Logika Matematyczna (5-7)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

15, 22, 29 XI 2007

Plan na dziś

Przedstawimy jedną z możliwości aksjomatycznego ujęcia KRZ. Powiemy o:

- systemie aksjomatów dla KRZ
- regułach wnioskowania (pierwotnych i wtórnych)
- dowodach, relacji konsekwencji oraz operacji konsekwencji w KRZ
- twierdzeniach o dedukcji (w wersji syntaktycznej) oraz o postaciach normalnych
- twierdzeniach o pełności, niesprzeczności i rozstrzygalności KRZ
- innych aksjomatykach KRZ
- ogólnym pojęciu konsekwencji.

Uwaga. Od tego momentu zaczynamy na poważnie zajmować się logiką matematyczną. Przedstawione dotychczas rozważania semantyczne stanowiły jedynie preliminaria.

Reguły wnioskowania

Język KRZ został opisany w wykładzie 2. Określimy teraz relację konsekwencji syntaktycznej: pewną relację między zbiorami formuł a formułami.

Przypominamy, że przez regułę wnioskowania rozumiemy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRZ}} \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Przypominamy, że jeśli R jest regułą wnioskowania oraz $(X, \alpha) \in R$, to:

- parę (X, α) nazywamy sekwentem reguły R
- X nazywamy zbiorem przesłanek sekwentu (X, α)
- α nazywamy wnioskiem sekwentu (X, α).

Ogólnie, zbiorami przesłanek nazywamy poprzedniki relacji R, a wnioskami jej następniki.

Dowód i konsekwencja syntaktyczna: ogólnie

Dowodem formuły α w oparciu o zbiory: aksjomatów A, reguł $\mathcal{R}$ oraz założeń X nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $D = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$ taki, że:

- α jest identyczna z α_n
- dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ albo $\alpha_i \in A \cup X$ albo istnieje reguła $R \in \mathcal{R}$ oraz zbiór formuł Y występujących w D wcześniej niż na i-tym miejscu takie, że: $(Y, \alpha_i) \in R$ (tj. α_i jest wnioskiem sekwentu $(Y, \alpha_i) \in R$, a przesłanki tego sekwentu są formułami występującymi w ciągu D przed α_i).

Formuła α jest **konsekwencją syntaktyczną** zbioru formuł X, przy ustalonym zbiorze aksjomatów A oraz reguł $\mathcal{R}$, gdy istnieje dowód α w oparciu o A, X oraz $\mathcal{R}$.

Aksjomaty KRZ

Niech zbiór *Ax* aksjomatów KRZ składa się ze wszystkich formuł języka KRZ o budowie podpadającej pod jeden z następujących schematów:

(I) Aksjomaty dla symbolu $\rightarrow$:

- (A1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (A2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(II) Aksjomaty dla symbolu $\wedge$:

- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- (A6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$

Aksjomaty KRZ

(III) Aksjomaty dla symbolu $\vee$:

- (A7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta))$

(IV) Aksjomaty dla symbolu $\equiv$:

- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \beta))$

(V) Aksjomat dla symbolu $\neg$:

- (A13) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Aksjomaty KRZ

Większość tych aksjomatów ma nazwy:

- (A1) - prawo sylogizmu hipotetycznego
- (A2) - prawo skracania
- (A3) - prawo symplifikacji (prawo poprzedzania)
- (A4), (A5) - prawa symplifikacji (albo: pochłaniania) dla $\wedge$
- (A6) - prawo mnożenia następników
- (A7), (A8) - prawa pochłaniania dla $\vee$
- (A9) - prawo dodawania poprzedników
- (A10), (A11) - prawa pochłaniania dla $\equiv$
- (A13) - (silne) prawo kontrapozycji.

Aksjomaty

Tak więc, aksjomatami KRZ są np. następujące formuły:

- $(p_2 \wedge p_{12}) \rightarrow p_2$
- $((p_7 \rightarrow p_{100}) \wedge p_5) \rightarrow (p_7 \rightarrow p_{100})$
- $(((p_7 \vee \neg p_5) \rightarrow p_{100}) \wedge p_5) \rightarrow ((p_7 \vee \neg p_5) \rightarrow p_{100})$

(to przypadki szczególne schematu (A4))

- $p_1 \rightarrow (p_6 \rightarrow p_1)$
- $(p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow (p_6 \rightarrow (p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)))$
- $p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)$

(to przypadki szczególne schematu (A3)).

Reguła pierwotna

Jedyną regułą wnioskowania w tym systemie jest reguła *odrywania* (RO) (zwana też regułą *modus ponens*), o schematycznym zapisie:

$$\frac{\{\alpha \to \beta,\ \alpha\}}{\beta}$$

Uwaga. Reguły podawane w definicji danego systemu noszą nazwę reguł pierwotnych. Później wprowadza się tzw. reguły wtórne. Zwykle regułę odrywania zapisuje się w uproszczonej postaci: $\frac{\alpha\to\beta,\ \alpha}{\beta}$.

Zauważmy, że zbiór Ax wszystkich aksjomatów jest nieskończony. Reguła odrywania także jest nieskończonym zbiorem sekwentów, z których każdy ma postać podaną powyżej.

Tezy, syntaktyczna konsekwencja i reguły wtórne w KRZ

Tezą KRZ nazywamy każdą formułę, która posiada dowód w oparciu o zbiór aksjomatów Ax, regułę odrywania oraz pusty zbiór założeń.

Formuła α jest syntaktyczną konsekwencją zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy posiada dowód w oparciu o aksjomaty Ax, regułę odrywania oraz zbiór założeń X. Jeśli α jest syntaktyczną konsekwencją X, to piszemy $X \vdash_{krz} \alpha$. Mówimy też wtedy, że formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru X na gruncie KRZ (przy podanej wyżej aksjomatyce, wraz z regułą odrywania).

Mówimy, że zbiór Y jest wyprowadzalny ze zbioru X na gruncie KRZ, gdy $X \vdash_{krz} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y. Piszemy wtedy $X \vdash_{krz} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \vdash_{krz} Y$, to piszemy $X \nvdash_{krz} Y$.

Mówimy, że reguła R jest wyprowadzalna (wtórna) w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krz} \alpha$ dla każdego $(X, \alpha) \in R$.

Dowody niektórych tez KRZ

Przedstawimy dowody niektórych tez KRZ oraz pokażemy, że pewne reguły są wyprowadzalne w KRZ. Przedtem zauważmy, że:

- Każdy aksjomat KRZ jest tezą KRZ.
- Fakt, że formuła α jest tezą KRZ będziemy zapisywać $\emptyset \vdash_{krz} \alpha$ lub, krócej: $\vdash_{krz} \alpha$.
- Jeśli $D = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$ jest dowodem formuły α_n z pustego zbioru założeń, to dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, formuła α_i jest tezą KRZ.
- Dowodzimy nie konkretnych formuł języka KRZ, ale schematów formuł (zob. uwaga w wykładzie 2). Gdy więc podajemy dowód, że np. $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą KRZ, to jest to dowód ukazujący, że wszystkie formuły języka KRZ będące alternatywami jakiejkolwiek formuły języka KRZ oraz jej negacji są tezami KRZ.

Dowody niektórych tez KRZ

- Aksjomaty (A1)-(A13) to schematy formuł. Występujące w nich symbole α, β, γ pełnią funkcję metazmiennych: reprezentują dowolne formuły języka KRZ. W dowodach będziemy wykorzystywać operację (pseudo)podstawiania: za metazmienne występujące w aksjomatach wstawiać będziemy formuły języka KRZ.
- Operację takiego (pseudo)podstawiania zaznaczać będziemy przez $\alpha[\beta/\gamma]$ (za symbol β w formule α podstawiamy formułę γ). W praktyce, ponieważ podstawienia te będą występowały jedynie w komentarzach do wierszy dowodowych, będziemy pisać β/γ.
- Jeśli α jest tezą KRZ, to $\alpha[\beta/\gamma]$ również jest tezą KRZ.
- Można podać skończony układ aksjomatów KRZ. Do reguł wnioskowania zaliczyć trzeba wtedy regułę podstawiania formuł za zmienne zdaniowe. Definicja takiej reguły ma postać indukcyjną.

