie z tabelą prawdziwościową dla implikacji), cała ta formuła (implikacja) i tak będzie prawdziwa.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Sytuacje opisane wyżej
To omawiamy poniżej

Potocznie mówi się zresztą, że z fałszu można wyprowadzić dowolny wniosek (bo implikacja o fałszywym poprzedniku, bez względu na wartość następnika /”wniosku”/ zawsze przyjmuje wartość logiczną 1, tj. jest prawdziwa).

Możemy więc założyć, że ów poprzednik jest prawdziwy i badać wówczas, jaką wartość logiczną ma jej następnik:
1) Jeśli 1, to i implikacja jest prawdziwa (bo tak orzeka tabela),
2) a jeśli 0, to i implikacja jest fałszywa (bo tak orzeka tabela).

Jaka więc jest wartość następnika (przy założeniu prawdziwości poprzednika), taka też jest wartość całej implikacji. (**trzeba tu jeszcze rozróżnić: w konkretnym wartościowaniu i w ogóle!**)

Dobra sprawa! Na początku badaliśmy implikację $p \to q$ (bo nic o niej nie wiedzieliśmy). Aby się w niej rozeznać (tj określić, czy jest prawdziwa, czy też fałszywa), założyliśmy, że p=1 (bo gdy p=0, to sprawa jest jasna) i wówczas badaliśmy tylko q. Mniej mieliśmy już do zbadania (tylko wartość q), a przy tym od razu więcej wiedzieliśmy (wartość p), co mogliśmy wykorzystać do wykazania q. Tacy to są cwani ci matematycy ☺ .

Wróćmy do naszego sylogizmu Fregego: $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Obecnie

przy założeniu $(p \to (q \to r))$ — musimy udowodnić $((p \to q) \to (p \to r))$ — Obecnie

Przy złożeniu $p \to q$ — musimy udowodnić $p \to r$ — Z tym, co musimy udowodnić - postąpmy tak samo

Przy złożeniu p — musimy udowodnić r — I jeszcze raz raz tak samo

TAK WIĘC OBECNIE: aż tyle wiedząc — jedynie do tego mamy dojść (= to udowodnić)

Jeśli z założenia 3 wiemy, że p, to od razu (w myśl reguły odrywania), z założeń 1 i 2, wiemy, że (odpowiednio) $(q \to r))$ i q, a stąd z kolei (również z reguły odrywania), że r, czyli to, co dowodziliśmy (= do czego mieliśmy dojść).
To jest dowód poprawności całej tej formuły. Dopiero w oparciu o ten dowód, widzimy sens owej formuły. Ciekawe…

36) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$ – **koniunkcyjny sylogizm hipotetyczny**
To takie „prawo przechodniości”: jeśli z pierwszego zdania wynika drugie, a z drugiego trzecie, to możemy powiedzieć, że z pierwszego wynika trzecie. Zamiast słowa „wynika” możemy tu też wstawić: ”pociąga” (oczywiście z odpowiednimi korektami składni zdania): Jeśli pierwsze pociąga drugie, a drugie – trzecie – to możemy powiedzieć, że zajście pierwszego pociąga zajście trzeciego (gdzie liczebniki odnoszą się do zdań).

37) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ – **bezkoniunkcyjny sylogizm hipotetyczny**
Przypomnij sobie prawo eksportacji i impostacji. Ponieważ jesteś laikiem – pomogę Ci w tym:
$((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$.
Aby w prawie tym nie występowały te same zmienne, co w omawianym bezkoniunkcyjnym sylogizmie hipotetycznym (aby nam się nie myliły między tymi dwoma prawami), zastąpmy je odpowiadającymi im wielkimi literami: $((P \wedge Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$
Teraz łatwo zauważysz, że bezkoniunkcyjny sylogizm hipotetyczny ma postać prawej strony prawa eksportacji i impostacji,

$\underbrace{(p \to q\,)}_{P} \to (\underbrace{(q \to r)}_{Q} \to \underbrace{(p \to r)}_{R})$ – bezkoniunkcyjny sylogizm hipotetyczny

$(\ P \to (\ Q \to\ R\ ))$ – prawa strona prawa eksportacji i impostacji

$\updownarrow$

A ponieważ prawo to jest równoważnością, więc – o oparciu o nią – sylogizm ten możemy zapisać w takiej postaci, jaką ma lewa strona prawa eksportacji i importacji:

$(\ P \wedge Q\ ) \to\ R\ )$ – lewa strona prawa eksportacji i impostacji

$[\overbrace{(p \to q))}^{P} \wedge \overbrace{(q \to r)}^{Q}] \to \overbrace{(p \to r))}^{R}$ – zmodyfikowany bezkoniunkcyjny sylogizm hipotetyczny do koniunkcyjnego sylogizmu hipotetycznego (są sobie równoważne!)

Powyżej powiedzieliśmy, co wyrażają tautologie o otaczającym nas świecie (nic!, są tylko schematami przekształcania jednych zdań prawdziwych w inne zdania prawdziwe; wszystkie one są truizmami).
Poniżej podamy jeszcze, **co wyrażają kontrtautologie i zadnia, które nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami**.

1) Kontratutologie same w sobie są bezwartościowe, gdyż są zdaniami zawsze fałszywymi. Jak to jednak zostało powiedziane kilka stron wyżej, ich negacja daje nam zawsze zdania zawsze prawdziwe (tautologie), a zatem do tego celu zawsze mogą się nam przysłużyć kontrtautologie.
2) Z kolei zdania, które nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami właściwie dopiero one (i tylko one) opisują nam zastany świat. Dokonują bowiem rozróżnień (inaczej: dystynkcji) wśród wszystkich możliwych sytuacji, poprzez wskazania przy których z nich owo zdanie jest prawdziwe, a przy których (=pozostały) jest ono fałszywe.

JAK SIĘ TWORZY FORMUŁY

Metody przechodzenia z formuł prawdziwych do formuł prawdziwych (a więc wyprowadzania z formuł prawdziwych formuł prawdziwych /a tylko na takich nam zależy!/) oddają nam reguły (rachunku zdań).
Reguły rachunku zdań otrzymujemy z dowolnego prawa rachunku zdań, będącego implikacją, zapisując najpierw jego poprzednik, potem go podkreślając, a pod kreską pisząc jego następnik. Tak na przykład, z prawa *modus ponendo ponens* ($((p \to q) \wedge p) \to q$), otrzymujemy tzw. regułę odrywania:

$$\frac{(p \to q) \wedge p}{q}$$

Jeśli (tak, jak w powyższym przykładzie), poprzednik jest koniunkcją, wówczas każdy z jego czynników zapisujemy w oddzielnej linii:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

Zdania zapisane nad kreską nazywamy przesłankami, a zdania spod kreski – wnioskiem. Przy takim nazewnictwie, ową regułę nazywamy schematem wnioskowania.

Możemy ją odczytać: ponieważ zachodzą przesłanki P1 i P2, więc i zachodzi wniosek W
lub: ponieważ zachodzi P1 i P2, zatem mamy wniosek W
lub: z przesłanek P1 i P2, wynika wniosek W
lub: …. (sam spróbuj podać kilka innych przykładów).

Omawiany tu rachunek zdań bazuje na dwóch wartościach logicznych: 1=prawda i 0=fałsz.
Istnieją również rachunki oparte na większej liczbie wartości logicznych – tzw. logiki modalne. Ponieważ jednak jesteś laikiem – póki co nie będę zaprzątać Ci nimi głowy. ☺

Pozostaniemy więc przy dziedzinie pracy Klasycznego Logika

> Klasyczny logik – logik zajmujący się logiką klasyczną, tą którą tu omawiamy, tj. dopuszczającą tylko dwie wartości logiczne: 1 = prawda i 0 = fałsz; termin utworzony analogicznie do np.: filozof = człowiek zajmujący się filozofią, algebraik = człowiek zajmujący się algebrą, ...

?

Zdaniem w logice nazywany każdą wypowiedź, a której można orzec, że jest prawdziwa lub że jest fałszywa. Do tego typu zdań zaliczają się więc zdani twierdzące i zdania przeczące. Nie są zaś nimi pytania, czy polecenia.

O zdaniu powiemy, że jest prawdziwe, jeśli jest ono zawsze prawdziwe. Na przykład zdanie: *Styczeń ma 31 dni* jest prawdziwe (styczeń zawsze ma bowiem 31 dni), a zdanie: *Luty ma 28 dni* nie jest już prawdziwe, bo nie zawsze luty ma 28 dni (zdarzają się bowiem takie lute [chyba jest to poprawna forma – W.L.], że mają 29 dni).
Mówimy tu o tzw. prawie generalizacji – gdy nie precyzujemy wypowiedzi, zawsze należy przyjąć, że poprzedzamy ją słowem „zawsze”.

Stąd też (omawiana już) prawdziwość zdania złożonego jest orzekana pozytywnie tylko wtedy gdy zachodzi zawsze – bez względu na wartości logiczne konstytuujących je zdań składowych. O zdaniu takim mówimy, że jest **prawdą logiczną** (każde zdanie o takim jak ono schemacie jest zawsze prawdziwe, bo schemat ten jest tautologią).

Z kolei tautologiczności zdań dowodzimy na podstawie jednej z podanych już wyżej lub za chwilę podanych metod:
1) tzw. pełna metoda 0-1-kowa - omówiliśmy ja już w przykładzie kilka stron wyżej, za pomocą tabeli (można też każdą z możliwości kombinacji 0 i 1 rozpisywać poza tabelę, jak to zrobiliśmy tam, przed tabelą zaledwie z jednym takim zestawem);
2) poprze wyprowadzenie jednych tautologii z drugich (wcześniej już udowodnionych), jak to rozbiliśmy z przytoczonym wcześniej zestawem trzydziestu kilku tautologii (stosujemy tu również tzw. prawo podstawiania i regułę odrywania).
3) metodą założeniową, jak to czyniliśmy z formułą nr 35,
4) niepełną metodą 0-1-kową

Poniżej omówimy ostatnią z tych metod. Właściwie jest to: dowód nie wprost niepełną metodą 0-1-kową.

„nie wprost” pisze się oddzielnie, jako 2 (a nie 3!) słowa **!**

Mamy udowodnić, że pewna formuła jest tautologią, czyli że zawsze przyjmuje wartość logiczną 1. I właśnie w dowodzie nie wprost przyjmujemy, że tak nie jest, tzn., że w pewnym przypadku przyjmie ona wartość logiczna 0. Jeśli na bazie tego dojdziemy do sprzeczności – będzie to znaczyć, że tak nie może być, a więc, że formuła ta nigdy nie przyjmuje wartości logicznej 0, czyli że zawsze przyjmuje wartość logiczną 1, czyli że jednak jest tautologią. Jeśli z kolei nie uda nam się znaleźć takie wartościowanie, przy którym formuła ta przyjmuję wartość logiczną 0, to będzie to oznaczać, że nie jest ono tautologią. Schematycznie:

Chcemy sprawdzić tautologiczność pewnej FRZ
Zakładamy, że przy pewnym wartościowaniu osiąga wartość logiczną. Są dwie możliwości:
1) udaje nam się znaleźć takie wartościowanie – wówczas ta FRZ nie jest tautologią,
2) dochodzimy do sprzeczności – formuła ta jest tautologią.

Zobaczmy to na konkretnych przykładach:

Przykład 1)
Weźmy formułę nr 24 (*modus tollendo ponens*), o której wiemy, że jest tautologia. Poniżej udowodnimy, że rzeczywiście.

$((p \vee q) \wedge {\sim}p) \rightarrow q$

0 - zakładamy, że ta formuła przyjmuje taką wartość logiczna

Ponieważ mamy tu do czynienia z implikacją – aby to mogło zajść, musi być, że

1 0 Jej poprzednik jest prawdziwy, a mimo to jej następnik jest fałszywy .

Co oznacza, że q=0,

1 1 a nadto, jako że koniunkcja jest =1, więc i każdy z jej czynników musi być -= 1

To daje nam, że skoro ~p = 1, więc p=0

Te dwie wartości podstawiamy tu i sprawdzamy, co nam wyjdzie

$0 \vee 0$

0 SPRZECZNOŚĆ!

Nie może więc być tak, że bazowa formuła przyjmuje wartość logiczna 0, a więc zawsze przyjmuje wartość logiczną 1, a więc jest tautologią.

Przykład 2)
Weźmy z kolei formułę jak poniżej. Poniżej udowodnimy, że nie jest ona tautologią

((p ∨ q) ∧ ~p) → p

0 - zakładamy, że ta formuła przyjmuje taką wartość logiczna

1 0 Ponieważ mamy tu do czynienia z implikacją – aby to mogło zajść, musi być, że Jej poprzednik jest prawdziwy, a mimo to jej następnik jest fałszywy .

1 1 Co oznacza, że p=0,
a nadto, jako że koniunkcja jest =1, więc i każdy z jej czynników musi być -= 1
To daje nam, że skoro ~p = 1, a więc znowu że p=0

Zastanówmy się, czy jest możliwe, aby przy ustalony p=0 to wyrażenie przyjmowało zadaną wartość logiczną 1.
a) gdy q=0, to mamy: 0 ∨ 0 , czyli 0,
b) a gdy q=1, to mamy: 0 ∨ 1 , czyli 1,
W tym drugim przypadku (przy p=0, q=1) zachodzi właśnie, że wyjściowa formuła jest wtedy fałszywa. Nie jest to więc tautologia.
Taki przykład obalający jakieś twierdzenie (czy tez przypuszczenie, że coś jest twierdzeniem) nazywany **kontrprzykładem**.

ZAPAMIETAJ: Dowodząc nie wprost, sprzeczność oznacza prawdziwość dowodzonej tezy, a znalezienie kontrprzykładu – jej prawdziwość .

Inną metodą jest <u>**metod drzew**</u>.

Aby móc ją stosować, najpierw wprowadzamy 9 reguł:

formuła	koniunkcja	alternatywa	implikacja	równoważność	negacja
bez negacji	1) $p \wedge q$ ――― p q	3) $p \vee q$ ――― p / \ q	5) $p \rightarrow q$ ――― $\sim p$ / \ q	7) $p \leftrightarrow q$ ――― $p \rightarrow q$ $q \rightarrow p$	
z negacją	2) $\sim(p \wedge q)$ ――― $\sim p$ / \ $\sim q$	4) $\sim(p \vee q)$ ――― $\sim p$ $\sim q$	6) $\sim(p \rightarrow q)$ ――― p $\sim q$	8) $\sim(p \leftrightarrow q)$ ――― $\sim(p \rightarrow q)$ / \ $\sim(q \rightarrow p)$	9) $\sim(\sim p)$ ――― p

Kreska oznacza tu: „możesz zastąpić przez / na”
To co jest pod nią:
a) jeśli zapisane jest „jedno pod drugim” – oznacza to, że zachodzą obydwa (tak jedno, jak i drugie),
b) jeśli zapisane są „w rozwidleniu” – oznacza to, że zachodzi co najmniej jedno z dwojga (a więc – innymi słowy – jedno lub drugie).

1) Tak więc regułą 1) oznacza, że koniunkcja oznacza zajście każdego z jej czynników.
2) Reguła 2) odnosi się do negacji koniunkcji, a ta (z prawa de Morgana) jest alternatywą negacji, a zatem i w ten sposób jest tu rozpisana.
3) Reguła 3) nie wymaga komentarza (bo wyraża ona fakt, że alternatywa, to alternatywa, i tyle!)
4) Negacja alternatywy, to koniunkcja negacji – stąd też w ten właśnie sposób to tu zaznaczyliśmy
5) Z tabeli prawdziwościowej: implikacja $p \rightarrow q$ oznacza, że nie może być tak, że zajdzie jej poprzednik, a nie zajdzie następnik: $\sim(p \wedge \sim q)$, a stąd dalej (z prawa de Morgana) otrzymujemy: $\sim p \vee \sim\sim q$ czyli $\sim p \vee q$, co właśnie zaznaczyliśmy w regule 5).
6) Jeśli implikacja $p \rightarrow q$ to $\sim(p \wedge \sim q)$ (co wyjaśniliśmy powyżej), to jej negacja: $\sim(p \rightarrow q)$ to $\sim\sim(p \wedge \sim q)$ czyli $(p \wedge \sim q)$, co właśnie oddaliśmy w tej regule
7) Równoważność to po prostu zachodzenie implikacji w obydwie strony
8) W takim razie (zgodnie z prawem de Morgana) negacja równoważności, to alternatywa ich negacji.
9) W końcu podwójna negacja się znosi.

W ten sposób omówiliśmy już wszystkie powyższe 9 reguł.

Bazując zaledwie na tych 9 regułach, możemy dowozić (czy tez sprawdzać tautologiczność) dowolnych formuł rachunku zdań.
Zobaczmy jak to się robi.
Weźmy więc „dowolną formułę języka rachunku zdań”.
Zapiszmy ją poprzedzając jej zapis znakiem negacji umieszczonym w kółku. Oznacza on 2 rzeczy:
1) że jest on dodany w ramach dowodu nie wprost
2) że obejmuje swym zasięgiem całą leżącą za nim formułę (a więc – dzięki temu – nie trzeba jej dodatkowo całej brać w nawias).

Potem cały ten zapis oddzielamy od tego, co dalej będziemy pod nim zaznaczać, linią prostą
I dalej pod nią stosujemy już te 9 reguł, przy czym:
1) robimy to tak długo, aż nie otrzymamy pojedynczych zmiennych lub ich negacji (reguły te pozwalają nam na to, bo stosują się do wszelkich spójników logicznych),
2) do formuły przetworzonej już nie wracamy (dlatego warto ją „odfajkować”, by spełnić zadość temu warunkowi),
3) możemy rozpisywać dowolną z jeszcze nie rozpisanych do końca formuł, pamiętamy jednak, że:
   a. najlepiej jeśli najpierw będziemy rozpisywać formuły, które sprowadzają się do koniunkcji (a więc rozpisują się „jedna pod drugą”), a dopiero potem sprowadzające się do alternatywy (a więc „rozwidlające się”),
   b. rozpisując po rozwidleniu formułę sprzed rozwidlenia – umieszczamy wynik działania na każdej z gałęzi, które z nich wychodzą (właśnie ze względu na tę zasadę, wprowadziliśmy powyższą sugestię a), aby nie powtarzać czegoś „po gałęziach”, co mogłoby po prostu tylko raz wystąpić „w pniu”)

Gdy już rozpiszemy kompletnie wszystkie formuły, wówczas w poszczególnych – powstałych w wyniku powyższej procedury – ścieżkach drzewa, występuje jakaś zmienna i jej negacja. Jeśli tak – to tę zmienną (samą czy poprzedzoną negacją) u dołu takiej ścieśni podkreślamy wężykiem i mówimy, że ta gałąź „wyschła”.
Zauważmy, że całą procedurę prowadziliśmy tu nie wprost. Sprzedaliśmy, czy podobna, aby cała formuła była kiedyś sprzeczna (poprzez jej zanegowanie na początku). I teraz:
1) przy takim założeniu wszystkie gałęzie „wyschną” – to musimy dać tu odpowiedź negatywną (bo zawsze doprowadza nas to do sprzeczności),
2) w przeciwnym razie (tj gdy co najmniej jedna gałąź „nie wyschnie” – to oznaczać to będzie, że) istnieje takie wartościowanie zmiennych zdaniowych rozpatrywanej formuły zdaniowej, że przy nim formuła ta przyjmuje wartość logiczną 0 (czy też – innymi słowy – jak to założyliśmy na początku po prostu jest fałszywa).

Prześledźmy tę procedurę na dwóch konkretnych przykładach.

<u>Przykład 1</u>.
$\otimes\ [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

$(p \to q) \wedge (q \to r)$
$\sim (p \to r)$
p
$\sim r$
$p \to q$
$q \to r$

$\sim q$ r ~~

$\sim p$ ~~ q ~~

Uwagi:
1) wszystkie gałęzie „wyschły” więc wyjściowo formuła jest tautologia.
2) Wyrażenia $p \to q$ nie rozpisywaliśmy na gałęzi r, bo gałąź ta już wyschła!

<u>Przykład 2</u>.

$\otimes\ [(p \to q) \wedge q] \to \sim p$

$(p \to q) \wedge q$

$\sim\sim p$

p

$p \to q$

q

$\sim p \qquad q$

$\sim\sim$

<u>Uwagi:</u>

1) wszystkie wyrażenia porozpisywaliśmy ,
2) Co prawda jedna gałąź uschła, ale druga – nie!
3) Zatem rozważana formuła nie jest tautologia.

Wyrażanie jednych spójników za pomocą innych, optymalizacja i ujednoznacznianie zapisu

Jak już zapewne zauważyłeś, zdanie wyrażone przy pomocy jednych spójników można wyrazić za pomocą innych. Tak na przykład:

1) dzięki prawu de Morgana dla alternatywy $[\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$ – negując jego obie strony, możemy alternatywę zapisać za pomocą koniunkcji i negacji $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)]$

2) z kolei dzięki prawu zaprzeczania implikacji $[\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)]$ – można zapisać implikację też za pomocą koniunkcji i negacji: $(p \to q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

3) Jeśli z kolei weźmiesz równoważność, to zauważysz, że w oparciu o prawo zaprzeczania równoważności:

$\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$, po zanegowaniu obydwu jego stron (i korzystając przy tym z prawa de Morgana) – można ją wyrazić za pomocą spójników koniunkcji i negacji: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$.

Tak więc każde wyrażenie języka rachunku zdań da się tak przekształcić, aby wyrazić je jedynie przy pomocy spójnika koniunkcji i negacji.

Analogicznych sprowadzeń można dokonywać z innymi zestawami spójników logicznych.

Zapytasz jednak zapewne: „po co nam ta zabawa?". Otóż dla 2 celów.

1) Zdanie złożone, które może brzmieć niejednoznacznie, dzięki odpowiedniemu przebudowaniu struktury stanie się ono jednoznaczne,
2) Możemy wykazać, że dwa zdania o innej strukturze znaczą dokładnie to samo (to znaczy np. ktoś wypowiada jakąś myśl w postaci zdania X, ty go nie rozumiesz i w związku z tym przekształcasz je do równoważnego mu zdania Y, które jest już dla ciebie zrozumiałe).

3) (dla zainteresowanych – można tez zastosować tzw. KPN, czyli koniunkcyjną postać normalną)

Jeśli Jan jest rozsądny – to oczywiście przystąpi do matury; a – i oczywiście nie ożeni się z Kaśką!

Nie wiemy jak je interpretować. Czy jako $(p \to q) \wedge r$, czy też jako: $p \to (q \wedge r)$.

Aby to wiedzieć można:

1) odpowiednio (pod względem intonacyjnym dla danej sytuacji) przeczytać to zdanie,
2) przy pomocy odpowiednich słów akcentujemy dane znaczenie – np. drugie mówiąc:
   Jeśli Jan jest rozsądny – to zarówno przystąpi do matury jak i – co do ożenku – zostawi Kaśkę na lodzie!
3) zmieniając jego strukturę – na przykład w I znaczeniu $[(p \to q) \wedge r]$, korzystając z prawa przemienności koniunkcji $(p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p)$ – otrzymamy $[r \wedge (p \to q)]$, czyli powiemy:
   Jan na pewno nie ożeni się z Kaśką, a jeśli Jan jest rozsądny – to oczywiście przystąpi do matury.

Można tak się „bawić" również z innymi spójnikami".

Zauważ jednak, że wynikowo otrzymaliśmy 2 spójniki.

Zaciekawi cię więc zapewne, czy istnieje taki spójnik, że za jego pomocą można oddawać wszystkie pozostałe.

Odpowiem Ci, że tak, i to nawet są 2 takie spójniki.

Jeden nazywa się kreska Sheffera, a drugi strzałka Pierce'a.

1) kreska Sheffera: $p|q \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Inne funktory logiczne za jej pomocą definiowane są w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
&\neg p = p|p,\\
&p \wedge q = \neg\neg(p \wedge q) = \neg(p|q) = (p|q)|(p|q),\\
&p \vee q = \neg\neg(p \vee q) = \neg((\neg p) \wedge (\neg q)) = \neg((p|p) \wedge (q|q)) = (p|p)|(q|q),\\
&p \rightarrow q = p|(q|q) = p|(p|q).
\end{aligned}$$

Jej znaczenie przedstawia poniższa tablica prawdy:

A	B	A*B[neg]
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

W algebrze Boole'a i układach przełącznikowych opisuje się je jako NAND

2) Strzałka Pierce'a – to zdanie ani p ani q, czyli p↑q ↔ ~p ∧ ~q
W algebrze Boole'a i układach przełącznikowych opisuje się je jako NOR

Semantyka, a syntaktyka
Syntaktyka – to inaczej struktura, budowa (w rachunku zdań – formuł rachunku zdań)
Semantyka – to z kolei znaczenie.

Zasady przekształcania formuł z wykorzystaniem innych formuł, podstawowe prawa i metody (odrywania, podstawiania – w oparciu o odpowiednie reguły
Istnieje aksjomatyczna metoda przekształcanie jednych formuł rachunku zdań w drugie
W tym celu część z nich obiera się jako „aksjomaty", a resztę wyprowadza się z nich za pomocą 2 narzędzi: odrywania i podstawiania.
1) jeśli wiemy, że prawdziwe są formuły p → q i p, to i prawdziwa jest formuła q.
2) w formule można (konsekwentnie) zastąpić dowolną zmienną dowolnym (poprawnie pod względem syntaktycznym) zbudowanym wyrażeniem języka rachunku zdań (nie musi być tautologią), a uzyskamy tym samym tautologię.
2 podejścia (tautologiczne i formalne)
Jest to tzw. aksjomatyczna metoda dowodowa. Z niej otrzymujemy prawa. Pokazuje się (jest to tzw twierdzenie o zupełności rachunku zdań), że wszystkie tautologie, to dokładnie wszystkie prawa!.

Czemu jest równoważna implikacja?
Jak już się przekonałeś, implikacja jest naczelnym spójnikiem w logice. Oznacza ona bowiem wynikanie (z przesłanek wniosku), a logika, to nauka o dowodzeniu (a więc wykazywaniu, że z danych przesłanek rzeczywiście wynika wskazany wniosek).

Przypatrzmy się więc bliżej implikacji.

<u>I aspekt</u>
Wiesz, że można ją czytać na różne sposoby:
1) Jeśli …., to….
2) O ile tylko ….., wówczas ……
3) Skoro (jako że)…., zatem….
4) Ponieważ …., więc …..
Widzisz zapewne, że każde z nich mówi trochę co innego (nie od parady język polski jest bogaty).
Najłatwiej zauważysz, że pierwsze dwie z powyższych wyrażają **potencję** (zajdzie wniosek, gdy tylko zajdzie jego przesłanka). Z kolei dwie ostatnie wyrażają **aktualność** – zaszła przesłanka, więc i zachodzi wniosek.

<u>II aspekt</u>
Ważne, abyś pamiętał, że implikacja, to nie równoważność. Nie jest więc prawem logiki następująca formuła: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$. Zachodzi za to (znane Ci już) prawo transpozycji: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

III aspekt

Wprost z tabeli prawdziwościowej otrzymujemy, że: więc stosując prawo podwójnej negacji ($\sim\sim q \leftrightarrow q$) – otrzymujemy:

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim\sim q \leftrightarrow \sim p \vee q$$

a jako że dalej (z prawa de Morgana):

Drugie z tych wyrażeń wyklucza sytuację, gdy implikacja nie zachodzi (= przyjmuje wartość logiczną 0), a ostatnie z nich – wskazuje 3 sytuacje, gdy implikacja zachodzi (= przyjmuje wartość logiczną 1).

IV aspekt

Wynika on z zanegowania pierwszej z powyższych równoważności, czyli (finalnie) z:
$\sim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.
Chodzi o to, że jeśli chcemy udowodnić zachodzenie implikacji (a większość formuł jest właśnie w postaci implikacji), to wystarczy ją zanegować i dojść do sprzeczności – jej lub równoważnej jej (podanej tu po prawej stronie równoważności) formuły (**o dowodach tego typu piszemy poniżej**).

Zobaczmy, jak wygląda tabeli implikacji

p	q	$\to$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Zauważ mianowicie, że jest ona fałszywa tylko w jednym przypadku – gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Niesie to ze sobą kilka implikacji:

1) gdy poprzednik implikacji jest fałszywy, to cała implikacja jest prawdziwa (niezależnie od wartości następnika!). Matematycy mówią, że implikacja orzeka, co będzie jak zajdzie warunek – że musi i wtedy zajść wniosek (a więc że jedynie nie może być tak, że zajdzie warunek, a wniosek nie). Oznacza to, że gdy warunek nie zajdzie – to wniosek może zarówno zajść, jak i nie (a implikacja i tak będzie wtedy prawdziwa). W takiej sytuacji badanie, czy zachodzi implikacja przeprowadza się jedynie sprawdzając, co się dzieje gdy zachodzi poprzednik – gdy będzie i wtedy zachodzić następnik, to implikacja jest prawdziwa, a w przeciwnym razie (tj. gdy następnik nie zajdzie wtedy) – to implikacja jest fałszywa). Krócej możemy to ująć następująca: aby zbadać prawdziwość implikacji, sprawdzamy jaka jest wartość następnika przy prawdziwym poprzedniku, i taką też wartość przyjmuje ta implikacja, jak ów następnik.
2) Istnieją tu dwie metody badania prawdziwości implikacji. Zakłada się mianowicie, że jej poprzednik jest prawdziwy (bo gdy jest fałszywy – to nie ma co badać, bo wtedy i tak /bez względu na wartość następnika/ cała implikacja jest prawdziwa). Wtedy możemy prowadzić dowód metodą wprost lub nie wprost:
   a) dowód metodą wprost – przy założeniu zachodzenia poprzednika implikacji, dowodzimy że musi wtedy zajść jej następnik (co – innymi słowy – daje nam, że nie może wtedy nie zajść jej następnik). Jeśli nam się uda – świadczy to o prawdziwości tejże implikacji.
   b) dowód metodą nie wprost – przy założeniu zachodzenia poprzednika implikacji, zakładamy jej następnik nie zachodzi i:
      – albo dochodzimy do sprzeczności, co świadczy, że nie jest taka sytuacja możliwa, tzn., że przy prawdziwym poprzedniku i następnik musi być prawdziwy, czyli, że implikacja ta jest prawdziwa,
      – albo znajdujemy taki przykład, który świadczy że jest to możliwe (taki przykład nazywa się kontrprzykładem) i tym samym obalamy twierdzeniem, że dowodzona implikacja jest prawdziwa.

Dodatkowe informacje z zakresu logiki

1) Mówimy, że dane zdanie jest prawdą logiczna, jeśli każde Zanie o takiej jak ono strukturze (syntaktycznej) jest zawsze prawdziwe – jedynie ze względu na swą strukturę (a więc gdy jego schemat jest tautologią).
2) Mówimy, że zdanie Z2 wynika logicznie ze zdania Z1, gdy zdanie postaci Z1 $\to$ Z2 jest prawdą logiczną.

3) Mówimy z kolei że zdania Z1 i Z2 są równoważne logicznie, gdy zdania zarówno Z1 → Z2 jak i Z2 → Z1 są prawdami logicznymi. (czyli innymi słowy /w oparciu o prawo nr 19: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$ – **prawo zastępowania równoważności**), że Z1 ↔ Z2.

Wynikanie dedukcyjne.
Bazując na powyższym p. 2), wprowadzimy pojęcie wnioskowania dedukcyjnego. Mówimy mianowicie, że Z przesłanki P można wyprowadzić w sposób dedukcyjny wniosek W, jeśli zdanie postaci P → W jest prawdą logiczną.
Żeby zbadać dedukcyjność wnioskowania badamy więc tautologiczność odpowiadającego mu schematu zdaniowego. Czynimy to metodą nie wprost. Patrzymy czy możliwym jest, aby cała formuła (P → W) była kiedyś fałszywa. Może to zachodzić tylko w jednej sytuacji – gdy P = 1, a W = 0. Jeśli znajdziemy takie wartościowanie zmiennych zdaniowych, z których zbudowane są zdania P i W o powyższych wartościach logicznych – wówczas zadamy kłam tezie, że wnioskowanie to jest dedukcyjne, Jeśli jednak dojdziemy do sprzeczności – to wówczas udowodnimy, że z prawdziwej przesłanki nie może wynikać fałszywy wniosek, więc – innymi słowy, że i wniosek musi być wtedy prawdziwy (co dowodzi nam dedukcyjności badanego wnioskowania).
Zwykle zamiast P → W piszemy

$$\frac{P}{W}$$

co czytamy: z przesłanki P wynika wniosek W (kreska – to właśnie „wynika”),
a przy badaniu dedukcyjności tegoż wnioskowania zapisujemy

$$\frac{P = 1}{W = 0}$$

I rozpisujemy te wyrażenia

Zobaczmy to na konkretnym przykładzie.

Przykład 1.
Zbadaj dedukcyjność wnioskowania:
Jeśli Jan zakochał się w Marii, to jest w niej zabujany, ale na pewno nie jest w niej zabujany. Zatem Jan nie zakochał się w Marii.
Mamy tu przesłankę P = „Jeśli Jan zakochał się w Marii, to jest w niej zabujany, ale na pewno nie jest w niej zabujany.” Oraz wniosek W = „Jan nie zakochał się w Marii.” (słowo „zatem rezerwujemy dla strzałki w I sposobie zapisu lub kreski przy drugim sposobie zapisu).
Wyszczególnijmy występujące tu zdani proste:
1) najpierw z przesłanki:
p – Jan zakochał się w Marii.
q – Jan jest zabujany w Marii (zauważ przy tym, że „jest w niej zabujamy” przekształciliśmy do przedstawionego tu PEŁNEGO zdania prostego – uzupełnionego o podmiot domyślny „Jan” i wskazany prze słówka „jej” – „Marii”).
Zdanie „na pewno nie jest w niej zabujany” już nie definiujemy, bo już je mamy – jest ono po prostu negacją zdania q
2) następnie z wniosku – w tym przypadku również nie musimy definiować zdania *Jan nie zakochał się w Marii* (jako nowego zdania prostego), gdyż jest ono po prosty negacją zdania p.

Tak więc	Będziemy wychodzić od formuły $\frac{P}{W}$	i wartościować ją następująco” $\frac{P = 1}{W = 0}$
Czynimy więc to:	Wychodzimy od formuły: $\frac{(p\to q) \wedge \sim q}{\sim p}$	Wychodzimy od formuły: $\frac{(p\to q) \wedge \sim q \;\; = 1}{\sim p \;\; = 0}$

Wnioskujemy:
1) skoro ~p = 0 , więc p = 1.
2) Skoro $(p\to q) \wedge \sim q = 1$, więc:
   - tak $(p\to q) = 1$,

- jak i ~q = 1 (a stąd q = 0).

3) Mając „obliczone” (a właściwie: wydedukowane) p = 1 i q = 0 , podstawiamy te wartości do implikacji tak $p\to q$ (która ma być = 1), i otrzymujemy $1\to 0 = 0$, co jest SPRZECZNE z faktem, że mam być = 1!
4) Doszliśmy do sprzeczności (w metodzie nie wprost), więc udowodniliśmy tym samym, że wnioskowanie JEST dedukcyjne.

Często w poprzedniku implikacji mamy tu nie jedna, lecz wiele przesłanek.
Wnioskowanie, które badamy jest więc postaci: $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \to W$,

Tak więc	badając wnioskowanie: $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \to W$	będziemy zakładać (nie wprost) $[\, P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \to W \,] = 0$, Czyli $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn = 1$ i $W = 0$, Czyli $P1 = 1$, $P2 = 1$, …, $Pn = 1$ i $W = 0$
Czyli	Wnioskowanie P1 P2 … Pn ——— W	będziemy wartościować (w ramach „dowodu nie wprost”) P1 = 1 P2 = 1 … Pn = 1 ——— W = 0

Pozostaje nam jeszcze jedna kwestia – badanie niesprzeczności zbioru zdań:
Czy dany zbiór zdań jest niesprzeczny, tj. czy równocześnie mogą ze sobą współistnieć.
- czyli czy może być $Z1 \wedge Z2 \wedge \ldots \wedge Zn = 1$. Oznacza to zbadanie, czy równocześnie może być:
Z1 = 1 i Z2 = 1 i … i Zn = 1.
Tym razem jest to metoda „wprost”. Jeśli w tej sytuacji uda nam się znaleźć takie wartościowanie zmiennych zdaniowych konstytuujących te zdania, to będzie znaczyło, że zdania te są niesprzeczne. Z kolei gdy z tej sytuacji doprowadzimy do sprzeczności – będzie to znaczyło, że zdania te tworzą sprzeczny zbiór.
Co nadto, jeśli tylko zdani te będą tworzyć sprzeczny zbiór, to ich koniunkcja będzie miała wartość logiczną 1, a co za tym idzie z ich koniunkcji (jako zdania fałszywego) będzie można wyprowadzić dowolne zdanie (tak prawdziwym jak i fałszywe, bo tak właśnie jest, gdy poprzednik jest fałszywy, a ta koniunkcja będzie właśnie owym poprzednikiem – koniunkcją przesłanek).

B. RACHUNEK PREDYKATÓW

Rachunek zdań nie wystarcza do opisu tak łożonej materii, jaką jest język. Dokładnie, chodzi mi tu o zdania zawierające sformułowania typu: wszystkie, żadne, niektóre, do konstrukcji których potrzebny jest już rachunek predykatów, zwany również rachunkiem kwantyfikatorów.

Oczywiście, musimy zacząć od zaznajomieni się z tymi pojęciami, abyśmy wiedzieli, o czym mówimy.

Choć kwantyfikator i predykat, to dwa zupełnie różne twory, to jednak, jako że (oprócz narzędzi i tworów jakie dostarcza nam rachunek zdań) do konstrukcji wyrażeń w tym rachunku używa się właśnie charakterystycznych dla niego predykatów i kwantyfikatorów (oraz obiektów z nimi związanych, jakimi są **zmienne indywiduowe** /które w skrócie będziemy nazywać **zmiennymi**/ i **nazwy indywidualne** /zastępują **konkretne obiekty**/) – to właśnie ich nazwy stały się częściami składowymi dwóch równoważnych sobie nazw tego rachunku (predykatów vel kwantyfikatorów).

Zacznijmy od **kwantyfikatorów**. Już zapewne zetknąłeś się z nimi w szkole.

1. Symbolu „**Λ**” używamy dla oddania kwantyfikatora zwanego (wymiennie): dużym, generalnym i ogólnym. Wymaga się, aby znalazła się pod nim jeszcze zmienna do której on się odnosi (tj. – innymi słowy – o której opiewa). Wtedy przybiera on postać $\underset{x}{\Lambda}$ i czytamy go „dla każdego *x*”, ewentualnie z dopowiedzeniem „jest tak, że” (oczywiście, zamiast *x*-a, może stać tam dowolna inna zmienna). Teraz za nim musi jeszcze stać wyrażenie mówiące, co jest z tym *x*-em, co się z nim dzieje. Do budowy tego typu wyrażeń używa się tzw. **predykatów**. Najprostsze są jednoargumentowe, postaci $P(x)$, które czytamy „*x* jest *P*”, gdzie w miejsce *P* należy wstawić wyraz (przymiotnik lub rzeczownik), który jest przez nie reprezentowany (*P* jest nazwą tego predykatu, a *x* – jego argumentem). Ponieważ najlepiej jest dobierać oznaczenia mnemotechniczne, zatem w tym przypadku znaczy to np. „*x* jest pijany” albo „*x* jest pijakiem”.

> Oznaczenie mnemotechniczne – zgodne z nazwą, oparte o nią, kojarzące się z nią, nawiązujące do niej, np. zbiór ludzi oznaczamy przez *L* (od: ludzie) lub C (od: człowiek, co będzie wygodniejsze przy czytaniu predykatu), a nie przez np. przez *K*

?

Przyjmijmy, że $P(x)$ oznacza „x jest poczciwy".
Wtedy w sumie będziemy mieć: $\bigwedge_{x} P(x)$, a przeczytamy to: „dla każdego x, x jest poczciwy", lub (bardziej po polsku) „wszystkie x-y są poczciwe". To jednak jeszcze nie koniec. Nie wiemy bowiem, co to za x-y, a to dlatego, że nie określiliśmy dziedziny, a - powiedzmy - chcemy, aby nasza formuła odnosiła się do ludzi.
Najwyższa więc pora to naprawić. Możemy to zrobić na kilka sposobów:

1) wcześniej z góry zaznaczyć, na jakim zbiorze operujemy (w naszym przypadku: na zbiorze ludzi), i wtedy formułę tę przeczytamy: „dla każdego obiektu ze zbioru ludzi jest tak, że jest on poczciwy", czyli po prostu (po polsku!): „Każdy człowiek jest poczciwy";
2) przyjąć oznaczenie: L – zbiór ludzi, i wtedy formułę tę zapisać w postaci $\bigwedge_{x \in L} P(x)$, i wtedy formułę tę przeczytamy: „każdemu x-owi ze zbioru ludzi, przysługuje własność bycia poczciwym", czyli innymi słowy: „każdy człowiek jest poczciwy";
3) przyjąć oznaczenie L nie za zbiór ludzi, lecz za predykat, i wtedy zapisalibyśmy to tak $\bigwedge_{L(x)} P(x)$, co przeczytalibyśmy w następujący sposób: „dla każdego x-a, co jest człowiekiem, jest tak, że jest on poczciwy", czyli znowu po prostu: „każdy człowiek jest poczciwy".

co = który, która; w języku polskim archaizm, ale użycie jak najbardziej poprawne (porównaj z cytatem z Inwokacji z „Pana Tadeusza": „Panno Święta, co Jasnej bronisz Częstochowy (...)"), stosowany tu ze względu na większą przydatność od określeń synonimicznych

?

2. Symbolu „**V**" używamy dla oddania kwantyfikatora zwanego (wymiennie): małym, egzystencjalnym i szczególnym. Analogicznie, jak powyżej, zapis $\bigvee_{x}$ czytamy „istnieje (takie) x (, że)". Teraz, przy założeniu jak powyżej, że $P(x)$ oznacza „x jest poczciwy", wyrażenie $\bigvee_{x} P(x)$, przeczytamy: „istnieje takie x (dla pewnego x, pewien x) jest poczciwy". To znowu jednak jeszcze nie koniec. Nie wiemy bowiem, co to za x-y, a wiemy, że chcemy, aby nasza formuła odnosiła się do ludzi. Wtedy znowu:

1) jeśli wcześniej z góry zaznaczymy, na jakim zbiorze operujemy (w naszym przypadku: na zbiorze ludzi), to formułę tę przeczytamy: „dla pewnego obiektu ze zbioru ludzi jest tak, że jest on poczciwy", czyli po prostu (po polsku!): „Pewien człowiek jest poczciwy";
2) przyjmując oznaczenie: L – zbiór ludzi, formułę tę zapisujemy w postaci $\bigvee_{x \in L} P(x)$, i czytamy ją: „pewnemu x-owi ze zbioru ludzi, przysługuje własność bycia poczciwym", czyli innymi słowy: „pewien człowiek jest poczciwy";
3) przyjmujemy oznaczenie L nie za zbiór ludzi, lecz za predykat, i wtedy zapisujemy to tak $\bigvee_{L(x)} P(x)$, co czytamy: „pewien x-a, co jest człowiekiem, jest poczciwy", czyli znowu po prostu: „pewien człowiek jest poczciwy" lub: „niektóry ludzie są poczciwi".

UWAGA
To, że coś istnieje, oznacza, że istnieje „to coś" co najmniej jedno (tj. jedno lub więcej).
Tak mieliśmy właśnie powyżej: „istnieje człowiek, który jest poczciwy", tj. „pewien człowiek jest uczciwy". Stwierdzenie, że istnieje coś jedno, gwarantuje, że takie coś istnieje, ale nie orzeka w jakiej liczbie, tj. być może – co znamienne, w życiu zwykle tak bywa – w większej liczbie. Zapewne z tego powodu, jak również ze względu n specyfikę języka naturalnego, w takiej sytuacji mówimy zwykle „niektórzy [liczba mnoga!] ludzie są poczciwy", co jednak musi oznaczać dla nas, że gdy mamy takie zdanie, to powinniśmy rozumieć je jako „istnieje ...", a nie „istnieją..."! Mamy w logice metody oddawania tego typu zdań. Otóż, stwierdzenie „istnieją ..." znaczy, że są 2 lub więcej. Można też oddać zdania „istnieje co najmniej n", „istnieje co najwyżej n" i „istnieje dokładnie n" dla dowolnego n naturalnego, i to z wykorzystaniem jedynie tych środków, które już znamy. Ponieważ jednak w dalszej części kursu nie będzie to nam już potrzebne – w związku z tym nie będziemy już rozwijać tego tematu. Bądź co bądź jedna z zasad dydaktyki mówi, że lepiej jest niedomówić, niż przegadać, gdyż w tym pierwszym przypadku zaintrygujemy czytelnika /słuchacza, a w tym drugim, niestety jedynie zniechęcimy przez znudzenie. Wspomnijmy jedynie, że w matematyce istnieje nieformalna metoda oddawania faktu, że istnieje dokładnie 1 x, które spełnia określony warunek. Oddaje się to za pomocą wykrzyknika umieszczonego bezpośrednio za znakiem małego kwantyfikatora: $\bigvee!_{x} P(x)$, co czytamy: „istnieje dokładnie jeden x, który spełnia warunek $P(x)$".

„co najmniej” i „co najwyżej” pisz oddzielnie!

Oprócz predykatów jednoargumentowych, mamy tez predykaty dwu-, trzy- i więcej- argumentowe. Np.:
$B(x,y)$ – x jest bogatszy od y-a
$M(x,2)$- x jest mniejsze od 2; równoważny mu: $x < 2$; jako argumenty nie muszą więc Występować tylko zmienne, ale i konkretne wartości (tu: 2), o czy była zresztą mowa na początku tego paragrafu (zobacz: zmienne indywiduowe i nazwy indywidualne), 2-argumentowe
$P(x,y,z)$ – x pożyczył y-owi z-a. - 3-argumentowy

Spostrzeżenia:

1. Przypatrzmy się zdaniu: $\bigvee_{x<5} x<2$. Oczywiście przeczytamy je: istnieje takie $x<5$, że $x<2$ lub (innymi słowy): istnieje x takie, że $x<5$ i $x<2$. Można to więc zapisać: $\bigvee_{x} (x<5 \wedge x<2)$.

   Tak więc: : $\bigvee_{x<5} x<2 \leftrightarrow \bigvee_{x} (x<5 \wedge x<2)$.

   Widzimy więc, że jeśli mamy zdanie szczegółowe z predykatem pod kwantyfikatorem, to możemy zamienić je na równoważne mu, wyciągnąć ów predykat za kwantyfikator i łącząc go z resztą wyrażenia znakiem koniunkcji, a pod kwantyfikatorem zostawiając tylko jego argument.

   Dla niezorientowanych – na chłopski rozum (gdyż bądź co bądź jest to „matematyka dla laika”) – predykat to formalne ujęcie pewnej własności przynależne pewnym obiektom. U nas są obiekty x i 2, a zależność jak między nimi zachodzi, to: $x < 2$. Można ją tez zapisać: $M(x,2)$ – „x jest mniejsze od 2”.

2. Przypatrzmy się z kolei zdaniu: $\bigwedge_{x<5} x<2$. Oczywiście przeczytamy je: dla każdego $x<5$ jest tak, że $x<2$ lub (innymi słowy): dla każdego x jest tak, że jeśli $x<5$, to $x<2$. Można to więc zapisać: $\bigwedge_{x} (x<5 \rightarrow x<2)$.

   Tak więc: $\bigwedge_{x<5} x<2 \leftrightarrow \bigwedge_{x} (x<5 \rightarrow x<2)$.

   Widzimy więc, że jeśli mamy zdanie ogólne z predykatem pod kwantyfikatorem, to możemy zamienić je na równoważne mu, wyciągając ów predykat za kwantyfikator i łącząc go z resztą wyrażenia znakiem implikacji, a pod kwantyfikatorem zostawiając tylko jego argument.

Te dwa spostrzeżenia dają nam metodę pozbywania się predykatu spod znaku kwantyfikatora.
Przypatrzmy się bliżej drugiemu z nich.

Otóż, nieraz mamy do czynienia ze stwierdzeniami kategorycznymi tyczącymi się obiektów, które nie istnieją. Np. przy założeniu, że ufoludki nie istnieją, stwierdzenie „wszystkie ufoludki są zielone” jest prawdziwe!
Rzeczywiście. Oznaczmy:
$U(x)$ – x jest ufoludkiem
$Z(x)$ – x jest zielony
Wtedy zdanie to możemy wyrazić w następujący sposób: $\bigwedge_{U(x)} Z(x)$
jak również – z jego przekształcenia według metody podanej w 2. spostrzeżeniu: $\bigwedge_{x} (U(x) \rightarrow Z(x))$.

a jako że zawsze (tj. dla dowolnego x, jakiego byśmy tylko nie brali) $U(x) = 0$,

jakiego byśmy tylko nie brali = jakikolwiek byśmy brali, a to ze względu na specyfikę języka polskiego

?

a co za tym idzie, ponieważ jest to poprzednik implikacji, zatem cała ta implikacja („nawias”) jest prawdziwa (implikacja o fałszywym poprzedniku zawsze /tj. bez względu na wartość logiczną następnika/ jest prawdziwa), a to dodatkowo poprzedzone kwantyfikatorem „dla każdego x”, daje nam w sumie formułę „zawsze prawdziwą”, a więc po prostu prawdziwą.

Schematycznie:
$\underbrace{\bigwedge_{x} (\underbrace{U(x)}_{0} \rightarrow Z(x))}_{1}$.

Wniosek
„Wszyscy” może więc oznaczać „żaden”.

Zanim przejdziemy dalej, wprowadźmy dwa **prawa** de Morgana dla rachunku predykatów:
I **prawo** de Morgana dla rachunku predykatów: $\sim \underset{x}{\Lambda}\ \Phi(x) \leftrightarrow \underset{x}{\mathrm{V}} \sim\Phi(x)$
II **prawo** de Morgana dla rachunku predykatów: $\sim \underset{x}{\mathrm{V}}\ \Phi(x) \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} \sim\Phi(x)$
gdzie $\Phi(x)$ oznacza dowolne wyrażenie rachunku predykatów, zawierające (choć szczerze mówiąc niekoniecznie) zmienną indywiduową x.
Prawa te mówią nam o przechodzeniu znaku negacji przez (w lewo lub w prawo) znak kwantyfikatora (dużego lub małego). Nieformalnie, w skrócie, łącznie, a zarazem metodologicznie, prawa te można ująć w następujący sposób:
Przy przechodzeniu negacji przez znak kwantyfikatora zmieniamy jego orientację na przeciwną (tj. z dużego na mały czy też z małego na duży).
I prawo de Morgana mówi, że sformułowanie „nie wszystkie spełniają” jest równoważne stwierdzenie „pewien nie spełnia”
II prawo de Morgana mówi, że sformułowanie „nie istnieje taki, który by spełniał” jest równoważne stwierdzenie „każdy (tj. w języku polskim: żaden) nie spełnia”.