Dowody niektórych tez KRZ

Jeśli α jest którymś z aksjomatów (A1)-(A13), to zapis $\alpha[\beta/\gamma]$ należy rozumieć następująco:

- aksjomatem KRZ jest formuła języka KRZ powstająca z α poprzez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu β w α poprzez γ.

Dla przykładu, aksjomatem KRZ jest formuła α postaci: $p_1 \rightarrow (p_6 \rightarrow p_1)$. Jeśli γ jest np. formułą $p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)$, to $\alpha[p_1/\gamma]$ jest formułą:

$$(p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow (p_6 \rightarrow (p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2))).$$

Powinno być także jasne, że **niedozwolone** jest w powyższym przykładzie wstawianie czegokolwiek za np. $p_6 \rightarrow p_1$.

Dowody niektórych tez KRZ

Dowody będą zapisywane w postaci numerowanych wierszy, opatrzonych z prawej strony komentarzem, wyjaśniającym zasadność poszczególnych kroków dowodowych. Zaczniemy od dowodu prawa tożsamości:

(T1) $\alpha \to \alpha$

1.	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	(A2): β/α
2.	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	(A3): β/α
3.	$\alpha \to \alpha$	RO: 1,2.

Pierwszy krok tego dowodu to formuła otrzymana z aksjomatu (A2) poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień symbolu β formułą α. Drugi krok to formuła otrzymana z aksjomatu (A3) poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień symbolu β formułą α. Trzeci krok to formuła otrzymana z formuł w wierszach 1. i 2. poprzez zastosowanie reguły odrywania.

Dowody niektórych tez KRZ

(T2) $\beta \to (\alpha \to \alpha)$

1.	$(\alpha \to \alpha) \to (\beta \to (\alpha \to \alpha))$	(A3): $\alpha/\alpha \to \alpha$
2.	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	(A2): β/α
3.	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	(A3): β/α
4.	$\alpha \to \alpha$	RO: 2,3
5.	$\beta \to (\alpha \to \alpha)$	RO: 1,4.

Widać, że w dowodzie (T2) skorzystaliśmy z dowodu tezy (T1).

Dowody niektórych tez KRZ

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

1. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
2. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
3. $(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$
4. $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Ze względów typograficznych komentarze podajemy poniżej:

1. (A3): $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$
2. (A13)
3. (A1): $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$, $\gamma/\alpha \rightarrow \beta$
4. RO: 3,1
5. RO: 4,2.

Niektóre reguły wtórne KRZ

M.in. dla uproszczenia dowodów warto wzbogacić środki dowodowe o możliwość stosowania reguł wyprowadzalnych (wtórnych). To, że takie rozszerzenie środków dowodowych jest poprawne, gwarantuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$ taki, że α jest identyczna z β_n, a dowolny element ciągu $\langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$:

- jest elementem zbioru X, **albo**
- jest tezą KRZ, **albo**
- powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu w wyniku zastosowania reguły odrywania lub dowolnej reguły wyprowadzalnej w KRZ.

W szczególności, dla $X = \emptyset$ twierdzenie to głosi, że stosowanie w dowodach (z aksjomatów, bez założeń) wcześniej udowodnionych tez oraz reguł wtórnych nie wyprowadza poza zbiór tez KRZ. Dowód twierdzenia 5.1. w Dodatku 2.

Niektóre reguły wtórne KRZ

Pokażemy wyprowadzalność kilku reguł wtórnych, a następnie wykorzystamy twierdzenie 5.1. w dowodach dalszych tez.

W dowodzie wyprowadzalności reguły

$$\frac{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}}{\beta}$$

pierwsze n wierszy to kolejne założenia: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Potem następują kroki dowodowe, w których możemy korzystać z:

- aksjomatów (i stosownych podstawień aksjomatów)
- wcześniej udowodnionych tez (i ich podstawień)
- reguły pierwotnej i wcześniej udowodnionych reguł wtórnych.

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$:

1.	α	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta)))$	(A6): β/α, γ/β
4.	$\alpha \to \alpha$	(T1)
5.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))$	RO: 3,4
6.	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	(A3): α/β, β/α
7.	$\alpha \to \beta$	RO: 6,2
8.	$\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$	RO: 5,7
9.	$\alpha \wedge \beta$	RO: 8,1.

Możemy zatem stosować w dowodach regułę dołączania koniunkcji (DK):

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	(A1)
4.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Możemy zatem w dowodach używać reguły sylogizmu hipotetycznego (RSyl):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}.$$

Jeśli w dowodzie stosujemy regułę wtórną R, to zaznaczamy to w komentarzu pisząc po R: numery wierszy jej przesłanek.

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$:

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	(A1)
4.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,2
5.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow$ $\rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$	(A1): $\beta/\beta \rightarrow \gamma$, $\gamma/\alpha \rightarrow \gamma$
6.	$((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	RO: 5,1
7.	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 6,4
8.	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	(A2): β/γ
9.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 8,7.

Możemy zatem używać w dowodach reguły sylogizmu Fregego (RFr): $\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$.

Ćwiczenie 1

Spróbuj udowodnić, że poniższe reguły są wyprowadzalne:

- $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ (reguła komutacji (RKom))
- $\{\alpha\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$ (reguła poprzedzania (RPp)).

Spróbuj udowodnić, że są tezami KRZ:

- (T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- (T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
- (T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$
- (T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$.

Nie martw się, jeśli ci się nie uda od razu. Później będzie łatwiej. Rozwiązania wszystkich ćwiczeń: na końcu tej prezentacji.

Kilka własności relacji konsekwencji syntaktycznej

Twierdzenie 5.2. Dla dowolnych zbiorów formuł X, Y, Z oraz dowolnej formuły α zachodzą następujące warunki:

- $\vdash_{krz}$ jest zwrotna: $X \vdash_{krz} X$
- $\vdash_{krz}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Y \vdash_{krz} Z$, to $X \vdash_{krz} Z$
- $\vdash_{krz}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{krz} Y$
- $\vdash_{krz}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{krz} Z$
- $\emptyset \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą KRZ.

Dowód twierdzenia 5.2.: w Dodatku 2.

Porównaj te własności z własnościami relacji $\models_{KRZ}$, omówionymi na wykładzie trzecim.

(Syntaktyczne) twierdzenie o dedukcji wprost

Twierdzenie 5.3. Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$, to $X \vdash_{krz} \alpha \to \beta$.
- Jeśli $X \vdash_{krz} \alpha \to \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

Twierdzenie o dedukcji wprost wyraża bardzo ważną własność relacji konsekwencji syntaktycznej. W szczególności, dla pustego zbioru założeń, głosi ono, że formuła $\alpha \to \beta$ jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy β jest syntaktyczną konsekwencją α. Pokazuje to, że dla dowolnej implikacji będącej tezą KRZ, wyprowadzalna jest reguła o przesłance będącej poprzednikiem tej implikacji i wniosku pokrywającym się z następnikiem tej implikacji. Dowód twierdzenia 5.3.: w Dodatku 2.

(Syntaktyczne) twierdzenie o dedukcji nie wprost

Twierdzenie 5.4. Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzą równoważności:

- (1) $X \vdash_{krz} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.
- (2) $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.

Zgodnie z twierdzeniem 5.4.(1), zamiast wyprowadzać z jakiegoś zbioru formuł X formułę negacyjną $\neg\alpha$ wystarczy z tego zbioru powiększonego o formułę α wyprowadzić dowolną parę formuł wzajem sprzecznych.

Dowód twierdzenia 5.4.: w Dodatku 2. Oba syntaktyczne twierdzenia o dedukcji zastosujemy teraz w dowodach dalszych tez KRZ.

Dowody dalszych tez

(T8) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ (prawo komutacji)

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności:
$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ jest tezą wttw, gdy
$\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ wttw, gdy
$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ wttw, gdy
$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma, \beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha\} \vdash_{krz} \gamma$.
Wystarczy zatem dowieść, że: $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha\} \vdash_{krz} \gamma$.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	założenie
4.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
5.	γ	RO: 4,2.

Dowody dalszych tez

(T9) $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności: $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Wystarczy zatem dowieść, że: $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$.

1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	β	założenie
3.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	(T4)
4.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	RSyl: 3,1
5.	$(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$	(A13): α/β, $\beta/\neg\alpha$
6.	$\beta \rightarrow \neg\alpha$	RO: 5,4
7.	$\neg\alpha$	RO: 6,2.

Dowody dalszych tez

(T10) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności: $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Wystarczy więc dowieść, że: $\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$.

1.	$\alpha \to \neg\alpha$	założenie
2.	$\alpha \to (\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha))$	(T7): $\beta/\neg(\alpha \to \alpha)$
3.	$\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha)$	RFr: 2,1
4.	$\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha)$	(T9): $\beta/\alpha \to \alpha$
5.	$(\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha$	RO: 4,3
6.	$\alpha \to \alpha$	(T1)
7.	$\neg\alpha$	RO: 5,6.

Uwaga. W wierszu 3 podstawiamy w RFr: $\beta/\neg\alpha$, $\gamma/\neg(\alpha \to \alpha)$.

Dowody dalszych tez

(T11) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ (prawo dylematu konstrukcyjnego)

Na mocy twierdzenia 5.3. wystarczy udowodnić, że:
$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$	(T9)
4.	$\beta \rightarrow \neg\alpha$	RO: 3,2
5.	$\alpha \rightarrow \neg\alpha$	RSyl: 1,4
6.	$(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	(T10)
7.	$\neg\alpha$	RO: 6,5.

Dowody dalszych tez

(T12) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (prawo transpozycji prostej)

Na mocy twierdzeń 5.3. i 5.4. zachodzi ciąg równoważności: $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \to \beta\} \vdash_{krz} \neg\beta \to \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \to \beta, \neg\beta, \alpha\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ. Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\alpha \to \beta, \neg\beta, \alpha\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 1,3.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 3.

Dowody dalszych tez

(T13) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (prawo niesprzeczności)

Na mocy twierdzenia 5.4. zachodzi ciąg równoważności: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β. Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β.

1.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	założenie
2.	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha$	(A4): $\beta/\neg\alpha$
3.	α	RO: 2,1
4.	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha$	(A5): $\beta/\neg\alpha$
5.	$\neg\alpha$	RO: 4,1.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 5.

Dowody dalszych tez

(T14) $\alpha \vee \neg\alpha$ (prawo wyłączonego środka)

Na mocy twierdzenia 5.4. zachodzi ciąg równoważności: $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} \alpha \vee \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β. Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β.

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$	(A7): $\beta/\neg\alpha$
3.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$	(A8): $\beta/\neg\alpha$
4.	$(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha)$	(T12): $\beta/\alpha \vee \neg\alpha$
5.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	RO: 4,2
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,1
7.	$\alpha \vee \neg\alpha$	RO: 3,6.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 1 i 7.

Dowody dalszych tez

(T15) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

Na mocy twierdzenia 5.3. wystarczy pokazać, że: $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$.

1.	α	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$	(A6): β/α, γ/β
4.	$\alpha \rightarrow \alpha$	(T1)
5.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	RO: 3,4
6.	$\alpha \rightarrow \beta$	RPp: 2
7.	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	RO: 5,6
8.	$\alpha \wedge \beta$	RO: 7,1.

Zauważ, że dowód ten jest różny od podanego wcześniej dowodu, iż $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$.

Dowody dalszych tez

(T16) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta)$

No mocy twierdzeń 5.3. i 5.4. wystarczy udowodnić, że:
$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	$\neg\beta$	założenie
4.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	(T12)
5.	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	RO: 4,1
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,3
7.	β	RO: 2,6.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 7.

Dowody dalszych tez

(T17) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$

Na mocy twierdzeń 5.3. i 5.4. wystarczy udowodnić, że:
$\{(\alpha \to \beta) \to \gamma, \alpha \to \gamma, \neg\gamma\} \vdash_{krz} \{\delta, \neg\delta\}$ dla pewnej formuły δ.

1.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\alpha \to \gamma$	założenie
3.	$\neg\gamma$	założenie
4.	$(\alpha \to \gamma) \to (\neg\gamma \to \neg\alpha)$	(T12): β/γ
5.	$\neg\gamma \to \neg\alpha$	RO: 4,2
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,3
7.	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	(T3)
8.	$\alpha \to \beta$	RO: 7,6
9.	γ	RO: 1,8.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Drzewa dowodowe

Dowody mogą być reprezentowane przez drzewa. Dowód formuły α z aksjomatów przy użyciu jedynie reguły pierwotnej RO jest drzewem, w którego korzeniu znajduje się formuła α, a w liściach umieszczone są aksjomaty. Każdy wierzchołek drzewa, nie będący jego liściem jest formułą otrzymaną z (dwóch) swoich potomków poprzez regułę odrywania RO.

Podobnie dla dowodów reguł wtórnych: dowód, że $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vdash_{krz} \beta$ jest drzewem, w którego korzeniu znajduje się formuła β, liśćmi są $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, a wierzchołki nie będące liśćmi są formułami otrzymanymi z (dwóch) swoich potomków poprzez regułę odrywania RO. Podobnie dla wierzchołków otrzymywanych w wyniku stosowania reguł wtórnych.

Można dokonywać drzewowej reprezentacji dowodów także dla przypadków, gdy wierzchołki drzewa znakowane są zbiorami formuł, a nie pojedynczymi formułami (o takich drzewach opowiemy później).

Drzewa dowodowe

Drzewa dowodowe rysowane są zwykle w postaci podanej w poniższym przykładzie: korzeń na dole, liście na górze, wierzchołki będące bezpośrednimi potomkami wierzchołka x nad kreską, pod którą umieszczamy x.

Dla przykładu, dowód, że $\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$ reprezentowany jest przez drzewo:

$$\dfrac{\beta \to \gamma \qquad \dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \qquad \alpha}{\beta}}{\gamma}$$

Ćwiczenie. Narysuj drzewa dowodowe dla dowodów kilku tez oraz dowodów wyprowadzalności kilku reguł.

Ćwiczenie 2.1.

Pokaż, że są tezami KRZ:

- (T18) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \neg\beta) \to (\gamma \to \neg\alpha))$
- (T19) $(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (T20) $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (prawo eksportacji)
- (T21) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$ (prawo importacji)
- (T3) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (wersja prawa Dunsa Scotusa)

Wskazówka: jeśli nie znajdziesz dowodu bezpośrednio z aksjomatów, to skorzystaj z Twierdzeń o Dedukcji. W szczególności, postąp tak w przypadku (już udowodnionej) tezy (T3).

Ćwiczenie 2.2.

Pokaż, że następujące reguły są wyprowadzalne w KRZ:

- 2.2.(a) $\{\alpha \equiv \beta, \beta\} \vdash_{krz} \alpha$
- 2.2.(b) $\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$
- 2.2.(c) $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$
- 2.2.(d) $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$

Wskazówka: skorzystaj z Twierdzeń o Dedukcji.

Postacie normalne formuł

Mówimy, że formuły α oraz β są inferencyjnie równoważne, jeśli $\vdash_{krz} \alpha \equiv \beta$. Jeśli α i β są inferencyjnie równoważne, to piszemy $\alpha \approx \beta$.

Twierdzenie 5.5. Relacja $\approx$ ma następujące własności:

- $\approx$ jest relacją równoważności w zbiorze F_{KRZ}.
- Jeśli $\alpha \approx \beta$ i α jest tezą KRZ, to także β jest tezą KRZ.
- Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w koniunkcyjnej postaci normalnej.
- Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w alternatywnej postaci normalnej.

Twierdzenie 5.5. ma ważne zastosowania, np.: może być wykorzystane w dowodzie twierdzenia o pełności KRZ, pozwala też na wprowadzenie interesującej struktury algebraicznej w zbiorze $F_{KRZ}/\approx$. Dowód 5.5.: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Określono dwa zbiory formuł języka KRZ: zbiór wszystkich tautologii oraz zbiór wszystkich tez. Pierwszy zdefiniowany był w terminach semantycznych, a drugi w terminach syntaktycznych. Jednym z najważniejszych twierdzeń metalogicznych dotyczących KRZ jest twierdzenie mówiące, że te dwa zbiory są identyczne.