Inną konsekwencją owych spostrzeżeń jest **fakt**, że
1) z kwantyfikatorem ogólnym związany jest spójnik zadaniowy implikacji
2) z kwantyfikatorem szczególnym związany jest spójnik zdaniowy koniunkcji.

Przykład
Niech:
M(x) – x jest muzykalny
F(x) – x jest fizykiem
Operujemy na uniwersum ludzi.
Spójrzmy teraz na zdania:

1) niektórzy fizycy są muzykalni: $\underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge M(x)]$
2) niektóre osoby muzykalne są fizykami: $\underset{x}{\mathrm{V}} [M(x) \wedge F(x)]$
3) niektórzy fizycy nie są muzykalni: $\underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge \sim M(x)]$
4) niektóre osoby muzykalne nie są fizykami: $\underset{x}{\mathrm{V}} [M(x) \wedge \sim F(x)]$
5) wszyscy fizycy są muzykalni: $\underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow M(x)]$
6) wszystkie osoby muzykalne są fizykami: $\underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow F(x)]$
7) żaden fizyk nie jest muzykalny: $\sim \underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge M(x)]$ lub: $\underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$
8) żadna osoba muzykalna nie jest fizykiem: $\sim \underset{x}{\mathrm{V}} [M(x) \wedge F(x)]$ lub: $\underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow \sim F(x)]$
9) tylko fizycy są muzykalni: $\underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow F(x)]$
10) tylko muzykalne osoby są fizykami: $\underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow M(x)]$
11) nie tylko fizycy są muzykalni: $\sim \underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow F(x)]$ lub: $\underset{x}{\mathrm{V}} [\sim F(x) \wedge M(x)]$
12) nie tylko muzykalne osoby są fizykami: $\sim \underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow M(x)]$ lub: $\underset{x}{\mathrm{V}} [\sim M(x) \wedge F(x)]$

13) tylko fizycy nie są muzykalni: $\Lambda_x [\sim M(x) \rightarrow F(x)]$

14) tylko muzykalne osoby nie są fizykami: $\Lambda_x [\sim F(x) \rightarrow M(x)]$

15) nie tylko fizycy nie są muzykalni: $\sim \Lambda_x [\sim M(x) \rightarrow F(x)]$ lub: $V_x [\sim M(x) \wedge \sim F(x)]$

16) nie tylko muzykalne osoby nie są fizykami: $\sim \Lambda_x [\sim F(x) \rightarrow M(x)]$ lub: $V_x [\sim F(x) \wedge \sim M(x)]$

Klamrami umieszczonymi z prawej strony dodatkowo ująłem tu zdania (a co za tym idzie – formuły) „mówiące" dokładnie to samo (choć oczywiście innymi słowy).

Uwaga
Zauważ, że w formułach tych (wszystkich, a więc i zmodyfikowanych – tych po słowie „lub"), rzeczywiście stosuje się ostatnio podany fakt o „skojarzeniu": „$\rightarrow$" z „Λ" i „ $\wedge$" z „V".

Apel
Laiku! Nie ucz się tego zestawienia na pamięć! Jeśli się tego nauczysz na pamięć, to będzie znaczyć, że: laikiem byłeś, laikiem jesteś i laikiem pozostaniesz! ...a chyba tego nie chcesz. Ja pisząc tę książkę, zestawienie to stworzyłem „z głowy". Tobie je podaję, abyś w czasie nauki „nie zbłądził". Gdy bowiem już się nauczysz, czyli innymi słowy „będziesz rozumiał to, co mówisz, a w następstwie tego, będziesz umiał to zapisać", to po co nadaremno to wkuwać? Po to, aby niepotrzebnie obciążać swój umysł? Doprawdy …nie warto!

A więc do pracy! (czy jak kto woli – do roboty!)
Objaśnienie powyższego przykładu
Przyjmijmy skrótowe oznaczenia: F – fizyk / fizycy , M – muzykalny / muzykalni

LP	Typ formuły	Nr w zestawieniu, gdy w miejscu kropek odpowiednio:	
		F , M	M, F
1	Pewien ... jest ...	1	2
2	Pewien ... nie jest ...	3	4
3	Każdy ... jest ...	5	6
4	Każdy (tj. żaden) ... nie jest ...	7	8
5	Tylko ... są ...	9	10
6	Nie tylko ... są ...	11	12
7	Tylko ... nie są ...	13	14
8	Nie tylko ... nie są ...	15	16

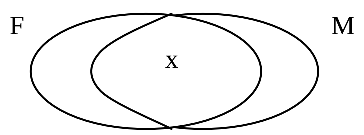
Mamy więc 8 typów formuł, a w każdym typie po dwie, ze względu na możliwość przestawiania predykatów miejscami. Owe 8 typów dzieli się na 2 kategorie:
- o LP 1 – 4 (pewien / każdy ... jest / nie jest ...)
- i o LP 5 – 8 (tylko / nie tylko ... są / nie są ...).

Zestawienie to zostało więc stworzone bardzo systemowo (po jęcie to zostało opisane w metodyce pracy!), a dzięki temu jest ono przejrzyste i wyczerpujące.

Poniżej zobaczmy po kolei, jak je tworzyłem.

W tym celu wykorzystamy wykresy – diagramy, zakresów nazw:
- fizyk, a więc obrazujący zbiór wszystkich fizyków – oznaczymy go przez F,
- osoba muzykalna, a więc zbiór wszystkich osób muzykalnych – oznaczymy go przez M.

<u>Ad 1</u> niektórzy fizycy są muzykalni

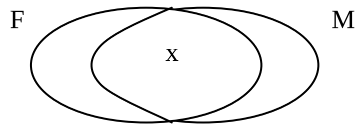


x – oznacza, że w polu w którym się znajduje, musi coś być

Zdanie to mówi, że *wśród fizyków muszą znaleźć się osoby muzykalne*,
czyli innymi słowy, że *muszą być takie osoby, które będąc fizykami są muzykalne*,
czyli że *są takie osoby, które jednocześnie są fizykami i są muzykalne*.

Tą właśnie myśl oddaje zapis $\underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge M(x)]$

<u>Ad 2</u> niektóre osoby muzykalne są fizykami

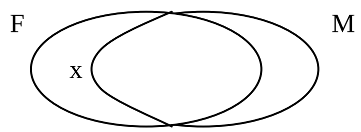


Zdanie to mówi, że *wśród osób muzykalnych muszą znaleźć się fizycy*,
czyli innymi słowy, że *muszą być takie osoby, które będąc muzykalnymi są fizykami*,
czyli że *są takie osoby, które jednocześnie są muzykalne i są fizykami*.

Tą właśnie myśl oddaje zapis $\underset{x}{\mathrm{V}} [M(x) \wedge F(x)]$

Zauważ, że odnośnie punktów 1. i 2.:
- z jednej strony oba te wykresy wyglądają identycznie - muszą więc opisywać identyczne sytuacje,
- z drugiej strony ostatnie zawarte w nich stwierdzenia pochyłe wyrażają tę samą myśl, więc (innymi słowy) – muszą opisywać tę samą sytuację
- z trzeciej strony – gdy weźmiemy formalny zapis 1. zdania i zastosujemy do znajdującego się w nim w nawisie kwadratowym wyrażenia **prawo przemienności koniunkcji** /rachunku zdań/), to otrzymamy właśnie formalny zapis 2. zdania. Stąd też wnioskujemy, że zdania te opisują identyczne sytuacje.

<u>Ad 3</u> niektórzy fizycy nie są muzykalni



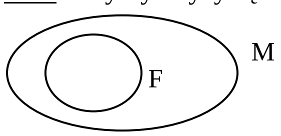
Zdanie to mówi, że *są fizycy, którzy nie są muzykalni*,
czyli innymi słowy, że *są takie osoby, które jednocześnie są fizykami i są muzykalne*.

Tą właśnie myśl oddaje zapis $\underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge {\sim}M(x)]$

Zamiast tak kombinować, mogliśmy od razu zauważyć, że jest to zadnie identyczne, jak 1., z tym że zamiast „są muzykalni", mamy w nim „nie są muzykalni", a zatem wystarczy w zdaniu 1. bezpośrednio przed $M(x)$ wstawić znak negacji ~.

<u>Ad 4</u> niektóre osoby muzykalne nie są fizykami
- analogicznie

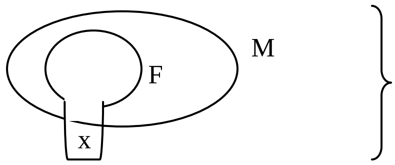
<u>Ad 5</u> wszyscy fizycy są muzykalni



Zdanie to mówi, że *każdy fizyk jest muzykalny*,
czyli innymi słowy, że *każdy, kto jest fizykiem, jest muzykalny*.

Tą właśnie myśl oddaje zapis $\underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow M(x)]$

Oznacza ono, że zbiór fizyków musi być zawarty w zbiorze osób muzykalnych, w przeciwnym razie (patrz rysunek poniżej) istniał by taki osobnik, który zadawałby kłam naszemu zdaniu (że wszyscy fizycy są muzykalni, bo ten akurat nie jest!).

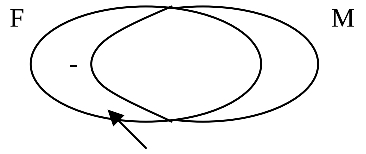


Tak nie może być

Na podstawie tych rozważań możemy zapisać, że tak nie może być, co będzie akurat równoważne naszemu zdaniu:

$\sim \bigvee_{x} [F(x) \wedge \sim M(x)]$

Stąd dalej wnioskujemy, że zdanie to jest negacją zdania 3.
Z kolei negacja zdania 3. na rysunku wygląda następująco:

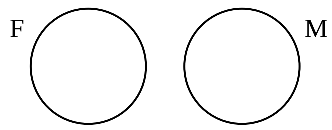


- – oznacza, że w polu w którym się znajduje, nic nie może być

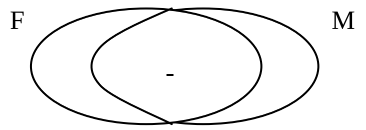
Tamto („x") w tym polu nakazywało komuś być, a to („-") zakazuje.

<u>Ad 6</u> wszystkie osoby muzykalne są fizykami
– analogicznie

<u>Ad 7</u> żaden fizyk nie jest muzykalny



lub:



Zdanie to mówi, że *nie ma takiego fizyka, który by był muzykalny,*
czyli innymi słowy, że *nie ma takiego osobnika, który by był jednocześnie fizykiem i muzykalnym.*

Tą właśnie myśl oddaje zapis: $\sim \bigvee_{x} [F(x) \wedge M(x)]$.

Poza tym od razu widać, że „żaden fizyk nie jest muzykalny" jest negacją zdania 1. („niektórzy fizycy są muzykalni"); widać to też po porównaniu rysunków z punktu 1) i drugiego rysunku z tego punktu (stwierdzają o części wspólnej zbiorów F i M odpowiedni: jest niepusta, jest pusta).

Jeszcze inaczej patrząc, zdanie *żaden fizyk nie jest muzykalny*
Znaczy *jakiegokolwiek byśmy nie wzięli fizyka, to na pewno nie jest on muzykalny*
Co zapisujemy symbolicznie $\bigwedge_{x} [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$

Formuła ta została utworzona analogicznie jak V, jednak tutaj zamiast „muzykalni" mamy „nie muzykalni" – stąd właśnie przed predykatem M znak negacji (~), no i zamiast „wszyscy" „żaden", ale to już jedynie specyfika języka polskiego.

UWAGA
To, że: $\sim \bigvee [F(x) \wedge M(x)] \leftrightarrow \bigwedge [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$

x *x*

możemy też otrzymać stosując proste przekształcenia:

$\sim \underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge M(x)] \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} \sim[F(x) \wedge M(x)] \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$

z II prawa de Morgana z rozumowanie jak poniżej przy p = $F(x)$, q = $M(x)$

wiemy, że: $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

gdy teraz w podstawimy tam ~q w miejsce q – otrzymamy: $p \rightarrow \sim q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim\sim q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

z zasady podwójnego przeczenia

<u>Ad 8</u> żadna osoba muzykalna nie jest fizykiem

– analogicznie, otrzymujemy to samo co powyżej (tak jak w przypadku formuł 1. i 2.), a zatem otrzymana formuła równoważna ($\underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow \sim F(x)]$) jest równoważna z analogiczną z poprzedniego punktu($\underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$).

Możemy to zresztą otrzymać drogą wyprowadzenia formalnego, i to na dwa sposoby:

1. W poprzednim punkcie pokazaliśmy, że: $\sim \underset{x}{\mathrm{V}} [F(x) \wedge M(x)] \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

Teraz analogicznie możemy pokazać, że: $\sim \underset{x}{\mathrm{V}} [M(x) \wedge F(x)] \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow \sim F(x)]$

Ponieważ lewe strony tych równoważności są sobie równoważne (ze względu na prawo przemienności koniunkcji zastosowane do wyrażenia w nawiasie kwadratowym),

więc z przechodniości relacji równoważności, otrzymujemy równoważność ich prawych stron.

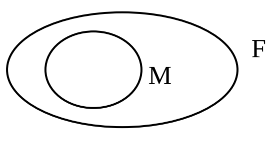
2. Możemy od razu pokazać równoważność tych prawych stron, stosując do wyrażenia w nawiasie kwadratowym zmodyfikowane prawo transpozycji:
   - wychodzimy od prawa transpozycji: $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
   - wstawimy $\sim q$ w miejsce q: $p \rightarrow \sim q \leftrightarrow \sim\sim q \rightarrow \sim p$
   - stosujemy prawo podwójnego przeczenia: $p \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow \sim p$

   z podstawieniem $p = F(x)$, $q = M(x)$.

<u>Ad 9</u> tylko fizycy są muzykalni

Od tego momentu, wchodzimy w „sferę ‘tylko’”. Musimy zastanowić się, co to słowo oznacza.

Spójrz na poniższy rysunek. Przedstawia on właśnie sytuację z naszego zdania („tylko fizycy s muzykalni”).



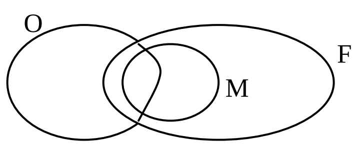
Rzeczywiście, przy takim ustawieniu zbiorów M i F, *tylko ten, kto jest fizykiem, jest muzykalny*

Mamy tu analogiczne ustawienie, jak w przypadku 5., z tym że o przeciwnej orientacji (wtedy F było w M, teraz M jest w F), a zatem nasza formuła też będzie miała tę samą postać, lecz z przestawionymi predykatami (tj. – innymi słowy – implikacja będzie przebiegać w drugą stronę), a więc przyjmie ona postać: $\underset{x}{\Lambda} [M(x) \rightarrow F(x)]$

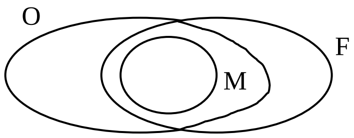
Widzimy więc, że „tylko” znaczy: „stosuj implikację w drugą stronę”.

Uwaga

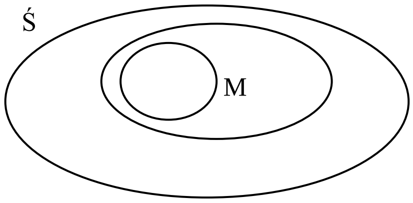
Fakt, że „tylko fizycy są muzykalni” wcale nie oznacza, żeby np. okularnicy (O) nie mogli być muzykalni (patrz rys),



czy też by równocześnie „tylko biolodzy (B) byli muzykalni”



bądź by „ścisłowcy” (Ś) nie mogli być muzykalni



„tylko fizycy” znaczy bowiem „tylko ten, kto jest fizykiem”, a nie „ten, kto tylko jest fizykiem”!

<u>Ad 10</u> tylko muzykalne osoby są fizykami
- analogicznie

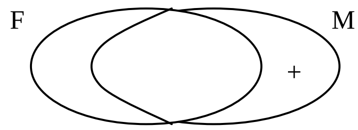
<u>Ad 11</u> nie tylko fizycy są muzykalni
- rzecz oczywista, negacja zdania 9., a więc formuła przyjmie postać: $\sim \bigwedge_x [M(x) \rightarrow F(x)]$

Postać alternatywną ($\bigvee_x [\sim F(x) \wedge M(x)]$) możemy otrzymać na dwa sposoby:

1. poprzez analizę zdania
2. poprzez przekształcenie poprzedniej formuły

Ad 1
„Nie tylko fizycy są muzykalni” znaczy „istnieje ktoś, kto nie będąc fizykiem jest muzykalny”, co zapisuje się, tak jak tego żądamy.

Na bazie tego rozważania od razu możemy rozstrzygnąć jak wygląda rysunek odnoszący się do tego przypadku.



+ – oznacza, że w polu w którym się znajduje, coś musi wystąpić

Zauważmy przy tym, że zdanie to wcale nie mówi, że fizycy są muzykalni! Dlatego też nie wstawiamy żadnego znaczka na przecięcie się tych dwóch zbiorów . Z drugiej strony

Zdanie (nr 9) „Tylko fizyce są muzykalni” oznaczało, że „muzykalni zwarci są w fizykach”. Zanegowanie tego faktu oznacza „muzykalni już się nie mieszczą w fizykach”, lecz że „wylewają się” poza nich. Wniosek ten jest identyczny z tym, do którego doszliśmy w poprzednim akapicie.

Ad 2
$$\sim \bigwedge_x [M(x) \rightarrow F(x)] \leftrightarrow \bigvee_x \sim [M(x) \rightarrow F(x)] \leftrightarrow \bigvee_x [\sim F(x) \wedge M(x)]$$

z I prawa de Morgana   w oparciu o analizę, jak poniżej i podstawieniu p = $F(x)$ i q = $M(x)$]

prawo zastępowania implikacji: $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
negujemy obie strony powyższej równoważności: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim\sim (p \wedge \sim q)$
do prawej strony stosujemy prawo podwójnego przeczenia: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

<u>Ad 12</u> nie tylko muzykalne osoby są fizykami
- analogicznie

<u>AD 13</u> tylko fizycy nie są muzykalni

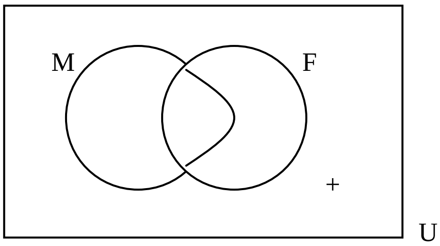
Zdanie o identycznej postaci, jak 9. („tylko fizycy są muzykalni”), z tym że „są muzykalni” zostało zamienione tu na negację tego stwierdzenia, tj. na: „nie są muzykalni”. Dlatego też formuła ma identyczną postać, jak tamta ($\Lambda_{x} [M(x) \rightarrow F(x)]$), z tą różnicą, że zamiast predykatu $M(x)$ stoi jego negacja ($\sim M(x)$), co daje nam formułę: $\Lambda_{x} [\sim M(x) \rightarrow F(x)]$.

Spróbujmy przekształcić tę formułę.
Korzystając z prawa: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
i wstawiając w miejsce p – ~M(x), a w miejsce q – F(x)
oraz poprzedzając obie strony dużym kwantyfikatorem z podpisanym pod nim x-em, otrzymujemy:

$$\Lambda_{x} [\sim M(x) \rightarrow F(x)] \leftrightarrow \Lambda_{x} [M(x) \vee F(x)] \leftrightarrow \sim \mathrm{V}_{x} \sim[M(x) \vee F(x)] \leftrightarrow \sim \mathrm{V}_{x} [\sim M(x) \wedge \sim F(x)]$$

i dalej: po podwójnym zaprzeczeniu formuły i przejściu z jednym ze znaków negacji przez znak kwantyfikatora; z prawa de Morgana dla rachunku zdań

W oparciu o te formuły, spróbujmy znaleźć dla tej sytuacji rysunek:
- z drugiej z nich „czytamy”, że wszystkie elementy muszą być zawarte w sumie zbiorów M i Z, czyli innymi słowy: nie może być żadnego elementu poza sumą tych dwóch zbiorów,
- z kolei z ostatniej z tych formuł „czytamy”, że nie istnieje taki element, który by zarazem miał być poza zbiorem M i poza zbiorem F.
Obie te konkluzje sprowadzają się to następującego oznaczenia:



Dodatkowo zaznaczyliśmy tu uniwersum U, aby mieć tym samym pole, w którym będziemy mogli zaznaczyć „+”. Dopowiedzmy tu od razu, że zawsze powinniśmy tak robić, by był wyznaczony obszar, w którym się poruszamy! Przy tym:
- nazywamy go przestrzenią i oznaczamy X, gdy prowadzimy rozważania czysto teoretyczne – abstrakcyjne (tj. matematyczne),
- nazywamy go uniwersum i oznaczamy U, gdy rozważania odnosić się będą do konkretnego obszaru semantycznego (np. gdy poruszać się będziemy wśród grzybów).

<u>Ad 14</u> tylko muzykalne osoby nie są fizykami
- analogicznie

Pokażemy jeszcze, że formuła ta ($\Lambda_{x} [\sim F(x) \rightarrow M(x)]$) jest równoważna poprzedniej ($\Lambda_{x} [\sim M(x) \rightarrow F(x)]$).
W tym celu wystarczy wykazać równoważność wyrażeń z nawiasów, tj. (przy p = $F(x)$, q = $M(x)$) że:
$\sim p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow p$
Otóż, wiemy, że (prawo transpozycji): $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
Dokonujemy podstawienia ~p za p: $\sim p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim\sim p$
I stosujemy prawo podwójnego przeczenia: $\sim p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow p$

<u>Ad 15</u> nie tylko fizycy nie są muzykalni
Zdanie to jest negacją zdania 13. („tylko fizycy nie są muzykalni”), a zatem wystarczy je zanegować, by otrzymać schemat naszego zdania: $\sim \Lambda_{x} [\sim M(x) \rightarrow F(x)]$. To samo wyrażenie możemy otrzymać wychodząc od zdania 11. („nie tylko fizycy są muzykalni” ze schematem $\sim \Lambda_{x} [M(x) \rightarrow F(x)]$), i zamieniając w jego schemacie $M(x)$

(odpowiednik „są muzykalni”) na $\sim M(x)$ (odpowiednik „nie są muzykalni”).
Przekształćmy nasze wyrażenie ($\sim \bigwedge_x [\sim M(x) \to F(x)]$) do formy równoważnej ($\bigvee_x [\sim M(x) \wedge \sim F(x)]$):

$$\sim \bigwedge_x [\sim M(x) \to F(x)] \leftrightarrow \bigvee_x \sim [\sim M(x) \to F(x)] \leftrightarrow \bigvee_x [\sim M(x) \wedge \sim F(x)]$$

z II prawa de Morgana   w oparciu o poniższe rozważania (przy p = $M(x)$, q = $F(x)$)

prawo zastępowania implikacji: $p \to q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
w miejsce p podstawiamy ~ p: $\sim p \to q \leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
negujemy obie strony powyższej równoważności: $\sim (\sim p \to q) \leftrightarrow \sim\sim (\sim p \wedge \sim q)$
do prawej strony stosujemy prawo podwójnego przeczenia: $\sim (\sim p \to q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Zdanie 13. oddawaliśmy na rysunku, zaznaczając na nim „-” poza sumą zbiorów F i M, „mówiący” że w tym obszarze nic nie ma. To zdanie (15.), jako jego negacja, oznaczamy „+”-emna tym samym polu, „mówiącym” że jednak na nim coś jest.

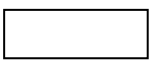
Ad 16 nie tylko muzykalne osoby nie są fizykami
- analogicznie, jako negacja zdania 14. („tylko muzykalne osoby nie są fizykami”) i /lub przekształcenie zdania 12. („nie tylko muzykalne osoby nie fizykami”). 16. można też otrzymać z 15. przez przestawienie predykatów.
Przejście do równoważnej formuły – analogicznie jak w 15. lub przez przestawienie predykatów w równoważnej formule z punktu 15.
Formuły 15. i 16. są sobie równoważne (wystarczy zastosować prawo przemienności koniunkcji dla formuł równoważnych).

Wszystkie te 16 formuł (i wszelakich ich oddań przy pomocy formuł rachunku predykatów) można oddać w jednej – poniższej tabeli.

LP	Słownie	rysunek			
1	niektóre *A* są *B* niektóre *B* są *A*	*A* ([*x*)] *B*	$\bigvee_x [A(x) \wedge B(x)]$	$\sim \bigwedge_X [A(x) \to \sim B(x)]$	$\sim \bigwedge_x [B(x) \to \sim A(x)]$
2	niektóre *A* nie są *B* nie **tylko** *B* są *A*	*A* (*x* [ )] *B*	$\bigvee_x [A(x) \wedge \sim B(x)]$	$\sim \bigwedge_X [A(x) \to B(x)]$	$\sim \bigwedge_x [\sim B(x) \to \sim A(x)]$
3	niektóre *B* nie są *A* nie **tylko** *A* są *B*	*A* ([ ) *x*] *B*	$\bigvee_x [\sim A(x) \wedge B(x)]$	$\sim \bigwedge_X [\sim A(x) \to \sim B(x)]$	$\sim \bigwedge_x [B(x) \to A(x)]$
4	nie **tylko** *A* nie są *B* nie **tylko** *B* nie są *A*	*A* ([ )] *B* *x*	$\bigvee_x [\sim A(x) \wedge \sim B(x)]$	$\sim \bigwedge_X [\sim A(x) \to B(x)]$	$\sim \bigwedge_x [\sim B(x) \to A(x)]$
5	żaden *A* nie jest *B* żaden *B* nie jest *A*	*A* ([–)] *B*	$\sim \bigvee_x [A(x) \wedge B(x)]$	$\bigwedge_x [A(x) \to \sim B(x)]$	$\bigwedge_x [B(x) \to \sim A(x)]$
6	wszystkie *A* są *B* **tylko** *B* są *A*	*A* (– [ )] *B*	$\sim \bigvee_x [A(x) \wedge \sim B(x)]$	$\bigwedge_x [A(x) \to B(x)]$	$\bigwedge_x [\sim B(x) \to \sim A(x)]$
7	wszystkie *B* są *A* **tylko** *A* są *B*	*A* ([ ) –] *B*	$\sim \bigvee_x [\sim A(x) \wedge B(x)]$	$\bigwedge_x [\sim A(x) \to \sim B(x)]$	$\bigwedge_x [B(x) \to A(x)]$
8	**tylko** *A* nie są *B* **tylko** *B* nie są *A*	*A* ([ )] *B* –	$\sim \bigvee_x [\sim A(x) \wedge \sim B(x)]$	$\bigwedge_x [\sim A(x) \to B(x)]$	$\bigwedge_x [\sim B(x) \to A(x)]$

Zamieszczamy tutaj uproszczony rysunek.
W ogóle musimy wyjść od ogólnego rysunku – tzw. diagramu Venna.
Określa on ogólne położenie (tu) 2 zbiorów.

Wychodzimy od uniwersum U.


U

Oczywiście wyznacza ono (w ramach siebie) jedno pole (całe uniwersum U).
Gdy na tak określonym uniwersum wydzielimy pewwiem zbiór A, to podzieli on to uniwersum na 2 części

Gdybyśmy mieli tylko 1 zbiór (A) – wówczas wyznaczając go z jednego uniwersum U

Dokonując wycięcia z 2 zbiorów

Wnioski z zestawienia 16-u formuł

1. każdą z tych formuł można przedstawić w postaci generalnej lub egzystencjalnej
2. Każda z tych formuł ma wśród pozostałych jedną równoważną, a więc mamy 8 par formuł równoważnych
3. Generalne „minusują", egzystencjalne „iksują".
4.

Dodatkowe **uwagi**.

1. Nazwy mały i duży kwantyfikator są nieadekwatne, gdyż kwantyfikatory te są tej samej wielkości!
2. Oprócz przedstawionej tu, istnieje też tzw. międzynarodowa notacja kwantyfikatorów.

(wytłumacz pochodzenie + wygodę zapisu linearnego)

Przestawianie kwantyfikatorów VV, XX, VX

konkretne zmienne + generalizacja w zdanie „psy są wierne"F i

1. DOPOWIEDZ NAWIASY !!! (w rach. Predykatów, a nie predykatorów)

I podaj określenia wolna, związana, w zasięgu

Ludzi (wszyscy!) są głupi

Kwantyfikatory ilościowe

Równość, równanie – dodaj tu i omów w 4. rozdziale!

4. Metodologiczne podstawy matematyki

Matematyka, to rozległa i dość niejednorodna dziedzina wiedzy obejmująca tradycyjnie wiele węższych dyscyplin naukowych o specyficznej, bardzo różnorodnej tematyce i zróżnicowanych metodach badawczych, w związku z czym wymyka się wszelkim próbom jej zadowalającego zdefiniowania. Ładne zdanie, nieprawdaż? Niestety, nic z niego nie wynika. Takich zdań już więcej w tej książce nie będzie! Przejdźmy jednak do meritum sprawy. Otóż, wielu laikom matematyka kojarzy się z rachunkami, obliczeniami, zadaniami. Studentom matematyki z egzaminami, zaliczeniami, kolokwiami... A z czym powinna kojarzyć się Tobie? Najlepiej z narzędziem, dzięki któremu łatwiej poradzisz sobie z innymi przedmiotami na studiach i w życiu. Da Ci ona możliwość innego spojrzenia na otaczający Cię świat. A to naprawdę cenne... i emocjonujące... Powodzenia!

Poszczególne działy matematyki są opisywane przez różne teorie, a jako że matematyka jest nauką formalną – stąd też teorie te noszą miano (tak z nazwy, jak i specyfiki) formalnych.

Tworząc teorię (formalną) wychodzi się od tzw. **pojęć pierwotnych**, tj. odgórnie przyjmowanych określeń niedefiniowalnych, jak również od tzw. **aksjomatów** – w analogiczny sposób (tj. odgórnie) przyjmowanych twierdzeń. Aksjomaty określają własności pojęć pierwotnych oraz ustalają zachodzące między nimi zależności. Fakt, że aksjomaty są przyjmowane odgórnie oznacza, że nie wymagają one dowodu (jako „wejściowe" są więc przyjmowane „na wiarę"). Wyraz temu daje również inne ich określenie, a mianowicie: „**pewnik**". Występuje ono głównie jako człon nazwy własnej aksjomatu (np. „pewnik wyboru"). Innym określeniem aksjomatu jest słowo **postulat** (często występuje jako część nazwy własnej danego aksjomatu, wraz z nazwiskiem „postulanta").

Pojęcia pierwotne i aksjomaty tworzą podstawę teorii. W oparciu o nie i nowe pojęcia (których znaczenie wyjaśniane jest przez tzw. **definicje** – możemy więc powiedzieć, że definicje je „wprowadzają"), tworzy się nowe **twierdzenia**, które jednak wymagają już **dowodu**, tj. uzasadnienia prawdziwości w oparciu o aksjomaty tej teorii i wcześniejsze (wcześniej w tej teorii udowodnione) twierdzenia, stosując niezawodne metody logiki matematycznej (tj. gwarantujące przejście od twierdzeń prawdziwych jedynie do twierdzeń prawdziwych).
W teorii formalnej mamy więc:

	pierwotne (początkowe, zadane)	wtórne (dodane)
określenia	pojęcia pierwotne	definicje
własności wcześniej podanych obiektów oraz zachodzących między nimi zależności	aksjomaty	twierdzenia

Na ogół (nie zawsze tak jest – zobacz komentarz na początku omawiania aksjomatu II' w rozdziale „teoria mnogości") od aksjomatów wymaga się, aby żadnego z nich nie dało się wyprowadzić z pozostałych (w przeciwnym razie nie byłby on przecież aksjomatem, ale twierdzeniem). Jeśli tak jest, to mówimy, że aksjomaty te tworzą zbiór **niezależny**. Poza tym wymagamy (tym razem już kategorycznie), aby nasz zbiór aksjomatów był **niesprzeczny**, tj. aby nie można było wyprowadzić z nich dwóch zdań wzajemnie sprzecznych.

Zbiór wszystkich twierdzeń, które dadzą się wyprowadzić z danego zbioru aksjomatów (wraz z każdym z tych aksjomatów w oparciu o prawo tożsamości – patrz niżej) nazywamy **teorią**.

Prawo tożsamości: $p \to p$

Gdybyś spojrzał do zeszytu studenta matematyki, ujrzałbyś w nim zapewne aksjomaty, pojęcia pierwotne, i w olbrzymiej liczbie definicje, twierdzenia i ich dowody. Sporadycznie jakiś wykres, czy przykład. Dość sucho ... Są jednak pewne ubarwienia.

PRZYJRZYJMY SIĘ NAJPIERW TWIERDZENIOM

Wśród twierdzeń wyróżnia się szczególne ich **rodzaje**:

1) **Lemat** – to twierdzenie pomocnicze, ważne nie tyle samo w sobie, ile jako narzędzie do dowodu twierdzenia nadrzędnego.
2) **Wniosek** – to bezpośrednia konsekwencja (następstwo) definicji, to to co bezpośrednio z jej treści wynika.
3) **Własność** – to coś, co przysługuje danemu obiektowi lub klasie obiektów, czy też operacji (np. „własności dodawania zbiorów" w rozdziale 7.),
4) **Spostrzeżenie** – zauważenie (i stwierdzenie) faktu, że jest „tak a tak", które od razu zawiera uzasadnienie tegoż faktu,
5) **Fakt** – proste, a przy tym znaczące spostrzeżenie
6) **Związek**, **zależność** – to odpowiednik własności, jednak tyczący się większej liczby obiektów czy też operacji typów operacji (zobacz np. „związki między sumą i przekrojem" w rozdziale 6.),
7) **Prawo** (np. prawo przemienności mnożenia) – to formuła do uniwersalnego stosowania na gruncie omawianej teorii (w odróżnieniu od lematu, który co prawda na gruncie danej teorii jest prawdziwy zawsze można stosować, jednak zastosowanie ma jedynie w konkretnych sytuacjach dowodowych).
8) **hipoteza**, nieraz **teza** (np. „teza Churcha" /👄: czercza/) – to twierdzenie, które nie będą aksjomatem danej teorii, zostało do niej warunkowo włączone mimo że nie zostało jeszcze udowodnione. Może tak być w dwóch sytuacjach:
   - gdyż po prostu takiego dowodu nie da się przeprowadzić, i matematycy o tym wiedzą;
   - albo dowód taki można przeprowadzić /czy wręcz wykazać, że twierdzenie takie jest fałszywe/, bądź też nie da się przeprowadzić żadnego z tych dwóch wywodów (tj. potwierdzenia lub obalenia jego prawdziwości), ale matematycy o tym nie wiedzą; z sytuacją taką mieliśmy do niedawna w przypadku „twierdzenia o czterech barwach" (które nosiło taką nazwę, choć *de facto* było hipotezą, ponieważ w praktyce zawsze się sprawdzało i w związku z tym wszyscy matematycy byli „święcie przekonani", że jest prawdziwe, choć żaden z nich nie znał jego dowodu).

   „Twierdzenie o czterech barwach" mówi, że każdą mapę polityczną można stworzyć wykorzystując do malowania państw jedynie 4 barwy, przy założeniu, że każde państwo malujemy jednym kolorem, a państwa sąsiadujące bokami (a nie wierzchołkami!) muszą być malowane innymi kolorami.

   Formułuje się je, gdyż przy ich założeniu, łatwo, prężnie i z pożądanymi wynikami można rozwijać daną teorię matematyczną (a widać ma ona ważkie znaczenie lub owe konsekwencje są nad wymiar ciekawe).
9) **Kryterium** – to takie twierdzenie (najczęściej własność lub związek czy zależność), które będąc w postaci równoważności z powodzeniem mogłoby być definicją jednego z pojęć o których się wypowiada, gdy wcześniej nie została przyjęta klasyczna definicja tego pojęcia (kryterium to określałoby je równoważnie, czyli dokładnie w tym samym zakresie przedmiotowym).
10) **Zasada** (np. „zasada indukcji matematycznej"), **reguła** (np. „reguła odrywania") – to prawa, o którym wyrażamy się w ten sposób, aby podkreślić, że zostało stworzone ze względu na jego przeznaczenie do wykorzystywania w działaniu praktycznym.

Na gruncie danej teorii (tj. w oparciu o przyjęte w niej aksjomaty), twierdzenia mogą być prawdziwe lub fałszywe. Włączamy do niej jednak jedynie twierdzenia prawdziwe (tj. te, które dadzą się /a właściwie: już dały się/ z tychże aksjomatów wyprowadzić, czy też innymi słowy „udowodnić"). Wyjątek stanowią tu tylko (hipo)tezy, jak to była na ten temat mowa w poprzednim akapicie. Jeśli w teorii takiej znajdziemy sprzeczność (przypadek, na którym ją „namierzyliśmy" nazywamy „**antynomią**") – wówczas zmusza nas to do weryfikacji jej założeń: pierwotnych (tj. aksjomatów, gdyż najwidoczniej tworzą sprzeczny zbiór zdań) lub wtórnych (tez czy hipotez). „**Zweryfikować**" znaczy tutaj „odrzucić” lub odpowiednio „zmodyfikować” – tak, aby usunąć już ową antynomią. Dodajmy, że zamiast mówić „antynomia”, możemy też stosować określenia „paradoks” i „dylemat” (choć w niektórych sytuacjach mają one inne znaczenia), przy czym

- „paradoks” jest mniej formalnym określeniem,
- a „dylemat” występuje głównie jako część nazwy własnej danej antynomii (np. „dylemat golibrody”).

Twierdzenia przeważnie podawane są w formie **implikacji**: „Jeśli ... (warunek), to ... (teza)”. Słowo „**teza**” zostało tu użyte w innym ujęciu niż to miało miejsce dwa akapity wyżej. Tam bowiem to, co ona głosiła obowiązywało na gruncie danej teorii bezwarunkowo, tu zaś przy dodatkowym **założenie** danym „warunkiem”. Tak więc, jeśli „warunek” jest spełniony „teza” musi zachodzić; jeśli zaś nie jest on spełniony – „teza” może zachodzić, ale nie musi (twierdzenie to bowiem o tym nie orzeka). To samo widać zresztą analizując tabelę prawdziwościową dla implikacji. Gdy spojrzysz w niej na poprzednik implikacji, to gdy ma on wartość logiczną 0 – wówczas (bez względu na wartość logiczną jej następnika) implikacja jest prawdziwa. Gdy zaś poprzednik ma wartość logiczną 1 – wówczas cała implikacja ma taką wartość logiczną, jak jej następnik. Tak więc rzeczywiście przy dowodach „twierdzeń implikacyjnych” wystarczy brać pod uwagę, że założenie zachodzi („ma wartość logiczną 1”) i wtedy dowodzić jedynie jego tezę (tj., że zachodzi, że „ma wartość logiczną 1”). Jest to dość (pozytywnie) znamienne zjawisko, jako że dzięki niemu zamiast „dowodzić dużo” (całe twierdzenie) – nie dość, ż mamy dodatkową informację („zachodzi założenie”) dowodzimy mniej (jedynie tezę tego twierdzenia).

Przy dowodach tego typu twierdzeń nie trzeba wcale przeprowadzić BEZPOŚREDNIEGO ciągu implikacji:

$$L \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_n \to P$$

(gdzie: L – lewa strona implikacji /założenie twierdzenia/; P – prawa strona implikacji /teza twierdzenia/; A_1 – zdanie wynikające z L; A_2, ..., A_n – kolejne zdania wynikające ze zdań A o indeksie o 1 mniejszym.
Często stosujemy bowiem tzw. metodę „zstępująco – wstępującą” Polega ona na tym, że

- z jednej strony wychodzimy od L i ciągiem implikacji dochodzimy do pewnego A_k ($k < n$), w następujący sposób $L \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_k$, „mówiąc sobie”: jest L, zatem jest A_1, zatem jest A_2, ..., zatem jest A_k;
- z drugiej strony mamy ciąg implikacji: $A_l \to A_{l+1} \to ... \to A_n \to P$, który z kolei budowaliśmy od prawej strony (czyli od „wyniku”, do którego *de facto* mamy dojść), czytając to tym razem: mamy udowodnić P, zatem wystarczy, że udowodnimy A_n, ..., zatem wystarczy że wykażemy, że jest A_l.

Jeśli teraz okaże się, że $A_k = A_l$, to już jest koniec, bo już mamy cały ciąg implikacji od L do P:

$$L \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_k = A_l \to A_{l+1} \to ... \to A_n \to P.$$

Jeśli zaś tak nie jest, do dalej należy prowadzić zbliżanie L z P, jednak już na bliższym odcinku, gdyż jedynie z A_k do A_l. Może się nawet zdarzyć, że bezpośrednio można otrzymać A_l z A_k, i wtedy też będziemy mieli pełny ciąg implikacji od L do P:

$$L \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_k \to A_l \to A_{l+1} \to ... \to A_n \to P.$$

Dowód twierdzenia implikacyjnego można również przeprowadzać (zresztą bardzo często stosowaną, a niestety nie do końca rozumianą przez studentów) metodą „nie wprost” (jest to tzw. „**dowód nie wprost**”).

„nie wprost” pisze się oddzielnie !

Tym razem, aby udowodnić implikację, zakładamy zachodzenie jej poprzednika (jej niezachodzenia nie ma co rozważać, bo wtedy i tak cała implikacja jest prawdziwa, jako że implikacja o fałszywym poprzednik jest /zgodnie z tabelą prawdziwościową dla implikacji/ zawsze /tj. bez względu na wartość logiczną następnika/ prawdziwa). Przy owym prawdziwym poprzedniku „nie wprost” (tj. niejako „na przekór” tabeli prawdziwościowej dla implikacji) zakładamy, że następnik nie zachodzi, i w swym postępowaniu dowodowym dochodzimy do sprzeczności, co oznaczam, że tak być nie może, tj., że przy prawdziwym poprzedniku również następnik musi być prawdziwy. To kończy dowód.

Przy omawianiu „twierdzenia implikacyjnego” omówimy jeszcze pojęcia: „warunek konieczny” i „warunek dostateczny”. Otóż, w twierdzeniu postaci $L \to P$:

- L jest „**warunkiem dostatecznym**” dla P (bo „wystarczy, że jest L, by było P”, bo „gdy jest L, to i jest /wynikające z niego/ P”),
- a P jest „**warunkiem koniecznym**” dla L (bo „gdy jest L, to koniecznie musi być P” /bo z niego wynika/).

Twierdzenia mogą też być podawane w postaci **równoważności**: „.... (I zdanie) wtedy i tylko wtedy, gdy ... (II zdanie)”. Wtedy jednak (w oparciu o prawo zastępowania równoważności)

prawo zastępowania równoważności: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

de facto składa się ono z dwóch twierdzeń „implikacyjnych", wzajemnie **dualnych** (tj. takich, w których założenie z tezą wymieniają się miejscami, a jako że równocześnie one zachodzą – właśnie w sumie dają nam równoważność.

> Mamy tak np. w przypadku (zapewne) znanego wszystkim twierdzenia Pitagorasa, które w formie pełnej („równoważnościowej") ustanawia równoważność między „byciem trójkątem prostokątnym" i „zachodzeniem warunku $a^2 + b^2 = c^2$".

Ich dowód polega wówczas na przeprowadzeniu dwóch dowodów owych składowych twierdzeń dualnych, lub też bezpośrednio wskazanie ciągu równoważności:

$$L \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow A_n \leftrightarrow P$$

Ponieważ twierdzenie „implikacyjne" głosi, ze „przy zachodzenie założenia zachodzi pewna teza", zatem dowodząc je, zakładamy, ze jego „założenie zachodzi" i ograniczamy się wtedy do udowodnienia jego tezy (co – w związku z tym – kończy jego dowód). W przypadku „twierdzeń równoważnościowych":

- w powyższy sposób przeprowadzamy dwa dowody jego dwu pochodnych twierdzeń dualnych,
- bądź też postępujemy od razy tak samo jak w dowodzie twierdzenia implikacyjnego, jednak stosując w nim nie implikacje ($\rightarrow$), lecz równoważności ($\leftrightarrow$).

Istnieje jeszcze jeden dość często występujący rodzaj twierdzeń – tzw**. twierdzeń wielorównoważnościowych**. Są one postaci:

Niech A. Wówczas następujące warunki (lub: zdania, stwierdzenia itp.) są sobie równoważne:

1) W_1
2) W_2

...

n) W_n.

Dowodzić można je (najogólniej rzecz ujmując) na dwa sposoby.

1) Zakładamy A. Następnie wykazujemy $W_1 \leftrightarrow W_2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow W_n$ (ewentualnie wyrażenie W_i /i=1, 2, ..., n/ w tym ciągu mogą występować w innej kolejności, byle by wszystkie wystąpiły), a wówczas ze stosowanego wiele razy prawa przechodniości równoważności, otrzymujemy równoważność warunków W_1, W_2, ..., W_n „każdego z każdym".

   > Prawo przechodniości równoważności: $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow (q \rightarrow r)]$

   Na dowód ten składa się więc n-1 dowodów równoważności, czyli $2 \cdot (n\text{-}1) = 2n - 2$ dowodów implikacji.
2) Zakładamy A. Przeprowadzamy dowody: $W_1 \rightarrow W_2$, $W_2 \rightarrow W_3$, ..., $W_{n-1} \rightarrow W_n$. W ten sposób mamy udowodniony „ciąg implikacji": $W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow W_3 \rightarrow ... \rightarrow W_{n-1} \rightarrow W_n$. Następnie zamykamy go „w koło" dowodem implikacji $W_n \rightarrow W_1$. W ten sposób „po strzałkach" można przejść od dowolnego W_i do dowolnego W_j ($1 \leq i, j \leq n$), a co za tym idzie równie od W_j do W_i , czyli (z prawa zastępowania równoważności) ich wzajemną równoważność, a co za tym idzie otrzymujemy wzajemną równoważność wszystkich W_i (i=1, 2, ..., n) „każdego z każdym". Oczywiście również w tym przypadku, kolejność ustawienia w początkowy ciąg poszczególnych (byle wszystkich) W_i (i=1, 2, ..., n) jest dowolna.
   Dowód ten składał się z *n* dowodów implikacji.

Rozwiązując nierówność: $n < 2n - 2$ (przy założeniu, że n jest liczbą naturalną), otrzymujemy rozwiązanie: $n > 2$, czyli $n \geq 3$. Jeśli więc w twierdzeniu tego typu są co najmniej 3 warunki, których równoważność należy udowodnić, wówczas jego dowód opłaca się (ze względu tzw. „ekonomiczności działania") wykonać drugą metodą.

UWAGA:

Twierdzenie tego typu może być też postaci: „Niech A. Wówczas...". Wtedy oczywiście do jego dowodu nie włączamy konieczności istnienia tego warunku A.

Ważkie twierdzenia, lematy, (hipo)tezy, i antynomie i prawa noszą nazwę swoich twórców czy odkrywców (nieraz dwóch, gdy razem nad nim pracowali lub gdy niezależnie doszli do tych samych czy podobnych wyników mniej więcej w tym samym czasie). Zdarza się też, że za nazwę własną otrzymują temat, którego dotyczą (wtedy noszą nazwę „twierdzenie o ...").

UWAGA

Większość osób, jak się dowiaduje, że ma coś udowodnić, to się przeraża! Błąd!!! Nie należy się w takiej sytuacji przerażać, lecz cieszyć. Tak, ...cieszyć! O wiele łatwiej jest bowiem udowodnić coś, niż obliczyć. Zobacz zresztą sam. „Oblicz *2 + 2*" – musisz to obliczyć, a gdy już tego dokonasz, nie wiesz, czy otrzymałeś dobry wynik.

„Udowodnij, że $2 + 2 = 4$” – też musisz obliczyć sumę $2 + 2$, ale z góry wiesz, jaki masz otrzymać wynik, a to z kolei oznacza, że

- z jednej strony, że jak go otrzymasz, to wiesz, ze osiągnąłeś prawidłowy wynik,
- a z drugiej strony sam wynik naprowadza cię na właściwą drogę dojścia do niego, co jest znacznym ułatwieniem w całym postępowaniu.

UWAGA
Poszczególne prawa (szeroko rozumiane, tj. twierdzenia, lematy, ...) w danej teorii można udowadniać tylko dlatego, że jest ona „zaksjomatyzowana”. Z kolei pod pojęciem tym nie tyle kryje się fakt, że „ma ona aksjomaty”, ile, że „jest formalna”.

UWAGA
Oprócz słownych specyfikacji dowodów ze względu na sposób ich przeprowadzania, mamy również ich słowne specyfikacje z względu na to do jakiego rodzaju twierdzeń się one odnoszą. Otóż, jeżeli jedynie do własności, to wtedy często stosujemy do nich określenia: **sprawdzenie**, **wytłumaczenie**.
Z kolei rzadziej stosowane określenie **weryfikacja** odnosi się do „dowodów” (tj. uzasadnień) hipotez, tez i teorii.

UWAGA **dotycząca dowodów**
Większość osób, jak się dowiaduje, że ma coś udowodnić, to się przeraża! Błąd!!! Nie należy się w takiej sytuacji przerażać, lecz cieszyć. Tak, cieszyć! O wiele łatwiej jest bowiem udowodnić coś niż obliczyć. Zobacz zresztą sam: „Oblicz $2 + 2$” – musisz to obliczyć, a gdy już tego dokonasz, nie wiesz, czy otrzymałeś dobry wynik. „Udowodnij, że $2 + 2 = 4$” – też musisz obliczyć sumę $2 + 2$, ale wiesz jaki masz otrzymać wynik – to oznacza, że jak go otrzymasz, to osiągnąłeś prawidłowy wynik, a z drugiej strony wynik naprowadza cię na właściwą drogę dojścia do niego. Dowody nie powinny więc Cię paraliżować, lecz mobilizować!

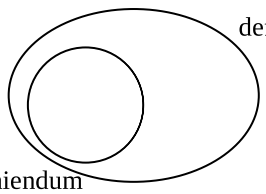
OBECNIE PRZYJRZYJMY SIĘ DEFINICJOM.