Każdy z aksjomatów (A1)-(A13) jest tautologią KRZ.
Dowód. Proste ćwiczenie w stosowaniu tabelek prawdziwościowych.

Reguła odrywania, jako reguła niezawodna, zachowuje własność bycia tautologią.

Twierdzenie 5.6. (**Twierdzenie o trafności aksjomatyki.**) Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.
Dowód: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Pokazanie, że każda tautologia KRZ jest tezą KRZ jest trudniejsze, niż wykazanie trafności aksjomatyki. Można to zrobić różnymi technikami. Wybieramy metodę wykorzystującą twierdzenie Lindenbauma-Assera:

Twierdzenie 5.7. (**Twierdzenie Lindenbauma-Assera.**) Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α: jeśli $X \nvdash \alpha$, to istnieje zbiór $L^\alpha(X)$ o następujących własnościach:

- (1) $\alpha \notin L^\alpha(X)$
- (2) $X \subseteq L^\alpha(X)$
- (3) dla każdej formuły β: jeśli $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in L^\alpha(X)$
- (4) dla każdej formuły β: jeśli $\beta \notin L^\alpha(X)$, to $L^\alpha(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$.

Zbiór $L^\alpha(X)$ nazywamy *α-relatywnym nadzbiorem zbioru X*.
Dowód twierdzenia 5.7.: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

α-relatywny nadzbior zbioru X ma następujące własności:

Twierdzenie 5.8. Dla dowolnych formuł α, β, γ oraz zbioru formuł X zachodzą równoważności:

- $\beta \wedge \gamma \in L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^{\alpha}(X)$ oraz $\gamma \in L^{\alpha}(X)$)
- $\beta \vee \gamma \in L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^{\alpha}(X)$ lub $\gamma \in L^{\alpha}(X)$)
- $\beta \rightarrow \gamma \in L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy (jeśli $\beta \in L^{\alpha}(X)$, to $\gamma \in L^{\alpha}(X)$)
- $\beta \equiv \gamma \in L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^{\alpha}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in L^{\alpha}(X)$)
- $\neg\beta$ jest elementem $L^{\alpha}(X)$ wttw, gdy β nie jest elementem $L^{\alpha}(X)$.

Dowód twierdzenia 5.8.: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Twierdzenie 5.9. (**Twierdzenie o pełności KRZ.**) Dla dowolnej formuły α zachodzi równoważność: α jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRZ.

Dokładny dowód twierdzenia 5.9.: w Dodatku 2.

Szkic dowodu. Implikacja $\Rightarrow$ to twierdzenie o trafności. Dla dowodu implikacji $\Leftarrow$ zakładamy, że α jest tautologią i przypuszczamy (nie wprost), że α nie jest tezą, tj. $\emptyset \nvdash \alpha$. Istnieje wtedy zbiór $L^{\alpha}(\emptyset)$ o własnościach opisanych w twierdzeniach 5.7. i 5.8. Definiujemy wartościowanie $h : F_{KRZ} \rightarrow \{0, 1\}$ przez warunek: $h(\beta) = 1$, gdy $\beta \in L^{\alpha}(\emptyset)$, a $h(\beta) = 0$ w przeciwnym przypadku. Skoro $\alpha \notin L^{\alpha}(\emptyset)$, to $h(\alpha) = 0$, a więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, iż α jest tautologią. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie, że α nie jest tezą. Tak więc, każda tautologia jest tezą. Ostatecznie, zbiór tez pokrywa się ze zbiorem tautologii.

Pełność KRZ

Kolejne twierdzenie ustanawia odpowiedniość między dalszymi pojęciami syntaktycznymi i semantycznymi:

Twierdzenie 5.10. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi równoważność: $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

Dowód: w Dodatku 2.

Twierdzenie 5.10. głosi, że relacja konsekwencji syntaktycznej w KRZ trafnie i w sposób pełny opisuje (semantyczną) relację wynikania logicznego w KRZ. Mamy więc:

$$\vdash_{krz} = \models_{KRZ} .$$

Ćwiczenie 3

Wykorzystaj twierdzenie o pełności KRZ dla pokazania, że są tezami KRZ:

- (a) $(\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta))$
- (b) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$
- (c) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\beta \wedge \gamma) \to (\alpha \wedge \gamma))$
- (d) $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$
- (e) $((\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg\gamma) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to \beta)$
- (f) $(\alpha \equiv \beta) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma))$

Uwaga. Ćwiczenie to polega zatem na pokazaniu, że powyższe formuły są tautologiami KRZ.

Niesprzeczność KRZ

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) niesprzeczny, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krz} \alpha$ oraz $X \vdash_{krz} \neg\alpha$.

Twierdzenie 5.11. Zbiór tez KRZ jest niesprzeczny.

Dowód. Przypuśćmy, że zbiór tez KRZ nie jest niesprzeczny. Wtedy istnieje formuła α taka, że zarówno $\vdash_{krz} \alpha$, jak i $\vdash_{krz} \neg\alpha$. Na mocy twierdzenia o pełności KRZ, zarówno α, jak i $\neg\alpha$ jest tautologią. Oznacza to, że dla każdego wartościowania h mamy: $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\neg\alpha) = 1$. To jednak jest sprzeczne z definicją wartościowania. Musimy więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie, zbiór tez KRZ jest niesprzeczny.

Uwaga. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że $X \nvdash \alpha$. Dowód: ćwiczenie.

Rozstrzygalność KRZ

Na wykładach 2, 3 i 4 pokazaliśmy efektywne metody rozstrzygania, czy dowolna formuła języka KRZ jest tautologią KRZ:

- tzw. metodę 0-1, tj. sprawdzenie jaka jest wartość formuły przy każdym wzz (przypominamy, że jeśli w badanej formule występuje n zmiennych zdaniowych, to trzeba dokonać 2^n takich sprawdzeń)
- tzw. skróconą metodę 0-1, tj. rozumowanie nie wprost, polegające na próbie wykluczenia, że badana formuła przyjmuje wartość 0 przy jakimś wartościowaniu (tu liczba potrzebnych sprawdzeń może być znacząco mniejsza niż w metodzie poprzedniej)
- sprowadzanie badanej formuły do koniunkcyjnej postaci normalnej.

Na mocy Twierdzenia o Pełności KRZ, każda teza jest tautologią. W konsekwencji, zbiór wszystkich tez KRZ jest rozstrzygalny.

Inne aksjomatyki KRZ

Jest bardzo dużo różnych aksjomatycznych systemów dla KRZ. Na pierwszym wykładzie podaliśmy system Łukasiewicza dla implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań. Obok tego systemu, najbardziej popularne są różne wersje aksjomatyki Hilberta i Bernaysa.

W każdej z pozycji wymienionych na końcu tej prezentacji wykorzystuje się inny system aksjomatów (i czasem także reguł pierwotnych). Aksjomatyki te są oczywiście równoważne, w tym sensie, że generują dokładnie ten sam zbiór tez.

W cytowanej monografii W.A. Pogorzelskiego znaleźć można także informacje na temat aksjomatyk różnych systemów nieklasycznych, np. rachunków: intuicjonistycznego, wielowartościowego, pozytywnego implikacyjnego rachunku Hilberta, minimalnego rachunku Kołmogorowa, rachunków modalnych S4 i S5 Lewisa.

Inne aksjomatyki KRZ

Korzystamy z systemu aksjomatów (wzorowanego na systemie Hilberta i Bernaysa) przedstawionego w książce Iwony Marek (zob. spis literatury na końcu tej prezentacji).

W książce Małgorzaty Porębskiej i Wojciecha Suchonia na aksjomaty grupy I składają się: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ oraz $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. Nie ma w rozważanym języku symbolu $\equiv$, a więc także aksjomatów grupy IV. Pozostałe aksjomaty są takie, jak w tej prezentacji.

W książce Romana Murawskiego i Kazimierza Świrydowicza na aksjomaty grupy I składają się: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ i $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Aksjomaty pozostałych grup są takie, jak w tej prezentacji.

RO jest jedyną regułą pierwotną w tych systemach.

Inne aksjomatyki KRZ

W monografii W.A. Pogorzelskiego aksjomatami są (A1)-(A13), zapisane jednak nie przy użyciu metazmiennych, lecz zmiennych zdaniowych. Jest to więc skończony układ aksjomatów. Regułami pierwotnymi są: RO oraz reguła podstawiania (formuł za zmienne zdaniowe).

W podręczniku Tadeusza Batoga aksjomatyka również jest skończona. Mamy aksjomaty grup: II, III i IV (zapisane przy użyciu zmiennych zdaniowych, a nie metazmiennych). Aksjomaty implikacji to: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ oraz $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. Aksjomaty negacji to: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, $\neg\neg p \rightarrow p$ oraz $p \rightarrow \neg\neg p$. Regułami pierwotnymi są: RO oraz reguła podstawiania (formuł za zmienne zdaniowe).

Dostępne w sieci wykłady Andrzeja Wiśniewskiego zawierają aksjomatykę taką, jak w systemie używanym przez Batoga:
http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_1/

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Za aksjomaty KRZ można przyjąć następujące formuły języka KRZ:

(I) Aksjomaty dla symbolu $\rightarrow$:

- (A1) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$
- (A2) $(p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$
- (A3) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$

(II) Aksjomaty dla symbolu $\wedge$:

- (A4) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$
- (A5) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_2$
- (A6) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)))$

Skończona aksjomatyka dla KRZ

(III) Aksjomaty dla symbolu $\vee$:

- (A7) $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$
- (A8) $p_2 \to (p_1 \vee p_2)$
- (A9) $(p_1 \to p_2) \to ((p_3 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to p_2))$

(IV) Aksjomaty dla symbolu $\equiv$:

- (A10) $(p_1 \equiv p_2) \to (p_1 \to p_2)$
- (A11) $(p_1 \equiv p_2) \to (p_2 \to p_1)$
- (A12) $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_1 \equiv p_2))$

(V) Aksjomat dla symbolu $\neg$:

- (A13) $(\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2)$

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Jedynymi regułami pierwotnymi tego systemu są: reguła odrywania RO oraz reguła podstawiania RP. Indukcyjna definicja operacji $Sub(\alpha, p_1, \gamma)$ **podstawienia w formule α za zmienną p_1 formuły γ** jest następująca:

- $Sub(p_1, p_1, \gamma) = \gamma$
- $Sub(p_2, p_1, \gamma) = p_2$
- $Sub(\neg\alpha, p_1, \gamma) = \neg Sub(\alpha, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \wedge \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \wedge Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \vee \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \vee Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \rightarrow \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \rightarrow Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \equiv \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \equiv Sub(\beta, p_1, \gamma)$

(wybór zmiennej p_1 jest oczywiście nieistotny, podobnie jak wybór zmiennych w zapisie aksjomatów).

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Można rozszerzyć powyższą definicję na przypadek jednoczesnego podstawienia w formule α: formuły γ_1 za zmienną p_1, formuły γ_2 za zmienną p_2, ..., formuły γ_n za zmienną p_n. Oznaczmy wynik takiej operacji przez $Sub(\alpha, p_1/\gamma_1, p_2/\gamma_2, \ldots, p_n/\gamma_n)$. Definicja **reguły podstawiania** RP przyjmuje wtedy postać następującą:

$(\alpha, \beta) \in RP$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją formuły $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ takie, że $\beta = Sub(\alpha, p_1/\gamma_1, p_2/\gamma_2, \ldots, p_n/\gamma_n)$.

RP jest zatem regułą o jednej przesłance.
Można podać inną jeszcze definicję RP (zob. niżej, w omówieniu ogólnych operacji konsekwencji).

Wszystkie dowody pokazane w tej prezentacji mogą zostać natychmiast przekształcone w dowody w podanej skończonej aksjomatyce KRZ, z regułami RO oraz RP.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka (zdaniowego) J. Nie jest istotne, jakie spójniki występują w J. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przez operację konsekwencji w J wyznaczoną przez $\mathcal{R}$ rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$. Podamy kilka własności tak ogólnie rozumianej operacji konsekwencji. Dowody twierdzeń 5.12.-5.14.: w Dodatku 3.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Rozważamy języki postaci $J = \langle V, \{\S_i : i \in I\}, S\rangle$, gdzie:

- V jest zbiorem zmiennych zdaniowych,
- $\{\S_i : i \in I\}$ jest rodziną spójników,
- S jest (przeliczalnym) zbiorem wszystkich formuł (zdefiniowanym indukcyjnie, w ten sam sposób, jak dla KRZ).

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest domknięty na wszystkie reguły ze zbioru $\mathcal{R}$: $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)(((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \rightarrow \alpha \in X)$.

(to oczywiście definicja metajęzykowa, zapisana w języku teorii mnogości, który znasz z zajęć Wstępu do matematyki.)

Ogólne pojęcie konsekwencji

Niech $e : V \rightarrow X$ będzie dowolnym odwzorowaniem ze zbioru V zmiennych zdaniowych w jakiś zbiór formuł X. Funkcję e można jednoznacznie rozszerzyć do endomorfizmu $h^e : S \rightarrow S$ w następujący sposób:

- $h^e(p_i) = e(p_i)$
- $h^e(\S^1_j(\alpha)) = \S^1_j(h^e(\alpha))$ (dla spójników 1-argumentowych $\S^1_j$)
- $h^e(\S^2_j(\alpha, \beta)) = \S^2_j(h^e(\alpha), h^e(\beta))$ (dla spójników 2-argumentowych $\S^2_j$).

Regułę podstawiania za zmienne zdaniowe można wtedy określić następująco: α_2 powstaje z α_1 przez podstawienie (formuł ze zbioru X za zmienne zdaniowe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $e : V \rightarrow X$ taka, że $\alpha_2 = h^e(\alpha_1)$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Twierdzenie 5.12. Relacja konsekwencji wyznaczona przez reguły $\mathcal{R}$ ma następujące własności:

- (1) Jeśli $n < m$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^n_{\mathcal{R}}(X)$.
- (2) $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(Y)$.
- (3) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R}) \rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
- (4) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R} \wedge P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)) \rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Uwaga. Z 5.12.(2). wynika, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest iloczynem wszystkich zbiorów zawierających X i domkniętych ze względu na reguły z $\mathcal{R}$. Zatem $C_{\mathcal{R}}(X)$ można tak właśnie definiować.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Twierdzenie 5.12. (ciąg dalszy).

- (5) $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
- (6) $X \subseteq Y \rightarrow C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
- (7) $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \rightarrow C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
- (8) $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
- (9) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (10) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (11) Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny $\mathcal{X}$ zachodzi alternatywa $X \subseteq Y \ \vee \ Y \subseteq X$, to: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

Symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza moc zbioru X, a $\aleph_0$ jest mocą zbioru $\mathcal{N}$, jak wiesz ze Wstępu do matematyki.

Reguły dopuszczalne

Zbiór *Perm*$(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł dopuszczalnych ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Twierdzenie 5.13.
$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

Reguła R jest zatem dopuszczalna ze względu na X oraz $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na tę regułę.

Reguły wyprowadzalne

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł wyprowadzalnych ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:
$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Twierdzenie 5.14.

- (1) $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł $\mathcal{R}'$: $C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{r\}}(X \cup Y) \subseteq C_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X \cup Y)$.
- (2) $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (3) Istnieją: $\mathcal{R}$ oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.
- (4) $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (5) $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (6) $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap\{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.

Reguły strukturalne

Reguła R jest regułą strukturalną w S wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego $e : V \to S$ także sekwent $(h^e[X], h^e(\alpha))$ należy do R.

Reguła strukturalna to zatem, intuicyjnie (i niezbyt precyzyjnie) mówiąc, reguła zawierająca wszelkie sekwenty (X, α) będące podstawieniami jakiegokolwiek sekwentu z tej reguły.