Definicja, to inaczej określenie, co czym jest, za co mamy to coś uważać. Wprowadza się je, aby nie było wątpliwości, co do zakresu znaczeniowego tych pojęć (tj. by uściślić ich potoczne rozumienie) lub też by wręcz je wprowadzić.
Wszystkie definicje zbudowane są w następujący sposób:

- „X jest to ...”,
- „X-em nazywany takie / każde / te ...”,
- ...

Pierwszy podany w nich człon – to co definiujemy, czyli pojęcie definiowane, to z łaciny ***definiendum***.
Drugi ich człon (po łączniku: jest to, nazywamy, ...), to człon definiujący, z łaciny noszący nazwę ***definiens***.
Dobrze (tj. poprawnie) zbudowana definicja musi być równoważnością, tj. zakres pojęciowy *definiendum* musi pokrywać się z zakresem pojęciowym *definiens*.
Mogą zdarzyć się następujące sytuacje:

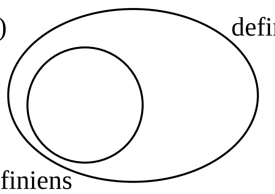
1) definiens



definiendum

definicja za szeroka

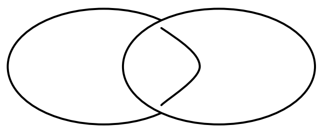
2) definiendum



definiens

definicja za wąska

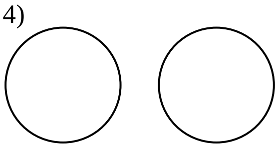
3)



definiens definiendum

definicja częściowo adekwatna

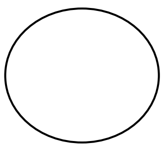
4)



definiens definiendum

definicja nieadekwatna

5)



definiens = definiendum

definicja adekwatna (poprawna)

Tylko sytuacja 5. jest poprawna. Spośród sytuacji niepoprawnych (1. – 4.) najczęściej występują sytuacje 1. – 3.

ZADANIA:
1) Spróbuj poprawnie zdefiniować kilka przedmiotów z Twego otoczenia: ząb, krzesło, stół, dom, szklankę.
2) Spróbuj podać po 1 przykładzie takich „definicji", aby pasowały one do każdej z podanych wyżej sytuacji 1. – 5.

POJĘCIA ZWIĄZANE Z SYSTEMEM – C.D.

Cały czas omawiamy pojęcia występujące w pewnym formalnym **systemie** matematycznych, zwanym teorią. Systemy takie, oprócz pojęć i twierdzeń (w każdym z tych przypadków tak pierwotnych, jak i wtórnych) mają oczywiście również swoją **przestrzeń** X, na której operują. Jest to zbiór obiektów, do których się ta teoria odnosi. Odpowiednikiem przestrzeni w konkretnych sytuacjach nieformalnych, jest **uniwersum** U. Mówimy więc, że coś rozpatrujemy n uniwersum ludzi, ale już na przestrzeni liczb rzeczywistych.

Metoda – to sposób wykonywania operacji na obiektach systemu (np. rozwiązywanie układu równań metodą przeciwnych współczynników), lub sposób przeprowadzania dowodu (np. metoda 0-1-kowa, metoda nie wprost, ...).

Rachunek (np. zdań, relacji, ...) - to system matematyczny (czy logiczny) posługujący się zalgorytmizowanymi procedurami w swej realizacji. Jest więc on prosty, nie wymaga abstrakcyjnego myślenia. I „nie wiedzieć czemu" studenci mówią, że „logika jest nielogiczna", jak w niej nie występują wcale „głębokie, zawiłe, trudne do ogarnięcia, przemyślenia".

Z INFORMATYKI:

Algorytm, to ściśle określony sposób postępowania, dający gwarancję osiągnięcia zamierzonego rezultatu w skończonej liczbie kroków.

Procedura (pojęcie pochodne) – to wewnętrznie spójna część algorytmu, odpowiedzialna za realizację funkcjonalnej jej części (np. przy algorytmie rozwiązywania równania kwadratowego, jej część odpowiedzialna za wyliczenie delty).

Pojęcie procedura występuje też w znaczeniu potocznym, o takim znaczeniu, jak został określony powyżej algorytm. Wtedy określenie „**zalgorytmizowana procedura**" znaczy po prostu „**postępowanie algorytmiczne**", czyli ściśle określone, dające gwarancję osiągnięcia zamierzonego celu w skończonej ilości kroków.

Z samym pojęciem systemu, kojarzy się również pojęcie „działalność systemowa". W pracy naukowej mamy do czynienia z kilkoma sposobami działalności. Jakiś pomysł (wynalazek czy odkrycie) może pojawić się w wyniku:

a) działalności systemowej (z taką to głównie zapewnie kojarzysz pracę naukową),
b) działalności chaotycznej (określenie może trochę mylące, bo i w tym przypadku wszystko jest uporządkowane, jednak stochastyczne /= przypadkowe/); mamy to po prostu do czynienia z szeregiem doświadczeń losowych na bazie których wyciągamy wnioski o sposobie zachowania się całej populacji (przy czym owe badania mogą być prowadzone bez pośrednio na danych systemach lub jedynie na ich schematach),
c) w końcu do wyniku w nauce możemy dojść na drodze przypadku, w niektó®ych przypadkach określanego jako „błysk geniuszu".

STRUKTURY SYSTEMÓW

Zbadać **strukturę systemu**, to inaczej „określić jego własności wewnętrzne" (a więc bez rozpatrywania jego zależności z innymi systemami).

Jedną z takich kwestii (rozpatrywanych w tym podręczniku) jest określenie „zbiór *X* jest zamknięty (ze względu) na operację *f* ", które oznacza, że wykonanie tej operacji na obiektach z tego zbioru zawsze daje wynik o wartości w tym zbiorze; w przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten nie jest zamknięty (ze względu) na tę operację. Tak np. zbiór N liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operację dodawania (bo suma dwóch liczb naturalnych zawsze jest liczba naturalną), a nie jest zamknięty ze względu na operację odejmowania (gdyż różnic dwóch liczb naturalnych niekoniecznie musi dać liczbę naturalną, np. 5 - 9= - 4).

W matematyce możemy też rozpatrywać zależności zachodzące między różnymi systemami, a w szczególności porównywać je. Otóż, w matematyce mówimy, że dwa systemy są **izomorficzne**, jeśli istnieje wzajemna odpowiedniość między nimi. Oznacza to, że gdy będziemy w prawach jednego z nich w konsekwentny sposób zamieniać poszczególne znaki (symboli, operacji, zmiennych zdaniowych, predykatów, zbiorów, ...) na odpowiednie (odpowiadające im) znaki drugiego systemu, to zawsze będziemy otrzymywać odpowiadające im prawa drugiego z tych systemów, przy czym odpowiedniość ta działa również w drugą stronę. Systemy takie mają tę samą **strukturę** (tak kształtu praw, jak i metod dowodowych).

Działać systemowo oznacza robić to w sposób przemyślany, zgodny z określonym algorytmem, a więc w sposób niezawodnie prowadzący do określonego celu i to w miarę jak najprościej.

POZOSTAŁE POJĘCIA WYSTĘPUJĄCE W MATEMATYCE

Tak po definicji, jak i po twierdzeniu (w szerokim znaczeniu tych terminów), w zeszycie studenta matematyki można spotkać można spotkać następujące rzeczy:

1) **Omówienie**, czyli wyjaśnienie, objaśnienie - służy „rozjaśnieniu spawy".
2) **Przykład** – również służy „rozjaśnieniu spawy".
3) **Zastosowanie** – służy wskazaniu celowości wprowadzenia, czy podania danej definicji czy twierdzenia.
4) **Uwaga** – służy do uwypuklania pewnych kwestii, zwrócenia uwagi na coś szczególnego

Ponadto, aby utrwalić zdobyty materiał, w zeszycie studenta matematyki (tym razem już od ćwiczeń, a nie wykładów), spotkać można – rzecz jasna – szereg:

1) **zadań**,
2) **poleceń**,
3) **ćwiczeń**,
4) a co za tym idzie również **sprawdzeń** poprawności ich wykonania (sam zresztą w szkole po rozwiązaniu zadania też „sprawdzałeś", czy wynik się zgadza z wymogami zadania)

Podczas sprawdzania, czy jakaś równość jest prawdziwa, czy zachodzi dana własność, itp., możliwe są dwie odpowiedzi: TAK i NIE. Aby odpowiedzieć „tak" – musimy ją udowodnić, a aby odpowiedzieć „nie" – podać (po wcześniejszym znalezieniu) tzw. **kontrprzykład**, czyli przykład zadający kłam przypuszczeniu prawdziwości rozpatrywanej równości, czy zachodzenia danej własności, itp. Metodę tę stosuje się głównie do twierdzeń generalnych:

- pozytywnych („każde x z rozpatrywanego uniwersum spełnia ...", tj. $\Lambda_x P(x)$)
- i negatywnych („żadne x z rozpatrywanego uniwersum nie spełnia ...", tj. $\Lambda_x \sim P(x)$)

W tym celu należy zanegować całe rozpatrywane stwierdzenie i wykazać, że tak właśnie jest. W oparciu o dwa prawa de Morgana dla rachunku predykatów, otrzymujemy

- z I **prawa** dla I z tych stwierdzeń, że „istnieje taki x z uniwersum, że nie spełnia on ..."
- z II prawa (a właściwie z prawa, które otrzymamy z niego po zanegowaniu obu jego stron, tj.
$$\sim \sim \mathrm{V}_x P(x) \leftrightarrow \sim \Lambda_x \sim P(x),$$
i dalej, zastosowaniu prawa podwójnego przeczenia do jego lewej strony, tj. w sumie z prawa:
$$\mathrm{V}_x P(x) \leftrightarrow \sim \Lambda_x \sim P(x) \ )$$
dla II z tych stwierdzeń, że „istnieje taki x z uniwersum, że spełnia on ...".

Takie postępowanie jest więc proste - wymaga znalezienia jedynie jednego kontrprzykładu, obalającego nasze wyjściowe twierdzenie, równość itp.

$\sim \sim p \leftrightarrow p$ - prawo podwójnego przeczenia

I **prawo** de Morgana dla rachunku predykatów: $\sim \Lambda_x P(x) \leftrightarrow \mathrm{V}_x \sim P(x)$

II **prawo** de Morgana dla rachunku predykatów: $\mathrm{V}_x P(x) \leftrightarrow \sim \Lambda_x \sim P(x)$

UWAGI:

1. Pojęcia, które już tu się pojawiły, a mianowicie: sprawdzenie, założenie (jednak z dopowiedzeniem: indukcyjne), teza (też z dopowiedzeniem: indukcyjna) i dowód (również z dopowiedzeniem: tezy indukcyjnej) zostaną szczegółowo omówione (zdefiniowane i objaśnione) w 7.rozdziale niniejszej pracy). Ich znaczenie będzie pochodne od dotychczas omówionego.

2. Pojęcie „teza” stosuje się też nieraz jako równoważne z pojęciami: argument, twierdzenie. (odpowiednio np. w sformułowaniach: „na swą obronę przytoczył następujące tezy”, „w systemie tym zachodzą następujące tezy”). My jednak w kursie tym będziemy unikali tego typu podejścia, aby zachować w miarę jednoznaczne rozumienie słowa „teza”.

Dopowiedzmy tu jeszcze, że w matematyce pojęcie równość i równanie (a więc odnoszące się do takich „tworów”, które posiadają lewą i prawą stronę połączone znakiem „=”), oznaczają co innego!

1) Równość jest zawsze prawdziwa (przykład: $a + b = b + a$), a więc wyraża ona pewne prawo,
2) Z kolei równanie już takie nie jest (przykład: $a + 2 = 7$) – je się rozwiązuje, podając dla jakich konkretnych wartości jest prawdziwe.

II. ZBIORY I LICZBY

6. Teoria mnogości

Użyte w tym sformułowaniu pojęcie „**mnogość**" oznacza, że jest to teoria opowiadająca o zbiorach. Z kolei słowo „**teoria**" oznacza, że będziemy mieli do czynienia z opisem rzeczywistości dokonanym w sposób formalny, a więc przy pewnych założeniach, jak i z określonego punktu widzenia.

Teoria mnogości powstała w odpowiedzi na zauważoną na początku XX wieku przez angielskiego matematyka *antynomię Russella* (czyt.: rasela). Słowo „**antynomia**" oznacza sprzeczność między zdaniami, z których każde wydaje się dobrze uzasadnione, lub też sprzeczność w obrębie jednego zdania. Za jej przykład można przytoczyć znaną już od czasów starożytności tzw. antynomię kłamcy, którą w najprostszej postaci można wyrazić w następujący sposób:

> *Ktoś powiedział: „To, co w tej chwili mówię, jest kłamstwem". Czy mówił on prawdę, czy kłamał?*
> Jakiejkolwiek byśmy nie udzielili odpowiedzi, zawsze okazałoby się, że jest ona błędna, gdyż prowadzi do sprzeczności. Jeśli bowiem uznamy, że mówił prawdę, to znaczy że kłamał (bo sam tak stwierdził w swojej prawdziwej wypowiedzi). Jeśli zaś uznamy, że kłamał, to oznacza (przechodząc do jego wypowiedzi), że kłamstwem jest że kłamał, czyli że mówił prawdę.

Przeanalizujmy jednak samą antynomię Russella (a więc już tę, która odnosi się do zbiorów).
Przyjmijmy, że zbiór jest normalny witw, gdy sam do siebie nie należy.

Innymi słowy: ***X* jest normalny $\leftrightarrow X \notin X$.**

W tekście pisanym znak $\leftrightarrow$ zastępujemy skrótem witw (który czytamy: wtedy i tylko wtedy)

Zbiorem normalnym jest więc np. zbiór palców, gdyż sam palcem nie jest!
Niech *N* oznacza zbiór wszystkich zbiorów normalnych (tylko ich!).
Zastanówmy się obecnie: czy (tak zdefiniowany zbiór) *N* jest normalny?
Rozpatrzmy dwa przypadki:

1) Załóżmy, że *N* jest normalny. Wtedy (z definicji zbioru normalnego) $N \notin N$, a stąd dalej wnioskujemy (ze względu na słowo „wszystkich" w definicji zbioru *N*), że *N* nie jest normalny (bo, w oparciu o prawo transpozycji, gdyby był normalny, to by musiał sam do siebie należeć).

prawo transpozycji: $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

2) Załóżmy z kolei, że *N* nie jest normalny. Wtedy (z definicji zbioru normalnego) $N \in N$, a stąd dalej wnioskujemy (ze względu na słowo „tylko" w definicji zbioru *N*), że *N* nie jest normalny (bo, w oparciu o prawo transpozycji, gdyby był normalny, to by musiał sam do siebie należeć).

W oparciu o prawo zastępowania równoważności

prawo zastępowania równoważności: $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

wnioskujemy stąd, że:
N jest normalny witw gdy *N* nie jest normalny.

Otrzymaliśmy więc zdanie postaci $p \leftrightarrow \sim p$, które (jako kontrtautologia) oznacza sprzeczność.

Oznacza to, że (dotychczasowe) intuicyjne pojmowanie pojęć i intuicyjne dowodzenie może doprowadzić do fiaska.

Każdą **teorię matematyczną** będziemy tworzyć jako **sformalizowaną**. (zgodnie z wytycznymi przedstawionymi w rozdziale „metodologiczne podstawy matematyki"). Postąpimy więc i tak w przypadku teorii mnogości, a konkretnie pewnej jej realizacji, zwanej (od nazwisk jej twórców) systemem Zermelo-Fraenkla. Wyróżniamy w niej dwa **pojęcia pierwotne** (niedefiniowalne, o których zakładamy, że są w jednoznaczny sposób rozumiane przez ogół ludzi):

1. „bycie zbiorem" (co oznaczamy przy pomocy jednoargumentowego predykatu *Z*, a fakt, że *A* jest zbiorem oznaczamy w następujący sposób: $Z(A)$, czyli jest to predykat),
2. „bycie elementem zbioru" (lub równoważnie: należenie do zbioru) (co oznaczamy przy pomocy symbolu $\in$, a fakt, że *x* jest elementem zbioru *A* zapisujemy w następujący sposób: $x \in A$).

Zbiory oznaczać będziemy przy pomocy wielkich liter, a ich elementy – przy pomocy małych liter.

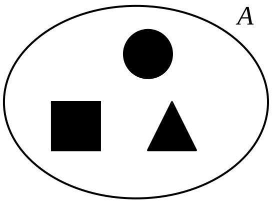
A, B, C, ..., czy też X, Y, Z – oznaczają więc zbiory,
Zaś a, b, c, ..., czy też x, y, z – ich elementy.

Jak jednak definiować zbiory? Otóż możemy to zrobić na kilka sposobów:

1. bezpośrednio wymieniając jego elementy;
2. wskazując (przy pomocy pewnej zależności, czy też własności), które obiekty są jego elementami;
3. wyrysowując jego elementy i obwodząc je wspólnie kredką.

Ad 3

Ten trzeci sposób, stosowałeś już zapewne w przedszkolu, a jako że żaden matematyk tam nie siedzi – my nie będziemy tak robić. Tylko mały przykład gwoli przypomnienia.



Mamy tu trzyelementowy zbiór A, złożony z koła, kwadratu i trójkąta.

Ad 1

Z kolei zbiory:
$B = \{1, 2, 3, 4\}$ – to zbiór złożony z następujących 4 elementów: 1, 2, 3 i 4 (🗣.: B jest to zbiór złożony z 1, 2, 3 i 4). O tym, że jest to zbiór świadczy nawias klamrowy.

> $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$ – to zbiór złożony z $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ itd., czyli po prostu ze wszystkich liczb naturalnych, czyli możemy powiedzieć, że jest to po prostu zbiór liczb naturalnych. W odróżnieniu od zbioru B (który był skończony, bo posiadał skończoną ilość elementów) – ten jest nieskończony (bo posiada nieskończoną liczbę elementów; świadczą o tym kropki na jego końcu). Z taką nieskończonością będziemy też mieli do czynienia, gdy owe kropki znajdą się na jego początku (np. $D = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$ – zbiór liczb całkowitych ujemnych), czy też tak na początku jak i na końcu (np. $E = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\}$ – zbiór liczb podzielnych przez 5). Kropki mogą wystąpić też w środku (np. $F = \{1, 2, 3, ..., 97, 98, 99\}$ – zbiór wszystkich liczb całkowitych od 1 do 99), ale wtedy oznacza to skończoną ich liczbę, lecz na tyle dużą, że ich wszystkich nie wymieniamy, gdyż i tak wiemy (bo się jednoznacznie domyślamy) o które chodzi.

Ad 2

Zbiór liczb parzystych dodatnich zgodnie z punktem 1. opisalibyśmy: $G = \{2, 4, 6, 8, ...\}$.

Możemy to jednak zrobić i inaczej: $G = \{x\colon x = 2k \wedge k \in C\}$. [czytamy to: G jest zbiorem tych x-ów, które można zapisać w postaci $2k$, gdzie k (jako element powyżej zdefiniowanego zbioru C) jest liczbą naturalną.] Tak więc zbiór G składa się z tych wszystkich liczb, które są dwukrotnościami liczb naturalnych. Jest więc on zbiorem parzystych liczb naturalnych (czy równoważnie: parzystych liczb całkowitych dodatnich, ale nie ma przecież co komplikować sprawy!).

Wśród zbiorów znamy już (z podstawówki, gimnazjum i szkoły ponadgimnazjalnej) charakterystyczne zbiory liczbowe, które to (a jako posiadające swe nazwy własne) oznaczamy (jak to zbiory) wielką literą (w tym przypadku – jako właśnie „jedyne w swoim rodzaju”) z jedną podwójną kreską (pionową lub ukośną).
- N – zbiór liczb naturalnych,

> Część matematyków definiuje go od zera: $N = \{0, 1, 2, ...\}$, a część od jedynki (a więc nie wlicza do niego zera): $N = \{1, 2, ...\}$. Aby ustrzec się dwuznaczności, musimy się zdecydować na jedną z tych definicji. Ze względów praktycznych, lepiej jest ustalić (i my tak właśnie zrobimy), że $N = \{1, 2, ...\}$, a wówczas, gdy będziemy chcieli oddać poprzednie (odrzucone) oznaczenie N, to wyrazimy je zapisem: $N_0 = N \cup \{0\} = \{1, 2, ...\} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, ...\}$.

- Q - zbiór liczb wymiernych.

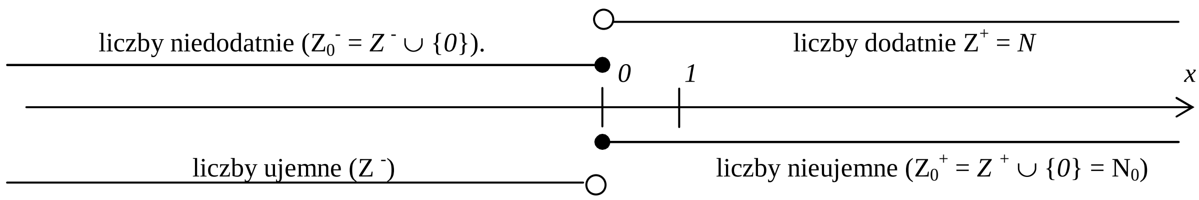
Zauważmy przy tym, że w zbiorach tych możemy wyróżnić ich podzbiory:

- ze względu na to, czy mamy do czynienia z ich dodatnią czy też ujemną częścią (wtedy w przypadku zbioru liczb całkowitych oznaczać je będziemy odpowiednio: Z^+ i Z^-),
- a jeśli uwzględnimy jeszcze możliwość dołączenia do nich zera, to będziemy mieli do czynienia odpowiednio z ich częścią nieujemną i niedodatnią (co w przypadku liczb całkowitych oznaczymy odpowiednio: $Z_0^+ = Z^+ \cup \{0\}$ i $Z_0^- = Z^- \cup \{0\}$).

Oczywiście w przypadku zbioru liczb wymiernych (Q) i rzeczywistych (R) stosują się analogiczne oznaczenia.
W przypadku zbioru liczb naturalnych dodatkowo mamy:

$Z^+ = N$, $Z_0^+ = Z^+ \cup \{0\} = N_0$.

Ponieważ jeden rysunek mówi więcej niż tysiąc słów, przedstawmy to na poniższym diagramie:



Ze względów formalnych, na osi liczbowej (aby mogła być nazywana „osią liczbową") dodatkowo zaznaczono jednostkę „*1*" i co ta oś opisuje – tu: „*x*"-y.

Dodatkowo widzimy więc, że zbiory liczbowe można przedstawiać też w inny sposób:

1) w szczególnych przypadkach przy pomocy standardowego oznaczenia, np.: N, Q^-, Z_0^+;
2) przy pomocy predykatów $<$, $>$, $\geq$ i $\leq$, np.: $x>3$, $4<x\leq 8$;
3) przy pomocy oznaczeń graficznych jak w przypadku wyżej przytoczonej osi liczbowej.

Obecnie możemy już przejść do prezentacji poszczególnych **aksjomatów teorii mnogości**:

I Aksjomat jednoznaczności (zwany również aksjomatem egzystencjonalności):

Jeżeli zbiory składają się z tych samych elementów, to są identyczne,
co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób: $Z(A) \wedge Z(B) \wedge \bigwedge_{x} [x \in A \leftrightarrow x \in B] \rightarrow A = B$,

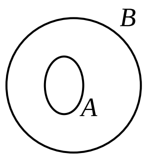
co z kolei czytamy:

- jeśli *A* i *B* są zbiorami, a przy tym jest tak, że dowolny obiekt jest elementem zbioru *A* witw, gdy jest elementem zbioru *B*,
- to (zbiory) *A* i *B* są identyczne.

Zwróćmy uwagę na następujące pary zbiorów:

1) $A = \{2, 2, 5\}$ i $B = \{2, 5, 5\}$. W myśl powyższego aksjomatu są one identyczne, gdyż składają się z tych samych elementów. W zbiorze *A* nie ma żadnego elementu, którego nie byłoby w zbiorze *B*, i – *vice versa* – w zbiorze *B* nie ma żadnego elementu, którego nie byłoby w zbiorze *A*. Można więc zapisać $A = B$, a nawet $A = B = C$, gdzie $C = \{2, 5, 5\}$. Zapytasz więc zapewne: zaraz, zaraz – to jeśli ktoś ma szkole z matmy *2*, *2* i *5* (średnia *3*), to jest to samo, jakby miał *2*, *5* i *5* (średnia *4*)? Otóż nie – w dzienniku oceny nie tworzą bowiem zbioru, lecz ciąg. W ciągu ważna jest bowiem kolejność i krotność, a w ciągu nie (jak w naszych zbiorach *A*, *B* i *C*).
2) $A' = \{2, 5\}$ i $B' = \{5, 2\}$. Tutaj analogicznie – oba te zbiory składają się z tych samych elementów, a więc są identyczne. Fakt, że są one podane w odwrotnej kolejności nie ma najmniejszego znaczenia. Gdybyśmy jednak rozpatrywali to w kategorii ocen w dzienniku, to:
   - w I przypadku nauczyciel skłonny był by dać uczniowi czwórkę, gdyż ten osiąga coraz lepsze wyniki,
   - a w II przypadku – jedynie trójkę, ze względu na coraz gorsze wyniki.
3) $A'' = \{1, 4\}$ i $B'' = \{1, 2+2\}$. I w tym przypadku oba te zbiory są identyczne. W myśl powyższego aksjomatu składają się bowiem z dokładnie z tych samych elementów, a to, że jeden z nich jest wyrażony w różny sposób (*4* jako *4* i jako *2+2*) nie ma tu najmniejszego znaczenia.

Zdefiniujmy pojęcie inkluzji (tj. zawierania się) zbiorów.
Otóż mówimy, że zbiór *A* zawiera się w zbiorze *B* (lub równoważnie: zbiór *A* jest podzbiorem zbioru *B*, czy też: zbiór *B* jest nadzbiorem zbioru *A*) witw, gdy każdy element zbioru *A* jest elementem zbioru *B*.
Poniżej przedstawiłem to na rysunku, przy pomocy symbolicznego zapisu oraz omówiłem ów symboliczny zapis.



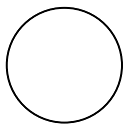
$A \subset B \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} [x \in A \rightarrow x \in B]$

co czytamy:

zbiór *A* zawiera się w zbiorze *B* witw, gdy
- dla każdego *x* jest tak, że jeśli *x* jest elementem zbioru *A*, to i to *x* jest elementem zbioru *B*
- lub równoważnie: każdy element zbioru *A* jest elementem zbioru *B*.

Jak się okazuje, równość zbiorów można wyrazić za pomocą ich inkluzji, w następujący sposób:
$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ (co czytamy: dwa zbiory są identyczne witw nawzajem się w sobie zawierają).

$A = B$

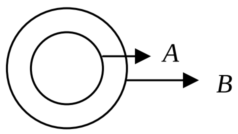


Jest to zarazem **KRYTERIUM** równości zbiorów.

Słowo „kryterium" oznacza, że wyrażamy jedno pojęcie za pomocą innych, w sumie równoważnych mu.

Przy okazji możemy podać tu od razu trzy kryteria inkluzji zbiorów – wyrażone odpowiednio przy pomocy:
- ich różnicy: $A \subset B \leftrightarrow A - B = \varnothing$
- ich sumy: $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$
- ich przekroju: $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

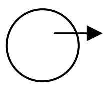
Łatwo dostrzeżesz ich zachodzenie wprost z definicji tych pojęć (inkluzja, suma, różnica przekrój, równość zbiorów), jak i z samego rysunku:



II Aksjomat zbioru pustego.
Istnieje zbiór taki, że żaden przedmiot nie jest jego elementem,
co symbolicznie zapisujemy w następujący sposób: $\underset{Z(A)}{\mathrm{V}} \; \underset{x}{\Lambda} \, x \notin A$

Przeczytać możemy to w następujący literalny sposób:
Istnieje taki zbiór *A*, że jakiegokolwiek byśmy nie brali *x*, to na pewno nie jest on jego elementem.

Ze względu na specyfikę języka polskiego, fakt że „dla każdego *x* nie zachodzi", czytamy: „dla żadnego *x* nie zachodzi", w związku z czym to co w aksjomacie symbolicznie zapisaliśmy „dl każdego *x*, $x \notin A$", podaliśmy słownie: „żaden *x* nie należy do *A*".



Zbiór A nie posiadający żadnych elementów

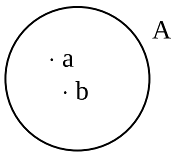
Od razu zauważmy tu, że gdybyśmy z kolei mieli do czynienia z zapisem $\underset{x}{\Lambda} \, x \in A$, to literalnie przeczytalibyśmy to „dla każdego *x* jest tak, że *x* należy do *A*", a po polsku: „każdy *x* należy do *A*".

Twierdzenie:
Istnieje co najwyżej jeden taki zbiór, do którego żaden element nie należy.
Dowód:

Załóżmy (nie wprost), że istnieją dwa takie zbiory: A i B (ze względu na specyfikę dowodu nie wprost pokażemy, że doprowadzi nas to do sprzeczności). Na mocy definicji, zbiory te składają się z tych samych elementów, a stąd na mocy aksjomatu I są identyczne, czyli $A = B$. Oznacza to, że *de facto* istnieje jeden zbiór (może tylko na dwa sposoby nazwany – odpowiednio: A i B).

Teraz, kiedy wiemy już:
1) że istnieje taki zbiór, do którego żaden element nie należy (z II aksjomatu),
2) oraz że jest on tylko jeden (z powyższego twierdzenia),
zatem możemy w końcu go zdefiniować (co niniejszym czynimy):
Definicja:
Zbiór pusty – jest to taki zbiór, do którego żaden element nie należy.

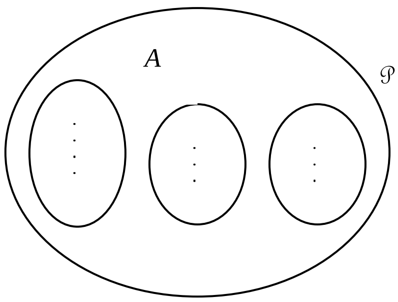
II' Aksjomat pary nieuporządkowanej
(można go wyprowadzić z innych aksjomatów, więc jest to właściwie twierdzenie, a nie aksjomat; nazwa aksjomat pozostała jedynie ze względów historycznych /kiedy jeszcze tego nie wiedziano, że to nie jest aksjomat/ i ze względu na jego doniosłość; dlatego też oznaczamy go II', a nie III).
Brzmi on następująco:
Dla dowolnej pary przedmiotów a, b istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są obiekty a i b.
Symbolicznie możemy go zapisać w następujący sposób: $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{Z(A)} \bigwedge_{x} [x \in A \leftrightarrow x = a \vee x = b]$
Zbiór taki oznaczać będziemy $\{a, b\}$.



W powyższej równoważności (na którą – jak wiadomo ze względu na prawo: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p)$ – składają się dwie implikacje w przeciwne strony):
1) implikacja w lewą stronę („←") oznacza, że „tak a jak i b są elementami zbioru A" (bo literalnie czytając mamy: jeśli coś nazywa się a lub b, to to coś należy do A);
2) implikacja w prawą stronę („→") oznacza, że „tylko a i b mogą należeć do zbioru A" (bo literalnie czytając mamy: jeśli coś należy do A – to to coś to musi być a lub b /a nie co innego!/).

Łącznie oznacza to, że na zbiór A składają się elementy a i b i żaden inny, czyli że $A = \{a, b\}$.

III Aksjomat sumy
Wprowadźmy oznaczenia:
$\mathcal{P}$ (p duże pisane) – rodzina zbiorów (a więc zbiór zbiorów)
S – suma tych zbiorów.
Dla każdej rodziny zbiorów $\mathcal{P}$ istnieje zbiór S, złożony wyłącznie z tych wszystkich elementów które należą do któregokolwiek zbioru A rodziny $\mathcal{P}$.
Symbolicznie możemy to zapisać w następujący sposób: $Z(\mathcal{P}) \wedge \bigwedge_{A\in \mathcal{P}} Z(A) \rightarrow \bigvee_{Z(S)} \bigwedge_{x} [x \in S \leftrightarrow \bigvee_{A\in \mathcal{P}} x \in A]$
Czytamy to w następujący sposób:
- jeśli $\mathcal{P}$ jest zbiorem i każdy element $\mathcal{P}$ też jest zbiorem (czyli łącznie innymi słowy: jeśli $\mathcal{P}$ jest zbiorem zbiorów, lub jeszcze krócej: jeżeli $\mathcal{P}$ jest rodziną zbiorów),
- to wówczas istnieje taki zbiór S, że dla każdego x-a jest tak, że jest on elementem owego zbioru S witw, gdy jest elementem któregoś ze zbiorów rodziny $\mathcal{P}$ (czyli innymi słowy, gdy jest elementem sumy zbiorów rodziny $\mathcal{P}$ – stąd właśnie nazwa tego aksjomatu).



$\mathcal{P}$ - tu zbiór 3-elementowy

S – tu zbiór 10-elementowy

Sumą zbiorów rodziny $\wp$ (lub krócej: sumą rodziny $\wp$, co oznaczamy $\bigcup_{A\in\wp} A$, a to z kolei literalnie czytamy: suma zbiorów A po A należących do $\wp$) nazywamy zbiór złożony wyłącznie z tych wszystkich elementów, które należą do któregokolwiek zbioru A rodziny $\wp$ (jest to suma elementów wszystkich zbiorów).
Symbolicznie możemy oddać to w następujący sposób: $\bigcup_{A\in\wp} A = \{x\colon \bigvee_{A\in\wp} x\in A\}$,
a stąd otrzymujemy (równoważny mu zapis): $x\in \bigcup_{A\in\wp} A \leftrightarrow \bigvee_{A\in\wp} x\in A$.

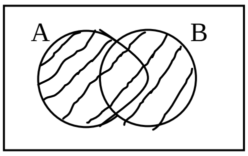
Twierdzenie o istnieniu sumy dwóch zbiorów
Dla dowolnych zbiorów A, B istnieje dokładnie jeden zbiór złożony wyłącznie z tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.

Symbolicznie:

$$\bigwedge_{Z(A),\, Z(B)} \ \bigvee!_{Z(C)} \ [\, x\in C \leftrightarrow x\in A \vee x\in B],$$

w którym wykrzyknik po kwantyfikatorze szczególnym oznacza, że „istnieje dokładnie jeden obiekt, o którym ten kwantyfikator orzeka”).

Występujące w tym twierdzeniu słowo „lub” oznacza, że mamy do czynienia z sytuacja jak na rysunku poniżej, gdzie zakreskowanie oznacza zbiór o którym orzekamy (składa się on więc z tych elementów, które są tylko w zbiorze A, tylko w zbiorze B, jak również tych, które są tak w zbiorze A jak i w zbiorze B).



Dowód:
Na mocy aksjomatu pary nieuporządkowanej, istnieje obiekt $\wp$, którego jedynymi elementami są zbiory A i B (symbolicznie: $\wp = \{A, B\}$).
Na podstawie aksjomatu sumy istnieje suma tej rodziny: $\bigcup_{X\in\wp} X$ (co czytamy: suma zbiorów X po X branych z $\wp$)

1. Sprawdźmy, co się na nią składa:
   $x\in \bigcup_{X\in\wp} X \leftrightarrow \bigvee_{X\in\wp} x\in X \leftrightarrow \bigvee_{X} (X\in\wp \wedge x\in X) \leftrightarrow \bigvee_{X} [(X = A \vee X = B)\wedge x\in X] \leftrightarrow$

   z def. sumy uogólnionej; z metody wysuwania predykatu za znak kwantyfikatora; z definicji zbioru $\wp$ ($\wp = \{A, B\}$); z prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji: $(p\vee q)\wedge r \leftrightarrow (p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

   $\leftrightarrow \bigvee_{X} [(X = A \wedge x\in X) \vee (X = B \wedge x\in X)] \leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

   z redukcji wyrażeń w nawiasach i usunięcia kwantyfikatora z X-em (bo nic wówczas nie wiąże).

Definicja
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony wyłącznie z tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B.
Symbolicznie: $A\cup B = \{x\colon x\in A \vee x\in B\}$
lub równoważnie: $x\in A\cup B \leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

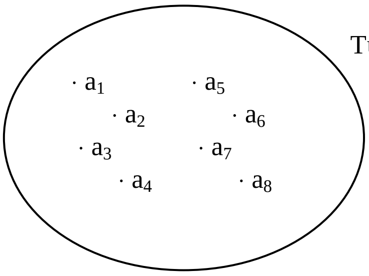
Twierdzenie
Dla dowolnych przedmiotów a, b i c istnieje dokładnie jeden zbiór, którego jedynymi elementami są a, b i c.

Dowód:
Przypatrzmy się następującej równoważności: $x\in X \leftrightarrow x = a \vee x = b \vee x = c$.
Składają się na nią dwie implikacje:
1) w lewo ($\leftarrow$), oznaczająca że te elementy (a, b i c) należą do X,

2) w prawo (→), oznaczająca że jeśli coś należy do X, to właśnie one (a, b i c), czyli (innymi słowy) że tylko one mogą należeć do X.

Udowodnienie twierdzenia sprowadza się więc do udowodnienia owej równoważności.
Niech a, b i c będą dane. Na mocy aksjomatu pary istnieją zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{c, c\} = \{c\}$ (tę równość otrzymujemy na mocy aksjomatu jednoznaczności). Na podstawie twierdzenia o sumie zbiorów istnieje suma tych zbiorów: $\{a, b\} \cup \{c\} = X$. Tak więc:
$x \in X \;\leftrightarrow\; x \in \{a, b\} \cup \{c\} \;\leftrightarrow\; x \in \{a, b\} \vee x \in \{c\} \;\leftrightarrow\; x = a \vee x = b \vee x = c$,
co kończy dowód.

Twierdzenie
Dla dowolnej skończonej liczby przedmiotów a_1, a_2, ..., a_n istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są te obiekty.



Tu n = 8

Jeśli mamy do czynienia z pewną (nie znaną nam) liczba obiektów, o których wiemy tylko, że jest ich skończona ilość, wówczas obieramy dla nich jakąś nazwę (tu: a), dodatkowo indeksując je u dołu od jeden do (pewnego) n.
Piszemy więc: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Dowód tego twierdzenia przeprowadza się przez indukcję. Nie zamieszczamy go tutaj w pełnej formie (mam nadzieję, że PT Czytelnik mi to wybaczy ☺), jako że metoda indukcyjna będzie omówiona (i formalnie uzasadniona) dopiero w III rozdziale (obecnie jesteśmy w I). Jednak równolegle do właściwego sposobu, a w dodatku nieformalnie, można je uzasadnić.

„Uzasadnienie” – krótkie, nie koniecznie formalne, wykazanie prawdziwości danego sformułowania

Uczynimy to w następujący sposób:
Na mocy poprzedniego twierdzenia, mamy zbiór złożony z 3 elementów. Gdy podobnie jak w jego dowodzie weźmiemy czwarty (d – odpowiednik c) i w konsekwencji $\{a, b, c\} \cup \{d\} = \{a, b, c, d\}$.
Możemy postępować tak dalej (owo „tak dalej” czyni nasz dowód nieformalnym) aż do wykorzystania wszystkich n elementów. To kończy nasze uzasadnienie.

Definicja pary uporządkowanej
$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

W tej chwili omawiamy teorię mnogości (a więc – dla przypomnienia – odnoszącą się do zbiorów) i w związku z tym parę uporządkowaną definiujemy tu w oparciu o zbiory. Jest to tylko formalna definicja (i tak należy ją traktować!), ale za to bardzo dobrze oddaje sens tego pojęcia. Intuicyjnie bowiem parę uporządkowaną rozumiemy – jak sama nazwa wskazuje - jako parę elementów, w której istotne jest, który z nich stoi na I miejscu, a który na II.
Po prawej stronie tej równości mamy zbiór, który składa się z dwóch zbiorów: jednoelementowego ($\{a\}$) i dwuelementowego ($\{a, b\}$). Ten dwuelementowy wskazuje, z jakich elementów składa się owa para uporządkowana, a ten jednoelementowy (jego element jest jednym z elementów tamtego dwuelementowego) który z nich stoi na I miejscu. Co istotne, osiągnęliśmy ten cel, mimo, że dysponowaliśmy jedynie zbiorami, które – jak wiemy – nie rozróżniają kolejności. Co nadto, gdybyśmy zmienili kolejność elementów w rodzinie zbiorów,

Przypomnijmy: rodzina zbiorów, to zbiór, który składa się tylko ze zbiorów

czy też w jej elemencie – zbiorze dwuelementowym, to i tak uzyskalibyśmy ten sam efekt – parę (a, b).
Para uporządkowana jest więc ciągiem dwuelementowym.

Pytanie: co oznacza zapis: $\{\{a\}, \{a\}\}$ i dlaczego?

Kryterium równości pary
$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$

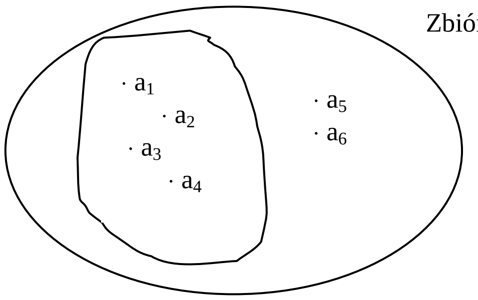
> W nazwie tego kryterium użyliśmy pojęcia „równość”. Mimo że tak pojęcia „równość”, jak i „równanie” wyrażamy za pomocą znaku „=” (równa się), to jednak oznaczają one co innego:
> - „równość” odnosi się do prawa (jest zawsze prawdziwa, np. $a + b = b + a$),
> - a „równanie” nie (jego przykładem jest np.: $2 + x = 7$).
> Równania się rozwiązuje, a prawa stosuje (oczywiście wcześniej wykazując ich prawdziwość).

Kryterium to możemy odczytać w następujący sposób:
Dwie pary uporządkowane są identyczne witw, gdy identyczne są ich poprzedniki i następniki.

IV aksjomat zbioru potęgowego.

Wyobraźmy sobie pewien zbiór *A*. Składa się on z pewnej liczby elementów. Możemy z nich tworzyć dowolne podzbiory zbioru *A*.

Zbiorem potęgowym zbioru *A* nazywamy rodzinę złożoną ze wszystkich podzbiorów zbioru *A*.



Zbiór *A* i jeden z jego podzbiorów

Aksjomat:
Dla dowolnego zbioru *A* istnieje rodzina zbiorów $\mathcal{P}(A)$, której jedynymi elementami są <u>wszystkie</u> podzbiory zbioru *A* (oznaczamy ja 2^A).

Tak więc: $X \in 2^A \leftrightarrow X \subset A$.

Przykłady:
1. ponieważ $\{1\} \supset \varnothing, \{1\}$ (te i tyko te!), zatem 2^A $(=2^{\{1\}}) \ni \varnothing, \{1\}$ (te i tyko te!), a zatem 2^A $(=2^{\{1\}}) = \{\varnothing, \{1\}\}$.
2. ponieważ $\{1, 2\} \supset \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ (te i tyko te!), zatem 2^A $(=2^{\{1,2\}}) \ni \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ (te i tyko te!), a zatem 2^A $(=2^{\{1,2\}}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Zauważmy, że w tym II przykładzie możemy wyznaczyć wszystkie podzbiory zbioru *A* w następujący sposób:
Spisujemy zbiór $A = \{1, 2\}$, a pod jego elementami wszystkie możliwe ciągi *0-1*-kowe: (już nie w formalny sposób z nawiasami i przecinkami)

0 0
0 1
1 0
1 1

1 oznacza tu, że dany element jest w naszym podzbiorze, a *0* – że go tam nie ma. Tak więc kolejne linie oznaczają tu podzbiory: $\varnothing, \{2\}, \{1\}, \{1, 2\}$, a więc w sunie wszystkie elementy zbioru 2^A.

> Owe ciągi *0-1*-kowe można tworzyć m.in. w następujący systemowy sposób:
> 1. najpierw na pierwszej pozycji z prawej piszemy *0* i pod nim *1*;
> 2. następnie dublujemy go w dół, a na lewo od niego piszemy zera, zaś na lewo od części zdublowanej – jedynki;
> 3. gdybyśmy mieli więcej elementów w zbiorze *A* odpowiednio tyle razy powtarzalibyśmy jeszcze krok 2.

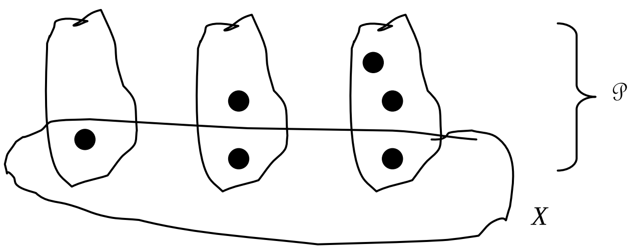
V aksjomat nieskończoności
Zauważmy, że na mocy aksjomatu zbioru pustego istnieje zbiór pusty ($\varnothing$). Na mocy aksjomatu pary istnieje zbiór złożony ze zbioru pustego ($\{\varnothing\}$). Rozważanie to można kontynuować w nieskończoność, otrzymując dalej po kolei: $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, $\{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}$, ...
Jeśli z tak otrzymanych zbiorów utworzymy zbiór (a więc rodzinę zbiorów), to będzie on oczywiście nieskończony (będzie składać się z nieskończonej ilości elementów, a to, że będą to jedynie zbiory w sumie zbudowane w oparciu o zbiór pusty, nie ma tu najmniejszego znaczenia, czyni jednak z naszego zbioru potęgowego „wielkie nic”).

My jednak zbudujemy go w inny, choć analogiczny sposób:

Istnieje rodzina zbiorów $\mathcal{P}$ o następujących własnościach:
1) $\varnothing \in \mathcal{P}$,
2) $A \in \mathcal{P} \to A \cup \{A\} \in \mathcal{P}$.

Zobaczmy, jakie po kolei elementy będziemy dołączać do tworzonego (w oparciu o w/w aksjomat) zbioru (a właściwie: rodziny) $\mathcal{P}$:
1) w oparciu o punkt 1) – do $\mathcal{P}$ należy $\varnothing$;
2) ponieważ (co dopiero pokazaliśmy) $\varnothing \in \mathcal{P}$, zatem w oparciu o punkt 2) aksjomatu, do $\mathcal{P}$ należy również
$\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
3) ponieważ (co dopiero pokazaliśmy) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}$, zatem w oparciu o punkt 2) aksjomatu, do $\mathcal{P}$ należy również
$\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
4) ponieważ (co dopiero pokazaliśmy) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \mathcal{P}$, zatem w oparciu o punkt 2) aksjomatu, do $\mathcal{P}$ należy również
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
Postępując analogicznie dalej, otrzymujemy w sumie, że $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, ...\}$.
Przedstawiliśmy tu procedurę uzyskania zbioru nieskończonego.

VI Aksjomat wyboru
Dla każdej rodziny zbiorów $\mathcal{P}$ niepustych i rozłącznych, istnieje zbiór X, który ma dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów należących do rodziny $\mathcal{P}$.



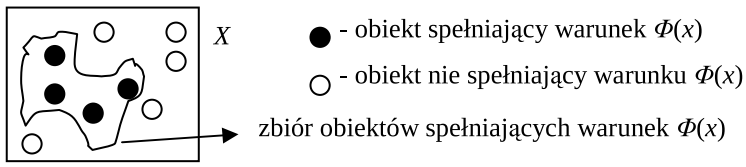
Jest o bardzo specyficzny aksjomat. Jako jedyny nie podaje on bowiem, w jaki sposób należy go stosować. Mówi on, że można coś zrobić, ale nie podaje jak tego dokonać. Dlatego też mówimy, że nie jest on konstrukcyjny, a z tego powodu część matematyków (tzw. konstruktywiści) nie uznaje go (uznają tylko te stwierdzenia, które nie tylko mówią, że można coś zrobić, ale i podają jak tego dokonać).

Stwierdzenie – zdanie orzekające

Aksjomat VI’ – aksjomat wyróżniania
Dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór A, którego jedynymi elementami są te wszystkie elementy zbioru X, które spełniają warunek $\Phi(x)$.

Ów zbiór A można więc przedstawić w następujący sposób: $A = \{x \in X: \Phi(x)\}$.

Z kolei aksjomat ten symbolicznie zapisujemy następująco: $Z(X) \to \bigvee_{Z(A)} \bigwedge_{x} [x \in A \leftrightarrow x \in X \wedge \Phi(x)]$,
co czytamy: jeżeli X jest zbiorem, to istnieje taki zbiór A, o którym można powiedzieć, że
jego elementami są te i tylko te obiekty, które są elementami zbioru X i spełniają warunek $\Phi(x)$.



Aksjomat VII – zastępowania (lub równoważnie: podstawiania)

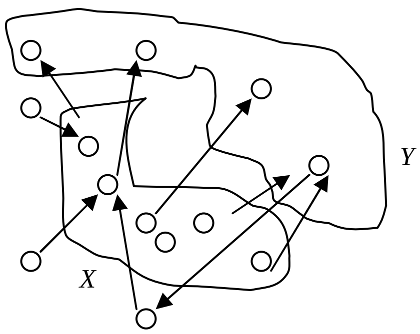
Jeżeli predykat $\Phi(x, y)$ przyporządkowuje każdemu elementowi x co najwyżej jeden element y, to dla każdego zbioru X istnieje zbiór Y, którego jedynymi elementami są te wszystkie obiekty y, które są przyporządkowane za pomocą predykatu $\Phi(x, y)$ pewnym elementom $x \in X$.

Co symbolicznie zapisujemy i czytamy:

$$\bigwedge_{x,\, y,\, y'} [\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, y') \rightarrow y = y'] \;\rightarrow\; \bigwedge_{Z(X)} \; \bigvee_{Z(Y)} \; \bigwedge_{y} [y \in Y \leftrightarrow \bigvee_{x \in X} \Phi(x, y)]$$

Jeżeli na danym predykacie jest tak, że jednemu poprzednikowi przyporządkowuje zawsze ten sam następnik	to dla dowolnego zbiory X istnieje zbiór Y taki, że dla dowolnego obiektu y jest tak, że jest on elementem zbioru Y witw, gdy w zbiorze X istnieje dla niego poprzednik w predykacie $\Phi(x, y)$

Zróbmy stosowny rysunek. Zaznaczamy kółeczka (oznaczające poszczególne elementy). Następnie łączymy je strzałkami, ale tak, że z żadnego elementu nie może odchodzić więcej niż jedna strzałka do innego (lub tego samego) elementu (oznaczają one owo przyporządkowanie predykatowe). Gdy wtedy dowolnie zaznaczymy zbiór X, to jednoznacznie będziemy mogli wskazać zbiór Y – zbiór tych elementów, do których idą strzałki z elementów znajdujących się w zbiorze X .



7. Algebra zbiorów

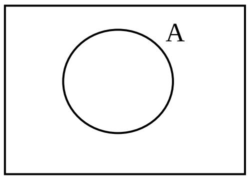
W rozdziale tym omówimy operacje, jakie można wykonywać na zbiorach:
- zdefiniujemy je,
- podamy przy pomocy jakich symboli się je zapisuje,
- podamy ich własności i zależności.

Niech więc A, B i C będą zbiorami (tj. $Z(A)$, $Z(B)$ i $Z(C)$), na których to (jako „dowolnych zbiorach") będziemy wykonywać te operacje.

Przestrzeń X / uniwersum U
Dla dowolnego zbioru obiektów zawsze jesteśmy w stanie określić pewien jego nadzbiór, który zwykle zdefiniowany będzie w oparciu o jedną kategorię rzeczownikową (np. „zbiór ludzi") lub przymiotnikową (np. „obiekty o masie co najmniej 1 kg"). Tak więc na przykład dla zbioru leworęcznych takim uniwersum jest zbiór ludzi, dla zbioru spodni – zbiór ubrań, itd. Zawsze można tak zrobić, nawet wtedy gdy rozpatrywane obiekty nie są ze sobą zbytnio „spokrewnione" – na przykład dla zboru {telefon, szyszka, księżyc} – takim uniwersum będzie „zbiór obiektów materialnych".

Tak jak w świecie realnym mówimy o semantycznym uniwersum i oznaczamy je symbolem U, tak w matematyce – mówimy o (sztucznej jak to jest z obiektami matematycznymi) przestrzeni i oznaczamy ją symbolem X (nie mówimy więc o „uniwersum liczb rzeczywistych”, lecz o „przestrzeni liczb rzeczywistych”). Co nadto, mówimy o zbiorze określonym „w przestrzenie” oraz „na uniwersum”.

Na rysunku ową przestrzeń (czy uniwersum) oznaczać będziemy prostokątem, w którym wrysowane będą wszystkie rozważane zbiory.



U (lub: X)

I. $\subset$ - **predykat inkluzji**, tj. zawierania się zbiorów

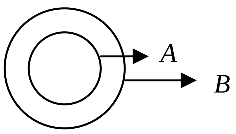
coś, co orzeka o czymś (zresztą już to wiesz)

$A \subset B \leftrightarrow \bigwedge_x (x \in A \rightarrow x \in B)$ (*)

co czytamy: <u>zbiór *A* zawiera się w zbiorze *B*</u> witw, gdy każdy jego element jest również elementem zbioru *B*.

Analogicznie można powiedzieć:
- zbiór *A* jest podzbiorem zbioru *B*
- zbiór *B* jest nadzbiorem zbioru *A*
- zbiór *A* pozostaje w relacji inkluzji ze zbiorem *B* (najbardziej udziwnione!, ale jak najbardziej poprawne)

Sytuację tę przedstawia poniższy rysunek:



Poprzez zanegowanie obu stron równoważności (*), otrzymujemy warunek (konieczny i dostateczny) na nie zawieranie się zbiorów:

$A \not\subset B \leftrightarrow \bigvee_x (x \in A \wedge x \notin B)$

Zadanie: wykażemy, że rzeczywiście zanegowaniem prawej strony równoważności (*) jest prawa strona powyższej równoważności.

$\sim \bigwedge_x (x \in A \rightarrow x \in B) \leftrightarrow \bigvee_x \sim (x \in A \rightarrow x \in B) \leftrightarrow \bigvee_x (x \in A \wedge x \notin B)$

z **I prawa de Morgana dla rachunku predykatów**: z: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$

$\sim \bigwedge_x P(x) \leftrightarrow \bigvee_x \sim P(x)$

Przy okazji dla przypomnienia **II prawo de Morgana dla rachunku predykatów**: $\sim \bigvee_x P(x) \leftrightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$

Własności inkluzji:
1) $\varnothing \subset A$
2) $A \subset A$ prawo zwrotności
3) $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
4) $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$

Dowód (jedynie p. 1)

1) $\varnothing \subset A \leftrightarrow \bigwedge_x (\underbrace{x \in \varnothing}_{} \rightarrow x \in A)$

z def. inkluzji wartość logiczna *0*, bo żaden element nie należy zbiorów do zbioru pustego (bo jest on przecież pusty!)

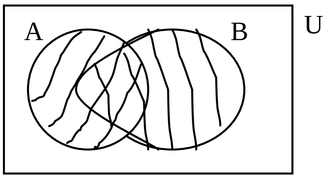
Ponieważ zaś każda implikacja o fałszywym poprzedniku jest prawdziwa, zatem i prawa strona tej równoważności jest prawdziwa, a co za tym idzie również (dowodzona przez nas, równoważna jej) – lewa jej strona.

II. **Suma zbiorów** (wyrażana za pomocą symbolu $\cup$)

$A \cup B = \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$

$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$



$A \cup B$ jest to więc pole, które zostało „zakreskowane” – stanowi więc je cała „lornetka”.

Własności:

1) $\varnothing \cup A = A$
2) $A \cup A = A$
3) $A \cup B = B \cup A$ przemienność
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ łączność

Związki między inkluzją a dodawaniem

1) $A \subset A \cup B$
2) $(A \subset B \wedge C \subset D) \to A \cup C \subset B \cup D$
3) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$ kryterium inkluzji zbiorów (wyrażone przy pomocy symbolu funkcyjnego dodawania zbiorów)

Dowód (jedynie p. 2)

2) Musimy udowodnić, że $(A \subset B \wedge C \subset D) \to A \cup C \subset B \cup D$,
tj. przy założeniu że $A \subset B \wedge C \subset D$, musimy udowodnić że $A \cup C \subset B \cup D$.
Załóżmy więc, że $A \subset B$ i $C \subset D$ (są to nasze założeniea). Udowodnimy, że wówczas $A \cup C \subset B \cup D$ (nasza teza).

z def. inkluzji

$\underbrace{\bigwedge_x (x \in A \to x \in B)}_{\text{założenie 1}}$ $\underbrace{\bigwedge_x (x \in C \to x \in D)}_{\text{założenie 2}}$

$\bigwedge_x (x \in A \cup C \to x \in B \cup D)$

Sprowadza się to do udowodnienia, że przy ustalonym x

x jeśli $\underbrace{x \in A \cup C}_{\text{założenie 3}}$, to $\underbrace{x \in B \cup D}_{\text{ostateczna teza}}$

stąd $x \in A \vee x \in C$

Rozpiszmy tę alternatywę:

1. Gdy $x \in A$, to (z zał. 1) $x \in B$, a stąd (z wł. 1 „związków między inkluzją a dodawaniem”) $x \in B \cup D$.
2. Gdy z kolei $x \in C$, to (z zał. 2) $x \in D$, a stąd (z wł. 1 „związków między inkluzją a dodawaniem”) $x \in B \cup D$.

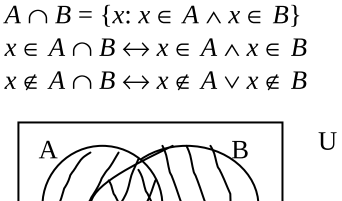
Tak więc bez względu na to czy $x \in A$ czy $x \in C$, i tak $x \in B \cup D$, co właśnie mieliśmy wykazać.

III. **Przekrój (iloczyn, część wspólna, mnożenie) zbiorów** - wyrażany przy pomocy symbolu $\cap$

$A \cap B = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$

$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$



$A \cap B$ jest to więc pole, które zostało „zakratkowane” – stanowi więc je cała środkowy „oscypek”.

Własności:

1) $\varnothing \cap A = \varnothing$
2) $A \cap A = A$
3) $A \cap B = B \cap A$ przemienność
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ łączność

Związki między inkluzją a mnożeniem

1) $A \cap B \subset A$
2) $(A \subset B \wedge C \subset D) \rightarrow A \cap C \subset B \cap D$
3) $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$ kryterium inkluzji zbiorów (wyrażone przy pomocy symbolu funkcyjnego mnożenia zbiorów)

Związki między sumą i przekrojem

1) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

Jest to prawo rozdzielności przekroju względem sumy zbiorów (łatwo zapamiętać jego nazwę – po prostu przekrój się rozdzielił: był 1, a są 2). Po prawej stronie równości przekroje nie są wzięte w nawiasy, gdyż są one zbyteczne (przekrój mocniej wiąże niż suma).

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Jest to prawo rozdzielności sumy względem przekroju zbiorów (łatwo zapamiętać jego nazwę – po prostu suma się rozdzieliła: była 1, a są 2).

Zauważmy, ze pierwszy z tych związków (w pewnym sensie) jest odpowiednikiem algebraicznego prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania: a · (b + c) = a · b + a · c.
Drugi z nich, niestety nie ma odpowiednika w algebrze, gdyż nie jest prawdą, że: a + (b · c) = (a + b) · (a + c).

Dowód

Udowodnimy drugą z tych równości. Otóż zachodzenie równości oznacza zachodzenie ich inkluzji w obydwie strony: $A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

a) dowód inkluzji w prawą stronę ($\subset$)

Musimy udowodnić, że $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tj. (w oparciu o definicję inkluzji), że

$$\bigwedge_{x} [x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

(implikację w drugą stronę – będącą równoważną odpowiedniej inkluzji w druga stronę – udowodnimy w podpunkcie b)

Mamy udowodnić odpowiednią implikację dla dowolnego x. Weźmy więc dowolne x i udowodnijmy ją dla niego.
Z kolei udowodnić implikację, to przyjąć jej poprzednik jako założenie i udowodnić przy nim zachodzenie jej następnika.
Zakładamy więc, że $x \in A \cup (B \cap C)$. Musimy udowodnić, że $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Zobaczmy, do czego doprowadzi nas rozpisanie założenia:

$$x \in A \cup (B \cap C) \underset{\text{z def. sumy zbiorów}}{\leftrightarrow} x \in A \vee x \in (B \cap C) \underset{\text{z def. przekroju zbiorów}}{\leftrightarrow} x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \underset{\text{z prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji}}{\leftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \leftrightarrow$$

$$\underset{\text{z def. sumy zbiorów}}{\leftrightarrow} x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \underset{\text{z def. przekroju zbiorów}}{\leftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

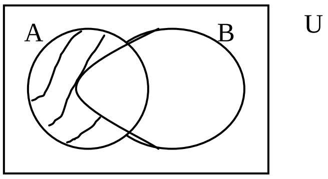
Co daje nam tezę.

Uwaga

Ponieważ przy powyższym wyprowadzaniu tezy z założenia cały czas posługiwaliśmy się równoważnościami (choć wystarczyły by implikacje), zatem pokazaliśmy w ten sposób, że zachodzi i implikacja (a co za tym idzie i odpowiednia inkluzja) w druga stronę (rozpisywanie podpunktu b dowodu nie jest więc już potrzebne).

IV. Odejmowanie zbiorów (wyrażane za pomocą symbolu funkcyjnego \)

$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$
$x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
$x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$



$A \setminus B$ jest to więc pole „zakreskowane” – całe A bez B

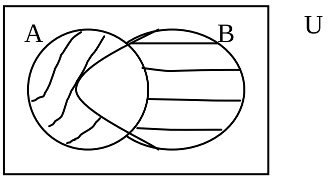
Prawa de Morgana dla różnicy
8) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
9) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Inne **związki** między inkluzją a odejmowaniem
1) $A \setminus B \subset A$
2) $A \subset B \leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$ kryterium inkluzji wyrażone przy pomocy różnicy zbiorów

V. Różnica symetryczna (wyrażana za pomocą symbolu funkcyjnego ÷)

$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

stąd stąd

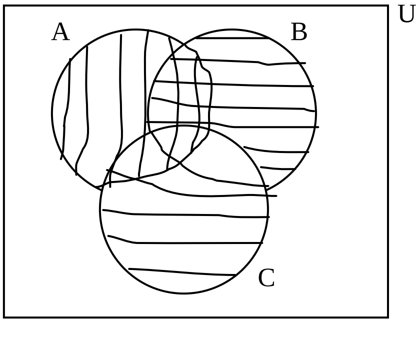


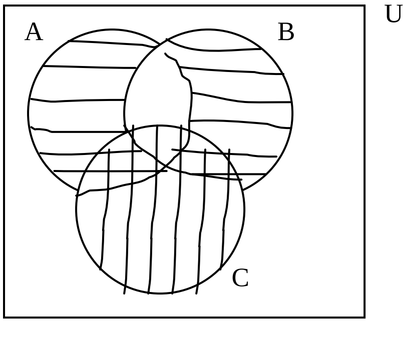
$A \div B$ jest to więc pole „zakreskowane” (tak liniami ukośnymi obrazującymi zbiór $A \setminus B$, jak i poziomymi – obrazującymi zbiór $B \setminus A$).

Wprost z tego rysunku widzimy, że $A = B \leftrightarrow A \div B = \varnothing$,
czyli gdy owe zakreskowane pola na powyższym rysunku nie będą zawierały żadnego elementu.

Inne własności:
1) $A \div B = B \div A$
2) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$

Udowodnimy ostatnią z tych równości. Dokonamy tego w sposób „półformalny”, posługując się jedynie rysunkami





Linie pionowe – to A
Linie poziome – to $B \div C$
W takim razie $\boldsymbol{A \div (B \div C)}$ – to obszar dotknięty kreską, ale nie zakratkowany

Linie poziome – to $A \div B$
Linie pionowe – to C
W takim razie $\boldsymbol{(A \div B) \div C}$ – to obszar dotknięty kreską, ale nie zakratkowany.

Widzimy, że na oby tych rysunkach, rozważane pola, to „obszary dotknięte kreską, ale nie zakreskowane”, i że są to dokładnie te same obszary: 3 uszy i sam środek. W takim razie równość $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$ jest prawdziwa, co kończy dowód.

VI. Dopełnienie przestrzeni

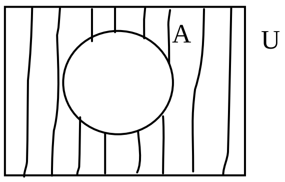
2 różne oznaczenie dopełnienia zbiorów

$-A = A' = \{x: x \notin A\} = U \setminus A = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$

lub: X lub: X

stosujemy gdy: uniwersum ustalone — uniwersum nie ustalone

$x \in A' \leftrightarrow x \notin A$
$x \notin A' \leftrightarrow x \in A$



A’ – to zakreskowane pole

Widzimy teraz jak ważne jest uniwersum. W nim bowiem dokonuje się dopełnienie zbioru.

Własności uniwersum
1) $X' = \varnothing$ (dopełnieniem przestrzeni jest zbiór pusty)
2) $\varnothing' = X$ (dopełnieniem zbioru pustego jest cała przestrzeń)
3) $A'' = A$ (podwójne /lub nawet: każde parzyste/ dopełnienie się znosi)

Związek między inkluzją, a dopełnieniem
$A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$

DYGRESJA NT. IZOMORFIZMU

W matematyce mówimy, że dwa systemy są izomorficzne, jeśli istnieje wzajemna odpowiedniość między nimi. Oznacza to, że gdy będziemy w prawach jednego z nich w konsekwentny sposób zamieniać poszczególne znaki symboli, operacji i predykatów na odpowiednie (odpowiadające im) znaki drugiego systemu, to zawsze będziemy otrzymywać odpowiadające im prawa drugiego z tych systemów, przy czym odpowiedniość ta działa również w drugą stronę.

Tak więc, powyższe prawo w języku zdań możemy zapisać w następujący sposób:
$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
Poniżej podajemy tabelę wzajemnych podstawień

Znak w systemie rachunku zbiorów	Znak w systemie rachunku zdań	
A	p	
B	q	
‘	~	w naszym przykładzie
$\subset$	$\to$	
$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	
C	r	
D	s	
$\cap$	$\wedge$	
$\cup$	$\vee$	
=	$\leftrightarrow$	
$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	
\	$\wedge$ ~	do wykorzystania również
X (lub U)	*1*	w pozostałych sytuacjach
$\varnothing$	*0*	
$\div$	$\vee\cdot$	
(	(	
)	)	
... $\neq$ ...	~(... $\leftrightarrow$ ...)	
itd		

Izomorfizm systemów jest bardzo przydatny. Jeśli bowiem chcemy udowodnić coś w I systemie (twierdzenie, formułę), lecz nie wiemy jak to zrobić (lub wiemy, lecz jest to trudno wykonalne), to wówczas przeformułowujemy to na II system, dowodzimy w nim i i udowodnione prawo przeformułowujemu na I system.
Można tez postąpić inaczej: po przeformułowaniu na II system, prowadzimy w nim dowód, a następnie prowadzimy analogiczny dowód w I systemie (II system jest więc dla nas jedynie szablonem dowodu właściwego).

Powróćmy do naszych naczelnych rozważań (obecnie związanych z dopełnieniem zbiorów).

Związki ogólne
1) $A \cup A' = U$
2) $A \cap A' = \varnothing$
3) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **prawa** de Morgana
4) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dla rachunku zbiorów
5) $A \setminus B = A \cap B'$

Zauważmy, że powyższe prawa 3) i 4) są szczególnymi przypadkami (wcześniej już podanych) praw de Morgana dla różnicy zbiorów:
1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Jeśli bowiem w owych prawach de Morgana dla różnicy zbiorów w miejsca A wstawimy X, w miejsce B – C, a w miejsce C – B, to otrzymamy:
1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
Ponieważ zaś dla dowolnego zbioru D: $X \setminus D = D'$, więc otrzymujemy stąd dalej
1) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **prawa** de Morgana
2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ dla rachunku zbiorów
czyli właśnie dopiero co wprowadzone prawa de Morgana dla rachunku zbiorów (nr 3) i 4)).

VII. Ciało zbiorów

Algebra (jeden z działów matematyki formalnej – choć zapewne dotychczas sądziłeś, że jest to dział matematyki elementarnej, o ile tylko cała matematyka nie była dla Ciebie czysta abstrakcją) opisuje pewne struktury (j. np. grupy, półgrupy., pierścienie, ciała), które definiuje się ze względu na zachodzenie w nich pewnych własności.

A nuż gdzieś się zetknąłeś z czymś takim, więc – abyś sam się nie wprowadzał przypadkiem w błąd – sam podaję, że: mawiane tu ciało zbiorów nie jest ciałem w sensie algebraicznym! Przejdźmy jednak do rzeczy.

Definicja
Niepustą rodzinę $\mathcal{K}$ podzbiorów niepustej określonej (lub równoważnie: ustalonej) przestrzeni X nazywamy ciałem zbiorów witw, gdy

1. rodzina $\mathcal{K}$ jest zamknięta (ze względu) na dopełnienie, tj.: $A \in \mathcal{K} \rightarrow A' \in \mathcal{K}$
2. rodzina $\mathcal{K}$ jest zamknięta (ze względu) na dodawanie, tj.: $A, B \in \mathcal{K} \rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$

2'. rodzina $\mathcal{K}$ jest zamknięta (ze względu) na mnożenie, tj.: $A, B \in \mathcal{K} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$

Zachodzić muszą warunki 1 i 2 lub 1 i 2' (oznacza to, że w zestawie z warunkiem 1, warunek 2 jest równoważny warunkowi 2').

Użyte w powyższej definicji pojęcie „zbiór zamknięty (ze względu) na pewną operację (np. dodawanie, odejmowanie, dzielenie)" wytłumaczymy na konkretnym przykładzie. Weźmy zbiór liczb naturalnych (już wiesz co to jest!). Jeśli weźmiemy dowolne dwie liczby naturalne, to:

1.	ich suma **zawsze jest** liczbą naturalną	a zatem zbiór liczb naturalnych **jest** zamknięty ze względu na dodawanie
2.	ich różnica **nie zawsze jest** liczbą naturalną	a zatem zbiór liczb naturalnych **nie jest** zamknięty ze względu na odejmowanie
3.	ich iloczyn **zawsze jest** liczbą naturalną	a zatem zbiór liczb naturalnych **jest** zamknięty ze względu na mnożenie
4.	ich różnica **nie zawsze jest** liczbą naturalną	a zatem zbiór liczb naturalnych **nie jest** zamknięty ze względu na dzielenie

Zatem (krótko:) określenie „zbiór X jest zamknięty (ze względu) na operację f " oznacza, że wykonanie tej operacji na obiektach z tego zbioru zawsze daje wynik o wartości w tym zbiorze; w przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór ten nie jest zamknięty (ze względu) na tę operację.

Uwaga!
Powyżej podałem, że jeśli jest spełniony pewien warunek, to jest tak a tak, a jeśli nie jest spełniony ów warunek, to tak akurat nie jest. Może się komuś (albo wręcz wielu!) wydawać, że zostało to „przegadane". Otóż wcale niekoniecznie! Mamy bowiem na przykład funkcję parzystą (taką, w której $f(x) = f(-x)$), funkcję nieparzystą (tj. taką, w której $f(-x) = - f(-x)$), lecz nie wyczerpują one wszystkich funkcji – tj. że mogą być jeszcze funkcje, które nie są ani parzyste, ani nie są nieparzyste (krócej mówimy o nich, że są „ani-ani"). Należy więc być ostrożnych w swym matematycznych sądach i w związku z tym „na zimne dmuchać" by poprzez definicję (a nie domyślanie się) właściwie określić zakres danego pojęcia.

Rozpatrzmy następujący przykład: zamiast tego można po prostu napisać: X
Niech $X = \{2, 3, 4\}$.
Wtedy $$2^X = \{\underbrace{\varnothing}, \underbrace{\{2\}, \{3\}, \{4\}}, \underbrace{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}}, \underbrace{\overbrace{\{2, 3, 4\}}}\}$$
Są to wszystkie zbiory: 0-, 1-, 2- i 3- elementowe.
Tworzą one rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X.
Będziemy tworzyć kilka przykładowych zbiorów $\mathcal{K}$, a żeby je odróżnić między sobą, będziemy je dodatkowo zaopatrywać w indeksy dolne (będące kolejnymi liczbami naturalnymi).

Wyjaśnienie:
Gdy mamy pewną liczbę obiektów tego samego typu (np. zbiorów, czy też szczególny tego przypadek – jak to ma właśnie miejsce u nas – rodzinę zbiorów), a

- nie wiemy ile ich będzie
- lub przypuszczamy, że może do ich zapisania zabraknąć alfabetu
- i/lub chcemy, aby obiekty te były zaznaczane w podobny sposób (co niechybnie wskazywałoby, że są one tego samego typu, tej samej klasy)
- i/lub dodatkowo chcemy aby ukazana była ich wzajemna zależność (oceny końcowe z matematyki uzyskiwane w poszczególnych latach nauki)

wówczas stosujemy zmienne z indeksami.
Indeksy te możemy umieszczać u dołu zmiennych, a gdy jest ich więcej niż jeden – to u doły po przecinkach lub u dołu i u góry.

Przykłady:

1. A_1, A_2, A_3, A_4;
2. $b_1, b_2, ..., b_n$;
3. $c_1, c_2, ..., c_{120}$;
4. $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}$,
   $a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}$,
   $a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4}$,
   $a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}, a_{4,4}$;
5. czy też równoważnie ostatniemu przykładowi:
   $a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$,
   $a_2^1, a_2^2, a_2^3, a_2^4$,
   $a_3^1, a_3^2, a_3^3, a_3^4$,
   $a_4^1, a_4^2, a_4^3, a_4^4$.

Tworzymy możliwe rodziny

1) $\mathcal{K}_1$ składa się z elementów:
   - $\{2\}$ - pierwszy element zbioru $\mathcal{K}_1$, o którym zakładamy, że do niego należy
   - zatem (na mocy punktu 1. definicji ciała zbiorów) $\{3, 4\}$ (jako równe $\{2\}'$ w X) też należy do $\mathcal{K}$
   - zatem (na mocy punktu 2. definicji ciała zbiorów) $\{2\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\} = X$ też należy do $\mathcal{K}$, a co za tym idzie również $\varnothing$ (jako równy X') też należy do $\mathcal{K}$ (wyniki z tego myślnika moglibyśmy otrzymać w odwrotnej kolejności, stosując zamiast punktu 2. definicji jej punkt 2').

   W ten sposób otrzymaliśmy (póki co) następującą rodzinę $\mathcal{K}_1$: $\mathcal{K}_1 = \{\{2\}, \{3, 4\}, X, \varnothing\}$. Sprawdźmy, czy jest to już ciało zbiorów. W tym celu sprawdzimy w poniższych tabelach zachodzenie warunków 1 i 2 (oraz – z formalizmu – 2') definicji ciała zbiorów.

   Warunek 1

A ($\in \mathcal{K}_1$)	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	X	$\varnothing$
A' (czy $\in \mathcal{K}_1$?)	$\{3, 4\}$ (TAK)	$\{2\}$ (TAK)	$\varnothing$ (TAK)	X (TAK)

   Warunek 2 (na przecięciu wierszy i kolumn znajduje się suma mnogościowa wyrazów z ich nagłówków, które z kolei są poszczególnymi elementami A i B zbioru $\mathcal{K}_1$)

$\cup$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	X	$\varnothing$
$\{2\}$	$\{2\}$	X	X	$\{2\}$
$\{3, 4\}$	X	$\{3, 4\}$	X	$\{3, 4\}$
X	X	X	X	X
$\varnothing$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	X	$\varnothing$

   Wynik sumowania elementów z $\mathcal{K}_1$ zawsze należy do $\mathcal{K}_1$

   Warunek 2' (na przecięciu wierszy i kolumn znajduje się iloczyn mnogościowy wyrazów z ich nagłówków, które z kolei są poszczególnymi elementami A i B zbioru $\mathcal{K}_1$)

$\cap$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	X	$\varnothing$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\varnothing$	$\{2\}$	$\varnothing$
$\{3, 4\}$	$\varnothing$	$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\varnothing$
X	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	X	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

   Wynik mnożenia elementów z $\mathcal{K}_1$ zawsze należy do $\mathcal{K}_1$

2) $\mathcal{K}_2 = 2^X$ – ciało maksymalne
3) $\mathcal{K}_3 = \{\varnothing, X\}$ – ciało minimalne

$\Big\}$ zawsze tworzą ciało

4) $\mathcal{K}_4 = \{\underbrace{\{2\}, \{2, 3\}}_{\text{od nich wychodzimy}}, \underbrace{\{3, 4\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{3\}, \varnothing, X}_{\text{te musieliśmy dopisać}}\} = 2^X = \mathcal{K}_2$

(jak w przykładzie 1)). (z uwagi na def. ciała zbiorów)

Zadanie:
1. Podaj, ile różnych ciał zbiorów możemy utworzyć w oparciu o przestrzeń X (mówimy: nad przestrzenią X)
2. Podaj j. w., ale z dokładnością do izomorfizmu (tj. identyczności struktury).

8. Nieelementarna arytmetyka liczb naturalnych (teoria Peano)

Teoria ta tworzy system aksjomatyczny, więc budując ją wyjdziemy od pojęć pierwotnych i aksjomatów.

I. pojęcia pierwotne
- Należenie do zbioru, te dwa identyczne
- Bycie zbiorem, jak w teorii mnogości
- *1* (jedynka), *N* (jeden obiekt – zbiór liczb naturalnych), *S* (symbol funkcyjny jednoargumentowy funkcji następnika)

II. Aksjomaty

0. $Z(N)$ – N jest zbiorem
1. $1 \in N$ – jedynka jest liczba naturalną
2. $x \in N \to S(x) \in N$ – następnik liczby naturalnej jest liczba naturalną (literalnie: jeżeli coś jest liczba naturalną, to jego następnik też jest liczbą naturalną)
3. $x \in N \to \sim(1 = S(x))$ – jeżeli $x \in N$, to nieprawda, że 1 jest następnikiem x (tj. 0 nie jest liczbą naturalną, bo jedynka nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej)
4. $x \neq y \to S(x) \neq S(y)$ – następniki różnych liczb są różne (lub – po zastosowaniu prawa transpozycji /p→q ↔ ~q → ~p/ – następnik osiąga daną wartość tylko na określonym argumencie)
5. Aksjomat indukcji:
   $$\bigwedge_{Z(A)} [1 \in A \wedge \bigwedge_{x} (x \in A \to S(x) \in A) \to N \subset A]$$
   - dla każdego zbioru jeśli jest tak, że
     - jeśli zawiera on jedynkę i wraz z każdym elementem zawiera jego następnik
     - to zawiera w sobie zbiór liczb naturalnych.

   Inaczej (jaśniej) można to ująć następującymi słowy:
   Zbiór, który:
   1. zawiera jedynkę
   2. wraz z każdym elementem zawiera jego następnik

   zawiera w sobie zbiór liczb naturalnych.

Zobaczmy, jak w tym systemie definiuje się poszczególne liczby (naturalne):
$1 = 1$ (jedynki nie trzeba definiować, gdyż jest pojęciem pierwotnym)
$2 = S(1)$ – czytamy: dwójka jest następnikiem jedynki (a co to jest jedynka już wiemy!)
$3 = S(2) = S(S(1)) = SS(1)$ – analiza:

trójka jest następnikiem dwójki

która z kolei jest następnikiem jedynki

czyli w sumie: trójka jest następnikiem następnika jedynki (której nie musimy już definiować, bo jest pojęciem pierwotnym)

co możemy krócej zapisać tak, czyli pomijając nawias oddzielający *S*-y (pamiętając jednak, że to tylko zapis i „znaczeniowo” cały czas nawias ten tam jest)

III. Definicja dodawania:
Podam ją w sposób indukcyjny (zauważ, że takie samo miano nosi przytoczony powyżej 5. aksjomat teorii Peano). Najpierw jednak zastanówmy się, co to znaczy, że definicja jest indukcyjna. Z tego typu definicjami miałeś już do czynienia w szkole ponadgimnazjalnej (o ile od momentu napisania przeze mnie tej książki nie zmienił się

program nauczania w liceum – u nas wszystko jest możliwe). O ile dobrze pamiętam, jedyna taka definicja w szkole, dotyczyła pojęcia silni, którą określa się dla dowolnej liczy naturalnej (matematycy robią to właściwie szerzej, bo jeszcze dla zera, a nawet wymyślili szerszą funkcję – funkcję gamma definiowaną za pomocą całki Eulera, ale to już całkiem inna historia – bynajmniej nie dla humanisty – matematycznego laika).
Tak więc – dla przypomnienia – $n!$ (n silnię) definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = (n - 1)! \cdot n \end{cases}$$

Co zdumiewające: silnię definiujemy za pomocą silni. Niepodobna tak robić: określać coś za pomocą tego samego, a więc tego, czego jeszcze nie znamy (bo dopiero za pomocą tej definicji chcemy poznać). Tu korekta: zwykle niepodobna, ale nie w przypadku definicji indukcyjnych. Zobaczmy bowiem:

1) $1!$ – to po prostu 1 (jasno jest to podane w I linii powyższej definicji);
2) $2! = (2 - 1)! \cdot 2 = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$ (poradziliśmy sobie wykorzystując na początku II linię definicji);
3) $3! = (3 - 1)! \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ (poradziliśmy sobie wykorzystując na początku II linię definicji, a przy przedostatnim znaku równości dopiero co obliczona wartość $2!$ /gdybyśmy jej nie znali – dalej liczylibyśmy: $= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$);
4) $4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$;
   lub od razu $= 6$
5) i ogólnie: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$, gdzie „...” oznacza „i tak dalej (aż do)”.

Zawsze więc możemy taką funkcję dokładnie rozpisać i znaleźć jej wartość – opierając się bezpośrednio na wzorze danym (indukcyjnym) lub wyprowadzonym z niego (z „kropeczkami”).

Przejdźmy do naszej definicji dodawania (gwarantuję, ze zapewne mało kto dotychczas wiedział na dobrą sprawę, jak to się robi).

$$\begin{cases} k + 1 = S(k) & \text{(dodać do liczby 1, to po prostu wziąć jej następnik)} \\ k + S(n) = S(k + n) & \text{(dodać do jednej liczny następnik drugiej, to inaczej wziąć następnik ich sumy)} \end{cases}$$

Sprawdźmy, jak ona „działa”:

$$2 + 3 = 2 + S(2) = S(2 + 2) = S(2 + S(1)) = S(S(2 + 1)) = S(S(S(2))) = S(S(3)) = S(4) = 5$$

dostosowanie wyrażenia do stosowania II linii definicji	sto-su-jemy ją	dostosowanie wy-rażenia w nawia-sie do stosowania II linii definicji	sto-su-jemy ją	stosujemy I linię definicji	bierzemy następnik dwójki	bierzemy następnik trójki	bierzemy następnik czwórki

Zauważmy, że dodać 3 do 2 jest trudniej niż dodać 2 do 3 (podobnie jak mając 2 tys. $ zarobić 3 tys. $, jest trudniej, niż mając 3 tys. $ zarobić jedynie 2 tys. $):

$$3 + 2 = 3 + S(1) = S(3 + 1) = S(S(3)) = S(4) = 5$$

dostosowanie wyrażenia do stosowania II linii definicji	sto-su-jemy ją	stosujemy I linię definicji	bierzemy następnik trójki	bierzemy następnik czwórki

nieprawdaż, że szybciej i prościej?!

Zobaczmy jeszcze, że II linia owej definicji mnożenia: $k + S(n) = S(k + n)$,
to nic innego, jak: $k + (n + 1) = (k + n) + 1$, co jest niechybnie prawdą (nie wzięła się więc ona „z powietrza”).

IV. Definicja mnożenia

Też jest indukcyjna, przy czym wprowadzając ją zakładamy, że dodawać już umiemy (dopiero co się przecież tego nauczyliśmy!):

$$\begin{cases} k \cdot 1 = k \\ k \cdot S(n) = k \cdot n + k \end{cases}$$

Tutaj z kolei lewą stronę II linii możemy rozpisać w następujący sposób: $k \cdot (n + 1) = k \cdot n + k \cdot 1 = k \cdot n + k$, a więc otrzymując prawą jej stronę (widzimy więc, że i ona nie wzięła się „z powietrza” – matematyka jest b. logiczna, co oznacza w tym przypadku, że nie jest sprzeczna i wszystko się w niej zgadza).

Zobaczmy przykłady:

$3 \cdot 2 = 3 \cdot S(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 3 + S(2) = \underbrace{...}\!= 6$

dostosowanie	sto-	stosu-	dostosowanie wy-	
wyrażenia do	su-	jemy	rażenia do stoso-	kontynujemy
stosowania II	jemy	I linię	wania II linii defi-	dodawanie
linii definicji	ją	definicji	nicji dodawania	(to już umiemy!)

Z kolei:

$2 \cdot 3 = 2 \cdot S(2) = \underbrace{2 \cdot 2 + 2} = 2 \cdot S(1) + 2 = 2 \cdot 1 + 2 + 2 = \underbrace{2 + 2 + 2} = ... = 6$

sprowadziliśmy do mnożenia o mniejszym stopniu i dodawania — dodawać już umiemy!

W ten sposób dodatkowo zobaczyliśmy, co to znaczy $2 \cdot 3$ (dwie trójki), a co $3 \cdot 2$ (trzy dwójki). Mimo że miałeś to już w I klasie szkoły podstawowej, to zapewne od tego czasu zatraciłeś umiejętność identyfikowania tych przypadków (zlały Ci się i w związki z tym ich nie rozróżniasz, tym bardziej, że wiesz, że $a \cdot b = b \cdot a$, więc i tak jest to bez znaczenia). Teraz miałeś okazję przyponie to sobie i już zapewne dobrze to zapamiętasz!

V. Zasada minimum (twierdzenie równoważne aksjomatowi 5)

Zanim jednak ją przytoczymy, podajmy 3 związane z nią definicje.

1) Najpierw zobaczmy, co to znaczy, że jedna liczba naturalna (*m*) jest mniejsza od drugiej (*n*):

$$\bigwedge_{m,n \in N} [m < n \leftrightarrow \bigvee_{k \in N} m + k = n]$$

co czytamy: dla dowolnych dwóch liczb naturalnych jest tak, że pierwsza z nich jest mniejsza od drugiej witw, gdy istnieje taka trzecia liczba naturalna, że po dodaniu jej do owej pierwszej liczby, otrzymamy tę drugą.

Stąd też np. $3<5$, bo istnieje liczba naturalna 2, która po dodaniu do 3 daje 5 ($3 + 2 = 5$).
Sądzę, że po tym przykładzie powyższa definicja jest już całkiem oczywista i zrozumiała.

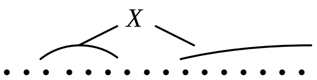
2) Następnie – w oparciu o powyższą definicję – sformułujmy definicję bycia najmniejszym w zbiorze:
Liczba x jest najmniejsza w zbiorze A witw, gdy $\bigwedge_{y \in A} [y \neq x \rightarrow x < y]$
(tj. gdy jest mniejsza od wszystkich pozostałych liczb z tego zbioru).

3) pozostaje nam jeszcze zdefiniować samo pojęcie „zasada”.

> Zasada – proste i podstawowe (naczelne) twierdzenie, jednak nie będące bezpośrednim wnioskiem z żadnego twierdzenia

W tym momencie możemy już podać samą **zasadę minimum**:
W każdym niepustym podzbiorze zbioru liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.

Dowód:
Niech X będzie owym dowolnym niepustym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.
Tak więc: $\underline{X \neq \varnothing \text{ i } X \subset N}$
Graficznie można to przedstawić np. w następujący sposób:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 ....

Załóżmy nie wprost, że w zbiorze tym nie ma liczby najmniejszej (w dowodzie będziemy więc dążyć do znalezienia sprzeczności).
Wprowadzamy (poprzez definicję) zbiór A: niech A będzie właśnie zbiorem tych wszystkich liczb naturalnych, które nie należą do X i takich, że liczby od nich mniejsze też nie należą do X (zbiór taki zawsze istnieje, może być nim choćby zbiór pusty). Na diagramie tym można go więc przedstawić w następujący sposób:

X

• • • • • • • • • • • • • • • •
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$ ....

A te już do A nie należą (bo mniejsze od nich należą do X)
wszystkie te liczby

Z definicji zbioru A, A jest rozłączne z X, tj. $\underline{A \cap X = \varnothing}$.

Udowodnimy, że zbiór wszystkich liczb naturalnych jest zawarty w A, tj. $N \subset A$
co przy oczywistym (z definicji zbioru A): $A \subset N$
daje nam: $A = N$

To jednak z wcześniejszymi trzema podkreślonymi warunkami daje nam sprzeczność, co oznacza, ze nasze założenie „nie wprost" było chybione, czyli że jednak w zbiorze X istnieje liczba najmniejsza, co kończy dowód

Stosując 5. aksjomat teorii Peano: $\Lambda_{Z(A)} [1 \in A \wedge \Lambda_{x} (x \in A \to S(x) \in A) \to N \subset A]$,
do naszego zbioru A, otrzymujemy, że wystarczy udowodnić, że
1^o. $1 \in A$ i 2^o. $\Lambda_{x} (x \in A \to S(x) \in A)$, aby otrzymać tym samym, że $N \subset A$
(a do tego właśnie dążymy – tylko to pozostaje nam do udowodnienia).

Ad 1^o. $1 \in A$, bo (sprawdzając warunki z definicji zbioru A):

1) $1 \notin X$ (bo – z założenia nie wprost – w X nie ma elementu najmniejszego, a gdyby $1 \in X$, to byłoby właśnie w nim elementem najmniejszym!);
2) liczby (naturalne) mniejsze od 1 nie należą do X (bo ich nie ma!).

Ad 2^o. $\Lambda_{x} (x \in A \to S(x) \in A)$, gdy weźmiemy dowolny x, daje nam to:
$x \in A \to S(x) \in A$. Aby to wykazać, weźmy $x \in A$ i pokażmy, że wtedy $S(x) \in A$.
Otóż, rzeczywiście wtedy tak jest, gdyż w przeciwnym razie (tj. gdyby $S(x) \notin A$) otrzymalibyśmy, że $S(x) \in X$ i wówczas byłoby w nim liczbą najmniejszą (wbrew naszemu założeniu nie wprost, że w X takiej liczby nie ma).

Zbierzmy nasze założenia:
1) $A \cap X = \varnothing$
2) $A = N$
3) $X \subset N$
4) $X \neq \varnothing$

Podstawiając 2) do 1) otrzymujemy: $N \cap X = \varnothing$.
Stąd i z 3) wynika, że $X = \varnothing$, co jest SPRZECZNE z 4)!

VI. Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli:
1. $T(1)$ – tj. pewne twierdzenie T jest prawdziwe dla liczby 1
2. $\Lambda_{n \in N} [T(n) \to T(n+1)]$ – dla dowolnej liczby naturalnej jest tak, że jeśli to twierdzenie jest prawdziwe dla niej, to i jest prawdziwe dla następnej liczby naturalnej

to wówczas $\Lambda_{n \in N} T(n)$, tj. twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

Dowód:
Zakładamy 1. i 2. i dla dowodu „nie wprost" przyjmujemy, że teza tej zasady nie zachodzi, tj. że twierdzenie to nie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej, tj. istnieje niepusty zbiór liczb naturalnych, dla których to twierdzenie nie zachodzi, a zatem (w oparciu o – dopiero co udowodnioną – zasadę minimum) istnieje w nim liczba najmniejsza. Niech właśnie k będzie ową najmniejszą liczba naturalną, dla której to twierdzenie jest fałszywe.
$k \neq 1$ (wynika to z „1.", bo dla 1 twierdzenie to jest prawdziwe)
Ponieważ (z definicji k) k jest najmniejszą liczba naturalną, dla której to twierdzenie jest fałszywe, zatem dla $k – 1$ twierdzenie to jest jeszcze prawdziwe (symbolicznie: $T(k–1)$). Jednak z „2." dla $n = k – 1$, otrzymujemy:
$T(k–1) \to T(k–1+1)$, co przy spełnionym $T(k–1)$ daje nam $T(k–1+1)$, tj. $T(k)$, co jest sprzeczne z naszą definicją k (k miało być najmniejszą liczbą naturalną, dla którego twierdzenie to nie zachodzi), a zatem i kończy dowód (nie wprost).

III. RELACJE

9. Relacje – podstawowe informacje

Definicja
Niech A i B będą zbiorami (tj. $Z(A)$ i $Z(B)$). Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór tych (wszystkich) par, których poprzedniki są elementami zbioru A, a następniki elementami zbioru B.
Symbolicznie zapiszemy to następująco: $A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$
i równoważnie: $(a, b) \in A \times B \leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$

Gdy $A = B$, to $A \times B = A \times A = A^2$ (co czytamy: A kwadrat lub kwadrat zbioru A)

Zauważmy, że elementami iloczynu kartezjańskiego są nie poszczególne obiekty, lecz pary obiektów (np. (a, b)).

Za przykład iloczynu kartezjańskiego niech służy nam opis pól szachownicy:
Mamy dwa zbiory: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Wówczas iloczynem kartezjańskim tych zbiorów nazywamy zbiór – opis wszystkich pól szachownicy:
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), ..., (a, 8), (b, 1), ..., (h, 8)\}$

Celem sprawdzenia właściwego rozumienia iloczynu kartezjańskiego, udowodnijmy, że:
$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$ (analogicznie zachodzi też: $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$).

Dowód:
Po lewej stronie mamy „zbiór, znak iloczynu kartezjańskiego, suma zbiorów”, czyli „zbiór, znak iloczynu kartezjańskiego, zbiór”, czyli „iloczyn kartezjański zbiorów” (czyli zbiór). Z kolei po prawej stronie mamy „iloczyn kartezjański zbiorów w sumie z iloczynem kartezjańskim zbiorów”, a więc „iloczyn kartezjański zbiorów” (czyli też zbiór). Po obu stronach mamy więc ten sam typ elementów: zbiór będący iloczynem kartezjańskim zbiorów.
Jako że $X = Y \leftrightarrow \underset{x}{\Lambda} [x \in X \leftrightarrow y \in Y]$
zatem, aby wykazać równość tych zbiorów ($A \times (B \cup C)$ i $A \times B \cup A \times C$), wystarczy wziąć dowolny x i wykazać, że należy on do pierwszego z tych zbiorów witw, gdy należy do drugiego z nich. Tak tez zrobimy:

$$(a, b) \in A \times (B \cup C) \underset{\text{z definicji iloczynu kartezjańskiego}}{\leftrightarrow} a \in A \wedge b \in B \cup C \underset{\text{z definicji sumy zbiorów}}{\leftrightarrow} a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \underset{\text{z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy: } p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}{\leftrightarrow} (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \leftrightarrow$$

$$\underset{\text{z definicji iloczynu kartezjańskiego}}{\leftrightarrow} (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C \underset{\text{z definicji sumy zbiorów}}{\leftrightarrow} (a, b) \in A \times B \cup A \times C$$

Definicja relacji
Relacją pomiędzy elementami zbioru A i elementami zbioru B nazywamy każdy zbiór par takich, że poprzedniki należą do zbioru A, a następniki do zbioru B.
Relację w zbiorze A nazywamy relacje pomiędzy elementami zbioru A, a elementami zbioru A.

Inna **definicja** relacji
Relacja – dowolny podzbiór zbioru wszystkich par iloczynu kartezjańskiego.

Weźmy **przykład**

Będziemy określać relacje na zbiorze $F = \{o, m, s, c\}$, określającym pewną rodzinę (stąd też F – od „family”, tj. rodzina), gdzie o – oznacza „ojciec”, m – „matka”, s – „syn”, c – „córka”. Uwaga! To nie jest rodzina zbiorów (pojęcie matematyczne), lecz ludzi! Dlatego F nie jest „pisane”!
Wszelkie relacje zaznaczać będziemy wybierając odpowiednie pary z iloczynu kartezjańskiego $F \times F$.

	o	*m*	*s*	*c*
o				
m				
s				
c				

← następniki

poprzedniki

tę przekątną nazywamy „główną”

Wszystkich par w tej relacji może być maksymalnie 4 (liczba poprzedników) $\cdot 4$ (liczba następników) $= 16$
Fakt, że jakaś para należy do relacji, w tabeli oznaczać będziemy znakiem „×” na przecięciu odpowiedniego wiersza (oznaczającego jej poprzednik) z odpowiednią kolumną (oznaczającą jej następnik).

Tak np. relację bycia dzieckiem przestawiamy w następujący sposób:

	o	*m*	*s*	*c*
o				
m				
s	×	×		
c	×	×		

lub: $C = \{(s, 0), (s, m), (c, o), (c, m)\}$ (C – od ang. child = dziecko)
gdzie poszczególne pary oznaczają odpowiednio:
(s, o) – syn jest dzieckiem ojca,
(s, m) – syn jest dzieckiem matki,
(c, o) – córka jest dzieckiem ojca,
(c, m) – córka jest dzieckiem matki.

oczywiste

już nie koniecznie prawdziwe ☺

Ze względu na wygodę i przytoczone powyżej nazewnictwo, zamiast pisać, że pewna para jest elementem relacji, można podać, że jej elementy spełniają tę relację. U nas będzie to więc np.:
$(s, o) \in C \leftrightarrow s\, C\, o$
(co czytamy: para (s, o) jest elementem relacji C witw, gdy s jest dzieckiem o).
W dalszej części tej pracy będziemy stosować głównie zapis jak w konwencji podanej po prawej stronie tej równoważności.

Zastanówmy się, ile różnych relacji możemy określić na naszej rodzinie F. Otóż w przypadku każdego z 16 pól tabeli możemy zostawić je wolne lub postawić na nim znak „×”. W dowolny sposób numerując miejsca w tabeli (na przykład wiersze od góry do dołu, a w nich pola od lewej do prawej), możemy rozważać, jak ich istnienie wpływa na liczbę wszystkich możliwych relacji. Otóż, gdybyśmy mieli tylko pierwsze pole, to mielibyśmy jedynie dwie relacje (z „×” i bez „×” na nim). Fakt, że mamy jeszcze drugie pole, zwiększa ich liczebność dwukrotnie, gdyż w każdej z powyższych sytuacji, mamy dwie możliwości: na polu nr 2 może być znak „×” lub też może go nie być. W ten sposób mamy więc $2 \cdot 2 = 4$ możliwości. Analogicznie, trzecie pole, znowu podwaja liczbę możliwych relacji. Mamy więc ich już $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. Postępując tak dalej, otrzymujemy, że na szesnastu polach relacji będzie $2^{16} = 65\,536$. Ponieważ z kolei 16, to 4^2 (4 – liczba elementów zbioru F), zatem ilość naszych relacji określa liczba 2^{4^2}. Ogólnie, jeśli moc (= ilość elementów) zbioru A wynosi n, to ilość relacji utworzonych na kwadracie zbioru A (tj. na zbiorze A^2) wynosi 2^{n^2}.

Zobaczmy jeszcze na specyficzne relacje.

1. Może być relacja $R_1 = \varnothing$. Ma ona zero elementów (tj. par, czy też krzyżyków w tabeli).
2. Może być relacja jednoelementowa, np. $R_2 = \{(o, o)\}$.
3. Może być relacja kilkuelementowa (np. podana wyżej relacja D).

4. W końcu może być relacja obejmująca cały iloczyn kartezjański $R_3 = F \times F = \{(o, o), ..., (c, c)\}$. W naszym przykładzie ma więc ona wszystkie *16* elementów, którym odpowiada *16* pól w tabeli.

Gdybyśmy relacje określali na kwadracie zbioru $B = \{1\}$, to oczywiście $B \times B = \{(1, 1)\}$, a co za tym idzie, można na nim określić jedynie dwie relacje: $\varnothing$ i $\{(1, 1)\}$.

Relację o najmniejszej liczbie elementów zawsze można określić (jest to po prostu $\varnothing$). Nie jest tak niestety w przypadku relacji maksymalnej, gdyż może jej po prostu nie być. Dzieje się tak w przypadku, gdy zbiór, na kwadracie którego się ją określa jest nieskończony co do mocy. Wtedy i owa maksymalna co do mocy relacja jest pod tym względem nieskończona, ale i inne jej podzbiory właściwe też mogą mieć moc nieskończoną. (o mocach zbiorów szerzej będzie w poświęconym im rozdziale).

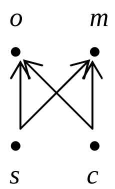
Zauważmy jeszcze, że relacje nie muszą mieć nazwy własnej. Powyżej omawiana relacja *C* – była to relacja bycia dzieckiem. Analogicznie można zdefiniować choćby relacje: bycia rodzicem, bycia starszym, bycia tej samej płci, itp. Wielu jednak relacjom spośród przytoczonej wyżej (w naszym przykładzie) ogólnej ich liczby *65 536*, trudno byłoby jakkolwiek nazwać, sensownie odnosząc to do życia.