W prezentowanym tu aksjomatycznym opisie KRZ reguły wnioskowania są strukturalne. Usprawiedliwia to zatem zapisywanie tych reguł schematycznie, np. reguły odrywania w postaci:

$$\frac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}.$$

Ogólne pojęcie konsekwencji

Można rozważać jeszcze ogólniejsze pojęcie konsekwencji, niezrelatywizowane do zbioru reguł $\mathcal{R}$. Niech $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$. Powiemy, że funkcja $C : 2^S \to 2^S$ jest operacją konsekwencji w J, gdy spełnione są następujące warunki, dla dowolnych $X, Y \in 2^S$:

- (C1) $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)
- (C2) jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)
- (C3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)
- (C4) $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

Takie rozumienie operacji konsekwencji zaproponowane było przez Alfreda Tarskiego.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Ogólna relacja konsekwencji $\vdash \subseteq 2^S \times S$ w S określona jest dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ przez warunki:

- ($\vdash$ 1) $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$
- ($\vdash$ 2) jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$
- ($\vdash$ 3) jeśli dla każdej $\beta \in Y$ $X \vdash \beta$ oraz $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$
- ($\vdash$ 4) jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje Y taki, że: $Y \subseteq X$, $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ oraz $Y \vdash \alpha$.

Operacje i relacje konsekwencji są wzajemnie przez siebie definiowalne:

$$(\bigstar) \quad X \vdash \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \in C(X)$$

(tj. dla każdej $\vdash$ istnieje C taka, że ($\bigstar$), a także dla każdej C istnieje $\vdash$ taka, że ($\bigstar$)).

Ogólne pojęcie konsekwencji

Powiemy, że operacja C_2 jest nadkonsekwencją operacji C_1 (wtedy mówimy, że C_1 jest podkonsekwencją operacji C_2 i piszemy $C_1 \preccurlyeq C_2$), gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, dla każdego $X \in 2^S$.

Relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathcal{C}_S$ wszystkich operacji konsekwencji określonych na S. Jeśli $\{C_t : t \in T\}$ jest dowolną rodziną operacji konsekwencji na S, to określamy kres dolny $\bigwedge\{C_t : t \in T\}$ oraz kres górny $\bigvee\{C_t : t \in T\}$:

- $\bigwedge\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$
- $\bigvee\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\limits_{t \in T}\{C(X) : C_t \preccurlyeq C\}$.

Układ $(\mathcal{C}_S, \preccurlyeq)$ jest kratą zupełną. Co to krata zupełna wiesz ze Wstępu do matematyki.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Punkty stałe operacji C, tj. zbiory X, dla których zachodzi równość $C(X) = X$ nazywane są teoriami dedukcyjnymi (w języku J z operacją C).

Każda operacja konsekwencji określona warunkami (C1)-(C4) ma następującą własność:

- $C(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y \wedge C(C(Y)) = Y\}$.

Każda ogólna relacja konsekwencji $\vdash$ określona warunkami ($\vdash$ 1)-($\vdash$ 4) ma własność:

- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap\{Y \in D_{\vdash} : X \subseteq Y\}$

gdzie $D_{\vdash} = \{X \subseteq S : \alpha \in X \equiv X \vdash \alpha\}$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Będziemy wielokrotnie w tych wykładach przywoływać oba wymienione ogólne rozumienia konsekwencji. Wyliczmy jeszcze niektóre podstawowe własności mogące przysługiwać operatorom konsekwencji:

Konsekwencja C jest niesprzeczna, gdy $C(\emptyset) \neq S$.

Konsekwencja C jest zupełna, gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdej $\alpha \notin C(\emptyset)$.

Konsekwencja C jest maksymalna w rodzinie $\mathcal{C}_S$, gdy nie istnieje niesprzeczna konsekwencja C' taka, że $C \preccurlyeq C'$ oraz $C \neq C'$. Konsekwencje maksymalne to dokładnie wszystkie niesprzeczne konsekwencje zupełne.

Konsekwencja C jest zwarta, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: jeśli $C(X) = S$, to istnieje skończony zbiór Y taki, że $Y \subseteq X$ oraz $C(Y) = S$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Konsekwencja C jest strukturalna, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $e : V \to S$ zachodzi inkluzja: $h^e[C(X)] \subseteq C(h^e[X])$.

Konsekwencja C (wyznaczona przez jakiś zbiór reguł) jest strukturalnie zupełna, gdy każda reguła strukturalna i dopuszczalna ze względu na C jest wyprowadzalna ze względu na C.

Złożenie $C_1 \circ C_2$ dwóch operatorów konsekwencji określone wzorem $C_1 \circ C_2(X) = C_1(C_2(X))$ nie musi być operatorem konsekwencji. Następujące warunki są równoważne:

- $C_1 \circ C_2 \in \mathcal{C}_S$
- $C_1 \circ C_2 = \bigvee\{C_1, C_2\}$
- $C_1 \circ C_2(C_1 \circ C_2(X)) \subseteq C_1 \circ C_2(X)$
- $C_2 \circ C_1 \preccurlyeq C_1 \circ C_2$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Omawiana w tym wykładzie relacja konsekwencji syntaktycznej dla KRZ jest relacją $\vdash_{krz}$ wyznaczoną przez zbiór Ax aksjomatów KRZ oraz jednoelementowy zbiór $\{RO\}$ reguł pierwotnych KRZ:

$X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód α w oparciu o aksjomaty Ax, założenia X oraz regułę RO.

Odpowiadająca jej operacja konsekwencji w KRZ to funkcja $C^{KRZ} : 2^{F_{KRZ}} \to F_{KRZ}$ zdefiniowana wzorem:

$$C^{krz}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \vdash_{krz} \alpha\}.$$

Ćwiczenie. Pokaż, że C^{krz} spełnia warunki (C1)-(C4).

Konsekwencja matrycowa

Niech $\mathfrak{M} = \langle U, \{f_i\}_{i \in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U, \{f_i\}_{i \in I}\rangle$ jest algebrą podobną do algebry języka $J = \langle V, \{\S_i : i \in I\}, S\rangle$, a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$).

Zawartością (zbiorem tautologii) matrycy $\mathfrak{M}$ jest zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł α języka J takich, że dla dowolnego $v : V \to U$ mamy $h^v(\alpha) \in D$.

Dla przykładu, zawartością matrycy:

$$\mathfrak{B}_2 = \langle\{0, 1\}, Ng, Kn, Al, Im, Rw, \{1\}\rangle$$

jest zbiór wszystkich tautologii KRZ.

Konsekwencja matrycowa

Zdefiniujmy funkcję $C_{\mathfrak{M}} : 2^S \to 2^S$ następująco:

- $C_{\mathfrak{M}}(X)$ jest zbiorem wszystkich formuł $\alpha \in S$ takich, że dowolnego $v : V \to U$ mamy:

$$\text{jeśli } h^v[X] \subseteq D, \text{ to } h^v(\alpha) \in D.$$

Wtedy funkcja $C_{\mathfrak{M}}$ spełnia warunki (C1)–(C4).

Funkcję $C_{\mathfrak{M}}$ nazywamy konsekwencją matrycową (wyznaczoną przez matrycę $\mathfrak{M}$).

Konsekwencja matrycowa

Mówimy, że operacja konsekwencji C (wyznaczona przez zbiór reguł $\mathcal{R}$ oraz zbiór aksjomatów A) jest:

- pełna (w sensie silnym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$:
$$C(X) = C_{\mathfrak{M}}(X).$$
- pełna (w sensie słabym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy:
$$C(\emptyset) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset).$$

Dla przykładu, omawiana w tym wykładzie operacja konsekwencji wyznaczona przez regułę odrywania RO oraz zestaw (schematów) aksjomatów (A1)–(A13) jest pełna (w obu sensach) względem matrycy $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0,1\}, Ng, Kn, Al, Im, Rw, \{1\} \rangle$.

Konsekwencja odrzucająca

Niech C będzie operacją konsekwencji. Zdefiniujmy operację C^{-1} konsekwencji odrzucającej (wyznaczonej przez C) następująco:

$$C^{-1}(X) = \{\alpha \in S : X \cap C(\{\alpha\}) \neq \emptyset\}.$$

Wtedy C^{-1} spełnia warunki (C1)–(C4).

W myśl powyższej definicji, α jest formułą odrzuconą na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła z X jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$.

Tak więc, formuła α **nie jest** odrzucona na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy **żadna** formuła z X nie jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$.