Ważne jest Czytelniku, abyś „zapomniał” o potocznym rozumieniu relacji. Dla Ciebie, jako potencjalnego adepta kursu podstaw matematyki, relacja to bowiem jedynie „dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego”.

Wiesz już, że konkretną relację (jak to zrobiliśmy wyżej z relacją *C*) można określić podając ją:
1. w postaci zbioru – wypisując, jakie elementy się na nią składają,
2. w postaci tabeli, z zaznaczeniem w niej odpowiednich pól, które odpowiadają składającym się na nią elementom,
3. za pomocą określenia w języku potocznym (nie zawsze jest to wykonalne).

Okazuje się jednak, że jest jeszcze jeden bardzo praktyczny sposób, a mianowicie za pomocą grafu skierowanego. Otóż – formalnie rzecz ujmując – grafem takim nazywamy strukturę – uporządkowaną trójkę: zbiór wierzchołków (które oddajemy kropkami), krawędzi (oddawanych strzałkami) i funkcję, która przyporządkowuje poszczególne krawędzie do odpowiednich par punktów (a więc w przypadku poszczególnych strzałek określa, między którymi kropkami i w którą stronę mają być one ustawione). Tyle teoria, a teraz praktyka.

Nasza relacja *C* wyglądałaby więc w następujący sposób:



Jeśli jednak na wykresie miałoby się pojawić więcej strzałek, mógłby stać się on mało czytelny. Możemy uprościć sytuację, wprowadzając 3 rodzaje „strzałek”. Otóż:

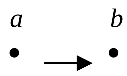
1. jeśli $(a,b) \in R$, a przy tym $a = b$ (tj. de facto można by napisać $(a,a) \in R$ lub $(b,b) \in R$), wówczas taką „pętelką” i oznaczać:

   • a (=b)

   W tabeli sytuacja ta oddana będzie *x*-em na głównej przekątnej – na przecięciu wiersza i kolumny *a*.

2. jeżeli $(a,b) \in R$, a $(b,a) \notin R$ (a co za tym idzie, $a \neq b$), wówczas po prostu oznaczymy to przy pomocy strzałki z *a* do *b*

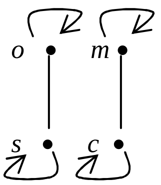
   W tabeli sytuacja ta oddana będzie *x*-em na przecięciu wiersza *a* i kolumny *b*, przy czym nie będzie miał on swojego symetrycznego odpowiednika względem głównej przekątnej (a więc nie będzie *x*-a na przecięcie wiersza *b* i kolumny *a*).

3. gdy zaś tak $(a,b) \in R$, jak i $(b,a) \in R$ (a przy tym $a \neq b$), wówczas zamiast oznaczać tę sytuację dwiema strzałkami (skierowanymi w przeciwne strony: $\rightarrow$ i $\leftarrow$), czy też zastępującą je jedną podwójną strzałką ($\leftrightarrow$), dla uproszczenia oddamy ją „strzałkę bez grotów” (–) i nazywać będziemy belką (proszę nie mylić z nazwiskiem ministra finansów za rządów SLD, który wprowadził słynny haracz od odsetek od oszczędności, zwany „podatkiem Belki”). Sytuację tę przedstawia poniższy graf:

   W tabeli sytuacja ta oddana będzie *x*-em na przecięciu wierszu *a* i kolumny *b*, oraz *x*-em na przecięciu wiersza *b* i kolumny *a* (a więc *x*-y te są ustawione symetrycznie względem głównej przekątnej).

Tak więc, wracając do naszego przykładu z rodziną, relację „bycie tej samej płci” oddamy następującym grafem:



Wprowadźmy jeszcze definicje trzech pojęć: dziedziny, przeciwdziedziny i pola relacji.

1. **Dziedziną** relacji *R* nazywamy zbiór wszystkich poprzedników składających się na nią par:
   $D(R) = \{x: \bigvee_{y} xRy\}$
2. **Przeciwdziedziną** relacji *R* nazywamy zbiór wszystkich następników składających się na nią par:
   $D^{-1}(R) = \{y: \bigvee_{x} xRy\}$ (zamiast pisać D^{-1}, można też pisać: D^{*}, $\breve{D}$ i ▢– *D* odwrócone)
3. **Polem** relacji *R* nazywamy sumę jej dziedziny i przeciwdziedziny (ponieważ dziedzina i przeciwdziedzina są zbiorami, jest to oczywiście suma mnogościowa): $D^{-1}(R) = D(R) \cup D^{-1}(R)$. Jest to więc zbiór wszystkich poprzedników i następników relacji *R*.

W przypadku omawianej relacji *C*: $D(C) = \{s, c\}$, $D^{-1}(C) = \{o, m\}$, $P(C) = \{s, c, m, o\}$.

Rozpatrzmy jeszcze jeden **przykład**.
Niech mianowicie dany będzie zbiór $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na zbiorze tym określmy relację bycia dzielnikiem właściwym, w następujący sposób: $x\ W\ y$ witw gdy *x* jest dzielnikiem właściwym *y*, tj. gdy istnieje taka liczba całkowita *z*, że $x \cdot z = y$, a przy tym $x \neq 1$ i $x \neq y$ (np. *2* jest dzielnikiem właściwym *10*-ki, bo istnieje taka liczba całkowita, a mianowicie *5*, że właśnie $2 \cdot 5 = 10$, a przy tym $5 \neq 1$ i $5 \neq 10$).

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1						
2				x		x
3						x
4						
5						
6						

$D(W) = \{2, 3\}$, (poprzedniki, które mają następniki)
$D^{-1}(W) = \{4, 6\}$, (następniki, które maja poprzedniki)
$P(W) = \{2, 3, 4, 6\}$. (suma *D* i D^{-1})

10. Własności formalne relacji

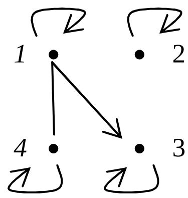
Każdej z relacji mogą bowiem przysługiwać różne własności. Otóż o relacji *R* określonej w zbiorze *A* powiemy, że jest ona:

1. **zwrotna** witw, gdy $\Lambda_{x\in A}\; x\,R\,x$

Każdy z elementów rozpatrywanego zbioru musi być więc w relacji sam z sobą. Oznacza to, że:
- w tabeli na głównej przekątnej wszystkie pozycje są zaznaczone,
- a w grafie, że w każdym wierzchołku jest pętelka.

Oto przykładowa sytuacja:

	1	*2*	*3*	*4*
1	x		x	x
2		x		
3			x	
4	x			x



W tabeli na szarym tłem dodatkowo zaznaczono główną przekątną (podobnie postąpimy też w następnych tabelach).

Przykładem jest np. relacja równości liczb (każda liczba jest równa sobie samej), relacja równoległości prostych (każda prosta jest równoległa do samej siebie), czy tez relacja bycia z tego samego rocznika.

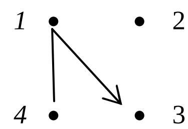
Sposób zapamiętania: wszystkie pętelki.

2. **przeciwzwrotna** witw, gdy $\Lambda_{x\in A} \sim (x\,R\,x)$ (lub równoważnie /z prawa de Morgana/: gdy $\sim \mathrm{V}_{x\in A}\,(x\,R\,x)$)

Żaden z elementów rozpatrywanego zbioru nie może więc być w relacji sam z sobą. Oznacza to, że:
- w tabeli na głównej przekątnej wszystkie pozycje są puste,
- a w grafie, że w żadnym wierzchołku nie ma pętelki.

Oto przykładowa sytuacja:

	1	*2*	*3*	*4*
1			x	x
2				
3				
4	x			



Przykładem jest np. relacja prostopadłości prostych (żadna prosta nie jest prostopadła do siebie samej), czy też na zbiorze ludzi „bycia innego rocznika” (nikt nie urodził się w innym roku, niż się urodził).

Sposób zapamiętania: brak pętelek.

Zastanówmy się w tym miejscu, czy relacje zwrotne i przeciwzwrotne wyczerpują wszystkie relacje, czyli innymi słowy, czy jest tak, że jakąkolwiek byśmy nie wzięli relację, to moglibyśmy o niej powiedzieć, że jest zwrotna lub przeciwzrotna. Otóż NIE! „Zwrotna” – znaczy „wszystkie pętelki”, „przeciwzwrotna” – „brak pętelek”. A przecież może być jeszcze sytuacja „część pętelek jest, a części (reszty) nie ma”.

Ponadto relacja nie może być zarazem zwrotna i przeciwzwrotna. Musiała by bowiem wtedy zarazem mieć wszystkie pętelki i nie mieć żadnej z nich. (Istnieje wyjątek w tym względzie – relacja rozpatrywana na zbiorze pustym, ale o tym powiemy dopiero za jakiś czas, choć już niebawem!).

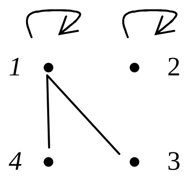
3. **symetryczna** witw, gdy $\Lambda_{x,y\in A}\,(x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x)$

Jeśli relacja zachodzi więc między dwoma elementami, w jedna stronę, to musi i zachodzić między nimi w drugą stronę. Na wykresach nie może więc być strzałek Aby relacja była symetryczna, każda strzałka musi być usunięta albo rozszerzona o strzałkę w przeciwnym kierunku do belki. A jak wygląda sprawa pętelek? Otóż pętelka oznacza, że zachodzi relacja między pewnym *x* a nim samym. Jeśli jest więc pętelka z pewnego *x* do (tego samego) *x*, to i jest z *x* do *x*! Jeśli zaś nie jest z danego *x* do (tego samego) *x*, to znaczy to, że w definicji relacji symetrycznej poprzednik implikacji przyjmuje wartość logiczną *0*, a co za tym idzie, jest ona prawdziwa. Tak więc pętelki (ich istnienie, czy też brak) w ogóle nie wpływają na kwestię symetryczności. Symetryczność znaczy tylko „brak strzałek”.

Tak więc w przypadku relacji symetrycznej:
- w grafie brak jest strzałek,
- a w tabeli na pozycjach poza główną przekątną, każdy element ma swój odpowiednik na pozycji symetrycznej względem głównej przekątnej.

Oto przykładowa sytuacja:

	1	*2*	*3*	*4*
1	x		x	x
2		x		
3	x			
4	x			



Przykładem jest np. relacja bycia tego samego kolory, czy relacja równości liczb.

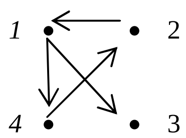
Sposób zapamiętania: brak strzałek.

4. **asymetryczna** witw, gdy $\bigwedge_{x,y\in A} (x\ R\ y \rightarrow \sim y\ R\ x)$

Jeśli relacja zachodzi więc między dwoma elementami w jedna stronę, to nie może zachodzić między nimi w drugą stronę. Na wykresach nie może więc być belek. A jak wygląda sprawa pętelek? Otóż pętelka oznacza, że zachodzi relacja między pewnym *x*–em a nim samym. Jeśli jest więc pętelka z pewnego *x*–a do (tego samego) *x*-a, to (zgodnie z powyższą definicją), nie ma jej! Zatem (aby nie było sprzeczności) nie może jej być. Sumując, nie ma belek, ani pętelek. Mogą więc być tylko strzałki.

Oto przykładowa sytuacja:

	1	*2*	*3*	*4*
1			x	x
2	x			
3				
4		x		



Przykładem jest np. relacja bycia większym.

Tak więc w przypadku relacji asymetrycznej:
- w grafie brak jest belek i pętelek (czy – jak kto woli – tylko strzałki mogą być),
- a w tabeli:
  - z jednej strony – główna przekątna pusta,
  - a z drugiej strony – na pozycjach poza główną przekątną, żaden element nie ma swojego odpowiednika na pozycji symetrycznej względem głównej przekątnej.

Sposób zapamiętania: brak belek i pętelek (lub równoważnie: tylko strzałki mogą być).

5. **antysymetryczna** witw, gdy $\bigwedge_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} (x\ R\ y \rightarrow \sim y\ R\ x)$ (1)

Stosując zasadę wyciągania predykatu spod znaku kwantyfikatora za ten znak (w przypadku „dużego kwantyfikatora” łączymy ów predykat z resztą wyrażenia za pomocą spójnika logicznego implikacji), formułę tą równoważnie można zapisać postaci: $\bigwedge_{x,y\in A} (x \neq y \rightarrow (x\ R\ y \rightarrow \sim y\ R\ x))$,
co w wyniku stosowania prawa transpozycji (przypominam: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$), daje nam:
$\bigwedge_{x,y\in A} (\sim (x\ R\ y \rightarrow \sim y\ R\ x) \rightarrow x = y)$,
a ponieważ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$, więc podstawiając $p = x\ R\ y$ oraz $q = \sim y\ R\ x$, otrzymujemy

$$\bigwedge_{x,y\in A} (\sim\sim(x\,R\,y \wedge \sim\sim y\,R\,x) \rightarrow x = y),$$

a dalej, stosując (2 razy!) regułę podwójnego przeczenia ($\sim\sim p \leftrightarrow p$), otrzymujemy w końcu:

$$\bigwedge_{x,y\in A} ((x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \rightarrow x = y) \qquad (2)$$

Tak więc definiens (1) jest równoważne wyrażeniu (2). (Co to jest definiens omówiliśmy już przy omawianiu definicji w rozdziale „metodologiczne podstawy matematyki”).

Zobaczmy, jak od strony semantycznej rozumiemy (1), a jak (2) i sprawdźmy, że i od tej strony wyrażają one to samo.

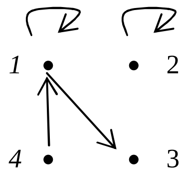
1) (1) czytamy: jakichkolwiek byśmy nie brali dwóch elementów z dziedziny różnych między sobą, wówczas jeśli relacja zachodzi w jedną stronę między nimi, to i musi zachodzić w drugą stronę. Sformułowanie to nie odnosi się więc w żaden sposób do pętelek. W żaden sposób nie ogranicza ich. Może więc być tak, że będą wszystkie, żadnej nie będzie lub też tylko część będzie. Sformułowanie to odnosi się tylko do różnych elementów, czyli (w konsekwencji) strzałek i belek. Fakt, że jak jest w jedną, to nie może być w drugą, oznacza, że spośród strzałek i belek, tylko strzałki mogą być, a belki w żadnym razie nie. Tak więc, sumując, w relacji asymetrycznej, nie może być belek (strzałki i pętelki mogą być).
2) (2) czytamy: jakichkolwiek byśmy nie brali dwóch elementów z dziedziny, wówczas, jeśli okaże się, że zachodzi ona w obie strony między nimi, to muszą być one równe. Innymi słowy, mogą być pętelki, ale nie może być belek. Jeśli z kolei relacja zachodzi w jedną stronę, a nie zachodzi w drugą (lub na odwrót), to w poprzedniku implikacji z (2) mamy koniunkcję prawdy i fałszu, czyli zdanie fałszywe. Ponieważ z kolei implikacja o poprzedniku fałszywym jest zawsze prawdziwa, zatem i w tym przypadku (strzałka) jest ona prawdziwa. Strzałki mogą więc być. Mogliśmy to zresztą krócej rozpatrzyć, a mianowicie stwierdzając, że ponieważ relacja ta nie daje żadnych ograniczeń na strzałki, więc mogą one być w dowolnej ilości (zero, wszystkie, niektóre). Sumując, strzałki i pętelki mogą być, a belki – nie.

Tak więc i te dwa semantyczne podejścia wyrażają nam tę samą myśl.

Tak więc w przypadku relacji antysymetrycznej:
- w grafie brak jest belek (lub równoważnie: tylko strzałki i pętelki mogą być),
- a w tabeli na pozycjach poza główną przekątną, żaden element nie ma swojego odpowiednika na pozycji symetrycznej względem głównej przekątnej.

Oto przykładowa sytuacja:

	1	*2*	*3*	*4*
1	x		x	
2		x		
3				
4	x			



Przykładem jest np. relacja bycia mniejszym lub równym (≤).

Sposób zapamiętania: brak belek.

Dotychczas mamy więc sytuację, jak w poniższej tabeli

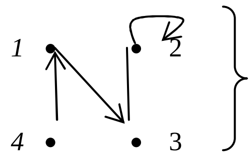
Relacja	Strzałki	Belki	Pętelki
zwrotna			WSZYSTKIE
przeciwzwrotna			BRAK
symetryczna	BRAK		
asymetryczna		BRAK	BRAK
antysymetryczna		BRAK	

Puste pole = MOGĄ BYĆ

W tabeli tej opisaliśmy rodzaje relacji wyszególnione ze względu na zwrotność (zwrotna i przeciwzwrotna) i symetryczność (symetryczna, asymetryczna i antysymetryczna).

Odnośnie „symetryczności” wnosimy z niej, że:

1) każda relacja asymetryczna jest antysymetryczna (bo warunek „brak pętelek” zawiera się w warunku „pętelki mogą być (chociażby w zerowej liczbie)”.
2) Relacja symetryczna nie dopełnia się ani z relacją asymetryczną, ani z relacją antysymetryczną. Dzieje się tak, ponieważ istnieje relacja, która nie będąc symetryczną (tj. posiadając strzałki), nie jest przy tym ani asymetryczna, ani antysymetryczna (tj. ma belki). Po prostu niektóre różne elementy połączone są belkami, a inne (nie koniecznie wszystkie pozostałe) strzałkami. Jak widać, do sprawy pętelek nie trzeba tu w ogóle sięgać (tzn. w konkretnym przypadku, mogą one być, ale nie muszą).



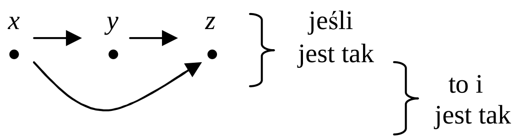
Przykład tego typu relacji

3) Ponadto, co ciekawe, relacja symetryczna ani z relacją asymetryczną ani z relacją antysymetryczną się nie wyklucza. Otóż – przypomnijmy sobie – relacja jest symetryczna, gdy nie ma strzałek. Gdy dodatkowo nie ma ona belek, to jest równocześnie symetryczna i antysymetryczna, a gdy jeszcze dodatkowo nie ma pętelek, to jest równocześnie symetryczna, antysymetryczna i asymetryczna!

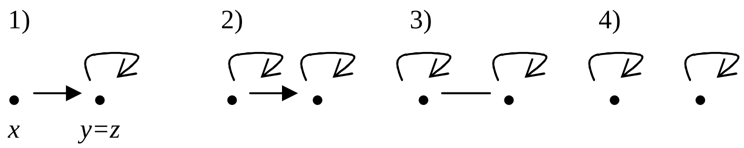
Zapewne sądzisz, że jest to bardzo zawiłe i skomplikowane, i nie wiesz jak zdołasz to wszystko spamiętać. Otóż WCALE NIE MUSISZ! Wystarczy, że znasz definicje tych relacji i umiesz myśleć (a jeśli dostałeś się na studia – mam nadzieję, że bez żadnej protekcji – to masz na pewno IQ równe co najmniej 100, czyli rzeczywiście jesteś w tej połowie ludzkiej populacji, z której ludzie wiedzą, jak wykorzystać własny mózg). W takim układzie na pewno sam jesteś w stanie odtworzyć powyższe rozumowanie.

6. **przechodnia** witw, gdy $\bigwedge_{x,y,z\in A} (x\,R\,y \wedge y\,R\,z \to x\,R\,z)$,

Przeczytamy to tak: wśród dowolnych trzech obiektów z *A* jeśli jest tak, że zachodzi ona między pierwszym z nich, a drugim oraz między drugim, a trzecim, to i musi zachodzić między pierwszym, a trzecim. Symbolicznie można to oddać w następujący sposób:



Mogą być też np. następujące sytuacje (w każdej z nich mamy do czynienia z relacją przechodnią):



Jak widać, kwestia mechanicznego określenia „są wszystkie” / „nie ma żadnej” / „mogą być” w odniesieniu do pojęć strzałki / belki / pętelki nie ma tu sensu. Po prostu wprost z definicji trzeba sprawdzać spełnianie przez relację warunku bycia przemienną.

Przykłady: relacja równości liczb, relacja równoległości prostych, relacja większości, czy tez bycia starszym.

Sposób zapamiętania: zawsze można iść na skróty.

7. **pełna** witw, gdy $\bigwedge_{x,y\in A} x\,R\,y$.

W tym przypadku po prostu każdy element musi być w relacji *R* z każdym elementem, w tym z sobą samym. Oznacza to, że:

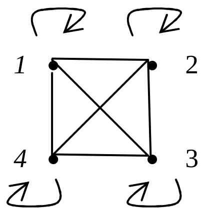
1) z każdego wierzchołka musi wychodzić pętelka (innymi słowy: muszą być wszystkie pętelki),
2) a każde dwa dowolne różne wierzchołki muszą być połączone belkami, co pociąga za sobą brak strzałek.

Uzasadnijmy te dwa wnioski:

1) Ponieważ $x\,R\,y$ ma zachodzić dla dowolnych x, y, więc również dla $y = x$, a co za tym idzie dla dowolnego x, musi być $x\,R\,x$, a to właśnie znaczy, że są wszystkie pętelki.
2) Jeśli w powyższej formule weźmiemy $x = a$, $y = b$, to będzie oznaczało, że musi być strzałka (a, b). Gdy zaś weźmiemy na odwrót, tj. $x = b$, $y = a$, to będzie z kolei oznaczało, że musi być strzałka (b, a). W sumie więc otrzymujemy, że myszą być wszystkie belki, a na strzałki tym samym nie ma już miejsca.

Wykres takiej relacji jest grafem pełnym, a w tabeli w każdym jej polu jest *x*:

	1	*2*	*3*	*4*
1	x	x	x	x
2	x	x	x	x
3	x	x	x	x
4	x	x	x	x



Przykład: na zbiorze ludzi relacja bycia tego samego gatunku.

Sposób zapamiętania: wszystkie belki i pętelki.

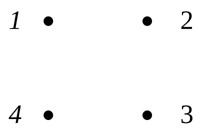
8. **pusta** witw, gdy $\bigwedge_{x,y\in A} \sim x\,R\,y$ (lub równoważnie /z prawa de Morgana/: gdy $\sim \bigvee_{x,y\in A} x\,R\,y$)

„Pusta" pisze się przez „u"

Pierwszy z tych zapisów możemy odczytać: jakiekolwiek dwa elementy byśmy nie wzięli (choćby nawet dwa identyczne, czyli jeden i ten sam), to nie zachodzi między nimi relacja *R* (czyli *de facto* relacja *R* jest pusta – nie składają się na nią żadne pary!). Z kolei drugi zapis stwierdza, że nie ma żadnej pary, która składała by się na relację *R* (a więc dokładnie to samo co pierwszy zapis!).

Wykres takiej relacji jest grafem pustym, a w tabeli brak jest jakichkolwiek *x*-ów.

	1	*2*	*3*	*4*
1				
2				
3				
4				



Przykład: na zbiorze ludzi relacja bycia starszym o 300 lat.

Sposób zapamiętania: brak czegokolwiek (zarówno strzałek, jak i belek i pętelek)

9. **spójna** (ufff, to już ostatnia) witw, gdy $\bigwedge_{\substack{x,y\in A\\ x\neq y}} (x\,R\,y \vee y\,R\,x)$

„Spójna" pisze się przez „ó"

W notacji grafowej oznacza to, jakiekolwiek byśmy nie wzięli dowolne dwa różne elementy, to muszą być one połączone co najmniej w jedną stronę, tj. albo w jedną stronę albo w drugą stronę (w każdym z tych przypadków mamy strzałkę) albo w obie strony (wtedy mamy belkę). Krócej: dowolne dwa różne wierzchołki muszą być czymś połączone (ponieważ „różne", więc musi to być strzałka lub belka).

Analogicznie, jak mieliśmy do czynienia w przypadku relacji antysymetrycznej, również i tu możemy składnik „$x \neq y$" wynieść za znak kwantyfikatora, po kolei otrzymując równoważne postaci

$$\bigwedge_{x,y\in A} (x \neq y \rightarrow (x\,R\,y \vee y\,R\,x)),$$

co w wyniku stosowania prawa transpozycji (przypominam: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$) daje nam:

$$\bigwedge_{x,y\in A} (\sim (x\, R\, y \vee y\, R\, x) \rightarrow x = y),$$

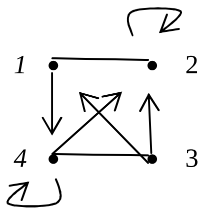
a ponieważ $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (jedno z praw de Morgana),
więc podstawiając $p = x\, R\, y$ oraz $q = y\, R\, x$, otrzymujemy

$$\bigwedge_{x,y\in A} (\sim x\, R\, y \wedge \sim y\, R\, x \rightarrow x = y).$$

Postać tę (w postaci grafowej) możemy odczytać w następujący sposób: dla dowolnych dwóch wierzchołków, jeśli by się tak zdarzyło, że nie są one połączone w żadną ze stron, to (nam się tylko wydaje, że są to dwa wierzchołki, bo w rzeczywistości) jest to jeden i ten sam wierzchołek. Innymi słowy: brakować może tylko połączeń między danym wierzchołkiem a nim samym (nie wymagamy obecności pętelek), co oznacza, ze różne zawsze muszą być czymś połączone (jeśli „różne” – to oczywiście belką lub pętelką)

Schemat przykładowej relacji (w postaci tabeli i grafu):

	1	*2*	*3*	*4*
1		x		x
2	x	x		
3	x	x		x
4		x	x	x



Przykład: na zbiorze ludzi relacja bycia nie-starszym.

Sposób zapamiętania: dowolne 2 różne wierzchołki zawsze są czymś połączone (belką lub pętelką).

Dodajmy do naszej tabeli nowe relacje:

LP	Relacja	Strzałki	Belki	Pętelki
1.	zwrotna			WSZYSTKIE
2.	przeciwzwrotna			BRAK
3.	symetryczna	BRAK		
4.	asymetryczna		BRAK	BRAK
5.	sntysymetryczna		BRAK	
6.	przechodnia	Brak prostej „recepty”		
7.	pełna	BRAK	WSZYSTKIE	WSZYSTKIE
8.	pusta	BRAK	BRAK	BRAK
9.	spójna	Między dwoma różnymi wierzchołkami - zawsze jedna z nich		

Puste pole = MOGĄ BYĆ

Zadanie
Spróbuj ustalić zależności między relacjami 6, 7, 8, 9, a każdą z nich i każdą z pozostałych.

Sprawdźmy na kilku relacjach, jakie przysługują im własności, przy okazji (w pierwszych 6 przykładach) określając też ich dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole. Własności było 9, to i przykładów damy 9 ☺.

1. Relacja **kochania**, zdefiniowana na zbiorze ludzi w następujący sposób: *x R y* witw, gdy *x* kocha *y*-a.
   Sprawdzamy po kolei, czy jest:
   1) zwrotna – NIE, bo gdyby była, wówczas każdy musiałby siebie kochać, a przecież tak nie jest, o czym świadczy chociażby fakt, że ludzie targają się na własne życie,
   2) przeciwzwrotna – też NIE, bo gdyby była, wówczas każdy musiałby siebie nie kochać, a przecież są narcyzi między ludźmi,
   3) symetryczna – też NIE, bo gdyby była, wówczas nie było by zawiedzionych miłości (jak mawiał Boy Żeleński: „bo w tym cały jest ambaras, aby dwoje chciało naraz”),
   4) asymetryczna – też NIE, bo są przecież szczęśliwe małżeństwa,
   5) antysymetryczna – też NIE – z tego samego powodu,
   6) przechodnia – też NIE, bo (przypuśćmy hipotetycznie) jeśli ja kocham swoją żonę, a ona kochanka, to wcale nie znaczy, że ja będę go kochać,

7) pełna – NIE, bo była by wtedy zupełna idylla na świecie (każdy kochał by każdego), a przecież tak nie jest,
8) pusta – też NIE (chociażby z faktu, że kocham swoją żonę),
9) spójna – również NIE, bo weźmy np. jakiegoś Eskimosa, z którym się nie znam; wówczas ani ja jego nie kocham, ani on mnie nie kocha (nie można kochać kogoś, kogo się nie zna!).

Relacji tej nie przysługuje więc żadna żadnej z przytoczonych wyżej własności formalnych.
Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:
1) *D* – to zbiór osób kochających,
2) D^{-1} – to zbiór osób kochanych (przez kogoś),
3) *P* – to zbiór złożony ze wszystkich osób kochających i ze wszystkich osób kochanych (lub – patrząc od II strony – są to wszyscy ludzi poza tymi, którzy ani nikogo nie kochają ani nie są przez nikogo kochani).

2. Relacja **bycia matką**, zdefiniowana na zbiorze ludzi (zarówno żyjących jak i umarłych) w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy x jest matką y-a
   1) zwrotna – NIE, bo przecież nikt nie jest swoją matką,
   2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
   3) symetryczna – NIE, bo jak ktoś jest moją matką, to bynajmniej ja nie jestem matka dla tego kogoś,
   4) asymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   5) antysymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   6) przechodnia – NIE, bo matka mojej matki nie jest moją matką, tylko moją „grandmatką", czyli babcia (ale „grandmatka", to jednak nie matka, wbrew nazwie; „grandmatka" – od grand mother = babcia w j. angielskim ☺),
   7) pełna – NIE, bo nieprawdą jest że każdy jest matką każdego (np. ja nie jestem matką dla swojego brata, przy czym zauważmy tu, że cały czas rozważamy tu relację bycia matką, a nie relację „matkowania" ☺),
   8) pusta – NIE, bo są przecież matki na tym świecie,
   9) spójna – NIE (wytłumaczenie podobne jak przy pełnej).

   Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:
   1) *D* – to zbiór wszystkich matek, czyli wszystkich kobiet, które doczekały się potomstwa,
   2) D^{-1} – to zbiór wszystkich osób poza Adamem i Ewą ☺ (bo wśród ludzi tylko oni nie mieli ludzkiej matki),
   3) *P* – to zbiór wszystkich ludzi bez Adama (zbiór D^{-1}, a więc zbiór wszystkich ludzi bez Adama i Ewy, powiększamy o wszystkich matki, co efektywnie daje nam powiększenie go jedynie o Pramatkę – Ewę; W ten sposób mamy już wszystkich ludzi jedynie bez smutnego z tego powodu Adama ☺).

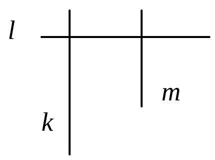
3. Relacja **bycia bratem**, zdefiniowana na zbiorze ludzi w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy x jest bratem y-a
   1) zwrotna – NIE, bo przecież nikt nie jest swoim bratem,
   2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
   3) symetryczna – NIE, bo z faktu że Jaś jest bratem Zosi wcale nie wynika, że Zosia jest bratem Jasia! (choć może być mu bratem w sensie chrześcijańskim, ale nie o takie braterstwo tu chodzi ☺). Zauważmy na boku, że gdy uwzględnimy jeszcze ich brata Tomka, to choć między Tomkiem i Jasiem relacja ta zachodzi w obydwie strony, to jednak to nie wystarcza, żeby powiedzieć, że jest ona symetryczna, gdyż ZAWSZE tak musi być, a nie jedynie w niektórych przypadkach, gdyż w definicji relacji symetrycznej na początku mamy kwantyfikator ogólny!),
   4) asymetryczna – NIE, bo Jaś jest bratem dla swojego brata Tomka,
   5) antysymetryczna – też NIE (z tego samego powodu),
   6) przechodnia – też NIE, bo (często tak właśnie trzeba to rozpatrywać:) bratem mojego brata jestem ja sam, a sam dla siebie nie jestem bratem,
      Żeby to lepiej zobaczyć, spójrzmy na definicję relacji przechodniej:
      relacja R jest **przechodnia** witw, gdy $\underset{x,y,z\in A}{\Lambda} (x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow x\ R\ z)$.
      Aby relacja była przechodnia, warunek podany w jej definicji za kwantyfikatorem musi być spełniony DLA KAŻDEGO $x, y, z \in A$, a więc musi być spełniony również dla $z = x$. Musi więc zachodzić: $x\ R\ y \wedge y\ R\ x \rightarrow x\ R\ x$. W naszym przypadku (relacji bycia bratem) tak jednak nigdy nie jest – nikt bowiem nie jest dla siebie samego bratem! Relacja ta nie jest więc przechodnia.
   7) pełna – NIE, bo wtedy każdy by musiał być bratem każdego (również dziewczyny między sobą, osoby całkiem obce, ...),
   8) pusta – NIE, bo są przecież bracia na tym świecie,
   9) spójna – NIE, bo żeby taka była, między dowolnymi dwiema osobami (choćby całkiem obcymi) musiałaby ona zachodzić co najmniej w jedna strona, a wiadomo, że tak nie jest.

   Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:

1) D – to zbiór wszystkich braci, czyli facetów posiadających rodzeństwo,
2) D^{-1} – to zbiór wszystkich osób posiadających brata,
3) P – to zbiór wszystkich ludzi poza jedynakami i dziewczynami z takich rodzin, w których są same córki.

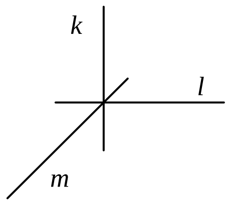
4. Relacja **prostopadłości prostych**, zdefiniowana w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy prosta x jest prostopadła do prostej y (przy czym całą tę relację rozpatrujemy na jednej z góry ustalonej płaszczyźnie – jest to bardzo ważny warunek, gdyż na płaszczyźnie prosta prostopadłą do prostopadłej jest di niej równoległa, a w przestrzeni może być prostopadła! – patrz rys. poniżej)

Na płaszczyźnie:



$k \perp l$ i $l \perp m$, ale $\sim(k \perp m)$.

W przestrzeni:



W takim układzie: $k \perp l$, $l \perp m$ i $k \perp m$.

1) zwrotna – NIE, bo żadna prosta nie jest do siebie samej prostopadła,
2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
3) symetryczna – TAK, bo prostopadłość prostych jest wzajemna,
4) asymetryczna – NIE (z tego samego powodu),
5) antysymetryczna – też NIE (z tego samego powodu),
6) przechodnia – NIE, bo zawsze prostopadła do prostopadłej jest z nią równoległa (jak na rysunku powyżej po lewej stronie), a więc nie prostopadła!,
7) pełna – NIE, bo są proste, które nie są prostopadłe (choćby równoległe),
8) pusta – NIE, bo są przecież proste prostopadłe,
9) spójna – NIE (z tego samego powodu, co „pełna”).

Tak więc relacja ta jest przeciwzwrotna i symetryczna.
Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:
1) D – to zbiór wszystkich prostych,
2) D^{-1} – to zbiór wszystkich prostych,
3) P – to też zbiór wszystkich prostych.

W tym przypadku więc $D = D^{-1} = P$.

5. Relacja **równoległości prostych**, zdefiniowana w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy prosta x jest równoległa do prostej y
1) zwrotna – TAK, bo każda prosta jest do siebie samej równoległa,
2) przeciwzwrotna – NIE (z tego samego powodu, co wyżej),
3) symetryczna – TAK, bo równoległość prostych jest wzajemna,
4) asymetryczna – NIE, bo jest symetryczna,
5) antysymetryczna – też NIE (z tego samego powodu),
6) przechodnia – TAK, bo zawsze prosta równoległa do równoległej do danej jest i do niej równoległa (nawet, gdy pierwszą i trzecią to będzie ta sama prosta; jak również wtedy, gdy wszystkie 3 to będzie jedna i ta sama prosta),
7) pełna – NIE, bo są proste, które nie są równoległe
8) pusta – NIE, bo są przecież proste równoległe (chociażby każda prosta z sobą samą),
9) spójna – NIE (z tego samego powodu, co „pełna”).

Tak więc relacja ta **jest zwrotna, symetryczna i przechodnia**.
Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:
1) D – to zbiór wszystkich prostych,
2) D^{-1} – to zbiór wszystkich prostych,
3) P – to też zbiór wszystkich prostych.

Tak więc i w tym przypadku $D = D^{-1} = P$ (= A)

6. Relacja **bycia tej samej rasy**, zdefiniowana na zbiorze ludzi w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy x jest tej samej rasy co y
1) zwrotna – TAK, bo każdy jest tej samej rasy co on sam,

2) przeciwzwrotna – NIE (z tego samego powodu, co wyżej),
3) symetryczna – TAK, bo zawsze jest tak, że jeśli ja jestem tej samej rasy co ktoś, to i on jest tej samej rasy co ja (jest to jednak i ta sama – nasza wspólna – rasa),
4) asymetryczna – NIE (z tego samego powodu),
5) antysymetryczna – też NIE (z tego samego powodu),
6) przechodnia – TAK, bo zawsze jest tak, że jak jeden jest tej samej rasy co drugi (dajmy na to czarnej), a drugi co trzeci (też musi to być ta sama rasa – tu: czarna), to i pierwszy jest tej samej rasy co trzeci (tu: czarnej); co nadto, zachodzi to również wtedy, gdy będziemy utożsamiać ze sobą poszczególne osoby (np. że pierwsza i trzecia – to jedna i ta sama osoba) – podejście takie jest konieczne ze względu na fakt, że (zgodnie z definicją relacji przechodnie) mamy brać pod uwagę dowolne x, y i z (a więc nie koniecznie różne),
7) pełna – NIE, bo są ludzie, którzy są różnych ras,
8) pusta – NIE, bo są przecież ludzie tej samej rasy,
9) spójna – NIE (z tego samego powodu, co „pełna”).

Tak więc i ta relacja (podobnie jak poprzednia) **jest zwrotna, symetryczna i przechodnia**.

Relacje posiadające te 3 własności formalne są BARDZO WAŻNE w matematyce, ale i w dowolnej dziedzinie wiedzy jaką byś się nie parał (a to dlatego jest takie przełożenie, bo matematyka bardzo dobrze opisuje zastany świat, a z kolei w związku z tym warto jest ją dobrze poznać ☺). Dlatego też poświęcimy jej cały następny rozdział.

Pozostaje nam jeszcze określić jej dziedzinę, przeciwdziedzinę i pole:

2) D – to zbiór wszystkich ludzi,
3) D^{-1} – to zbiór wszystkich ludzi,
4) P – to też zbiór wszystkich ludzi.

Tak więc i w tym przypadku $D = D^{-1} = P$ (= A).

Również i ta zależność zawsze zachodzi w przypadku każdej relacji, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. W ogóle gwarantuje nam tu już sama zwrotność, gdyż dzięki niej:

- każdy obiekt z A jest w dziedzinie,
- każdy obiekt z A jest w przeciwdziedzinie,
- a co za tym idzie: każdy obiekt z A jest w polu,

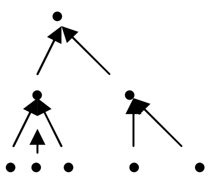
rozważanej relacji R

a przy tym zbiory te (dziedzina, przeciwdziedzina i pole) nie mogą być szersze niż A.

Przejdźmy teraz do **ciekawszych przykładów** (są jeszcze takie!).

7. Relacja bycia wasalem, rozpatrywana na uniwersum osób żyjących w Europie w średniowieczu, zdefiniowana w następujący sposób: $x\ R\ y$ witw, gdy x jest wasalem y–a

Przypomnijmy sobie, że relacja wasalstwa, to inaczej relacja feudalnego poddaństwa, przy czym na kontynencie obowiązywała zasada „wasal mojego wasala nie jest moim wasalem”, zaś w Anglii: „wasal mojego wasala jest moim wasalem”. Przy pomocy grafu można więc ja przedstawić w postaci drzewa skierowanego, jak na poniższym rysunku:



Jest ona:

1) zwrotna – NIE, bo nikt nie jest swoim (czy też dla siebie samego) wasalem (rozumianym w sensie poddaństwa lennego, a nie panowania nad sobą – bycia za siebie odpowiedzialnym ☺)
2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
3) symetryczna – NIE (bo o to właśnie w niej chodzi – działa tylko w jedną stronę!),
4) asymetryczna – TAK (wytłumaczenie – j.w.),
5) antysymetryczna – TAK (wytłumaczenie – j.w.),
6) przechodnia – NIE, bo – jak to już wyżej podaliśmy – w jednych krajach (na kontynencie) obowiązywała zasada „wasal mojego wasala jest moim wasalem”, a w innych (w Anglii) „wasal mojego wasala nie jest moim wasalem”, a w definicji relacji przechodniej za sprawą kwantyfikatora ogólnego wymagamy, aby ZAWSZE była spełniona występująca w niej implikacja (tu: że „wasal mojego wasala jest moim wasalem”), a u nas tak nie jest,
7) pełna – NIE (chociażby z braku symetryczności),

8) pusta – NIE (bo byli wasale!),
9) spójna – NIE (bo chociażby bezpośredni poddani jednego „pana” nie byli między sobą porównywalni za pomocą tej relacji).

Relacja ta jest przytoczona tu jedynie jako wprowadzenie do następnej, o wiele bardzie interesującej (ach ta matematyka ☺).

8. Relacja **bycia wasalem**, rozpatrywana na uniwersum osób obecnie żyjących w Europie (**relacja pusta na niepustym zbiorze** – o tę jej własność właśnie nam chodzi, dlatego też tę relację – jako posiadającą taką własność – tu omawiamy). W ogóle, definiujemy ją identycznie jak to miało miejsce w poprzednim przykładzie: *x R y* witw, gdy *x* jest wasalem *y*–a.
   1) zwrotna – NIE, bo brak w niej pętelek,
   2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
   3) symetryczna – TAK (bo poprzednik implikacji zawsze przyjmuje w niej wartość logiczną 0),

   Przyjrzyjmy się bliżej temu wyjaśnieniu:
   Najpierw przypomnijmy, że relacja jest **symetryczna** witw, gdy $\bigwedge_{x,y\in A} (\underbrace{x\,R\,y}_{=0} \rightarrow y\,R\,x)$

   Jako że jednak relacja ta jest pusta, więc występujący w jej definicji poprzednik implikacji nigdy nie zachodzi, czyli – innymi słowy - zawsze przyjmuje wartość logiczną 0

   Ponieważ – jak dobrze wiemy – każda implikacja o fałszywym poprzedniku jest prawdziwa (bez względu na wartość jaj następnika) – zatem rozpatrywana, jako spełniająca warunek na bycie symetryczną, jest symetryczna.
   4) asymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   5) antysymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   6) przechodnia – TAK (z tego samego powodu),
   7) pełna – NIE (bo przecież jest pusta),
   8) pusta – TAK (bo tak właśnie ją określiliśmy!),
   9) spójna – NIE (chociażby dlatego, że jest pusta).

   Relacja tego typu (pusta na niepustym zbiorze) zawsze posiada przytoczony tu garnitur własności formalnych.

9. Relacja bycia starszym na księżycu, przy założeniu, że Twardowski tam nie mieszka ☺ (**relacja określona na zbiorze pustym** - o to chodzi w tym przykładzie!)
   1) zwrotna – TAK, bo z definicji relacji zwrotnej mamy: $\bigwedge_{x\in A} x\,R\,x$, czyli $\bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x\,R\,x)$, a poprzednik występującej tu implikacji ma wartość logiczną zero (bo nikt nie mieszka na księżycu), co pociąga za sobą jej prawdziwość i prawdziwość całej formuły
   2) przeciwzwrotna – TAK (z tego samego powodu),
   3) symetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   4) asymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   5) antysymetryczna – TAK (z tego samego powodu),
   6) przechodnia – TAK (z tego samego powodu),
   7) pełna – TAK (z tego samego powodu),
   8) pusta – TAK (z tego samego powodu),
   9) spójna – TAK (z tego samego powodu),

   Tak więc relacja tej przysługują wszystkie własności formalne!
   - jest zarazem zwrotna i przeciwzwrotrna!
   - jest zarazem symetryczna jak i asymetryczna i antysymetryczna!,
   - jest zarazem pełna i pusta!
   - a przy tym jest jeszcze przechodnia i spójna.

   Współwystępowania własności, o których myśleliśmy dotychczas że się wykluczają, jednak są możliwe!
   Zawsze jest tak, jak to pisaliśmy powyżej, gdy mamy do czynienia z relacjami rozpatrywanymi na zbiorze pustym.
   Uwaga: gdybyśmy rozpatrywali tego typu relację jako hipotetycznie możliwą (np.: bycie o 5 lat starszym na księżycu), jak i niemożliwą (bycie o 200 lat starszym na księżycu), to i tak było by to bez znaczenia – przysługiwały by im te same (bo wszystkie) własności.

Na całym uniwersum relacji możemy wyróżnić pewne ich typy. Dokonuje się tego na podstawie przysługującego im zestawu własności formalnych. Owe specyficzne typy relacji, to:

1) równoważność,

2) porządek i częściowy porządek,
3) funkcja.
Poniżej omówimy je w poszczególnych – kolejnych paragrafach.

11. Równoważność

UWAGA! Studencie! Skup się szczególnie na tym paragrafie! Jest on BARDZO WAŻNY. Jeśli go nie zrozumiesz, wówczas zawarty w nim materiał niestety pozostanie dla Ciebie całkiem abstrakcyjny (co ma zresztą związek z pojawiającymi się tu klasami abstrakcji i zasadą abstrakcji!). Nie dopuść do tego – nie połóż sprawy!

Definicja
Relację R nazywamy równoważnością witw, gdy jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Powstaje pytanie, jak najłatwiej zapamiętać ten zestaw własności. Pomoże nam w tym organizacja studencka Zrzeszenie Studentów Polskich. W skrócie jej nazwa, to **ZSP**:

Litery – własności	**Warunek relacji**	**Opis zależności**
Z – jak zwrotna	$\Lambda_{x\in A}\, x\, R\, x$	**Z** występuje na 1. miejscu, w definicji relacji zwrotnej jest 1 zmienna i 1 raz występuje symbol relacji
S – jak symetryczna	$\Lambda_{x,y\in A}\, (x\, R\, y \rightarrow y\, R\, x)$	**S** występuje na 2. miejscu, w definicji relacji symetrycznej są 2 zmienne i 2 razy występuje symbol relacji
P – jak przechodnia	$\Lambda_{x,y,z\in A}\, (x\, R\, y \wedge y\, R\, z \rightarrow x\, R\, z)$,	**P** występuje na 3. miejscu, w definicji relacji przechodniej są 3 zmienne i 3 razy występuje symbol relacji

Jasne, że łatwe, proste i logiczne ... ☺

Taki zestaw własności formalnych przysługiwał przytoczonym z poprzednim paragrafie relacjom:
- nr 5 - relacji **równoległości prostych**, więc posiadania tego samego kierunku,
- nr 6 - relacja **bycia tej samej rasy**,

Widzimy więc, że są to relacje typu „bycia / posiadania tego samego …”. W ten sposób możemy „krzesać” inne relacje, które są równoważnościami: bycie tej samej płci, bycia z tego samego rocznika, bycia tej samej narodowości, bycia tego samego koloru, posiadanie tej samej wartości przez liczby (np. $2=\frac{6}{3}=\frac{2}{1}=\ldots$), …
Ponadto w poprzednim paragrafie zauważyliśmy, że w przypadku tego typu relacji $D = D^{-1} = P$ (= A), a więc (m.in., że wszystkie elementy z A biorą w niej udział).

Nadto, jak już wtedy zaznaczyliśmy, relacje tego typu są niezmiernie ważne zarówno w matematyce, jak i KAŻDEJ innej dziedzinie wiedzy, a zatem warto dobrze się z nią zaznajomić ☺. Nie traćmy więc czasu…

Definicja klasy abstrakcji
Niech R będzie relacją równoważności w niepustym zbiorze A (tj. $A \neq \varnothing$, a więc istnieje pewne $a \in A$). Klasą abstrakcji relacji R wyznaczoną przez element a nazywamy zbiór tych elementów, które pozostają w relacji R do a: $[a]_R = \{x \in A\colon x\, R\, a\}$.

W celu sprawdzenia o co w tej definicji chodzi (bo zapewne mało co z niej zrozumiałeś), rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład
Niech Z będzie zbiorem liczb całkowitych, tj. $Z = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.
Zdefiniujmy relację równoważności R w następujący sposób:
$a\, R\, b \leftrightarrow 3 \mid (a - b)$ (co czytamy: a pozostaje w relacji R z b witw, gdy *trójka* dzieli liczbę a-b).
Sprawdźmy, jakie są kolejne klasy abstrakcji:

$[0]_R = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$ (dodatkowo zauważamy, że są to wszystkie te liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 0, tj. są podzielne przez 3);
$[1]_R = \{..., -5, -2, 1, 4, ...\}$ (dodatkowo zauważamy, że są to wszystkie te liczby naturalne, które przy

dzieleniu przez 3 dają resztę 1);

$[2]_R = \{..., -4, -1, 2, 5, ...\}$ (dodatkowo zauważamy, że są to wszystkie te liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2).

W ten sposób otrzymaliśmy podział zbioru liczb całkowitych, czyli zbioru N.
Istnieje nawet formalne określenie (tj. definicja) podziału zbioru:

Definicja
Podziałem zbioru A nazywamy każdą niepustą rodzinę $\mathcal{P}$ zbiorów niepustych, rozłącznych, w sumie dających zbiór A.

Tak właśnie jest w naszym przykładzie! Każdy ze zbiorów $[0]_R$, $[1]_R$, $[2]_R$, jest niepusty, rozłączny z każdym z pozostałych i wszystkie razem w sumie dają zbiór N (który to dzielą).

Zauważmy ponadto, że gdybyśmy badali jakie klasy abstrakcji wyznaczą nam następne elementy zbioru N, to otrzymalibyśmy, że:
$[3]_R = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$ - pokrywa się z klasą $[0]_R$, tj. $[3]_R = [0]_R$,
przy czym proces ten będzie się powtarzał, tj. otrzymamy:
$[4]_R = [1]_R$,
$[5]_R = [2]_R$,
$[6]_R = [3]_R = [0]_R$, ...
Zauważmy, że klasy abstrakcji wyznaczane przez elementy jednej z nich (np. z klasy $[0]_R = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$), a więc klasy: ..., $[-6]_R$, $[-3]_R$, $[0]_R$, $[3]_R$, $[6]_R$,... są (sobie) identyczne. Oznaczenie klasy abstrakcji nie zależy od wybranego elementu z tejże klasy.

W ten sposób dochodzimy do zapowiadanej na początku tego paragrafu zasady abstrakcji.

Twierdzenie (zasada abstrakcji)
Niech R będzie równoważnością w niepustym zbiorze A. Wówczas klasy abstrakcji relacji R stanowią podział zbioru A, a więc są one
1. niepuste,
2. rozłączne,
3. a suma ich jest identyczna ze zbiorem A.
4. Przy tym dwa elementy należą do tej samej klasy abstrakcji witw, gdy między nimi zachodzi relacja R.

Dowód
Mamy dwa założenia:
1. R jest relacją równoważności, (1)
2. A jest niepusty (symbolicznie: $A \neq \varnothing$). (2)

Rozpiszmy jeszcze definicję klasy abstrakcji (przyda nam się w innej postaci)
Wychodząc od $[a]_R = \{x \in A\text{: } x\, R\, a\}$,
dochodzimy do $[a]_R = \{x\text{: } x \in A \wedge x\, R\, a\}$,
a następnie do $x \in [a]_R \leftrightarrow x \in A \wedge x\, R\, a$,
co po podstawieniu a w miejsce x, da nam: $a \in [a]_R \leftrightarrow a \in A \wedge a\, R\, a$ (3)

Dowód poszczególnych punktów twierdzenia.
1°.„niepuste"
$A \neq \varnothing$. Zatem $\bigvee_a$ $\underline{a \in A}$. Weźmy je. Nie jest tu istotne, które a weźmiemy. Każdy z elementów zbioru A równie dobrze się na to nadaje. Oczywiście, ze względu na (1), $\underline{a\, R\, a}$ (bo R jako równoważność jest m.in. zwrotna). Zatem mamy już: $a \in A \wedge a\, R\, a$. To zaś w oparciu o (3) jest równoważne stwierdzeniu: $a \in [a]_R$, czyli $[a]_R \neq \varnothing$, a o to właśnie chodziło.
W skrócie możemy to zapisać w następujący sposób: $A \neq \varnothing \rightarrow a \in A \rightarrow a\, R\, a \rightarrow a \in [a]_R \rightarrow [a]_R \neq \varnothing$.

2°. „rozłączne"
Weźmy dwie różne klasy abstrakcji: $[a]_R \neq [b]_R$. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy mianowicie, że (wbrew temu, co mamy wykazać) te dwa zbiory (klasy abstrakcji) nie są rozłączne. Istnieje zatem taki element (powiedzmy c), że należy on jednocześnie do każdego z nich, tj.
$c \in [a]_R \wedge c \in [b]_R$. (*)

Pokażemy, że wynika stąd że $[a]_R = [b]_R$ (co jest sprzeczne z $[a]_R \neq [b]_R$) tj., że zachodzą odpowiednie inkluzje w obie strony:

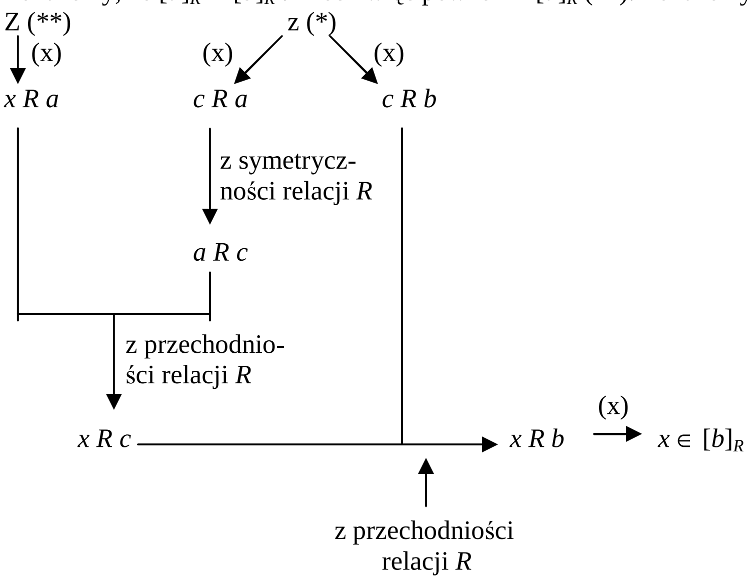
a) $[a]_R \subset [b]_R$,

b) $[a]_R \supset [b]_R$.

Wprowadźmy oznaczenie: (x) = z definicji klasy abstrakcji.

Ad a)

Pokażemy, że $[a]_R \subset [b]_R$. Niech więc pewne $x \in [a]_R$ (**). Pokażemy, że $a \in [b]_R$.



Ad b) – w drugą stronę tak samo.

3°. „suma klas abstrakcji jest identyczna ze zbiorem A"

W tym celu wystarczy udowodnić, że: $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$. (4)

Tu należą się 2 słowa wyjaśnienia

a) najpierw o co chodzi z tym zapisem i występującym w nim symbolem sumy „$\bigcup$",

b) że suma klas abstrakcji została tu dobrze określona.

Ad a)

Po lewej stronie tej równości mamy zapisane: suma mnogościowa po $a \in A$ z $[a]_R$. O co chodzi? Co to oznacza? Otóż bierzemy po prostu kolejne a z A i mnogościowo dodajemy do siebie wyznaczane przez nie klasy abstrakcji. Gdy na przykład $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, to $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = [a_1]_R \cup [a_3]_R \cup [a_3]_R \cup [a_4]_R$. Proste, nieprawdaż?!

Ad b)

Dlaczego dodajemy po wszystkich elementach zbioru A, a nie tylko po pojedynczych reprezentantach poszczególnych klas abstrakcji (by każda z klas abstrakcji występowała tylko jeden raz w tworzonej sumie)? Otóż, na dobrą sprawę, jest bez znaczenia ile razy znajdzie się w sumie dana klasa abstrakcji, gdyż i tak będzie wzięta pod uwagę tylko 1 raz (bo $X \cup X \cup \ldots \cup X = X$), a sumowanie klas abstrakcji po wszystkich elementach zbioru A daje nam gwarancję, że wszystkie znajdujące się tam klasy abstrakcji zsumujemy.

Obecnie możemy już przejść do udowodnienia równości (4).

W tym celu należy wykazać zachodzenie odpowiadających jej inkluzji w obie strony:

a) $\subset$ - oczywista

$\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R \subset A$ oznacza bowiem, że w przypadku każdego $a \in A$ mamy: $[a]_R \subset A$, czyli że

$\Lambda_x (x \in [a]_R \to x \in A)$ co jest oczywiste w oparciu o definicję klasy abstrakcji

$[a]_R = \{x \in A\colon x \mathrel{R} a\}$ – klasa abstrakcji składa się jedynie z elementów zbioru A.

b) ⊃ - wykażemy poniżej:

$$\underbrace{a \in A \to a\,R\,a \to a \in [a]_R}_{\text{Analiza ident. jak w p. } 1^o} \to a \in \bigcup_{a \in A} [a]_R$$

Skoro a należy do danego zbioru (tu: $[a]_R$), to i należy do zbioru szerszego (tu: $\bigcup_{a \in A} [a]_R$), w oparciu o prawo $A \subset A \cup B$ (a które omawialiśmy już w paragrafie „Algebra zbiorów).

4^o. Otrzymujemy:

$a, b \in [c]_R \to a\,R\,c \wedge b\,R\,c$

(x)

$b\,R\,c \xrightarrow{\text{z symetryczności relacji } R} c\,R\,b$

$a\,R\,c \wedge c\,R\,b \xrightarrow{\text{z przechodniości relacji } R} a\,R\,b$

To kończy dowód.

Zobaczmy, jakie relacje są równoważnościami i jakie są ich klasy abstrakcji.

LP	Relacja równoważnościowa	Jej klasy abstrakcji
1	Bycie w tym samym wieku	Osoby z danego rocznika
2	Posiadanie tego samego koloru skóry	Osoby o tym samym kolorze skóry
3	Równoległość prostych	Wszystkie proste równoległe do danej

W ostatnim przykładzie: klas abstrakcji jest nieskończenie wiele, i każda z nich posiada nieskończenie wiele elementów.

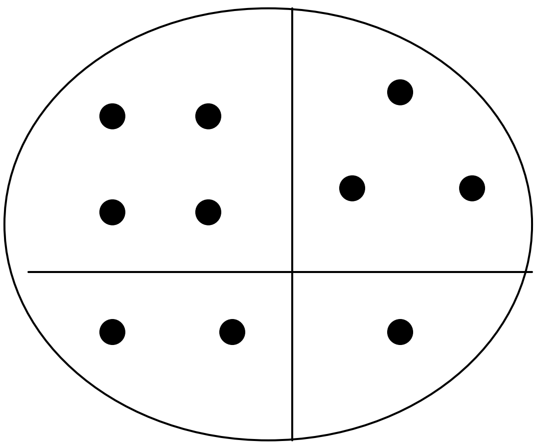
Stąd relację równoważności (tj. taką, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia) można definiować w oparciu o zasadę abstrakcji jako taką, która dzieli zbiór na klasy abstrakcji. Po prostu od razu tak ją definiujemy, aby dzieliła zbiór na którym jest rozważana na klasy abstrakcji (ściślej mówiąc: relacja ta musi dokonać podziału zbioru, na którym jest definiowana).

Teraz dobrze usiądź, bo to, co dotychczas wiedziałeś i byłeś o tym święcie przekonany, legnie w gruzach, i to z kretesem! Otóż stwierdzam autorytarnie, że prosta nie ma kierunku, lecz że kierunek ma prostą.

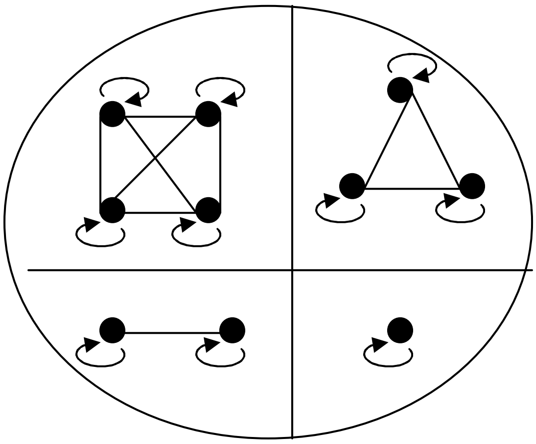
Nie wierzysz? – to poczytaj: Kierunek definiujemy jako klasę abstrakcji: $[a]_R = \{x\colon x \parallel a\}$. Proste, prawda?!

Rozpatrzmy następujący **przykład**

Przypuśćmy mianowicie, że mamy 10 elementów zbioru A, na którym określona jest relacja równoważności (tj. zwrotna, symetryczna i przechodnia), dzieląca go na *4* klasy abstrakcji o mocach odpowiednio: 1, 2, 3 i 4 (jak na poniższym rysunku). Zastanówmy się, jak w takiej sytuacji będzie wyglądała zadana relacja.



Rozwiązanie:
W oparciu o 4. punkt zasady abstrakcji („dwa elementy należą do tej samej klasy abstrakcji witw, gdy między nimi zachodzi relacja *R*", co oznacza, że w ramach danego podzbioru, każdy element musi być powiązany z każdy, a między różnymi zbiorami nie może być powiązań), tworzymy następujący rysunek, który już czyni zadość postawionemu zadaniu.



Rzeczywiście, tak określona relacja jest równoważnością, gdyż jest:
1) zwrotna (są wszystkie pętelki),
2) symetryczna (nie ma strzałek),
3) przechodnia.

Możemy też wyobrazić sobie sytuację w drugą stronę – w parciu o relację równoważności dokonac stosownego podziału.

Przykład
Mamy 10 osób (oznaczmy je: 1, 2, …, 10), które należą do 4 partii (każda tylko do jednej), tak że:
do I partii należy tylko 1 osoba (1), do II – 2 (2 i 3), do III – 3 (4, 5 i 6), a do IV – 4 (7, 8, 9 i 10).
Rozpatrzmy relację (określoną na zbiorze tych 10 osób) należenia do tej samej partii:

$$x\ R\ y \leftrightarrow x \text{ należy do tej samej partii co } y.$$

Relacja ta jest oczywiście równoważnością (bo jest zwrotna, symetryczna i przechodnia). Wygląda ona jak to przedstawiono na ostatnim rysunku i dokonuje podziału na zbiory osób należące do danej partii.

Pytanie: Z ilu elementów składa się ta relacja?
Odpowiedź: Elementami relacji są pary; strzałka (mamy ich 10) – to jedna para, a belka (mamy ich 10) – to dwie pary, tak więc razem jest ich: $10 + 10 \cdot 2 = 30$.

Wprowadźmy jeszcze jedną **definicję**:
Przez $R|_A$ oznaczać będziemy rodzinę zbiorów – zbiór wszystkich klas abstrakcji wyznaczonych przez relację równoważności *R* na zbiorze *A*.

W oparciu o tę definicję, widzimy że w powyższym przykładzie: $R|_A = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}\}$.

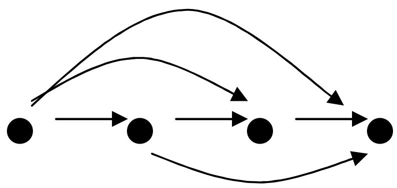
Myślę, że po tak elementarnym opisie i tylu przykładach, relacja równoważności i klasy abstrakcji, wcale nie będą dla Ciebie żadna abstrakcją!

12. Porządek i częściowy porządek

Inne zestawy własności formalnych mogą definiować inne (niż równoważność) typy relacji, które to będą determinować inne zorganizowanie obiektów niż podział (z którym to mieliśmy do czynienia właśnie w przypadku równoważności). Z użytym w poprzednim zdaniu słowem „zorganizowanie" – kojarzy Ci się zapewne „porządek", i właśnie o tego typu relacjach będziemy mówić w tym krótkim paragrafie.

Definicja
Relacją porządkującą dany zbiór (lub krócej: **porządkiem** w tym zbiorze) nazywamy każdą relację, która jest w tym zbiorze asymetryczna, przechodnia i spójna.

Rozpatrzmy co implikują nam te 3 własności:
1) asymetryczna – brak belek i pętelek, czyli **tylko strzałki mogą być**;
2) spójna – każde 2 różne elementy są czymś połączone – strzałka lub belką,
przy czym – ze względu na wcześniej założoną asymetryczność – muszą to być strzałki.
Jak na razie mamy więc, że dowolne (=każde) dwa różne elementy połączone są strzałka.
3) przechodnia – tak właśnie muszą być ustawione te strzałki.
Mamy więc (dla przykładu na 4 elementach):



Jak widzimy, jest to przykład np. na relację mniejszości określoną na zbiorze A = {1, 2, 3, 4}.

Inne przykłady tego typu relacji, to:
- relacja mniejszości określona na całym zbiorze liczb rzeczywistych,
- a relacja starszeństwa – w każdym zbiorze ludzi wśród których nie ma rówieśników,
- …

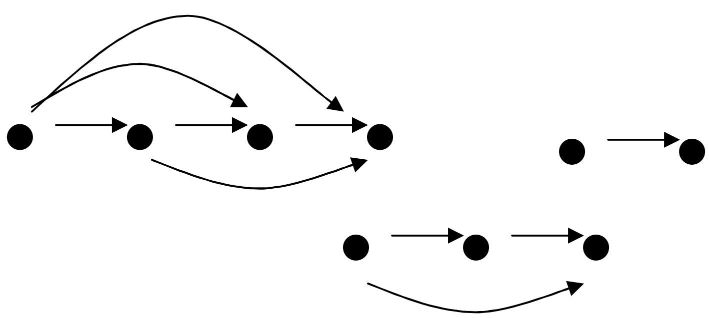
Jak widzisz, elementy te poprzez relację porządkującą, tworzą jedną spójną strukturę, zbudowaną w ten sposób, że:
- wszystkie elementy są ułożone liniowo
- i od każdego z nich jest strzałka do wszystkich następnych
- (i nie ma żadnych innych strzałem, belek czy pętelek).

Możemy więc powiedzieć, że:
Relacja *R* porządkująca zbiór *A* ustala pewną kolejność elementów tego zbioru – taką, iż dla dowolnych elementów *x*, *y* zbioru *A*: *x* poprzedza *y* (co zapisujemy $x \prec y$) witw, gdy $x\,R\,y$.

Na koniec jeszcze reguła zapamiętania jej: A(symetryczna) S(pójna) P(rzechodnia) = ASP , a to dobrze znany Ci skrót A(kademia) S(ztuk) P(ięknych), a jak jest porządek, to jest PIĘKNIE przecież!

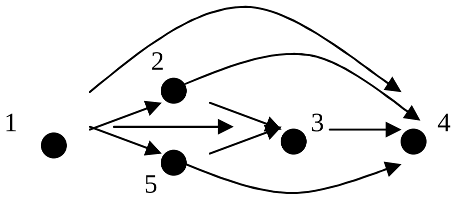
Oprócz porządku możemy wprowadzić też „częściowy porządek”, co czynimy za pomocą poniższej **definicji**:
Relacją częściowo porządkującą dany zbiór (lub krócej: **częściowym porządkiem** w tym zbiorze) nazywamy każdą relację, która jest w tym zbiorze asymetryczna i przechodnia.

Podobnie, jak czyniliśmy to powyżej, i w tym przypadku rozpatrzmy co implikują nam te 2 własności.
W stosunku do porządku, zostało „asymetryczna i przechodnia”, a odpadło „spójna”.
Oznacza to, że nie wszystkie trzeba łączyć ze wszystkimi, lecz jak już kilka elementów będzie ze sobą powiązanych (oczywiście: strzałkami), to trzeba spełnić zadość warunkowi przechodniości (czyli należy podorabiać strzałki, by ta przechodniość zachodziła). Mamy więc np.:



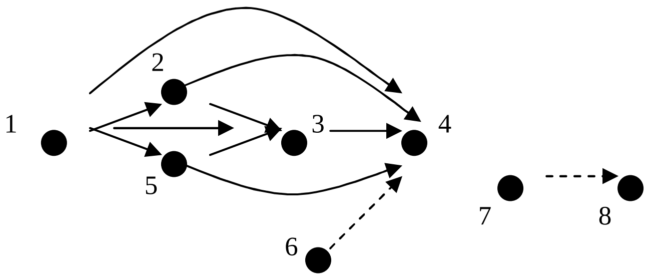
Jak widzisz , zarysowały nam się tu 3 składowe spójności, a w ramach każdej z nich mamy pełny porządek.
W całości tworzą jednak zaledwie częściowy porządek.

To nie jest jedyne rozwiązanie. Może być bowiem również np. następujący układ:



Tuj też mamy 2 „składowe spójności” ({1, 2, 3, 4} i {1, 3, 4, 5}), jednak przenikają się one wzajemnie!
Zauważ na przykład, że elementy 2 i 5 są niejako na tym samym poziomie – są nieporównywalne .
Rysunek ten może przedstawiać chociażby relację bycia młodszym określoną na zbiorze {1, 2, 3, 4, 5}, przy czym 2 i 5 – to rówieśnicy (a więc obiekty nieporównywalne pod względem tej relacji). Analogicznie można określić ją jako relację posiadania mniejszej masy wśród 5 danych przedmiotów fizycznych.
Wnioskujemy więc, że w stosunku do porządku, częściowy porządek dopuszcza istnienie obiektów nieporównywalnych za pomocą tejże relacji.

Zauważmy jeszcze, że gdy w powyższym przykładzie dorzucimy element 6 i parę (6,4) oraz elementy 7 i 8 i parę (7, 8) – to otrzymamy relację jak poniżej:



- nadal będzie ona częściowym porządkiem,
- będzie miała 4 „składowe spójności”: jak poprzednio {1, 2, 3, 4} i {1, 3, 4, 5} + dodatkowo {4, 6} i {7, 8},
- jednak trudno będzie już ja określić w sposób „naturalny”.

Zapewne widzisz że zapewne warto było by wprowadzić jakieś ograniczenie, by tę wielorakość przypadków jakoś zminimalizować. Dobra myśl! Spróbuj tak dobrać warunki, by ograniczyć się do sytuacji tego typu, jak przedstawiony na przedostatnim wykresie i zdefiniować tym samym „dobry częściowy porządek”.

13. Funkcja

Definicja
Relację *f* nazywamy jednoznaczną witw, gdy każdemu elementowi przyporządkowuje ona co najwyżej jeden element.

Symbolicznie warunek ten możemy zapisać w następujący sposób: $\bigwedge_{a,b,b'} (a\, f\, b \wedge a\, f\, b' \rightarrow b = b')$.

Oznacza to, że jeśli przypadkiem relacja ta na jednym poprzedniku miałaby 2 następniki – to jest to jak najbardziej możliwe, ale te dwa następniki muszą być sobie równe, tzn. *de facto* musi to być jeden i ten sam następnik (bo albo „nam się tylko wydawało że są to dwa następniki” albo „po prostu mamy jeden następnik, tylko stosujemy dla niego dwie różne nazwy”).

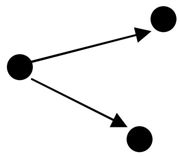
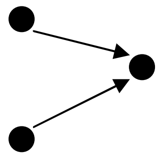
Wyjaśnijmy jeszcze dlaczego warunek ten zaczyna się kwantyfikatorem ogólnym: „dla każdego *a*, *b* i *b*’”, a nie mamy chociażby:

$\bigwedge_{a} \bigvee_{b,b'} (a\, f\, b \wedge a\, f\, b' \rightarrow b = b')$ (jakby mogło się wydawać, że powinno być), (1)

czy wręcz: $\bigvee_{a,b,b'} (a\, f\, b \wedge a\, f\, b' \rightarrow b = b')$ (myślisz: a może tak właśnie jest właściwie?!). (2)

Otóż, w obydwu tych przypadkach po kwantyfikatorze szczególnym mamy implikację (która jest jak najbardziej na miejscu!), a wiemy, że implikacja skojarzona jest z kwantyfikatorem ogólnym, więc musi być tak, jak to podaliśmy na początku (zaraz pod definicją).

Sumując:

Nigdy nie może więc być takiej sytuacji:  a więc że na jednym poprzedniku osiągane są co najmniej dwa następniki (bo o tym „mówi” ta definicja)	Dopuszcza się za to następująca sytuację :  a więc że dana wartość osiągana jest na co najmniej dwóch poprzednikach (bo o tym nie wypowiada się ta definicja).

Definicja
Relację jednoznaczną nazywamy funkcją

„Relacja jednoznaczna” i „funkcja” są to więc synonimy.
„Funkcja” brzmi jednak krócej niż „relacja jednoznaczna” i w związku z tym tej właśnie nazwy będziemy w dalszym ciągu używać. Musimy jednak pamiętać, że funkcja to inaczej relacja jednoznaczną, gdyż nazwa ta niesie ze sobą oddawaną przez nią treść
wyżej opisaną konsekwencję

Ze względu na jednoznaczność relacji *f*, przyjmujemy **oznaczenie**: $a\ f\ b \overset{def}{\longleftrightarrow} f(a) = b$.
Prawą stronę tej równoważności (definicyjnej) czytamy: funkcja *f* na **argumencie** *a* przyjmuje (lub: osiąga) **wartość** *b*.

Stosując to oznaczenie i stosując się do poprzedniej definicji, zauważmy że funkcje dodawać można algebraicznie, a mnogościowo – to już nie zawsze.

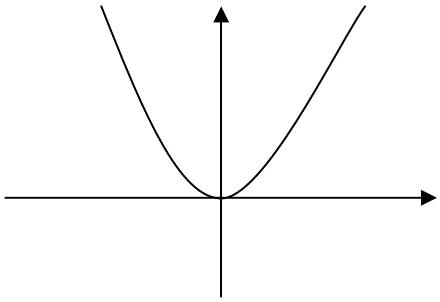
Dodawanie algebraiczne – przykład: $f(x) = sinx$ $g(x)= cosx$ $h(x) = f(x) + g(x) =sinx + cosx$		Dodawanie mnogościowe- kontrprzykład: $f' = \{(1, 2), (2, 4)\}$ $g' = \{(1, 3), (5, 0)\}$ $h' = f' \cup g' = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (5, 0)\}$ - to nie jest funkcja, bo na 1 przyjmuje 2 wartości (2 i 3),a tak (w przypadku funkcji) nie może być!

Analogicznie, jak to miało miejsce w przypadku relacji, również dla funkcji (jako ich szczególnego przypadku), **definiujemy** dziedzinę i przeciwdziedzinę:

Dziedziną funkcji *f* (zbiorem argumentów *f*) nazywamy zbiór tych obiektów, którym funkcja cokolwiek przyporządkowuje: $D(f) = \{x: \bigvee_{y} f(x) = y\}$.

Przeciwdziedziną funkcji *f* (zbiorem argumentów *f*) nazywamy zbiór tych obiektów, które są przyporządkowane za pomocą funkcji *f* pewnym obiektom: $D^{-1}(f) = \{y: \bigvee_{x} f(x) = y\}$.

W oparciu o powyższe dwie definicje, możemy wprowadzić następną:
Definicja
Mówimy, że funkcja *f* odwzorowuje zbiór *X* **w** zbiór *Y* (symbolicznie: $f : X \to Y$) witw, gdy *X* jest dziedziną funkcji *f* ($X = D(f)$), a *Y* zawiera przeciwdziedzinę ($Y \supset D^{-1}(f)$).



Mamy tu funkcję $f(x) = x^2$
$f : R \rightarrow R_0^+$

Gdybyśmy jednak mieli funkcję $f(x) = x^2 - 5$
Wówczas byłoby: $f : R \rightarrow (-5, \infty)$

Możemy powiedzieć więc, że dziedzina funkcji, to wszystkie jej argumenty, a jej przeciwdziedzina, to zbiór jej wartości.

Definicja
Zbiór wszystkich funkcji, które odwzorowują X w Y oznaczamy Y^X.

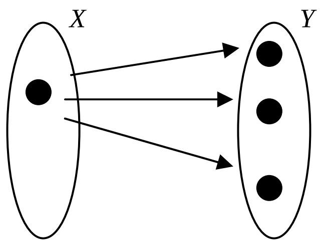
Oznaczmy przez $\overline{\overline{A}}$ liczebność zbioru A (inaczej: moc zbioru A).

Twierdzenie: $\overline{\overline{Y^X}} = \overline{\overline{Y}}^{\overline{\overline{X}}}$.

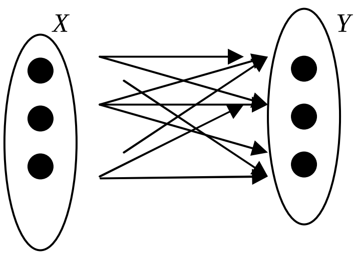
Czytamy je następująco: moc wszystkich funkcji odwzorowujących zbiór X w zbiór Y jest równa mocy zbioru Y do potęgi moc zbioru X.

Dowodzi się je w sposób indukcyjny (tu podam jedynie szkic takiego dowodu).

Wprowadźmy oznaczenia: $\overline{\overline{X}} = m$, $\overline{\overline{Y}} = n$.



Gdy moc zbioru X wynosi 1, to funkcji jest tyle, ile wynosi moc zbioru Y (każdą z nich symbolizują poszczególne strzałki). Funkcji mamy więc $n = n^1 = n^m$.



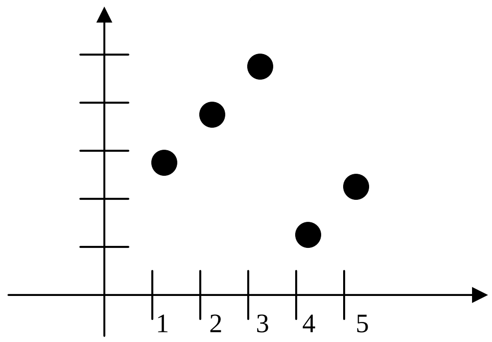
Gdy moc zbioru X jest większa od 1, z każdego elementu zbioru X (których jest m) możemy poprowadzić tyle strzałek do zbioru Y, ile jest elementów zbioru Y (których jest n). Tworząc funkcję, z pierwszego elementu zbioru X możemy więc wyprowadzić strzałkę na n sposobów, z drugiego – na n sposobów, ..., z ostatniego (m- tego) – też na n sposobów. W sumie różnych funkcji możemy więc utworzyć: $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^m$.

Definicja:
Niech $f : X \rightarrow Y$.

1) Jeżeli $Y = R$ (liczby rzeczywiste), to funkcję nazywa się rzeczywistą (inaczej: funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy funkcją rzeczywistą).
2) Gdy $Y = C$ (liczby zespolone), to funkcję nazywamy zespoloną.
3) Gdy $X = N$ (liczby naturalne), to funkcję nazywamy ciągiem.
4) Gdy $X = \{1, 2, ..., n\}$, to funkcję nazywamy ciągiem skończonym.

W pierwszych dwóch przypadkach braliśmy tu podstawienie „Y = …”. Obowiązywała zasada: jakie wartości – taka funkcja (np. rzeczywiste – rzeczywista).
Z kolei w pozostałych 2 przypadkach patrzyliśmy na zbiór X.
3) w przypadku x = N – mamy ciąg nieskończony, bo i N jest nieskończony, a jego kolejne elementy:1, 2, 3, … - to pozycje elementów w ciągu (też 1, 2, 3, …). Wartości funkcji na poszczególnych elementach – to wartości kolejnych pozycji ciągu.

Funkcja:



Ciąg: (3, 4, 5, 1, 2, …)

Gdy z kolei weźmiemy początkowych n elementów (np. n = 5), to otrzymamy ciąg skończony (tu: składający się z 5 elementów – kolejno o numerach:1, 2, 3, 4, i 5) i będzie on (analogicznie jak na powyższym rysunku) wyglądał następująco: (3, 4, 5, 1, 2).

Definicja:
Funkcję, która każdemu elementowi $t \in T \neq \varnothing$ przyporządkowuje element a_t oznaczamy symbolem $(a_t)_{t\in T}$ (co czytamy: „a te po te należącym do Te”, lub – „bardziej po matematycznemu” – a_t po $t \in T$) i nazywamy indeksowanym zbiorem.

Mamy tu do czynienia z funkcją, gdzie:
T – to jej dziedzina,
t – to pewien argument (z dziedziny T),
a_t – to wartość tej funkcji na argumencie t.

Rozpatrzmy to na konkretnym **przykładzie**
Niech mianowicie $T = \{1, 2, 3, ..., 8\}$.
Jego elementy, to poszczególne t ($t \in T$). Można więc powiedzieć, że t przyjmuje wartości 1, 2, 3, ..., 7 i 8. Poszczególne a_t, to będą więc a_1, a_2, a_3, ..., a_8. Jeśli dalej np. $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, ..., $a_8 = 5$, to możemy powiedzieć, że funkcja ta 1-ce przyporządkowuje 5-kę, 2-ce 7-kę, ..., 8-ce 5-kę.

Jeśli tylko dokładnie czytałeś, co napisałem powyżej, powiesz od razu: przecież to jest ciąg ograniczony! Spytasz się więc od razu, po co więc tak komplikować sprawę? Otóż tak jest rzeczywiście, ale akurat w tym przypadku. Jest tak, gdyż na T składa się n (skończona liczba) kolejnych liczb naturalnych. Ogólnie rzecz biorąc – nie zawsze (co więcej – rzadko kiedy) tak jest. Za T możemy bowiem brać cokolwiek (tzn. dowolny zbiór).

Może być np. tak (nowy **przykład**):
$T = \{Tomek, Andrzej, Robert\}$
$a_{Tomek} = Magda$, $a_{Andrzej} = Sylwia$, $a_{Robert} = Marta$
Tu funkcja $(a_t)_{t\in T}$ pokazuje, który z chłopaków z którą z dziewczyn jest na parkiecie (w tańcu).

Funkcji tego typu bardzo często używamy, kiedy chcemy określać coś tylko dla pewnego ograniczonego uniwersum. Np. w przykładzie j.w. (tj. kto z kim tańczy) możemy wziąć pod uwagę ogół mężczyzn uczestniczących w jakimś weselu wiejskim (tj. dużym, z ludźmi zaproszonymi z całej Polski). Wówczas za zbiór T możemy brać spośród wszystkich mężczyzn obecnych na parkiecie;
- ich wszystkich,
- wszystkich blondynów,
- wszystkich zaproszonych z Tworek,
- co najmniej *70*-letnich

- ...

Wiemy, co to jest funkcja „w” ($f : X \to Y$, $X = D(f)$, $Y \supset D^{-1}(f)$).
Obecnie zobaczymy, co to jest funkcja „na” (inaczej surjekcja).

Definicja
Mówimy, że funkcja *f* odwzorowuje zbiór *X* **na** zbiór *Y* witw, gdy funkcja *f* odwzorowuje zbiór *X* **w** *Y*, a przy tym każdy element zbioru *Y* jest wartością funkcji *f*.
Symbolicznie możemy to zapisać następująco:

$$f : X \xrightarrow[na]{} Y \leftrightarrow \underbrace{f : X \xrightarrow[(w)]{} Y}_{\text{warunek 1}} \wedge \underbrace{\Lambda_{y \in Y} \, \mathrm{V}_{x \in X} \; y = f(x)}_{\text{warunek 2}}$$

Powyżej „w” zostało zapisane w nawiasie, gdyż normalnie nie trzeba go pisać (bez litery „w” po prostu jest „w”).

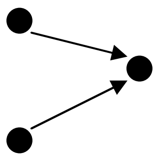
Z definiensu tej definicji mamy:
- z warunku 1 – że $X = D(f)$, a $Y \supset D^{-1}(f)$,
- z warunku 2 – że $Y \subset D^{-1}(f)$.

Ponieważ inkluzje te łącznie oznaczają równość, tak więc definiens oznacza po prostu równość *X* z dziedziną ($X = D(f)$) i równość *Y* z przeciwdziedziną ($Y = D^{-1}(f)$).
Ani w *X* ani w *Y* nie ma więc elementów niewykorzystanych (przez tę funkcję).

Iniekcja (dopuszcza się też zapis: injekcja) – definicja
Funkcję *f* nazywamy iniekcją (czy też funkcja różnowartościową, czy też funkcją jeden-jednoznaczną, czy też wzajemnie jednoznaczną), gdy różnym swoim argumentom przyporządkowuje różne wartości.

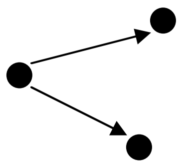
Symbolicznie warunek ten możemy zapisać w następujący sposób: $\Lambda_{x_1, x_2} [x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)]$.
W oparcie o prawo transpozycji (po raz kolejny przypominam: $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$), wyrażenie zawarte w nawiasie kwadratowym możemy zapisać następująco: $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.
Wtedy otrzymamy formułę $\Lambda_{x_1, x_2} [f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2]$ (równoważną formule podanej 3 linie wyżej),
którą to możemy odczytać w następujący sposób: jeśli kiedykolwiek funkcja *f* osiąga identyczne wartości, to może się to zdarzyć tylko w przypadku identycznych argumentów.

Tak więc iniekcja wyklucza możliwość zachodzenia następującej sytuacji:

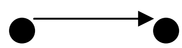


(1)

W zestawieniu z definicją funkcji (- brak sytuacji jak poniżej)



(2)

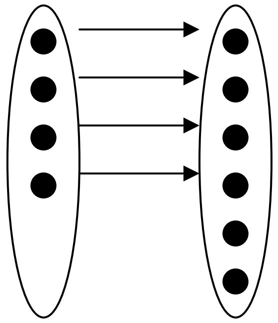
otrzymujemy, że możemy mieć przyporządkowania tylko typu:  (3)

Fakt, że funkcja *f* w sposób wzajemnie-jednoznaczny przekształca zbiór *X* w zbiór *Y*, oznaczamy symbolicznie w następujący sposób: $f : X \xrightarrow{1\text{–}1} Y$. Ów zapis 1-1 oznacza właśnie ową jeden-jednoznaczność, czyli wzajemną jednoznaczność. W rzeczy samej oznacza ona:
- że każdy argument ma jedną wartość (czyli nie jest tak jak na powyższym schemacie 2)
- a każda wartość osiągana jest tylko na jednym argumencie (czyli nie jest tak jak na powyższym schemacie 1),

- czyli łącznie: że jest jedynie tak jak na powyższym schemacie 3.

Ponieważ definicja funkcji orzeka m. in., że $X = D(f\,)$ (w X nie ma elementów nie wykorzystanych), więc iniekcja ma następującą postać:

$f{:}\ \ X \quad \to \quad Y$



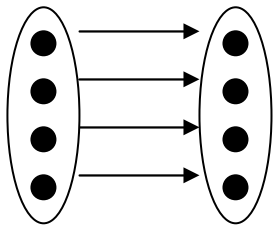
w Y może być dowolna ilość wolnych elementów
(jedynie „może”, a nie musi, bo w przekształcenie „w” mamy $Y \subset D^{-1}(f\,)$)

Mając już zdefiniowaną surjekcję i iniekcję – możemy podać poniższą **definicję bijekcji**
Bijekcja, to funkcja, która jest zarazem surjekcją i iniekcją (tj. jest różnowartościowa i „na”).

Stąd właśnie nazwa bjjekcja – od „bi” = podwójny, a bijekcja to funkcja podwójna – zarazem surjekcja i iniekcja (czy – jak kto woli – funkcja o dwóch własnościach: zarazem różnowartościowa i „na”).
Fakt, że taka funkcja przekształca zbiór X w (a właściwie „na”) zbiór Y oznaczamy w następujący sposób:
$f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y.$

Aby zobaczyć, jak wygląda bijekcja, weźmy funkcję różnowartościową (rys. jw.), ale taką, aby była ona „na” (tj. bez wolnych elementów w Y).

$f : \ X \xrightarrow[na]{1-1} Y.$



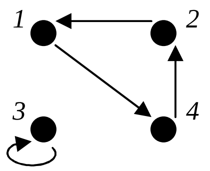
Widzimy więc, że łączność tych warunków (owe „bi”- różnowartościowość i „na”) oznacza, że bijekcja ustala równoliczność zbiorów między którymi operuje.

Definicja
Jeżeli funkcja f jest bijekcją, ale odwzorowuje zbiór X na zbiór X, to nazywamy ją permutacją tego zbioru.
Symbolicznie: $f : X \xrightarrow[na]{1-1} X.$

Permutacje (w ciągach) – przestawienie na zbiorze kolejnych liczb naturalnych.

Weźmy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Z jego elementów można ustawić 4! 4-elementowych ciągów bez powtórzeń (na I pozycji może być jeden z owych 4 elementów, na II – jeden z 3 pozostałych, na III – jeden z 2 pozostałych, a na ostatniej – już tylko jeden pozostały). Stąd ich liczba równa się $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.
Przykładem jest np. ciąg (4, 1, 3, 2). Właściwie oznacza on funkcję $f : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ taką, że przyporządkowuje ona poszczególnym pozycjom odpowiednie wartości.

Mamy więc: $f(1) = 4$ (bo na 1 pozycji jest 4), $f(2) = 1$, $f(3) = 3$ i $f(4) = 2$.
Funkcje tę można więc zobrazować następującym grafem:



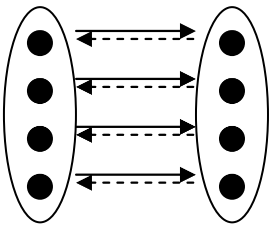
Składa się on z dwóch cykli (w ogóle matematyce pokazali, że każda permutacja, to zawsze zbiór cykli i badają permutacje o parzystej i nieparzystej liczbie cykli).

Definicja funkcji odwrotnej

Funkcją odwrotną do funkcji $f: X \xrightarrow[na]{1-1} Y$ nazywamy funkcję $f^{-1}: Y \xrightarrow[na]{1-1} X$ określoną wzorem:

$$f^{-1}(b) = a \leftrightarrow f(a) = b \quad (*)$$

$$f: \quad X \xrightarrow{1-1} Y$$



Strzałki pełne obrazują funkcję f, a przerywane – odwrotna do niej funkcję f^{-1}.

Przypatrzmy się, jakie **własności** przysługują funkcji odwrotnej.
1) $f(f^{-1}(x)) = x$
2) $f^{-1}(f(x)) = x$
3) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Dowód

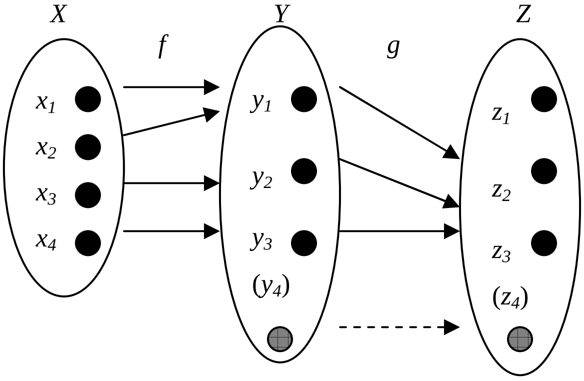
1) $\underbrace{f(f^{-1}(x))}_{a} = \underbrace{x}_{b} \xleftrightarrow{z\,def\,(*)} f^{-1}(x) = f^{-1}(x)$, co jest już oczywiste.
a b - w definicji (*)

2) $f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{b}) = \underbrace{x}_{a} \xleftrightarrow{z\,def\,(*)} f(x) = f(x)$, co jest już oczywiste.
b a - w definicji (*)

3) $(f^{-1})^{-1} = f$ - zapis ten oznacza, że dla dowolnego x, $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ i to właśnie udowodnimy.
$\underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{F}(\underbrace{x}_{b}) = \underbrace{f(x)}_{a} \xleftrightarrow{z\,def\,(*)} f^{-1}(f(x)) = x$, co udowodniliśmy w 2)
F b a - w definicji (*) zapisanej w postaci: $F^{-1}(b) = a \leftrightarrow F(a) = b$ (aby nie mylić f-ów)

Poniżej wprowadzimy pojęcie „złożenie funkcji” (inaczej: superpozycja)

Najpierw przypatrzmy się w tym celu poniższemu rysunkowi



te elementy już nie biorą udziału w składaniu funkcji

Mamy tu funkcje:
- $f : X \to Y$ (w związku z tym $X = D(f)$ i $Y \supset D^{-1}(f)$),
- $g : Y \to Z$ (w związku z tym $Y = D(g)$ i $Z \supset D^{-1}(g)$).

W związku z tym odpowiednio:
- dla każdego elementu ze zbioru X mamy jego wartość (wyznaczoną przez funkcję f) w zbiorze Y,
- dla każdego elementu ze zbioru Y mamy jego wartość (wyznaczoną przez funkcję g) w zbiorze Z.

W związku z tym dla dowolnego elementu ze zbioru X za pomocą funkcji f możemy wyznaczyć jego wartość w zbiorze Y, a następnie dla tak wyznaczonego obiektu – za pomocą funkcji g jego wartość w zbiorze Z.

Definicja:
Niech $f : X \to Y$ zaś $g: Y \to Z$. Złożeniem (superpozycją) funkcji f i g nazywamy funkcję $g \cdot f$ (często oznaczaną też $g \circ f$ lub też po prostu gf) działającą z X w Z (co zapisujemy: $g \cdot f : X \to Z$), określoną warunkiem:
$g \cdot f(x) = g(f(x))$.
Uwagi:
1) Zamiast w powyższym warunku zapisywać $g \cdot f(x)$, można też pisać $(g \cdot f)(x)$, co nawet bardziej oddaje fakt, że mamy do czynienia z jedną funkcją.
2) Mimo, że najpierw działamy na x-a funkcją f, a dopiero potem na tak otrzymany wynik funkcją g, to jednak zapisujemy to – jak zwykliśmy to zwykle czynić – od lewej do prawej. Taki zapis oddaje właśnie fakt, że na argumencie działamy tym, co przy nim stoi. U nas przy x-ie stoi f, a przy f-ie – g.

Zobaczmy, jak wygląda złożenie funkcji na konkretnym **przykładzie**.
Niech $f(x) = 2x - 1$ (co oznacza, że f od argumentu, to 2 razy argument minus 1)
$g(x) = x^2 + 3$ (co oznacza, że g od argumentu, to argument do kwadratu plus 3)
Wówczas:

$$(g \circ f)(x) \underset{\text{z definicji superpozycji}}{=} g(f(x)) \underset{\text{z definicji funkcji } f}{=} g(2x-1) \underset{\text{z definicji funkcji } g}{=} (2x-1)^2 + 3 \underset{\text{z rachunków}}{=} 4x^2 - 4x + 4$$

Definicję superpozycji możemy jednak rozwijać niekoniecznie od ośrodka (jak to miało miejsce powyżej), ale i od zewnątrz:

$$(g \circ f)(x) \underset{\text{z definicji superpozycji}}{=} g(f(x)) \underset{\text{z definicji funkcji } g}{=} [f(x)]^2 + 3 \underset{\text{z definicji funkcji } f}{=} (2x-1)^2 + 3,$$ *a* więc otrzymaliśmy taki sam wynik jw.

Zobaczmy jeszcze (metodą „od zewnątrz”), jaki będzie wynik złożenia funkcji w odwrotnej kolejności (tj. nie $g \circ f$, lecz $f \circ g$!):

$$(f \circ g)(x) \underset{\text{z definicji superpozycji}}{=} f(g(x)) \underset{\text{z definicji funkcji } g}{=} 2g(x) - 1 \underset{\text{z definicji funkcji } f}{=} 2(x^2+3) - 1 \underset{\text{z rachunków}}{=} 2x^2 + 5.$$

Otrzymaliśmy inny wielomian, niż poprzednio. Wynika stąd, że (w ogólnym przypadku) $g \circ f \neq f \circ g$, tzn. że składanie funkcji nie jest operacją symetryczną (wiesz, co to znaczy – przez analogie z własnościami formalnymi relacji).
Ważne więc w którą stronę składamy – składanie funkcji nie jest przemienne!

Dla przećwiczenia, złóżmy jeszcze:
- funkcję f samą z sobą: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$
- i funkcję g samą z sobą: $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 3) = (x^2+3)^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 12$

Sumy, iloczyny i produkty uogólnione

I. **Definicja**

Funkcję, która każdemu elementowi t należącemu do $T \neq \varnothing$ przyporządkowuje rodzinę zbiorów A_t oznaczamy symbolem $(A_t)_{t\in T}$ (jak to czytać już wiesz) i nazywamy indeksowaną rodziną zbiorów (w skrócie: IRZ).
Gdy np. $T = \{1, 3, 5\}$ – to zbiór indeksów oznaczający numery lat „biologii" na UAM w Poznaniu, wtedy zbiór $\{A_1, A_3, A_5\}$ oznacza właśnie przyporządkowany mu przez tę funkcję zbiór owych lat.
(powiedzmy, że to np. na nich wg. regulaminu studiów trzeba zrobić badania lekarskie, aby móc je zaliczyć).
Otrzymaliśmy w ten sposób indeksowaną rodzinę zbiorów.

II. **Definicja**

Niech będzie dana indeksowana rodzina zbiorów $(A_t)_{t\in T}$.

1) Sumą tej rodziny nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie obiekty indeksowanych zbiorów:

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x: \bigvee_{t\in T} x\in A_t\}$$ (w naszym przykładzie jest to ogół studentów I, III i V roku)

Czytamy to: sumą indeksowanej rodziny zbiorów jest ogół tych obiektów, które są elementami któregokolwiek z tych zbiorów.

Tak więc: $x \in \bigcup_{t\in T} A_t \leftrightarrow \bigvee_{t\in T} x\in A_t$

Czytamy to: pewien obiekt (x) jest elementem sumy indeksowanej rodziny zbiorów, gdy istnieje w niej zbiór, którego jest on elementem.

Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki:

i. $T = N \rightarrow \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup ...$

Oznacza to: Jeśli mamy indeksowana rodzinę zbiorów o znacznikach ze zbioru liczb naturalnych, to jej suma jest (nieskończoną) suma mnogościową zbiorów o znacznikach naturalnych (suma od $n = 1$ do nieskończoności A_n).

ii. $T = \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$

Oznacza to: Jeśli mamy indeksowana rodzinę zbiorów o znacznikach ze zbioru n początkowych liczb naturalnych, to jej suma jest (tym razem już skończoną) suma mnogościową zbiorów o znacznikach z tego zbioru (suma od $k = 1$ do n A_k).

2) Iloczynem tej rodziny jest zbiór

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x: \bigwedge_{t\in T} x\in A_t\}$$

Oznacza to, że trzeba być w każdym zbiorze, by być w przekroju.

W naszym przykładzie jest to ogół studentów, którzy są jednocześnie (!) na I, III i V roku

Czytamy to: przekrojem indeksowanej rodziny zbiorów jest ogół tych obiektów, które są elementami każdego z tych zbiorów.

Tak więc: $x \in \bigcap_{t\in T} A_t \leftrightarrow \bigwedge_{t\in T} x\in A_t$

Czytamy to: pewien obiekt jest elementem przekroju indeksowanej rodziny zbiorów, gdy jest elementem każdego z tych zbiorów.

Analogicznie, jak powyżej, i teraz rozpatrzmy dwa szczególne przypadki:

a) $T = N \rightarrow \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap ...$

Oznacza to: Jeśli mamy indeksowana rodzinę zbiorów o znacznikach ze zbioru liczb naturalnych, to jej suma jest (nieskończonym) przekrojem mnogościowym zbiorów o znacznikach naturalnych (przekrój od $n = 1$ do nieskończoności A_n).

b) $T = \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$

Oznacza to: Jeśli mamy indeksowana rodzinę zbiorów o znacznikach ze zbioru n początkowych liczb naturalnych, to jej przekrój jest (tym razem już skończonym) przekrojem mnogościowym zbiorów o znacznikach z tego zbioru (przekrój od $k = 1$ do n A_k).