Konsekwencja odrzucająca

Konsekwencją dualną do konsekwencji C nazywamy funkcję ∂C określoną następująco:

$$\partial C(X) = \{\alpha \in S : (\exists Y \subseteq X)\ (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge \bigcap_{\beta \in Y} C(\{\beta\}) \subseteq C(\{\alpha\}))\}.$$

Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to operacja ∂C spełnia warunki (C1)–(C4). Ponadto, $C^{-1} \preccurlyeq \partial C$, czyli ∂C jest nadkonsekwencją C^{-1}, oraz:

- $\partial(\partial C)(\emptyset) = \bigcap_{\alpha \in S} C(\{\alpha\})$.
- $\partial C(\emptyset) = \{\alpha \in S : C(\{\alpha\} = S\}$.
- Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to $\partial(\partial C)(X) = C(X)$.

Konsekwencja odrzucająca

Konsekwencje odrzucające możemy charakteryzować poprzez reguły odrzucania formuł. Dla przykładu, jedną z takich reguł jest reguła odrzucania przez odrywanie: jeśli uznajesz implikację oraz odrzucasz jej następnik, to odrzuć jej poprzednik.

Relacje odrzucania wyrażeń oznaczane są zwykle symbolem $\dashv$. Powyższa reguła ma zatem następujący zapis:

$$\frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta, \quad \dashv \beta}{\dashv \alpha}.$$

Tak jak reguły charakteryzujące relacje wyprowadzalności $\vdash$ mają, intuicyjnie mówiąc, gwarantować, że są to relacje zachowujące prawdę, tak stosowne reguły dla relacji odrzucania $\dashv$ mają gwarantować, że są to relacje zachowujące fałsz.

Konsekwencja odrzucająca

Niech $\mathfrak{M} = \langle U, \{f_i\}_{i \in I}, D \rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ jest algebrą podobną do algebry języka $J = \langle V, \{\S_i : i \in I\}, S \rangle$, a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$). Przez $\mathfrak{M}^*$ oznaczmy matrycę $\langle U, \{f_i\}_{i \in I}, U - D \rangle$, w której zbiorem wartości wyróżnionych jest $U - D$.

Jeśli $\mathcal{R}$ jest zbiorem reguł uznawania, a $\mathcal{R}^*$ zbiorem reguł odrzucania formuł, to zachodzenie ciągu równości:

$$C_{\mathcal{R}^*} = C_{\mathfrak{M}^*} = \partial C_{\mathcal{R}} = \partial C_{\mathfrak{M}}$$

moglibyśmy nazywać (silną) pełnością odrzucającą konsekwencji $C_{\mathcal{R}}$ i $C_{\mathcal{R}^*}$ względem matryc $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^*$.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

$\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \to (\alpha \to \gamma)$ (reguła komutacji (RKom))

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$
   założenie
2. $(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)))$
   (A1): $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha \to \beta,\ \gamma/\alpha \to \gamma$
3. $\beta \to (\alpha \to \beta)$
   (A3): $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha$
4. $((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
   RO: 2,3
5. $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \to$
   $\to ((((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$
   (A1): $\alpha/\alpha \to \beta,\ \beta/(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma),\ \gamma/\alpha \to \gamma$

Czytaj dalej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

6. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
   (A1)
7. $(((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
   RO: 5,6
8. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$
   (A1): $\beta/\beta \to \gamma,\ \gamma/\alpha \to \gamma$
9. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$
   RO: 8,1
10. $(\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
    (A2): β/γ

Czytaj dalej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

11. $(((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))) \to$
$\to (((\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)))$
(A1): $\alpha/(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$, $\beta/\alpha \to (\alpha \to \gamma)$, $\gamma/\alpha \to \gamma$
12. $((\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$
RO: 11,9
13. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
RO: 12,10
14. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$
RO: 7,13
15. $\beta \to (\alpha \to \gamma)$
RO: 4,14.

W dowodzie korzystano tylko z aksjomatów oraz reguły pierwotnej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

Przy zastosowaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost dowód wyprowadzalności reguły komutacji polega na udowodnieniu, że: $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$ i sprowadza się do dwóch użyć reguły odrywania:

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,2
5.	γ	RO: 4,3.

Jest to, jak łatwo zauważyć, także dowód tezy (T8). Przykład ten pokazuje jak przydatnym środkiem dowodowym jest Twierdzenie o Dedukcji.

Ćwiczenie 1: reguła poprzedzania (Rp)

$\{\alpha\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$ (reguła poprzedzania (RPp))

1.	α	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	(A3)
3.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T4)

(T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (mocne prawo podwójnego przeczenia)

1.	$\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha))$	(T3): $\alpha/\neg\alpha,\ \beta/\neg(\alpha \rightarrow \alpha)$
2.	$(\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$	(A13): $\alpha/\alpha \rightarrow \alpha,\ \beta/\alpha$
3.	$\neg\neg\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$	RSyl: 1,2
4.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$	RKom: 3
5.	$\alpha \rightarrow \alpha$	(T1)
6.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	RO: 4,5.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T5)

(T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ (słabe prawo podwójnego przeczenia)

1.	$\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$	(T4): $\alpha/\neg\alpha$
2.	$(\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$	(A13): $\beta/\neg\neg\alpha$
3.	$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$	RO: 2,1.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T6)

(T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ (prawo podwójnego przeczenia)

1.	$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$	(T5)
2.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	(T4)
3.	$(\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \neg\neg\alpha))$	(A12): $\beta/\neg\neg\alpha$
4.	$(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \neg\neg\alpha)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \equiv \neg\neg\alpha$	RO: 4,2.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T7)

(T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ (prawo przepełnienia)

1.	$\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$	(T3): $\alpha/\neg\alpha$
2.	$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$	(T5)
3.	$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$	RSyl: 2,1.

Ćwiczenie 2.1.: (T18)

(T18) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\alpha))$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost. Pokażemy, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$, $\gamma \rightarrow \neg\beta$, γ oraz $\neg\neg\alpha$ udowodnić można parę zdań wzajem sprzecznych.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \neg\beta$	założenie
3.	γ	założenie
4.	$\neg\neg\alpha$	założenie
5.	$\neg\beta$	RO: 2,3
6.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	(T4)
7.	α	RO: 6,4
8.	β	RO: 1,7.

Ćwiczenie 2.1.: (T19)

(T19) $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

1. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
   (T3)
2. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
   (A3): $\alpha/\beta,\ \beta/\alpha$
3. $(\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$
   (A9): $\alpha/\neg\alpha,\ \beta/\alpha \rightarrow \beta,\ \gamma/\beta$
4. $(\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
   RO: 3,1
5. $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
   RO: 4,2.

Ćwiczenie 2.1.: prawo eksportacji

(T20) $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (prawo eksportacji)

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Zachodzi ciąg równoważności: $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma\} \vdash_{krz} \alpha \to (\beta \to \gamma)$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \alpha\} \vdash_{krz} \beta \to \gamma$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \alpha,\ \beta\} \vdash_{krz} \gamma$. Wystarczy więc udowodnić, że: $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \alpha,\ \beta\} \vdash_{krz} \gamma$.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 2,3
5.	γ	RO: 1,4.

Ćwiczenie 2.1.: prawo importacji

(T21) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ (prawo importacji)

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy udowodnić, że: $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \wedge \beta\} \vdash_{krz} \gamma$.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	(A4)
4.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	(A5)
5.	α	RO: 3,2
6.	β	RO: 4,2
7.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,5
8.	γ	RO: 7,6.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — pierwszy dowód

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (wersja prawa Dunsa Scotusa)

1. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
   (A13)
2. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
   (A3): $\alpha/\neg\alpha,\ \beta/\neg\beta$
3. $(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$
   (A1): $\alpha/\neg\alpha,\ \beta/\neg\beta \rightarrow \neg\alpha,\ \gamma/\alpha \rightarrow \beta$
4. $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
   RO: 3,2
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
   RO: 4,1.