III. **Własności sum i iloczynów**

1) $\bigwedge_{t\in T} (A_t \subset \bigcup_{t\in T} A_t)$ (każdy ze zbiorów składających się na sumę IRZ jest w niej zawarty)

2) $\bigwedge_{t\in T} (\bigcap_{t\in T} A_t \subset A_t)$ (przekrój IRZ jest zawarty w każdym/dowolnym ze zbiorów owej IRZ)

3) $\bigwedge_{t\in T} A_t \subset A \rightarrow \bigcup_{t\in T} A_t \subset A$ (jeśli w pewnym zbiorze zawarty jest każdy ze zbiorów IRZ, to również suma owej IRZ jest w nim zawarta)

4) $\bigwedge_{t\in T} A \subset A_t \rightarrow A \subset \bigcap_{t\in T} A_t$ (jeżeli pewien zbiór zawarty jest w każdym ze zbiorów IRZ, to zawarty jest on również w przekroju owej IRZ)

5) $A \setminus \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} (A \setminus A_t)$

6) $A \setminus \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} (A \setminus A_t)$

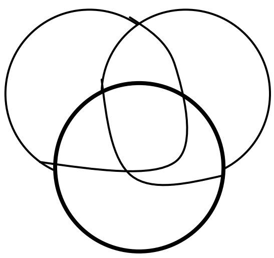
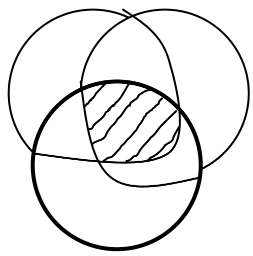
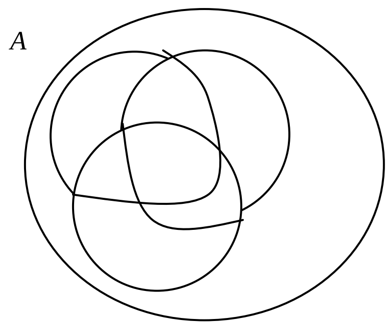
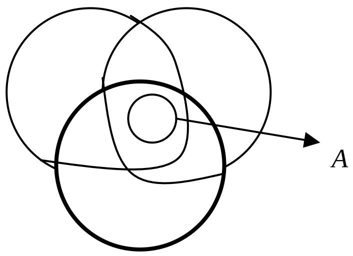
$\Big\}$ prawa de Morgana (uogólnione)

7) $(\bigcup_{t\in T} A_t)' = \bigcap_{t\in T} A_t'$

8) $(\bigcap_{t\in T} A_t)' = \bigcup_{t\in T} A_t'$

$\Big\}$ prawa de Morgana (szczególne)

Przypatrzmy się im po kolei

Ad 1)  Dowolny ze zbiorów IRZ (tu: pogrubiony) jest zawarty w sumie tych zbiorów (całej rozecie)	Ad 2)  Część wspólna rodziny zbiorów (część zakreskowana) jest podzbiorem dowolnego z jej zbiorów (tu np. pogrubionego)
Ad 3)  Każdy ze zbiorów rodziny jest zawarty w A, to i jej suma jest zawarta w A	Ad 4)  Zbiór A jako zawarty w każdym ze zbiorów – zawarty jest w ich przekroju

Z kolei – jak zostało to już wyżej podane – pozostałe 4 własności, to prawa de Morgana.

Prawa 5) i 6) – to uogólnione odpowiedniki dobrze Ci znanych praw de Morgana dla różnicy zbiorów:

a) prawo 5) jest uogólnieniem (na IRZ) prawa: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

b) prawo 6) jest uogólnieniem (na IRZ) prawa: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Z kolei prawa 7) i 8) – to ich uogólnione odpowiedniki:

c) prawo 7) jest uogólnieniem (na IRZ) prawa: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

d) prawo 8) jest uogólnieniem (na IRZ) prawa: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Dowód (wybranych punktów, pozostałe spróbuj sam wykonać – wierzę w Ciebie!).

1) Mamy udowodnić, że $\bigwedge_{t\in T} (A_t \subset \bigcup_{t\in T} A_t)$.

Weźmy więc dowolne $t\in T$ i pokażmy, że $A_t \subset \bigcup_{t\in T} A_t$.

Z definicji inkluzji zbiorów, oznacza to, że należy udowodnić, że $\bigwedge_{x} (x \in A_t \rightarrow x\in \bigcup_{t\in T} A_t)$.

Weźmy więc dowolne x i pokażmy, że $x \in A_t \rightarrow x \in \bigcup_{t\in T} A_t$.

Weźmy więc $x \in A_t$ (założenie) i pokażmy, że wtedy $x \in \bigcup_{t\in T} A_t$ (teza), czyli że $\bigvee_{t\in T} x \in A_t$.

Biorąc pod uwagę, że t w A_t w założeniu brane jest z T, powyższa teza wprost wynika z przyjętego założenia.

4) Mamy udowodnić, że $\bigwedge_{t\in T} A \subset A_t \rightarrow A \subset \bigcap_{t\in T} A_t$.

Przyjmijmy więc, że $\bigwedge_{t\in T} A \subset A_t$ (założenie). Pozostaje nam przy nim, udowodnić, że $A \subset \bigcap_{t\in T} A_t$.

Nasze założenie – w oparciu o definicję inkluzji zbiorów – możemy rozpisać w następujący sposób:

$\bigwedge_{t\in T} \bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x \in A_t)$

Z kolei tezę – również w oparciu o definicję inkluzji zbiorów – można rozpisać następująco:

$\bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x \in \bigcap_{t\in T} A_t)$

Pomyślmy teraz, jak od założenia dojść do tezy. Na pierwszy rzut oka warunek z „$t\in T$" należy przerzucić do następnika implikacji. Zróbmy to (tym bardziej, że jest to wykonalne). Założenie przyjmuje więc postać:

$\bigwedge_{x} (x \in A \rightarrow x \in \bigwedge_{t\in T} x \in A_t)$, co z kolei (na mocy: $\bigwedge_{t\in T} x\in A_t \Leftrightarrow x\in \bigcap_{t\in T} A_t$) jest równoważne dowodzonej tezie.

8) Mamy udowodnić, że $(\bigcap_{t\in T} A_t)' = \bigcup_{t\in T} A_t'$, czyli równość dwóch zbiorów.

W tym celu musimy udowodnić zachodzenie dwóch inkluzji (w myśl zasady: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$).

a) $(\supset)$

Mamy udowodnić, że $(\bigcap_{t\in T} A_t)' \supset \bigcup_{t\in T} A_t'$, czyli że $\bigwedge_{x} (x \in \bigcup_{t\in T} A_t' \rightarrow x \in (\bigcap_{t\in T} A_t)')$

Weźmy więc dowolne x. Wtedy wystarczy, że udowodnimy, że $x \in \bigcup_{t\in T} A_t' \rightarrow x \in (\bigcap_{t\in T} A_t)'$,

czyli innymi słowy, że przy założeniu $x \in \bigcup_{t\in T} A_t'$ zachodzi teza: $x \in (\bigcap_{t\in T} A_t)'$.

Nasze założenie możemy rozpisać w równoważny sposób: $\bigvee_{t\in T} x \in A_t'$.

Z kolei tezę możemy po kolei rozpisać do równoważnych jej postaci w następujący sposób (weźmy pewne x – załóżmy, że takie istnieje /gdyż tylko dla takich to twierdzenie ma sens/):

$x \in (\bigcap_{t\in T} A_t)' \Leftrightarrow \sim (x \in \bigcap_{t\in T} A_t) \Leftrightarrow \sim (\bigwedge_{t\in T} x \in A_t) \Leftrightarrow \bigvee_{t\in T} \sim x \in A_t \Leftrightarrow \bigvee_{t\in T} x \in A_t'$.

b) $(\subset)$

analogicznie, jak a), gdyż mieliśmy tam równoważności (a nie właściwe implikacje)

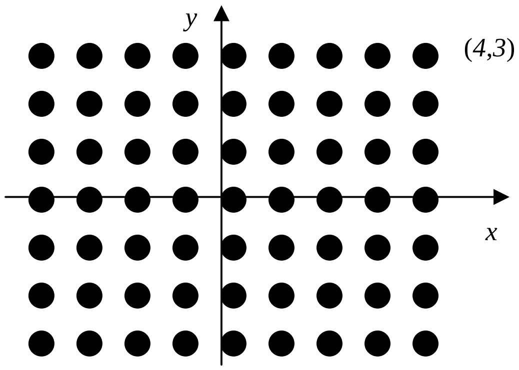
UWAGA:

Wśród iloczynów istnieje też pojęcie „uogólniony produkt kartezjański". Wykorzystując go, zamiast tworzyć zbiory uporządkowanych par, będzie można tworzyć zbiory uporządkowanych trójek, czwórek, ...

Iloczyn uogólniony definiujemy w następujący sposób: $\prod_{t\in T} A_t = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

Możemy więc mieć np. $R \times R \times R$.

Przypatrzmy się jeszcze pojęciu „punkty kratowe”. Rozumiemy przez nie te punkty na kartezjańskim układzie współrzędnych, które mają wszystkie współrzędne całkowite. Np. w przypadku dwuwymiarowego układu współrzędnych, są to te punkty, które mają obie współrzędne całkowite (tak rzędne, jak i odcięte).

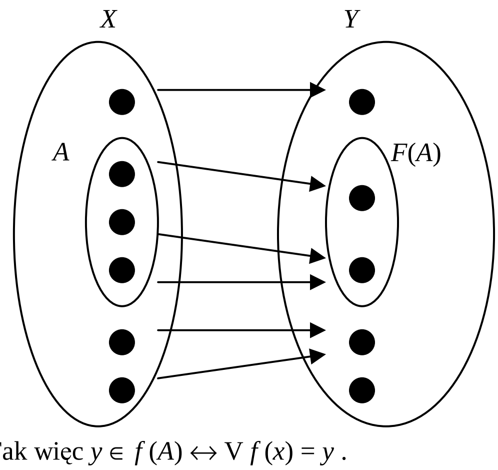


<u>ZADANIE:</u>
Wykorzystaj pojęcie „punkty kratowe” do omówienie zagadnienia „reprezentacja danych”

IV. Obraz

Definicja
Niech f działa z X w Y ($f: X \to Y$) i niech $A \subset X$. Obrazem $f(A)$ nazywamy zbiór $f(A) = \{y\colon \bigvee_{x} f(x) = y\}$.

Jest to więc zbiór tych wszystkich obiektów, które są wartościami elementów zbioru A:

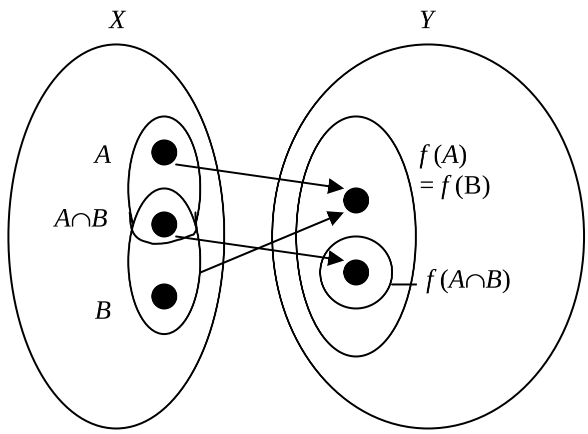


Tak więc $y \in f(A) \leftrightarrow \bigvee_{x\in A} f(x) = y$.

Własności
1) $A \subset B \to f(A) \subset f(B)$
2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3) $f(\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T} f(A_t)$
4) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
5) $f(\bigcap_{t\in T} A_t) \subset \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

gdy funkcja f jest różnowartościowa, to zamiast inkluzji ($\subset$) mamy tu równość (=)

Najpierw pokażemy, że gdy funkcja nie jest różnowartościowa, to rzeczywiście może zachodzić tam inkluzja właściwa:



Tak więc rzeczywiście: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dowód (dla przykładu pktu 2)
Mamy udowodnić równość $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. W oparciu o definicję równości zbiorów ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$), musimy udowodnić, że:

1) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$,
2) $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

Ad 2)
Mamy udowodnić, że $\bigwedge_{y} (y \in f(A) \cup f(B) \rightarrow y \in f(A \cup B))$

Weźmy więc dowolne y i udowodnijmy, że jeśli $y \in f(A) \cup f(B)$ (założenie), to $y \in f(A \cup B)$ (teza).
Rozpiszmy poniżej założenie i tezę:

- założenie: $y \in f(A) \cup f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A} f(x) = y \vee \bigvee_{x \in B} f(x) = y$

  z def. sumy zbiorów   z def. obrazu zbioru

- teza: $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A \cup B} f(x) = y$

  z def. obrazu zbioru

Pokażemy, że tak otrzymane postaci założenia i tezy są sobie równoważne:

$$\bigvee_{x \in A} f(x) = y \vee \bigvee_{x \in B} f(x) = y \Leftrightarrow \bigvee_{x} (x \in A \wedge f(x) = y) \vee \bigvee_{x} (x \in B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow$$

z rozpisania warunku pod kwantyfikatorem   z prawa wyłączania kwantyfikatowów w alternatywie

$$\Leftrightarrow \bigvee_{x} (x \in A \wedge f(x) = y \vee x \in B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow \bigvee_{x} ((x \in A \vee x \in B) \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow$$

z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy   z definicji sumy zbiorów

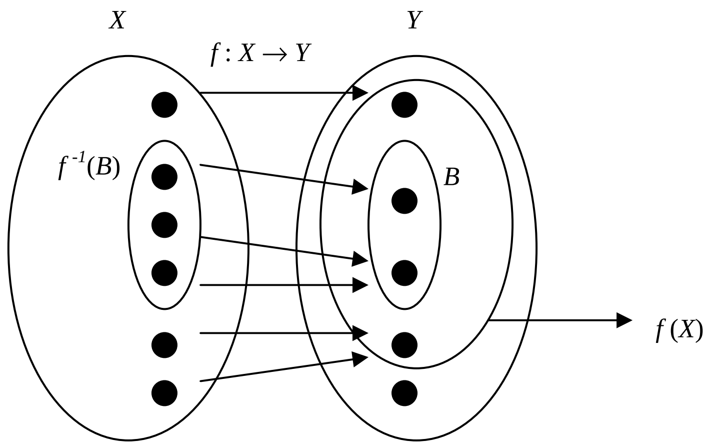
$$\Leftrightarrow \bigvee_{x} (x \in A \cup B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A \cup B} f(x) = y$$

z zasady rozpisania warunku pod kwantyfikatorem

W ten sposób wykazaliśmy równoważność założenia i tezy metodą zstępująco-wstępującą z ogniwem. Równocześnie szukaliśmy postaci równoważnych założeniu (zstępowaliśmy w kierunku do tezy) i tezie (wstępowaliśmy w kierunku do założenia) tak, aby je jak najbardziej zbliżyć, a następnie za pomocą „ogniwa” wykazaliśmy, że postacie te są sobie równoważne. Oczywiście, mając już to rozpisane, można by tak przeformułować dowód, aby przybrał on klasyczną postać zstępującą (tj. od założenia do tezy). Nie oddawało by to jednak sposobu jego wyprowadzenia.

V. **Przeciwobraz**

Przypatrzmy się poniższemu rysunkowi



Definicja

Mamy zbiory X i Y i funkcję $f : X \to Y$. W zbiorze $f(X)$ (zawartym oczywiście w Y) obieramy sobie dowolny zbiór B (tj. $B \subset f(X)$). Wtedy przeciwobraz zbioru B definiujemy w następujący sposób:

$f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$ (czy też w równoważny warunek: $x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow f(x) \in B$) .

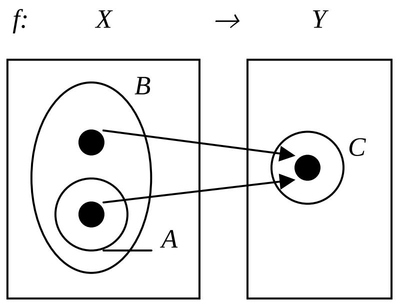
Przeciwobraz zbioru B jest to więc zbiór tych wszystkich obiektów, na których funkcja osiąga wartości w zbiorze B.

Własności

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2) $f^{-1}(\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(A_t)$
3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4) $f^{-1}(\bigcap_{t \in T} A_t) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(A_t)$
5) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
6) $f(f^{-1}(B)) = B$
7) $\underbrace{f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{C})}_{B} \supset A$ gdy funkcja f jest różnowartościowa, to zamiast inkluzji ($\subset$) mamy tu równość (=)

oznaczenia w poniższym przykładzie

Przykład – pokazujący, że w zwykle (tj. – w tym przypadku – gdy funkcja f nie jest różnowartościowa) mamy do czynienia z inkluzja właściwą (a więc nie sprowadzającą się do równości). Na rysunku wszystkie oznaczenia, jak powyżej.



IV. ROZSZERZENIE

14. Moce zbiorów

Zacznijmy od podania dwóch **definicji** (aby od razu było wiadomo o czym mowa):
1) O dwóch zbiorach mówimy, że mają równą moc, gdy są równoliczne.
2) Z kolei zbiory są równoliczne, gdy zachodzi między nimi bijekcja:

$$X \sim Y \leftrightarrow \bigvee_{f} f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

Zapis $X \sim Y$ czytamy: zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y.

Przykład
Pokażemy, że $N \sim N \setminus \{1, 2\}$ za pomocą funkcji (bijekcji) $y = x + 2$ o $x \in N$ (czyt.: o argumentach naturalnych, czy też – równoważnie – będących liczbami naturalnymi).

$$\begin{array}{ll} N: & 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \\ & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ N \setminus \{1, 2\}: & 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \end{array}$$

Zdumiewająca rzecz! Masz 2 zbiory, jeden ($N \setminus \{1, 2\}$) jest umniejszeniem drugiego (N) o 2 elementy, a mimo to mają one tyle samo elementów. Dlaczego tak jest mówi nam następna **definicja**:
Zbiór nazywamy nieskończonym, gdy jest on równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.

Jak widzisz, orzeka ona, że w przypadku zbiorów nieskończonych, są one równoliczne z pewnymi swoimi podzbiorami właściwymi (a ażeby zachodziła owa równoliczność – nadal musi zawierać on nieskończenie wiele elementów).

Wiedząc, co to jest zbiór nieskończony, zobaczy obecnie co to jest zbiór skończony.

Definicja:
Zbiór nazywany skończonym, gdy nie jest on nieskończony.

Wprowadzenie tej definicji jest konieczne, ze względu na fakt, że pojęcie odwrotne nie zawsze musi być dopełnieniowe do danego. Tu akurat tak jest (o każdym zbiorze możemy powiedzieć że jest skończony albo nieskończony; co to znaczy „albo” już wiesz!). Jednak na przykład w przypadku funkcji (jak wiesz ze szkoły ponadgimnazjalnej) – mamy funkcje: parzyste, nieparzyste i „ani-ani” (tj. ani parzyste ani nieparzyste). Trzeba więc być bardzo czujnym przy definiowaniu pojęć.

Zauważmy, że predykat (czy też relacja) równoliczności zbiorów jest zwrotny, symetryczny i przechodni. Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy więc:

1. $\bigwedge_{Z(A)} A \sim A$
2. $\bigwedge_{Z(A), Z(B)} [A \sim B \rightarrow B \sim A]$
3. $\bigwedge_{Z(A), Z(B), Z(C)} [(A \sim B \wedge B \sim C) \rightarrow A \sim C]$

Oznacza to, że relacja ta jest równoważnością, a zatem dokonuje podziału wszystkich zbiorów na klasy abstrakcji.

Definicja
Każdemu zbiorowi X przyporządkowuje się w sposób aksjomatyczny (tj: odgórny) liczbę kardynalną $\overline{\overline{X}}$, oznaczającą moc tego zbioru, w następujący sposób: $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \leftrightarrow X \sim Y$

Zamiast pisać $\overline{\overline{X}}$, stosujemy też równoważne oznaczenia: $card(X)$, czy też $|X|$ i czytamy: liczba kardynalna zbioru X, lub też: moc zbioru X.

Zobaczmy, jakie są moce przykładowych zbiorów:
$card(\varnothing) = 0$ (zero jest mocą zbioru pustego, albo: zbiór pusty ma moc zero)
$card(\{1\}) = 1$
$card(\{3, 5\}) = 2$
$\vdots$
$card(N) = \aleph_0$ (alef zero – liczebność zbioru liczb naturalnych)
$card(R) = C$ (continuum – liczebność zbioru liczb rzeczywistych)

Moc $\aleph_0$ mają też zbiory: liczb całkowitych, parzystych, wymiernych, ...
Moc C mają też zbiory punktów tworzących: odcinek, prostą, kwadrat, ...

Zajmijmy się kwestią przeliczalności.
W związku z tym, przypatrzmy się następującej hipotetycznej sytuacji.
„Każdemu człowiekowi dane jest się urodzić, ale nie dane jest umrzeć. (wiemy że w rzeczywistości jest inaczej: nie każdemu jest dane się urodzić, ale każdemu dane jest umrzeć).Powiedzmy, że każdy z nich od urodzenia co sekundę wypowiada kolejną liczbę naturalną. Liczy więc: 1, 2, 3, 4, ... Przestaje liczyć, gdy mu się podoba, lub wcale nie przestaje liczyć”. Jaka jest moc zbioru wypowiedzianych przez niego liczb?

Otóż, zbiory, o których tu mowa mogą mieć 0, 1, 2, 3, ... elementów (gdy przestanie liczyć odpowiednio: zanim zacznie, po 1. liczbie, po 2. liczbie, po 3. liczbie, ...), bądź też $\aleph_0$ elementów. Zbiory o takich właśnie mocach nazywamy przeliczalnymi.

Albo inaczej: „Każdemu człowiekowi dane jest się urodzić, ale nie dane jest umrzeć. Powiedzmy, że w ciągu sekundy jest on w stanie wypowiedzieć jedna liczbę. Dajemy mu zbiór pięcioelementowy. Przelicza jego elementy – zrobi to w *5* sekund; zeroelementowy – w *zero* sekund; 1573 elementowy – w 1573 sekund, itd. W końcu gdy damy mu do przeliczenia zbiór liczb naturalnych – to też sobie poradzi (do każdej liczby z tego zbioru przecież dojdzie ze swym liczeniem).”

„Oficjalna” **definicja** zbioru przeliczalnego jest następująca:
Zbiór nazywamy przeliczalnym, gdy jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Sprawdźmy, czy przeliczalny jest (czy jak kto woli; czy jesteśmy w stanie „przeliczyć”) zbiór liczb całkowitych, na który składają się nie tylko liczby naturalne, ale i liczby całkowite ujemne (tj. naturalne poprzedzone znakiem minus) i zero. Otóż – da się, ale musimy ustawić je w ciąg nie „bez dwóch końców”, lecz „z początkiem bez końca”, np. w następujący naprzemienny sposób: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
Jego równoliczność ze zbiorem liczb naturalnych ustala następująca bijekcja:

$$\begin{array}{lccccccc} Z: & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N: & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots \end{array}$$

Można też wyrazić ją w klasyczny sposób (wzorem):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x = 0 \\ 2x & \text{gdy } x > 0 \\ -2x + 1 & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Kryterium przeliczalności:
Niech dany będzie niepusty zbiór *A*. Zbiór *A* jest przeliczalny witw, gdy wszystkie jego elementy dają się ustawić w ciąg nieskończony.

Dowód
Twierdzenie to jest postaci:
$A \neq \varnothing \rightarrow [$ *A* jest przeliczalny $\leftrightarrow$ wszystkie elementy *A* dają się ustawić w ciąg nieskończony $]$

Weźmy więc niepusty zbiór *A* i udowodnijmy równoważność z nawiasu kwadratowego, czyli zachodzenie zastępujących ją dwóch implikacji (zgodnie ze wzorem: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p)$):
a) dowód „$\rightarrow$” (tj. dowód implikacji w prawo),

b) dowód „←” (tj. dowód implikacji w lewo).

Ad a)
Jeśli niepusty zbiór *A* jest przeliczalny, to albo jest nieskończony albo skończony:
- w I przypadku sprawa jest oczywista – jeśli zbiór *A* jest przeliczalny i nieskończony – znaczy to, że jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, a zatem można ustalić bijekcję między nim a zbiorem liczb naturalnych, a tym samym jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony,
- w II przypadku – a więc gdy zbiór *A* jest przeliczalny i skończony – znaczy to, że jego elementy można ustawić w ciąg skończony; gdy teraz ostatni z nich powtórzymy nieskończoną ilość razy, uzyskamy tym samym nieskończony ciąg złożony ze wszystkich elementów rozważanego zbioru.

Ad b)
Ustawmy elementy niepustego zbioru *A* w ciąg nieskończony. Te elementy, które się powtarzają wyrzućmy (poza pierwszym pojawieniem się licząc od lewej strony). W ten sposób uzyskaliśmy ciąg nieskończony (I sytuacja) lub ciąg skończony (II sytuacja) bez powtórzeń elementów. W I sytuacji możemy ustalić bijekcję między elementami zbioru *A* a zbiorem liczb naturalnych, a zatem jest on przeliczalny; z kolei w II sytuacji – zbiór *A* jako skończony też jest przeliczalny (zgodnie z definicja zbioru przeliczalnego).

Twierdzenie
Każdy podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód
Niech *A* będzie zbiorem przeliczalnym.
Są 3 możliwości:
1) $A = \varnothing$
2) $A \neq \varnothing$ i *A* jest skończony
3) $A \neq \varnothing$ i *A* jest nieskończony

Rozpatrzmy je po kolei.
Ad 1)
Gdy $A = \varnothing$, to jego podzbiór też jest $\varnothing$, a jako taki jest skończony, a co za tym idzie – przeliczalny.
Ad 2)
Gdy $A \neq \varnothing$ i *A* jest skończony, wówczas jego podzbiór też jest skończony, a jako taki przeliczalny (z definicji zbioru przeliczalnego).
Ad 3)
Gdy $A \neq \varnothing$ i *A* jest nieskończony, wówczas – ponieważ jest to zbiór przeliczalny – od razu wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony. Jeśli teraz z tego ciągu usuniemy niektóre elementy, tak by zostawić tylko te, które należą do rozpatrywanego podzbioru zbioru *A*, to wówczas (po zsunięciu pozostałych):
– albo otrzymamy ciąg nieskończony (a co za tym idzie – za kryterium przeliczalności – oddający zbiór przeliczalny)
– albo otrzymamy ciąg skończony, ale po powtórzeniu ostatniego jego elementu nieskończoną ilość razy – da on nam ciąg nieskończony, a jako taki (znowu w oparciu o kryterium przeliczalności) oddający zbiór przeliczalny.

Twierdzenie
Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód
Z względu na możliwość pustości tych dwóch zbiorów, mamy 3 sytuacje (w tym jedna podwójną):
1) Jeżeli obydwa te zbiory są puste – wtedy ich suma też jest zbiorem pustym (bo $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$), a zatem jest zbiorem przeliczalnym (zbiór pusty jako skończony jest przeliczalny).
2) Jeśli tylko jeden z dodawanych zbiorów jest zbiorem pustym, to ich suma jest identyczna z drugim z tych zbiorów (tj. $A \cup \varnothing = A$, jak i $\varnothing \cup B = B$ – to jest właśnie owa podwójna sytuacja).
3) Jeżeli w końcu obydwa te zbiory są niepuste, to (zgodnie z kryterium przeliczalności zbiorów) – ich elementy możemy ustawić w ciąg nieskończony:
A: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
B: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$

Jeśli teraz wypiszemy je jak w kolejności na poniższym schemacie

A: $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$
B: $b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n, \ldots$

otrzymamy następujący ciąg: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n, \dots$
Jeśli teraz wykreślimy z niego kolejne wystąpienia danych elementów: $a_1, b_1, \cancel{a_2}, b_2, \cancel{a_3}, \cancel{b_3}, \dots, a_n, b_n, \dots$
(dajmy na to jak na powyższym schemacie), a następnie zsuniemy pozostałe elementy: $a_1, b_1, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$
to otrzymamy ciąg nieskończony (co kończy naszą pracę, gdyż możemy juz wtedy zastosować kryterium przeliczalności).
Gdy z kolei okaże się, że otrzymaliśmy ciąg skończony, to (podobnie jak to robiliśmy już poprzednio) – bierzemy ostatni jego element, powtarzamy go nieskończenie wiele razy i – otrzymawszy w ten sposób ciąg nieskończony – stosujemy kryterium przeliczalności.

Twierdzenie
Zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny.

Dowód
Tutaj – na pierwszy rzut oka – sprawa się trochę komplikuje. Mamy bowiem ciąg nieskończony z obydwu stron:
…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ‘…
Jak więc poradzić sobie z jego przeliczaniem?
Odpowiedzią jest następujące ustawienie jego elementów: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, … i zastosowanie kryterium przeliczalności.
Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić również w inny sposób, a mianowicie odwołując się do poprzedniego twierdzenia. Otóż zbiór liczb całkowitych $Z = Z_0^+ \cup Z^- = \{0,1,2,...\} \cup \{-1,-2,-3,...\}$, a więc jest sumą dwóch zbiorów przeliczalnych, a co za tym idzie i sam jest przeliczalny.

Twierdzenie
Suma dowolnej skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód (szkic)
W dowodzie tego twierdzenia postępujemy analogicznie jak w przypadku dowodu poprzedniego twierdzenia, jednak poszczególne ciągi ustawiamy tu w odpowiednio większej liczbie linii:
A: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
B: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$
:
X: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

Oczywiście, można to zestawienie ciągów zapisać o wiele ładniej (by oddać nim fakt, że mamy *k* owych ciągów) :
A_1: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots$
A_2: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots$
:
A_k: $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots$

Wówczas poszczególne elementy kolejnych ciągów oznaczone są dwoma indeksami:
- pierwszy wskazuje z którym ciągiem mamy do czynienia,
- a drugi – z którym kolejnym jego elementem.

Twierdzenie
Suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód (szkic)
W tym przypadku postępujemy analogicznie jak w przypadku dowodu 2 twierdzenia wcześniejszego, jednak:
1) dochodzą nam jeszcze kropki w dół po ostatnim wierszu (bo owych ciągów może być nawet $\aleph_0$)
2) elementy z nich będziemy wypisywać z nich już w inny sposób

a) metoda przekątniowa

A_1: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots$
A_2: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots$
:
A_k: $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots$
:

b) metoda kwadratowa

A_1: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots$
A_2: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots$
:
A_k: $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots$
:

c) zła metoda

A_1: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots$
A_2: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots$
:
A_k: $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots$
:

W przypadku metody przekątniowej (a), jak również kwadratowej (b) dojdziemy do każdego z elementów każdego z wypisanych tu ciągów.
Gdybyśmy jednak próbowali stosować „złą metodę” (która *nota bene* dotychczas była dobra) pozwoli nam ona jedynie na wypisanie wszystkich pierwszych elementów powyższych ciągów, ale na przejście do drugiej kolumny (czyli już do drugiego wyrazu pierwszego ciągu) nie będziemy mieli szans. Metoda te jest więc rzeczywiście zła.

Twierdzenie
Zbiór Q liczb wymiernych jest przeliczalny.

Dowód

Zacznijmy od podania definicji zbioru liczb wymiernych: $Q = \left\{ \frac{k}{n} : k \in Z, n \in N \right\}$

Są to więc wszystkie ułamki, w których licznikach mamy liczby całkowite, a w mianownikach – naturalne.
Nie możemy ustawiać tych liczb w odwrotnej kolejności, gdyż wtedy przy k=0 mielibyśmy 0 w mianowniku (co jest niedopuszczalne), a nigdy w liczniku (co z kolei jest pożądane).
Zauważmy następnie, że tak zdefiniowany zbiór Q można przedstawić w postaci $Q = \bigcup_{n \in N} Q_n$,

gdzie $Q_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in Z \right\}$.
Poszczególne Q_n są to więc zbiory wszystkich ułamków o ustalonym mianowniku (równym n). Mamy więc:
$$Q_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, ... \right\},$$
$$Q_2 = \left\{ \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, ... \right\},$$
itd.
Każdy ze zbiorów Q_n jest przeliczalny. Tak więc zbiór $Q = \bigcup_{n \in N} Q_n$ jest przeliczalną mnogością zbiorów przeliczalnych, a więc (na mocy poprzedniego twierdzenia) sam też jest przeliczalny.

Przejdźmy obecnie do zagadnienia nieprzeliczalności
Definicja
Zbiór nazywamy nieprzeliczalnym, gdy nie jest przeliczalny.

Pojęcie to definiujemy, ponieważ (jak to podaliśmy kilka stron wcześniej), zbiór przeliczalny – to taki zbiór, który posiada moc co najwyżej $\aleph_0$. Matematyka zajmująca się zbiorami o tego typu mocach nosi miano matematyki dyskretnej (obejmuje swym zakresem kombinatorykę, teorię grafów, teorie Ramseya, teorie grafów losowych, kryptologię). Jej nazwa wywodzi się z angielskiego słowa *discrete* = ziarnisty, przeliczalny.
Matematyka zbiorów niedyskretnych – to matematyka zbiorów ciągłych; nosi ona nazwę analizy matematycznej.

Gdy dotychczas operowaliśmy na zbiorach nieskończonych, to zawsze miały one tę sama moc (=$\aleph_0$).
O tym, że istnieje nieskończoność wyższego rzędu mówi nam następujące twierdzenie:

Twierdzenie
Przedział liczb rzeczywistych od zera do jeden (a więc przedział (0,1)) jest nieprzeliczalny.

Dowód
Wszystkie liczby z rozpatrywanego zakresu (przedział liczbowy (0,1)), to tzw. ułamki właściwe. W matematyce można je oddać na dwa podstawowe sposoby: w postaci ułamka zwykłego i w postaci ułamka dziesiętnego.
Poniżej pokażemy, że bez względu na formę zapisu początkowego, każdą z liczb z tego przedziału można oddać w jednoznaczny sposób w postaci $0,a_1\ a_2\ a_3\ a_4...$, gdzie poszczególne a_i ($i \in N$) reprezentują cyfry stojące na kolejnych pozycjach po przecinku.

Zobaczmy najpierw, jaką formę może przybrać liczba zapisana w postaci ułamka dziesiętnego.

1) gdy jest to liczba niewymierna, to od razu będzie ona dana w wymaganej postacie (nieskończenie wiele cyfr po zerze i następującym po nim przecinku),
2) gdy z kolei będzie to liczba wymierna, to mamy kilka możliwości:
   a) gdy będzie zapisana w postaci ułamka skończonego – to ją rozszerzamy dopisując z prawej strony nieskończenie wiele zer (jak np. w przypadku liczby $0,4 = 0,40000...$),
   b) gdy będzie miała ona nieskończony zapis, to (w przypadku liczby wymiernej) będzie on musiał być okresowy (np. $\frac{1}{6} = 0,1666...$), a więc też przez nas pożądany,
   c) możemy się jednak spotkać i z liczba postaci $0,1999...$, która to *de facto* jest równa $0,2$ (bo z jednej strony $\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \cdot 3 = 0,1 + 0,0333... \cdot 3 = 0,1999...$, a z drugiej strony ta sama liczba $\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \cdot 3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,2 = 0,2000...$ - i to jest właśnie dokładny wynik), a więc podamy ją w postaci $0,2000...$

Gdy z kolei będziemy mieć liczbę daną przy pomocy ułamka zwykłego (tj. z kreską ułamkową), to (w wyniku dokonania dzielenia: licznik przez mianownik) możliwe są tylko wyniki wymierne (a więc jak w punkcie 2 powyżej), przy czym w ogóle nie otrzymamy wtedy wyników jak w podpunkcie c), gdyż aby je otrzymać konieczne jest wykonanie mnożenia. Tak więc i w tym przypadku wszystkie możliwe liczby mają postać pożądanego przez nas kształtu.

W ten sposób pokazaliśmy więc, że wszystkie liczby z przedziału (0, 1) można przedstawić w postaci $0,a_1\ a_2\ a_3\ a_4...$, i to zawsze w jednoznaczny sposób.

(na boku zauważmy jeszcze, że liczba $0,9999... = 3 \cdot 0,3333... = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ leży poza rozpatrywanym przez nas zakresem, jakim jest przedział (0, 1)).

Dowód przeprowadzimy metodą „nie wprost” . Przypuśćmy mianowicie, że rozpatrywany przedział liczbowy (0, 1) jest przeliczalny. Zgodnie z kryterium przeliczalności – jego elementy (liczby) dadzą ustawić się w ciąg nieskończony:

$u_1 = 0,\underline{u_{11}}u_{12}u_{13}u_{14}...$

$u_2 = 0,u_{21}\underline{u_{22}}u_{23}u_{24}...$

$u_3 = 0,u_{31}u_{32}\underline{u_{33}}u_{34}...$

:

a każda z liczb z tego przedziału pojawi się w nim tylko 1 raz (bo – jak pokazaliśmy wyżej – ma jednoznaczny zapis w powyższej postaci). Poniżej zdefiniujemy liczbę x w oparciu o liczby z powyższego ciągu.

Niech mianowicie $x = 0,x_1x_2x_3...$, gdzie $x_i = \begin{cases} 1 & gdy \quad u_{ii} \neq 1 \\ 2 & gdy \quad u_{ii} = 1 \end{cases}$

W liczbie x po przecinku mogą się więc pojawić jedynie cyfry 1 i 2, która z nich leży na *i*-tej pozycji zależy od tego, jaka cyfra występuje na *i*-tej pozycji w *i*-tej liczbie w powyższego ciągu (1, gdy nie jest to jedynka, a 2, gdy jest to jedynka).
Tak więc na przykład:
- gdy $u_{11} = 1$, to $x_1 = 2$,
- gdy $u_{22} = 5$, to $x_2 = 1$,
- gdy $u_{33} = 2$, to $x_3 = 1$.

Czy liczba x może pokryć się z liczbą u_1, u_2 lub u_3? Nie, bo z każdą z nich różni się zawsze na na i-tej pozycji. Jest to całkiem inna liczba – różna od tych z powyższego ciągu. W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność z nałożeniem, że ciąg ten zawiera wszystkie liczby z przedziału (0,1)! Tak więc w przedziale $(0,1)$ liczb jest nieprzeliczalna ilość.

Twierdzenie

$$(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \sim R$$

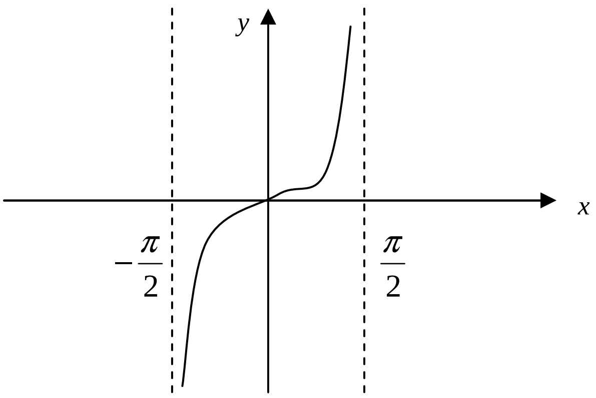
Dowód

Pokażemy, że te 3 przedziały liczbowe mają tę samą moc (są równoliczne).

a) najpierw pokażemy że $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

W tym celu wystarczy wskazać bijekcję zachodzącą między tyli zbiorami liczb. Jest ona następująca: $f(x) = (x - \frac{1}{2}) \cdot \pi$. Pokażemy, że rzeczywiście tak jest. Różnica w nawiasie oznacza przesunięcie przedziału $(0,1)$ o $\frac{1}{2}$ w lewo, a więc do przedziału $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Gdy teraz każdą z liczb z tego przedziału pomnożymy przez π, to otrzymamy poszczególne liczby z przedziału $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

b) obecnie wskażemy bijekcje przekształcającą zbiór $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ w zbiór R. Jest nią funkcja $f(x) = tgx$.



Funkcja $f(x) = tgx$ przekształcająca przedział $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ w R.

Wszystkie te 3 zbiory mają taką sama moc, a jako takie (ze względu na fakt, że $(0,1)$ jest nieprzeliczalny – patrz wcześniejsze twierdzenie), są one nieprzeliczalne.

Definicja

O mocy zbioru *R* (i każdego zbioru z nim równolicznego) mówić będziemy, że wynosi ona continuum (czyt: kontinuum) i oznaczać ją będziemy symbolem *C*.

Twierdzenie

Każdy nadzbiór zbioru nieprzeliczalnego jest nieprzeliczalny.

Dowód

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy mianowicie, że $A \subset B$,

A jest nieprzeliczalny a mimo to B jest przeliczalny.

Otrzymaliśmy sprzeczność z (udowodnionym uprzednio) twierdzeniem, że dowolny podzbiór (tu: A) zbioru przeliczalnego (tu: B) jest przeliczalny (bo u nas akurat jest on nieprzeliczalny).

Twierdzenie
Zbiory liczb rzeczywistych i niewymiernych są nieprzeliczalne.

Dowód.

$(0,1) \subset R$ — zatem i R (jako nadzbiór zbioru nieprzeliczalnego) jest nieprzeliczalny

$\downarrow$

nieprzeliczalny

$Q \cup IQ = R$

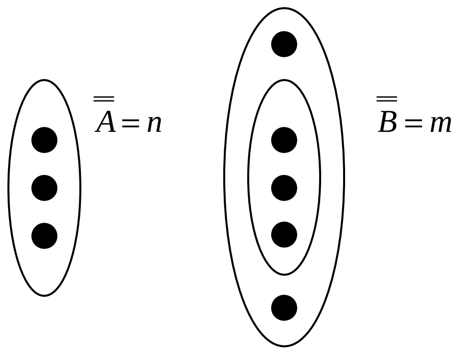
Q: przeli-czalny; R: nieprze-liczalny; IQ: $\downarrow$

To nie może być zbiór przeliczalny (bo gdyby był przeliczalny, to ponieważ suma dwóch zbiorów przeliczalnych daje zbiór przeliczalny – mielibyśmy sprzeczność, bo u nas owa suma jest nieprzeliczalna), zatem jest on przeliczalny.

Twierdzenie
[a, b] ~ (a,b)

Twierdzenie
Każdy zbiór nieprzeliczalny zawiera podzbiór mocy $\aleph_0$.

Niech *n*, *m* i *p* oznaczają liczby kardynalne. Mówimy, że $n \leq m$ witw, gdy pewien zbiór mocy *n* jest równoliczny z pewnym podzbiorem pewnego zbioru mocy *m*.



Z kolei mówimy, że: $n < m \Leftrightarrow n \leq m \wedge n \neq m$

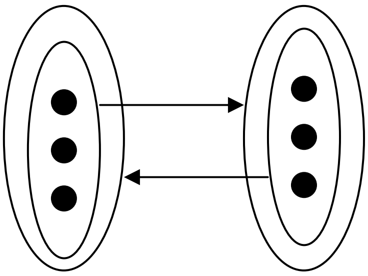
Twierdzenie
$X \subset Y \rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$
(Uwaga! Implikacja w druga stronę nie zachodzi – sprawdź to sam, podstawiając np. $X = \{a\}$ i $Y = \{b, c\}$).

Dowód
Jeśli $X \subset Y$, to na zbiór *Y* oprócz elementów zbioru *X* składają się jeszcze elementy zbioru $Y \setminus X$. Jeśli jest to zbiór niepusty, to mamy do czynienia z inkluzja właściwą, a jeśli z kolei jest to zbiór pusty – to jest to inkluzja niewłaściwa. Stąd właśnie elementów zbioru Y jest co najmniej tyle, co elementów zbioru X (co symbolicznie zapisujemy właśnie: $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$).

Własności dowolnych liczb kardynalnych

1. $n \le n$ (zwrotność)
2. $n \le m \wedge m \le p \rightarrow n \le p$ (przechodniość)
3. $n \le m \wedge m \le n \rightarrow n = m$ (antysymetryczność)

Ostatnia z tych własności nosi nazwę: Twierdzenie Cantora – Bernsteina.



Sytuację tę przedstawia powyższy schemat. Jeśli mianowicie mamy 2 zbiory i pierwszy z nich ma moc nie większą niż drugi, a drugi ma moc nie większą nić pierwszy, to zbiory te mają tę sama moc (czyli są równoliczne). Schemat ten odwołuje się (dwa razy, bo w obydwie strony) do definicji porównania liczb kardynalnych ($n \le m$).

Definicja dodawania liczb kardynalnych

$n+m$ jest to liczba kardynalna p taka, że $\exists_{Z(A),Z(B)}\left(A \cap B = \emptyset \wedge \overline{\overline{A}} = n \wedge \overline{\overline{B}} = m \wedge \overline{\overline{A \cup B}} = p\right)$.

Mówi ona: jeśli chcesz znać sumę 2 liczb kardynalnych – znajdź 2 rozłączne zbiory o mocach wyrażonych tymi liczbami kardynalnymi, i wtedy właśnie moc sumy tych zbiorów będzie stanowić sumę tych liczb kardynalnych.

Zachodzą następujące **własności** (określane **zasadą** włączania – wyłączania):

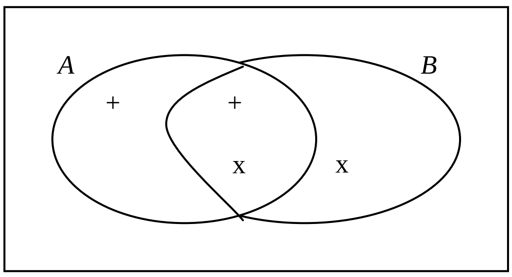
1) $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$

2) $\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} - \overline{\overline{A \cap B}} - \overline{\overline{A \cap C}} - \overline{\overline{B \cap C}} + \overline{\overline{A \cap B \cap C}}$

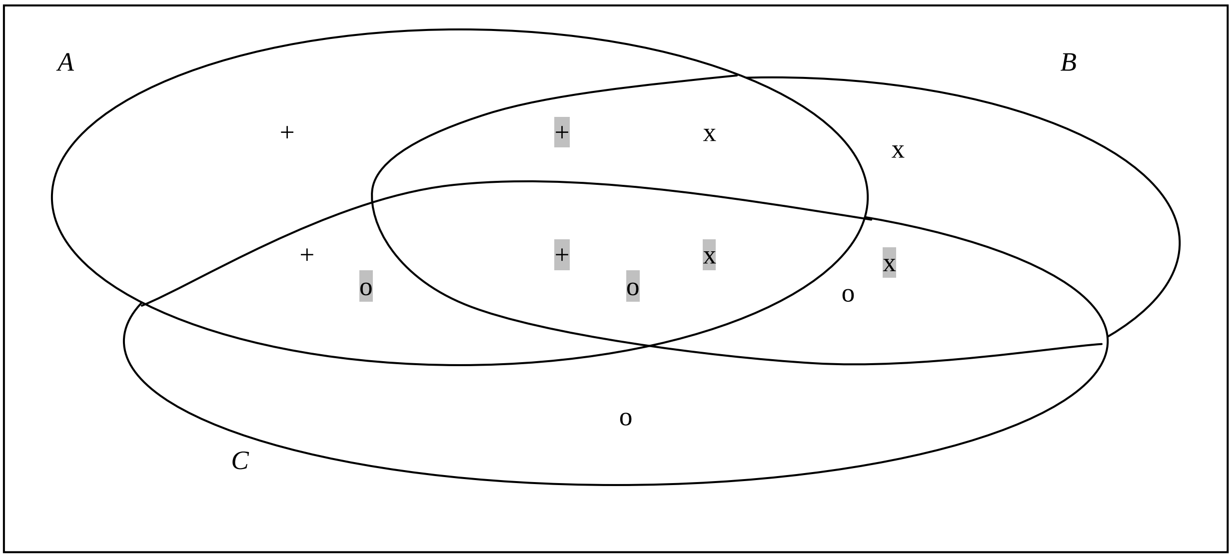
Mówią one, że gdy badamy moc sumy zbiorów, to trzeba uwzględnić fakt, że mogą mieć one niepusty przekrój (czy wręcz niepuste przekroje).

Przypatrzmy się poniższym rysunkom.
Użyte w nich symbole +, x i o – oznaczają tu: liczba wszystkich elementów, które znajdują się w danym polu odpowiednio zbioru: A, B i C.

1) w przypadku dwóch zbiorów zauważamy, że chcąc obliczyć $\overline{\overline{A \cup B}}$, gdy będziemy dodawać $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$, to „przeliczymy się” o $\overline{\overline{A \cap B}}$ (w polu $A \cap B$ podwójnie sumowaliśmy elementy), a w związku z tym $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$



2) z kolei w przypadku 3 zbiorów sumując $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}$ - otrzymamy:



Widzimy, że powtarzają się znaki na przecięciu poszczególnych zbiorów (w polu $A\cap B$ - dublują się znaki + i x, w polu $A\cap C$ - znaki + i o, a w polu $B\cap C$ - znaki x i o). Z każdego z tych pól usuwamy więc po jednym z tych znaków (zaznaczone szarym tłem: w polu $A\cap B$ - znaki +, w polu $A\cap C$ - znaki o, a w polu $B\cap C$ - znaki x), co oznacza odjęcie od $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}$ kolejno liczb: $\overline{\overline{A\cap B}}$, $\overline{\overline{A\cap C}}$ i $\overline{\overline{B\cap C}}$).
W tym momencie w rozecie $A\cup B\cup C$ mamy więc wszystkie znaczki +, x i o, które nie są podane na szarym tle. Widzimy, że znajdują się one w każdym z 7 pól owej rozety, z wyjątkiem pola $A\cap B\cap C$. Oznacza to, że dotychczasową liczbę $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}-\overline{\overline{A\cap B}}-\overline{\overline{A\cap C}}-\overline{\overline{B\cap C}}$ musimy zwiększyć o $\overline{\overline{A\cap B\cap C}}$, otrzymując tym samym, że $\overline{\overline{A\cup B\cup C}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}-\overline{\overline{A\cap B}}-\overline{\overline{A\cap C}}-\overline{\overline{B\cap C}}+\overline{\overline{A\cap B\cap C}}$.

Niech p będzie liczbą kardynalną skończoną. Wówczas zachodzą następujące **własności**:

1. $\chi_0 + p = \chi_0$
2. $\chi_0 + \chi_0 = \chi_0$
3. $C + p = C$
4. $C + \chi_0 = C$
5. $C + C = C$

Można powiedzieć o nich w skrócie, że większa liczba „zjada” mniejszą.

Inne **prawa i własności**:

1. Nie wiadomo, czy istnieje liczba kardynalna k taka, że $\chi_0 < k < C$
2. $C = 2^{\chi_0}$ (komentarz: 1. oznacza to, że continuum, to moc zbioru wszystkich podzbiorów zbioru mocy χ_0 - zbocz wstecz „aksjomat zbioru potęgowego”; 2. Jeśli 2 do jednej mocy daje nam inną moc – zatem otrzymujemy stąd poniższy punkt 3)
3. Istnieje nieskończona ilość nieskończoności: $\chi_0 < 2^{\chi_0} < 2^{\left(2^{\chi_0}\right)} < 2^{2^{2^{\chi_0}}} < \ldots$

   Komentarz: to zapewne jest już drugi szok dla Ciebie w tym paragrafie!
   - z pierwszym miałeś do czynienia gdy dowiedziałeś się, że zbiór może mieć identyczną ze swoi podzbiorem właściwym /na przykład zbiór liczb całkowitych ze zbiorem liczb parzystych, choć intuicyjnie czułeś, że tych drugich jest przecież 2 razy mniej/, a więc że intuicyjne inne moce redukują się do jednej i tej samej;
   - z drugim szokiem spotykasz się zapewne teraz, gdy dowiadujesz się czegoś odwrotnego – że liczb kardynalnych określających moc zbioru nieskończonego jest nieskończenie wiele; poprzez fakt

ustawienia ich wciąg nieskończony – jak na razie widzimy że jest ich co najmniej przeliczalna ilość (a może jakaś inna kategoria określa ilość nieskończoności?!).

Na koniec opiszmy jeszcze ciekawe zagadnienie tzw. **hotelu Hilberta**
Jest to hipotetyczny hotel (w rzeczywistości nie istnieje!), w którym jest nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi, numerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi (a więc: 1, 2, …).
Zakładamy przy tym, że w hotelu tym pracuje bystry (pod względem matematycznym) recepcjonista.
Poniżej rozpatrzymy kilka hipotetycznych sytuacji.

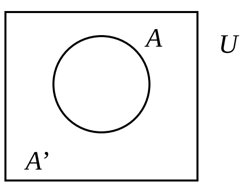
1) Wszystkie pokoje są zajęte. Do hotelu przyjeżdżają 2 osoby. Czy znajdzie się dla nich w tym hotelu miejsce?
   Odpowiedź: tak. Wystarczy tylko każdego z dotychczasowych gości przesunąć do pokoju o numerze o 2 większym, a zwolnione w ten sposób pierwsze 2 pokoje przeznaczyć na owych 2 nowych gości.
2) Znowu wszystkie pokoje są zajęte. Tym razem do hotelu przyjeżdża jednak nieskończenie wielu gości. Czy i tym razem uda się dla nich znaleźć w nim miejsce?
   I tym razem odpowiedź jest pozytywna. Trzeba jednak najpierw każdego z dotychczasowych gości umieścić w pokojach o numerach2 razy większych (zwolnimy wszystkie pokoje, a zapełnimy jedynie te, które maja parzysty numer). Zwolnione w ten sposób pokoje o numerach nieparzystych (jest ich nieskończenie wiele) możemy przeznaczyć dla nieskończenie wielu przybyłych nowych gości.
3) Z hotelu, w którym wszystkie pokoje są zajęte wyjeżdża 5 dotychczasowych lokatorów. Czy recepcjonista jest w stanie wykazać się przed właścicielem, że jest tak obrotny, że i wtedy ma pełne obłożenie hotelu?
   I tym razem odpowiedź jest pozytywna – wystarczy bowiem, że będzie „dobijając do lewej" zajmował wolne pokoje gośćmi z kolejnych pokoi o wyższych numerach.
4) A – w końcu – co będzie gdy z w pełni zajętego hotelu wyjedzie nieskończenie wielu gości? Tutaj sprawa nie jest już jednoznaczna. Gdy bowiem wyjadą wszyscy goście oprócz trzech – to będzie znaczyć, że 3 gości pozostało, a nieskończenie wiele pokoi jest wolnych. Może się jednak zdarzyć, że po wyjechaniu nieskończenie wielu gości (np. tych z pokoi o nieparzystych numerach) , w hotelu nadal pozostanie ich nieskończenie wielu (w tym przypadku – w pokojach o numerach parzystych), a bystry recepcjonista w takiej sytuacji może wykazać się przed właścicielem pełną zajętością hotelu (w tej sytuacji przydzielając każdemu gości pokój o numerze 2 razy mniejszym).

Co wynika z tych dywagacji? Bardzo prosta sprawa:
1) $\aleph_0 + 2 = \aleph_0$, ogólnie: $\aleph_0 + p = \aleph_0$
2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
3) $\aleph_0 - 5 = \aleph_0$, ogólnie: $\aleph_0 - p = \aleph_0$
4) $\aleph_0 - \aleph_0$ to „symbol nieoznaczony" (spotkałeś już się z takim pojęciem w szkole ponadgimnazjalnej!).
Jeśli bowiem możemy uzyskać tu równe wyniki (w rozważanych przypadkach: 3 i $\aleph_0$; ogólnie: p i $\aleph_0$).

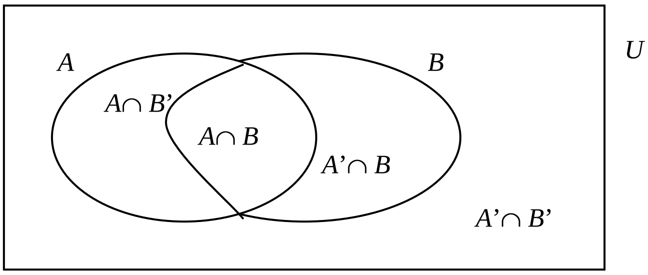
15. Algebra Boole'a i izomorfizm systemów

Jak zapewne dobrze pamiętasz, każde prawo z teorii mnogości można zapisać w języku rachunku zdań, jak również na odwrót – każde prawo rachunku zdań można zapisać w języku teorii mnogości. Oznacza to, że między tymi systemami (rachunkiem zdań i teorią mnogości) zachodzi izomorfizm. Okazuje się jednak, że istnieje jeszcze inny system izomorficzny z każdym z nich (co daje nam, że wszystkie te 3 systemy są wzajemnie izomorficzne). Mowa tu o tzw. algebrze Boole'a – systemie algebraicznym opisującym tzw. układy przełączające.
Jego wprowadzenie i omówienie tutaj jest jak najbardziej na miejscu, jako że wprowadza on nowe narzędzia, pomocne przy dokonywaniu przekształceń czy dowodów w każdym z pozostałych systemów izomorficznych z nim. Narzędziem tym jest mianowicie siatka Karnaugha

Od razu zauważmy tu, że jeden (*A*) zbiór dzieli uniwersum *U* na 2 podzbiory: *A* i *A*'.

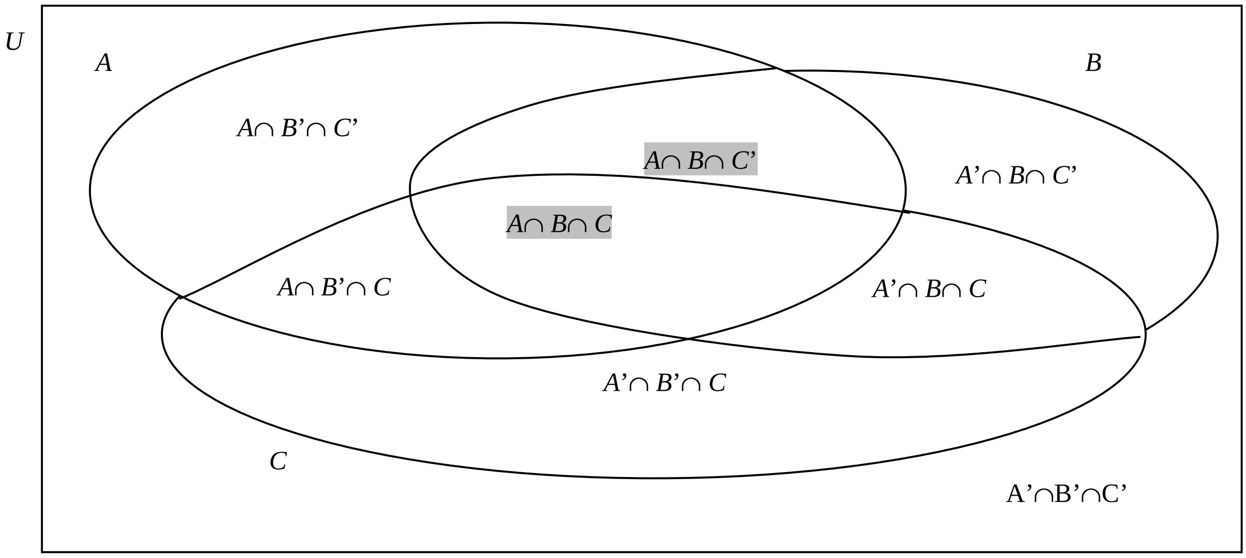


Gdy dodamy drugi zbiór (*B*) – podzieli on tak zbiór *A*, jak i zbiór *A*' na dwie części (odpowiednio: będącą w *B* i nie będącą w *B*, czyli będącą w *B*'), w wyniku czego będziemy mieć ich już 4:



$A \cap B' = A \setminus B$ oznacza: „być *A* i nie być *B*”
$A \cap B$ oznacza: „być *A* i być *B*”
$A' \cap B = B \setminus A$ oznacza: „nie być *A* i być *B*”
$A' \cap B'$ oznacza: „nie być *A* i nie być *B*”

Gdy z kolei dodamy trzeci zbiór (*C*) – to analogicznie podzieli on każde z tych 4 pól na 2 części (odpowiednio: będącą w *C* i nie będącą w *C*, czyli będącą w *C*’), w wyniku czego będziemy mieć ich już 8.



Zauważ, że:
1) otrzymaliśmy tu wszystkie możliwe kombinacje wystąpień *A*, *B* i *C* bez primów i z primami,
2) dowolne 2 sąsiednie pola (na przykład leżące na przecięciu zbiorów A i B, a zaznaczone tu szarym tłem), sumują się do analogicznego pola wyznaczonego w oparciu o 2 zbiory: :

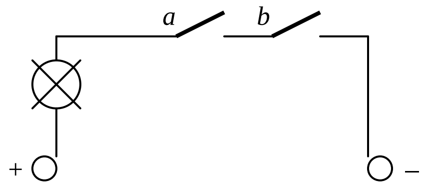
$$(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap (C' \cup C) = A \cap B \cap X = A \cap B$$

Z prawa rozdzielności przekroju względem sumy zbiorów $X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y \cup X \cap Z$ jednak stosowanego w drugą stronę i z podstawieniami: za X: $A \cap B$, za Y: C' i za Z: C		z prawa: $A \cup A' = X$		z prawa: $A \cap X = A$

Efekt jest więc satysfakcjonujący. Niestety na tym poziomie się on kończy. Stworzenie bowiem analogicznego rysunku dla czterech zbiorów na płaszczyźnie za pomocą okręgów jest już niewykonalne.
Tutaj właśnie w sukurs przychodzi nam algebra Boole’a z jej notacją i siatkami Karnaugha.

Zacznijmy jednak od początku. Algebra Boole’a opisuje elektryczne układy przełącznikowe.
Wyobraźmy sobie układy elektryczne jak na rysunkach poniżej:

1)



Mamy tu do czynienia z układem elektrycznym z dwoma przełącznikami ustawionymi szeregowo. Układ będzie zamknięty (co zasygnalizuje nam świecąca się żarówka), jeśli oba przełączniki będą zamknięte. W rachunku zdań sytuację taką opisalibyśmy $a \wedge b$. W notacji algebry Boole'a opiszemy ja jednak $a \cdot b$ (lub po prostu: ab), gdyż w miejsce koniunkcji ($\wedge$) z która mieliśmy do czynienia w rachunku zdań, stosujemy tu znak mnożenia (·, który czytamy „razy") i w związku z tym będziemy mówić, że mamy tu do czynienia z mnożeniem (czy też: z iloczynem) zamiast (jak to było w rachunku zdań), że mamy do czynienia „z koniunkcją".

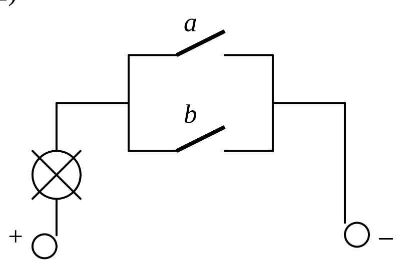
Będziemy przy tym stosować zapis:
a - na oznaczenie faktu, że przełącznik a jest włączony (zamknięty)
$\overline{a}$ - na oznaczenie faktu, że przełącznik a jest wyłączony (otwarty)
Fakt, że przełącznik a jest włączony, będziemy zapisywać też $a = 1$, a fakt, że jest wyłączony: $a = 0$.

Funkcja przepływu prądu: $F = a \cdot b$, jako iloczyn (koniunkcja) *a* i *b* przyjmuje wartości opisane poniższą tabelką mnożenie (o wiele prostszą niż tradycyjna!):

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Mówi ona, że funkcja *F* przyjmie wartość 1 (oznaczającą: prąd płynie", co zasygnalizowane zostanie świecącą się żarówką), witw gdy obydwa przełączniki będą włączane (tj. zamknięte).

2)



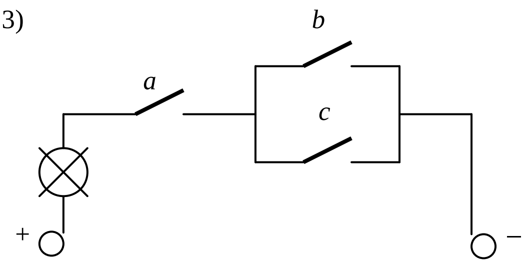
Tu z kolei mamy do czynienia z układem elektrycznym z dwoma przełącznikami ustawionymi równolegle. Układ będzie zamknięty (co zasygnalizuje nam świecąca się żarówka), jeśli co najmniej jeden przełącznik będzie zamknięty. W rachunku zdań sytuację taka opisalibyśmy $a \vee b$, tu (a algebrze Boole'a) napiszemy: $a + b$ i powiemy, że mamy do czynienia z sumą (dodawaniem) zamiast (jak to było w rachunku zdań), że mamy do czynienia „z alternatywą". Funkcja przepływu prądu: $F = a + b$, jako suma (alternatywa) *a* i *b* przyjmuje wartości opisane poniższą tabelką dodawania (o wiele prostszą niż tradycyjna!):

+	0	1
0	0	1
1	1	1

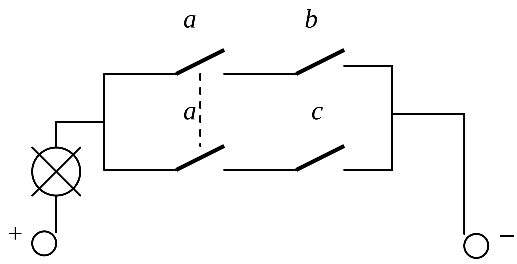
Mówi ona, że funkcja *F* przyjmie tu wartość 1 (oznaczającą: prąd płynie", co zasygnalizowane zostanie świecącą się żarówką), witw gdy co najmniej jeden przełącznik będzie włączony (tj. zamknięty).

Możemy więc powiedzieć, że w paragrafie tym będzie nas interesować rozmieszczenie przełączników i to, jak się wtedy zachowują układy elektryczne.

3)



Funkcję przepływu zapiszemy tu: $F = a \cdot (b + c)$ (bo, aby układ był zamknięty, musi być a oraz b lub c).
Widzimy, że oznacza to, że mysi być a i b lub a i c, co daje nam układ:



- oznacza tu sprzężenie przełączników (razem „chodzą”), są jak gdyby ze sobą połączone

czyli opisany funkcją: $F = a \cdot b + a \cdot c$. Obydwa te układy przełączające są sobie równoważne. Oznacza to, że w ten sposób otrzymaliśmy równość (jedno z praw algebry Boole'a): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Jest ono identyczne ze znanym z algebry (szkolnej!) prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania (i taką też nazwę nosi w algebrze Boole'a!). Dla nas istotniejsze jest jednak, że jest ono izomorficzne (przypomnij sobie, co to znaczy!) z następującym prawem rachunku zdań: $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$. Zapewne sam zauważyłeś to już wcześniej, gdy omawialiśmy oba w/w schematy elektryczne. Przypuszczamy (nie bez powodu), że tego typu izomorfizm istnieje nie tylko w w/w przytoczonym przykładzie, ale i w całej algebrze Boole'a. Wykazaliśmy już izomorfizm teorii mnogości i rachunku zdań. Z przechodniości własności „izomorfizmu systemów” (co jest oczywiste, a jako takie nie wymaga dodatkowego tłumaczenia), ponieważ
- teoria mnogości jest izomorficzna z rachunkiem zdań
- a rachunek zdań jest izomorficzny z algebrą Boole'a,

wnosimy, że również teoria mnogości jest izomorficzna z algebrą Boole'a.

Tak więc np. odpowiednikiem w/w omawianych własności algebry Boole'a ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$) i rachunku zdań ($p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$), w teorii mnogości jest oczywiście:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

To, co tu przeczytałeś jest bardzo ważne. Okazuje się bowiem, że zamiast uprawiać wiele działów matematyki, wystarczy znać się tylko na niewielu z nich, w pozostałych wiedzieć „o co chodzi” (jaka jest interpretacja i natura omawianych w nich obiektów), wiedzieć, które z którymi są powiązane relacją izomorfizmu i znać operacje na jednym z nich. Trzeba być przy tym „ekspertem tego systemu”.
Jest to tym bardziej przydatne, jako że często okazuje się, że wiele operacji na jednym systemie jest (przy pomocy wypracowanej na jego gruncie aparatury) dość uciążliwych, a wykonywania analogicznych operacji na systemie do niego (z nim) izomorficznym jest już bardzo proste (właśnie dzięki wypracowanej na jego gruncie aparatury).
Powiedzmy, że mam udowodnić $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, a jestem znawcą algebry Boole'a. Jak za jej pomocą mogę udowodnić powyższą równość. Otóż są mianowicie dwie metody tego typu postępowania:
1) Zauważamy, że w izomorficznym systemie algebry Boole'a prawu temu odpowiada prawo $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Dowodzę więc je (na gruncie algebry Boole'a) i na koniec stwierdzam: ponieważ systemy „algebra Boole'a” i teoria mnogości” są izomorficzne, a wykazaliśmy prawdziwość prawa $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ na gruncie algebry Boole'a, więc i równoważne mu prawo w teorii mnogości, jakim jest zachodzenie równości $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, jest w niej (teorii mnogości) prawdziwe.
2) Również spostrzegamy, że w izomorficznym systemie algebry Boole'a prawu z teorii mnogości postaci $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ odpowiada prawo algebry Boole'a $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, którego

to dowód przeprowadzamy, a następnie wzorując się na nim – wykonujemy analogiczny dowód odpowiadającego mu prawa z teorii mnogości.

Każde z tych podejść jest jak najbardziej poprawne, a co najważniejsze – bardzo użyteczne.

Jednak, aby przeprowadzić dowód prawa algebry Boole'a (potrzebny chociażby do realizacji dowolnego z powyższych dwóch sposobów), będziemy posiłkować się odpowiednikiem diagramów Venna w teorii mnogości, jakim w algebrze Boole'a jest tzw. siatka Karnaugha (czyt: karnota).

Gdy w układzie przełącznikowym mamy tylko 1 przełącznik (a właściwie 1 typ przełącznika, bo w układzie może się on przecież powtarzać, jak to miało miejsce w ostatnim układzie, i to dowolnie czy z negacją /zaznaczaną kreską u góry/ czy też bez negacji) – wówczas siatka Karnaugha (będąca odpowiednikiem sytuacji jak na pierwszym diagramie w tym paragrafie), ma postać:

a	$\bar{a}$

przełącznik wyłączony

przełącznik włączony

Podobnie, jak w tamtym diagramie Venna, tak i tu mamy dwa pola. Polom A i A' na diagramie odpowiadają odpowiednio kratki a i $\bar{a}$ w siatce.

Z kolei drugiemu diagramowi z niniejszego paragrafu (gdzie mieliśmy dwa zbiory *A* i *B* wyznaczające 4 pola), odpowiada siatka Karnaugha też o 4 polach, wyznaczonych odpowiednio przez dwie kolumny (a i $\bar{a}$) i dwa wiersze (b i $\bar{b}$). Wygląda więc ona następująco:

	a	$\bar{a}$
b		
$\bar{b}$		

W siatkach Karnaugha można opuszczać oznaczenia kolumn czy wierszy dokonywane za pomocą liter z negacją (belką u góry), przyjmując, że i tak wiadomo które z pól są tego typu – te mianowicie, które nie są oznaczone analogiczna literą bez owej negacji (belki u góry). W związku z tym powyższą siatkę można też (i tak będziemy już robić) oddać w następujący sposób:

	a	
b		

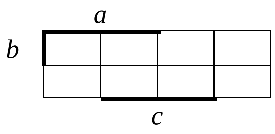
Poszczególne pola oznaczają w niej:

	a	
b	ab	$\bar{a}b$
	$a\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$

Tutaj mamy $\bar{a}\cdot\bar{b}$, a więc iloczyn negacji, a nie negację iloczynu (to dwie różne rzeczy!
– negacja iloczynu wygląda bowiem następująco: $\overline{a\cdot b}$ i oznacza wszystkie pola poza polem $a\cdot b$.

Zauważ, że pola te odpowiadają poszczególnym polom z drugiego diagramu Venna z tego paragrafu.

Przy 3 zmiennych (czy: przełącznikach) mamy 8 pól na siatce Karnaugha:



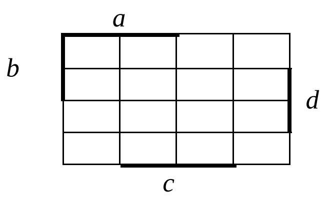
W takiej sytuacji - gdy dane oznaczenie zmienną obejmuje więcej niż jedna kolumnę czy jeden wiersz – ich ogół będziemy obejmować klamra lub (jak to robimy w tejże książce) pogrubieniem brzegu obejmowanych nią wierszy czy kolumn.
Obszary poszczególnych zmiennych ustawiane są tu tak:

– by się nawzajem przecinały
– by obejmowały swym zakresem połowę całego obszaru (zostawiając drugą połowę na zmienną dopełnieniową – np. dla a będzie to $\overline{a}$).

Jako że zmienna b obejmuje swym zakresem tylko jeden wiersz – w jej przypadku tego typu oznaczenie (pry pomocy klamry lub pogrubienie) nie jest konieczne,
Zauważmy, że w powyższej siatce obszar $\overline{c}$ jest niespójny. Możemy jednak wyobrazić sobie, że jest ona zwinięta w walec (prawy brzeg jest złączony z lewym) i wtedy będzie już on spójny, a nam przy takim wyobrażeniu łatwiej będzie przeprowadzać za jej pośrednictwem różne operacje.

Inna uwaga: przestawiłem tu a i b miejscami w stosunku do poprzedniej siatki. Nie ma to najmniejszego znaczenia. Ważne jest jedynie, aby to, aby a zaznaczać tam, gdzie wyznaczyliśmy dla niego miejsce, analogicznie pozostałe zmienne.

Przy 4 przełącznikach będzie to już wyglądało następująco:

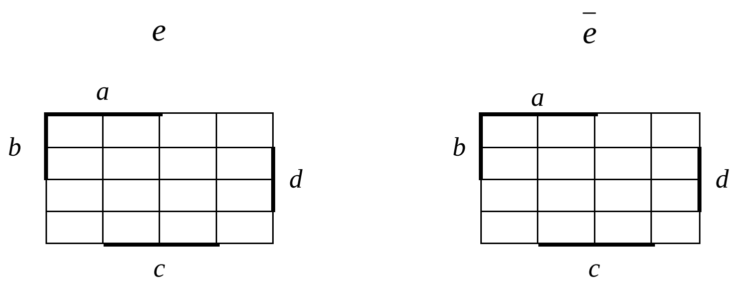


Tym razem możemy sobie wyobrazić, że równocześnie sklejone są:

- prawy i lewy bok, by obszar $\overline{d}$ był spójny,
- górna i dolna krawędź, by z kolei obszar $\overline{c}$ był spójny.

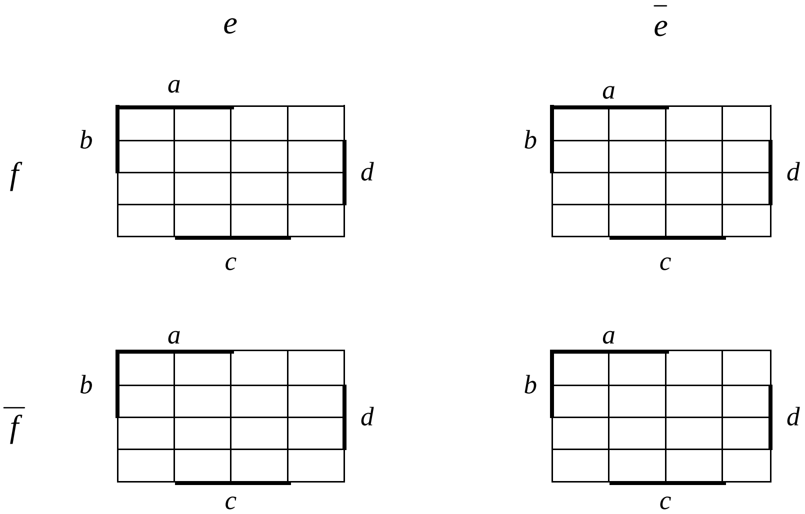
W tym momencie dokonaliśmy więc czegoś za pomocą siatki Karnaugha, co nie było wykonane za pomocą diagramów Venna. 4 zbiorów nie można było oddać na płaszczyźnie tak, by wyznaczały 16 pól powtsałyc Hz maksymalnego ich przecięcia. W przypadku 4 zmiennych obejmujących określone polana siatce Karnaugha – już tak. NA tym się właśnie zasadza przewaga tego systemu (algebry Boole'a) nad innymi izomorficznymi z nim (teoria mnogości z diagramami Venna i rachunek zdań bez jakiejkolwiek reprezentacji graficznej).

Gdyby nam przyszło kiedyś rozważać układ 5-cio przełącznikowy, wówczas stosowna siatka wyglądałaby następująco:



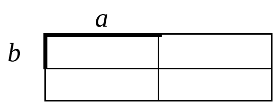
Tu przy przekształceniach warto wyobrazić sobie, że część $\overline{e}$ jest usadowiona nad (w III wymiarze) częścią e .

Gdy z kolei mielibyśmy układ 6-cio przełącznikowy – siatka przybrałaby następującą postać:

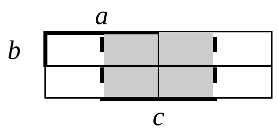


Widzimy, że w tych dwóch ostatnich przypadkach:
- siatka nie jest już spójna („w jednym kawałku”),
- iż tego względu daliśmy oznaczenia $\bar{e}$ i $\bar{f}$, aby się nie pogubić.

W przypadku tworzenia tych siatek, analogicznie jak to było w przypadku diagramów Venna
– - gdy tam wychodząc np. od diagramy z 2 przecinającymi się zbiorami chcieliśmy otrzymać diagram z przecinającymi się 3 zbiorami, dzieliliśmy każde pole na dwie części (które dodatkowo określały: „jest w nowym zbiorze” lub „nie jest w nowym zbiorze”),
– - tak i tu:
  - wychodząc od siatki dla 2 zmiennych z 4 polami (tu celowo o przerysowanych szerokościach),

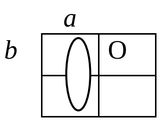


  - dzielimy każde z tych pól na dwie części, co automatycznie wyznacza nam obszar objęty trzecią zmienną:



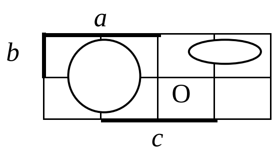
Obecnie zastanowimy się, w jaki sposób oddawane są obiekty na siatkach Karnaugha.

Na siatce dla 2 zmiennych (czy: typach przełączników) mamy 4 pola ($=2^2$):



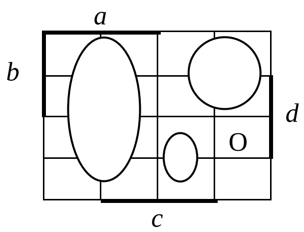
Zaznaczono tu: $\bar{a}$ (owalem obejmującym 2 pola – połowę wszystkich) i $b\bar{a}$ (okręgiem obejmującym 1 pole – czwarta część wszystkich).

Przy 3 zmiennych (czy: typach przełączników) mamy 8 pól ($=2^3$) na siatce Karnaugha:



Na siatce tej
- $\bar{a}$ zaznaczono okręgiem obejmującym 4 pola (a więc 2 razy więcej niż powyżej, ale nadał połowę wszystkich),
- $b\bar{a}$ – owalem obejmującym 2 pola (czyli znowu 2 razy więcej niż powyżej i nadal czwartą część wszystkich),
- i $\bar{a}\bar{b}c$ - okręgiem obejmującym jedno pole (ósmą część wszystkich).

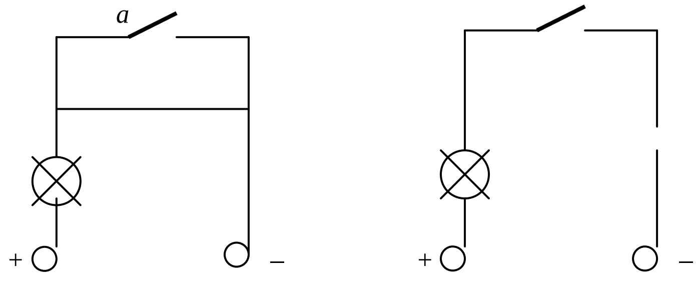
Przy 4 zmiennych (czy: typach przełączników) mamy już 16 pól ($=2^4$):



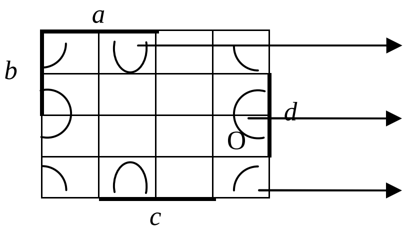
Na siatce tej
- $\bar{a}$ zaznaczono owalem obejmującym 8 pól (a więc 2 razy więcej niż powyżej, ale nadal połowę wszystkich),
- $b\bar{a}$ – okręgiem obejmującym 4 pola (czyli znowu 2 razy więcej niż powyżej, ale nadal czwartą część wszystkich),
- $\bar{a}\bar{b}c$ – owalem obejmującym 2 pola (czyli znowu 2 razy więcej niż powyżej i nadal ósmą część wszystkich),
- oraz $\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$ – okręgiem obejmującym jedno pola (szesnastą część wszystkich).

Można też spojrzeć na to zagadnienie z drugiej strony i powiedzieć, że:
- użycie wszystkich typów przełączników opisuj wszystkie pola
- a dodanie każdego następnego – podwaja liczbę opisywanych nimi pól.

Dopowiedzmy tu jeszcze, że:
- układ zawsze załączony (bez względu na ustawienie przełączników) opisywać będziemy okręgiem czy owalem obejmującym całą siatkę Karnaugha (będzie tak np. gdy w układzie tym będzie obejście układu przełączników „sztywnym" połączeniem – jak na poniższym rysunku po lewej stronie)
- układ zawsze rozłączny (bez względu na ustawienie przełączników) opisywać będziemy pustą siatka Karnaugha (będzie tak na przykład, gdy będzie w nim „sztywna" przerwa – jak na poniższym rysunku po prawej stronie).



Zobaczmy, jak rozpisują się na tej siatce elementy niespójne



Mamy tu naniesione następujące elementy:

$ac\bar{d}$ - element na rysunku złożony z 2 części,
wyobrażamy sobie jakoby były sklejone górny i dolny brzeg

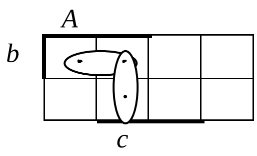
$d\bar{c}$ - element na rysunku złożony z 2 części,
wyobrażamy sobie jakoby były sklejone lewy i prawy brzeg

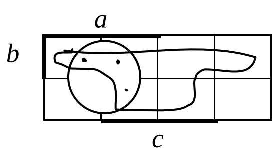
$\bar{a}\bar{d}$ - element na rysunku złożony z 4 części,
wyobrażamy sobie jakoby były sklejone wszystkie brzegi
(zarazem góry i dolny, jak i prawy i lewy)

Obecnie zajmiemy się prawami obowiązującymi w algebrze Boole'a. Jako że algebra Boole'a jest systemem zaksjomatyzowanym, jej prawami będą (między innymi) wszystkie jej **<u>aksjomaty</u>**. Poznajmy ich listę:

1) każdy z przełączników może mieć wartość 0 lub 1
2) $a=1 \leftrightarrow \bar{a}=0$ (negacją jedynki jest zero)
3) $\bar{a}=1 \leftrightarrow a=0$ (negacją zera jest jedynka)
4) $a \cdot b = b \cdot a$ (mnożenie jest przemienne)
5) $a+b=b+a$ (dodawanie jest przemienne)
6) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = a$ (czynniki powtarzające znoszą się)
7) $a+a+a+a+...+a=a$ (składniki powtarzające się znoszą się)
8) $a \cdot b \cdot c \cdot 1 = a \cdot b \cdot c$ (pomnożenie dowolnego wyrażenia przez 1 nie zmienia jego wartości)
9) $a \cdot b \cdot c + 1 = 1$ (dodanie jedynki do dowolnego wyrażenia daje jedynkę)
10) $a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$ (pomnożenie przez 0 dowolnego wyrażenia daje 0)
11) $a+b+c+0=a+b+c$ (dodanie zera do dowolnego wyrażenia nie zmienia jego wartości)
12) $a \cdot \bar{a} = 0$ (iloczyn wyrażeń przeciwnych daje 0)
13) $a+\bar{a}=1$ (suma wyrażeń przeciwnych daje 1)
14) $\bar{\bar{a}}=a$ (podwójna /lub ogólnie: parzysta liczba/ negacji się znosi)
15) $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$ - jest to I prawo dystrybucji

Poniżej wykażemy że jest ono prawdziwe, przedstawiając na dwóch siatkach Karnaugha odpowiednio lewą i prawą stronę tej równości i sprawdzając czy obrazują te same pola, tj. sytuacje /oddane na nich siatkach kropkami/)





Ponieważ lewa strona równości, to suma – zatem na odpowiadającej jej lewej siatce „kropkujemy" pola objęte co najmniej jednym naniesionym na nią elementem.
Ponieważ prawa strona równości, to iloczyn – zatem na odpowiadającej jej prawej siatce „kropkujemy" pola objęte każdym z dwu naniesionych na nią elementów.
Ponieważ pola „zakropkowane" na tych siatkach pokrywają się – zatem (tożsamościowo) prawdziwa jest sprawdzana równość.

16) $(a+b)(a+c)=a+bc$ - jest to II prawo dystrybucji

Sprawdzamy jego zachodzenie:

$$L=(a+b)(a+c)=(a+b)\cdot a+(a+b)\cdot c=a\cdot(a+b)+c\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+c\cdot a+c\cdot b=(*)$$

z 15) stosow. w II stronę (od prawej do lewej)		z 4)		z 15) stosow. w II stronę		z 6) i 8): $a \cdot a = a = a \cdot 1$ i stos. 4) do dwóch ost. wyr.

$$(*) = a\cdot 1 + a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c = a\cdot(1+b+c) + b\cdot c = a\cdot 1 + b\cdot c = a + b\cdot c = P$$

z 15)		z 5) i 8) stosow. do wyraż. w nawiasie		z 8)

17) $(a+b)+c = a+(b+c)$ - jest to prawo łączności dodawania

18) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ - jest to prawo łączności mnożenia

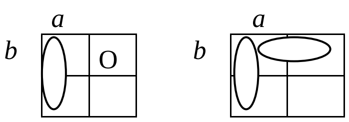
Oprócz aksjomatów w algebrze Boole'a mamy jeszcze:
- reguły podstawowe,
- reguły pomocnice
- i prawa de Morgana

które po kolei tu podamy i omówimy.

<u>Reguły podstawowe</u>

R1) $a + \bar{a}b = a + b$

Prawo to (odpowiednio jego lewa i prawa strona) zobrazowane jest poniższych siatkach (lewej prawej):



Prawo to jest więc prawdziwe. Chcąc je <u>udowodnić w formalny sposób</u>, będziemy się odwoływać do tychże siatek – w jaki sposób można od lewej przejść do prawej. Widzimy, że w tym celu trzeba po kolei:

1. w lewej siatce podzieli owal a na 2 okręgi: ab i $a\bar{b}$,
2. dublujemy okręg ab, bo na prawej siatce na tym polu owale się nachodzą (dublują to pole),
3. 2 okręgi z wiersza b (ab i $\bar{a}b$) łączymy w owal b i analogicznie postępujemy z okręgami z kolumny a (ab i $a\bar{b}$) łącząc je w owal a.

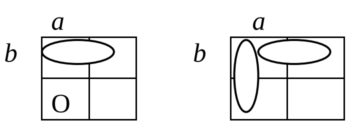
Przedstawiony powyżej sposób przekształcania lewej siatki do prawej staje się dla nas schematem przekształcenia lewej strony równości do prawej (dodatkowo klamrami objęto poszczególne punkty z powyższych rozważań):

$$L = \underbrace{a + \bar{a}b = a\cdot 1 + \bar{a}b = a(b+\bar{b}) + \bar{a}b}_{1.} = \underbrace{ab + a\bar{b} + \bar{a}b}_{2.} = \underbrace{ab + a\bar{b} + \bar{a}b + ab = a(b+\bar{b}) + (a+\bar{a})b}_{3.} = (*)$$

$$(*) = \underbrace{a\cdot 1 + 1\cdot b}_{3.\ \text{- c.d.}} = a + b = P$$

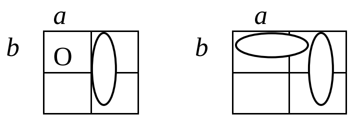
R2) $a\bar{b} + b = a + b$

Prawo to dotyczy tych samych sytuacji (identyczne pola są zajęte) co w prawie R1), z tym że inny jest układ elementów z lewej strony równości (czy równoważnie: siatki Karnaugha):

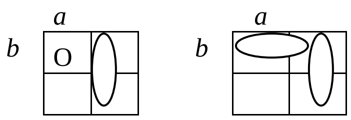


Z analogiczną sytuacją mamy do czynienia w przypadku dwóch następnych praw:

R3) $\bar{a} + ab = \bar{a} + b$

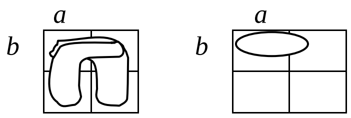


R4) $\bar{a}\bar{b} + b = \bar{a} + b$



<u>Reguły pomocnicze</u>

RP1) $(a+b)(\bar{a}+b) = b$



Część wspólna tych dwóch „rewolwerów” z lewej siatki, to owal z prawej siatki

Formalny dowód:

$$L = (a+b)\bar{a} + (a+b)b = a\bar{a} + b\bar{b} + ab + bb = 0 + b(\underbrace{\underbrace{\bar{a} + a}_{1} + b}_{1}) = b = P$$

RP2) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

RP3) $a \cdot b + c \cdot d = (a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$

<u>Prawa de Morgana</u>

P1) $\overline{abc} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

P2) $\overline{a+b+c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

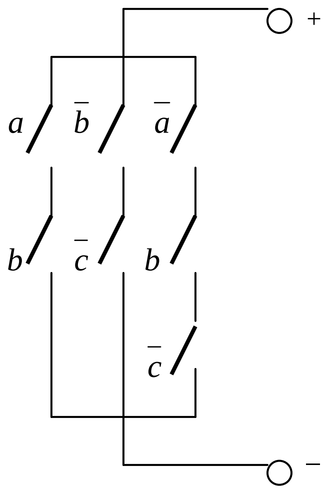
P1’) $abc = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}$

P2’) $a+b+c = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}}$

Prawo P1’) powstało z prawa P1), a prawo P2’) – z prawa P2) poprzez zanegowanie obu stron równości i zniesieniu podwójnej negacji z lewej jej strony.

Optymalizacja układów przełączających

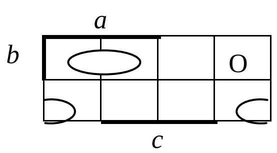
Rozpatrzmy następujące **zadanie 1**
Dany jest układ przełączników jak na poniższym schemacie.



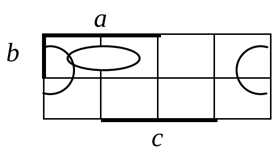
Zauważ, że nie ma tu żarówki, jako elementu nie wpływającego na układ przełączników

Obrazuje on funkcję $F = ab + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$

Która na siatce Karnaugha prezentuje się w następujący sposób:

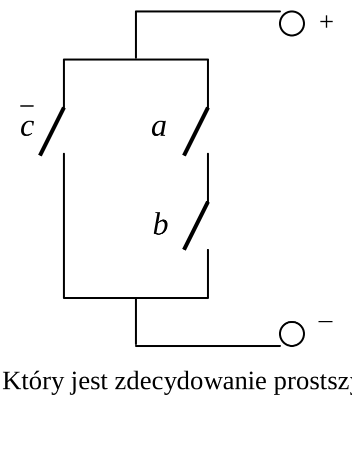


a po optymalizacji nieformalnej (a więc jedynie „rysunkowej) – jak poniżej:



Czyli otrzymujemy funkcję zoptymalizowaną do następującej: $F' = \bar{c} + ab$.

I tym możemy narysować zoptymalizowany schemat:



Który jest zdecydowanie prostszy od poprzedniego (redukcja 7 przełączników do 3!).

Posiłkując się siatkami Karnaugha możemy dokonać przekształcenia funkcji *F* kofunkcji *F*':
- najpierw rozbijamy element ab ,
- następnie dublujemy element $ab\bar{c}$,

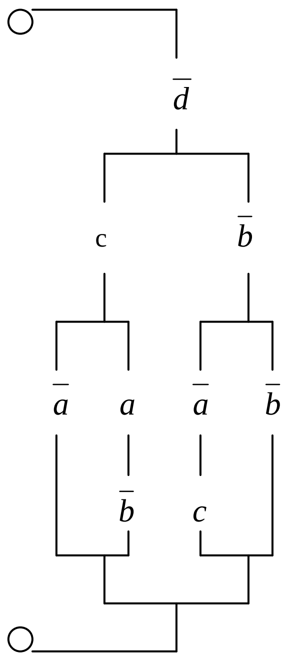
- i w końcu sklejamy je wszystkie do postaci F'.

$$F = ab + \bar b\bar c + \bar a b\bar c = ab\underbrace{(c+\bar c)}_{\text{z rozpisania 1-ki}} + \bar b\bar c + \bar a b\bar c = abc + ab\bar c + \bar b\bar c + \bar a b\bar c + ab\bar c = ab(c+\bar c) + \bar b\bar c + b\bar c(a+\bar a) = (*)$$

zdublowaliśmy

$$(*) = ab + \bar b\bar c + b\bar c = ab + (b+\bar b)\bar c = ab + \bar c = F'$$

Rozpatrzmy z kolei **zadanie 2**
Mamy zoptymalizować układ:

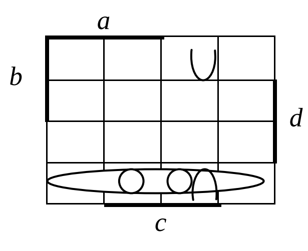


Zauważ, że:
- zniknęły znaki + i– (gdzie który jest nie jest tu istotne)
- nie ma „klapek” przełączników, a nazwy przełączników wpisujemy w dziurę danego przełącznika (optymalizuje i to rysunek i ułatwia wykonanie go)

Z tego schematu spisujemy funkcję F, a następnie (poprzez wymnażanie) przekształcamy ją do sumy iloczynów, która to postać umożliwi nam naniesienie jej na siatkę Karnaugha.

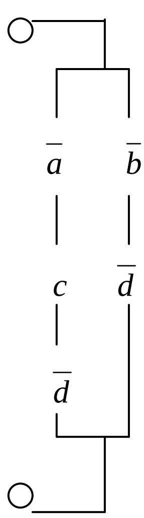
$$F = \bar d(c(\bar a + a\bar b) + \bar b(\bar a c + \bar b)) = \bar d(\bar a c + a\bar b c + \bar a\bar b c + \bar b) = \bar a c\bar d + \underbrace{a\bar b c\bar d + \bar a\bar b c\bar d}_{} + \bar b\bar d = (*)$$

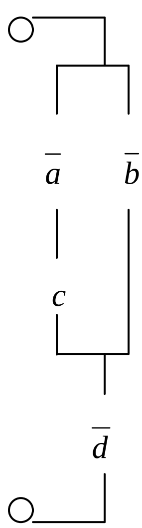
w oparciu o siatkę wiemy, że najlepiej tak je połączyć
(wtedy podłużny poziomy owal wchłonie 2 małe okręgi)



$(*) = \bar a c\bar d + \bar b\bar d(ac + \bar a c + 1) = \bar a c\bar d + \bar b\bar d$ - jest to optymalna forma beznawiasowa (5 przełączników).

Ma ona następująca realizację: Wyciągnięcie w *F* za nawias $\overline{d}$ da nam $F = (\overline{a}c + \overline{b})\overline{d}$ oraz schemat:





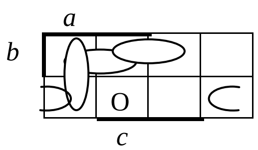
w którym mamy jedynie 4 przełączniki, wobec 5 z notacji beznawiasowej i 9 z początkowego schematu.

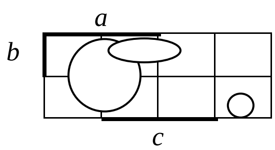
Ponadto przyglądając się tym dwóm schematom, widzimy że prawy można otrzymać z lewego poprzez wyciągnięcie powtarzającego się $\overline{d}$ (robiliśmy już tak zresztą na początku tego paragrafu, omawiając w p.3) „zmiksowany" schemat równoległo-szeregowy

<u>Zadanie 3</u>

a) Udowodnij formalnie, że funkcja dana na poniższej lewej siatce jest równa z funkcją przedstawioną na prawej siatce.

b) Dokonaj również optymalizacji tej funkcji.





Ad a)

Gdybyśmy nie musieli robić tego formalnie, to wystarczyłby „rzut oka", by zobaczyć, że na obydwu tych siatkach zaznaczone są te same pola, co kończyło by już rozwiązanie zadania.

Postawione zadanie sprowadza się do wykazania, że $a\overline{c} + ab + bc + \overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c = a + bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

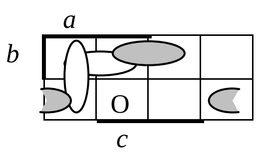
Patrząc na siatkę (lewą) widzimy, że musimy rozbić element $\overline{b}\overline{c}$, a następnie połączyć wszystkie elementy z zakresu a (otrzymując z nich całe a).

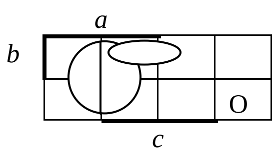
grupujemy elementy z a i wyciągamy a przed nawias

$$L = a\overline{c} + ab + bc + \underbrace{\overline{b}\overline{c}} + a\overline{b}c = a\overline{c} + ab + bc + \underbrace{\overline{b}\overline{c}a + \overline{b}\overline{c}\overline{a}}_{=\overline{b}\overline{c}\cdot 1 = \overline{b}\overline{c}(a+\overline{a})} + a\overline{b}c = a(\overline{c} + b + \underbrace{\overline{b}\overline{c} + \overline{b}c}_{=\overline{b}(\overline{c}+c) = \overline{b}\cdot 1 = \overline{b}}) + bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} = (*)$$

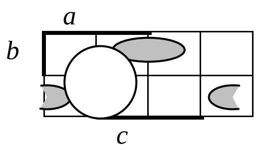
$$(*) = a(\underbrace{\overline{c} + \underbrace{b + \overline{b}}_{=1}}_{=1}) + bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} = a + bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} = P$$

Ad b)





Przypatrzmy się jeszcze raz powyższym siatkom. Widzimy, że układ zoptymalizowany (jak na poniższej siatce)



można otrzymać z lewej siatki, łącząc jej niezacieniowane elementy w koło a :

$$L = a\bar{c} + ab + bc + \bar{b}\bar{c} + a\bar{b} = a\underbrace{(\bar{c} + \underbrace{b + \bar{b}}_{=1})}_{=1} + bc + \bar{b}\bar{c} = a + bc + \bar{b}\bar{c}$$ - forma zoptymalizowana

te elementy łączymy w a

Gdybyśmy z kolei chcieli otrzymać ową formę zoptymalizowaną z prawej siatki, to wówczas musielibyśmy podzielić koło a na obszary jak na prawym rysunku, zdublować jego lewy dolny róg (element $a\bar{b}\bar{c}$),połączyć go z elementem $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ oraz połączyć ze sobą wszystkie elementy z pola a w koło a (była by to więc bardziej skomplikowana procedura).

<u>Zadanie 4</u>

Dana jest funkcja $F = ab(\bar{c}\bar{d} + c\bar{d}) + a\bar{b}\bar{c} + a(b\bar{c}d + abcd)$. Dokonaj jej optymalizacji (do postaci beznawiasowej i nawiasowej).

Zadanie to spróbuj wykonać sam (zaznajomiłeś się już z kilkoma przykładami), przy czym musisz rozpocząć je od „wymnożenia nawiasów”, by móc na siatkę nanosić koła i owale.

<u>Zadanie 5</u>

Zapisz funkcję podaną poniższą tabelą i dokonaj jej optymalizacji (zarówno do postaci nawiasowej, jak i beznawiasowej).

LP	wartości zmiennych			wartość funkcji *F*
	x	*y*	*z*	
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

W tabeli tej zmienne reprezentuje poszczególne typy przełączników. Stan przełącznika (włączony – wyłączony) jest oddawany wartością danej zmiennej (odpowiednio: 1 i 0). Z kolei wartość funkcji *F* na danym zestawie wartości zmiennych wskazuje czy na odpowiadającym im ustawieniu przełączników prąd płynie (wartość $F = 1$), czy nie (wartość $F = 0$).

Tak więc na przykład tabela ta podaje:
1. w wierszu 1 – że przy wszystkich przełącznikach wyłączonych prąd nie płynie (wartość $F = 0$),
2. w wierszu 2 – że przy wyłączonych przełącznikach x i y, a załączonym z, prąd płynie (wartość $F = 1$).

W układzie elektrycznym prąd więc płynie, gdy wartość funkcji $F = 1$. Definiujemy więc funkcję *F* jako sumę zestawów przy których funkcja *F* osiąga wartość 1: $F = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$.

Następnie układy te umieszczamy na siatce Karnaugha dla 3 zmiennych (jednak oznaczając je nie *a*, *b* i *c*, lecz *x*, *y* i *z*).

	x			
y	O	O	O	
	O		O	
		z		

Optymalizując 2 dolne elementy łączymy z leżącymi bezpośrednio nad nimi (jak to zaznaczono łączącymi je odcinkami), a środkowy element z górnej linii można połączyć ze zdublowanym jego sąsiadem leżącym po lewej lub po prawej stronie (optymalizacja nie jest więc tu jednoznaczna, dla przykładu decydujemy się na połączenie z lewym sąsiadem, jak to zaznaczono przerywanym odcinkiem).

W ten sposób otrzymujemy: $F = x\bar{z} + \bar{x}z + xy = x(\bar{z} + y) + \bar{x}z$ (po ostatnim znaku równości – w formie nawiasowej).

* *

16. Elementy lingwistyki matematycznej i teorii automatów

Lingwistyka matematyczna, to dział matematyki zajmujący się …

17. Elementy mereologii

l. Zbiory dystrybutywne a kolektywne. Relacja bycia częścią
2. Mocna i słaba zasada uzupełniania
3. Fuzja mereologiczna
4. Fuzja a kres górny
5. Struktury mereologiczne
6. Suma, iloczyn i dopełnienie mereologiczne
7. Mereologie atomowe i nieatomowe
8. Struktury mereologiczne a algebry Boole'a
9. Filtry w strukturach mereologicznych
10. Twierdzenie Stone'a