To (podany wcześniej) dowód wykorzystujący tylko aksjomaty i regułę pierwotną.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — drugi dowód

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (wersja prawa Dunsa Scotusa)

Zamiast przeprowadzać powyższy pedantyczny dowód warto skorzystać z reguły wtórnej:

1.	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	(A13)
2.	$\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	(A3): $\alpha/\neg\alpha,\ \beta/\neg\beta$
3.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	RSyl: 2,1.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — trzeci dowód

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (wersja prawa Dunsa Scotusa)

Można też skorzystać z poprzednio udowodnionych tez (tu: (T7) i (T8)):

1.	$(\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$	(T8): $\beta/\neg\alpha,\ \gamma/\beta$
2.	$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$	(T7)
3.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	RO: 1,2.

Ćwiczenie 2.2. (a)

$\{\alpha \equiv \beta, \beta\} \vdash_{krz} \alpha$

1.	$\alpha \equiv \beta$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	(A12)
4.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 3,1
5.	α	RO: 4,2.

Ćwiczenie 2.2. (b)

$\{\alpha \to \beta, \gamma \to \delta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \vee \delta)$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy pokazać, że: $\{\alpha \to \beta, \gamma \to \delta, \alpha \wedge \gamma\} \vdash_{krz} \beta \vee \delta$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\alpha \wedge \gamma$	założenie
4.	$(\alpha \wedge \gamma) \to \alpha$	(A4): β/γ
5.	α	RO: 4,3
6.	β	RO: 1,5
7.	$\beta \to (\beta \vee \delta)$	(A7): α/β, β/δ.

Ćwiczenie 2.2. (c)

$\{\alpha \to \beta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \vee \delta)$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy pokazać, że: $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \wedge \gamma\} \vdash_{krz} \beta \vee \delta$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\alpha \wedge \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \wedge \gamma) \to \alpha$	(A4): β/γ
4.	α	RO: 3,2
5.	β	RO: 1,4
6.	$\beta \to (\beta \vee \delta)$	(A7): $\alpha/\beta,\ \beta/\delta$
7.	$\beta \vee \delta$	RO: 6,5.

Ćwiczenie 2.2. (d)

$\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost. Pokażemy, że $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta), \alpha, \neg\beta\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ.

1.	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	założenie
4.	$\alpha \wedge \neg\beta$	(DK): 2,3

W wierszach 1 i 4 mamy parę formuł wzajem sprzecznych. Zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost, $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.

Ćwiczenie 3 (a)

(a) $(\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta))$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta))) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \to \gamma) = 1$.
- $h((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta)) = 0$, czyli $h((\alpha \vee \beta) = 1$ oraz $h(\gamma \vee \beta) = 0$.
- Z $h(\gamma \vee \beta) = 0$ mamy: $h(\gamma) = 0$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \vee \beta) = 1$ oraz $h(\beta) = 0$, to $h(\alpha) = 1$.
- Skoro $h(\alpha \to \gamma) = 1$ oraz $h(\gamma) = 0$, to $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Trzeba odrzucić przypuszczenie, że $(\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta))$ **nie** jest tautologią.

Skoro $(\alpha \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \vee \beta))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (b)

(b) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \rightarrow \beta) = 1$
- $h(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) = 0$, czyli $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\beta \vee \gamma) = 0$
- Skoro $h(\beta \vee \gamma) = 0$, to $h(\beta) = 0$ oraz $h(\gamma) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ i $h(\beta) = 0$, to $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Trzeba odrzucić przypuszczenie, że $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ **nie** jest tautologią.

Skoro $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (c)

(c) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))) = 0$. Stąd:

- $h(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$ oraz $h(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)) = 0$.
- Skoro $h((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)) = 0$, to $h(\beta \wedge \gamma) = 1$ oraz $h(\alpha \wedge \gamma)) = 0$.
- Skoro $h(\beta \wedge \gamma) = 1$, to $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$. Zatem $h(\neg\beta) = 0$
- Skoro $h(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$ i $h(\neg\beta) = 0$, to $h(\neg\alpha) = 0$, czyli $h(\alpha) = 1$.
- Skoro $h(\alpha \wedge \gamma) = 0$ i $h(\alpha) = 1$, to $h(\gamma) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypuszczenie, że $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (d)

(d) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ oraz $h(\beta \rightarrow \alpha) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \rightarrow \beta) = 0$, to $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\beta \rightarrow \alpha) = 0$, to $h(\beta) = 1$ i $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie; jedna wystarczy, pamiętasz: raz ladacznica, zawsze ladacznica). Przypuszczenie, że $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (e)

(e) $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h(((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)) = 0$. Stąd:

- $h((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) = 1$ oraz $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta) = 0$.
- Skoro $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta) = 0$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$, to $h(\alpha) = 1$ i $h(\gamma) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$, $h(\beta) = 0$ i $h(\gamma) = 1$, to: $h(\neg\gamma) = 0$, $h(\neg\beta) = 1$, $h(\alpha \wedge \neg\beta) = 1$. Zatem $h((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypuszczenie, że $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (f)

(f) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \equiv \beta) = 1$ i $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 0$.
- Skoro $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 0$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$, a więc $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\gamma) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$ i $h(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $h(\beta) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$, $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$ oraz $h(\beta \wedge \gamma) = 1$. W konsekwencji, $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 1$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypuszczenie, że $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Niektóre często używane tezy KRZ

Dowody tez (T1)-(T21) przedstawiono w tej prezentacji. Zachęcam do samodzielnego udowodnienia pozostałych tez.

- (T1) $\alpha \rightarrow \alpha$ prawo tożsamości
- (T2) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- (T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ wersja prawa Dunsa Scotusa
- (T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ mocne prawo podwójnego przeczenia
- (T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ słabe prawo podwójnego przeczenia
- (T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ prawo podwójnego przeczenia
- (T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ prawo przepełnienia (pr. Dunsa Scotusa)
- (T8) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo komutacji
- (T9) $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (słabe) prawo transpozycji
- (T10) $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ (słabe) prawo Claviusa

Niektóre często używane tezy KRZ

- (T11) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ pr. dylematu konstrukcyjnego
- (T12) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ prawo transpozycji prostej
- (T13) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ prawo niesprzeczności
- (T14) $\alpha \vee \neg\alpha$ prawo wyłączonego środka
- (T15) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ prawo koniunkcji
- (T16) $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
- (T17) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \to \gamma) \to \gamma)$
- (T18) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \neg\beta) \to (\gamma \to \neg\alpha))$
- (T19) $(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (T20) $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ prawo eksportacji
- (T21) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$ prawo importacji

Niektóre często używane tezy KRZ

Dowody ok. 300 tez KRZ znaleźć można w monografii W.A. Pogorzelskiego: **Klasyczny rachunek zdań.**

- $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ — (mocne) prawo Claviusa
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ — prawo Fregego
- $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ — prawo redukcji do absurdu
- $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$ — prawo modus ponendo ponens
- $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$ — prawo tollendo ponens
- $(\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha) \to \neg\beta$ — prawo ponendo tollens
- $(\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta))$ — prawo rugowania implikacji
- $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ — wyrażanie $\to$ przez $\neg$ i $\vee$
- $(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ — wyrażanie $\to$ przez $\neg$ i $\wedge$

Niektóre często używane tezy KRZ

- $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ — prawo Peirce'a
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ — prawo de Morgana
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ — prawo de Morgana
- $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ — (mocne) prawo kontrapozycji
- $\neg(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$ — prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta)$ — prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ — prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ — prawo negowania implikacji
- $\alpha \equiv (\alpha \wedge \alpha)$ — prawo tautologii
- $\alpha \equiv (\alpha \vee \alpha)$ — prawo tautologii

Niektóre często używane tezy KRZ

- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\beta \equiv \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ prawo nowego czynnika
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ prawo nowego składnika
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)) \equiv ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ pr. łączenia i rozłączania
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ pr. składania i rozkładania
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \gamma))$ pr. nowego czynnika równoważności
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \equiv (\beta \vee \gamma))$ pr. nowego składnika równoważności
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ wyrażenie $\equiv$ przez $\rightarrow$ i $\wedge$

Niektóre często używane tezy KRZ

- $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ prawo łączności $\wedge$
- $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$ prawo łączności $\vee$
- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ prawo dystrybucji
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ prawo dystrybucji
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$ prawo obustronnego negowania $\equiv$
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \delta)))$ pr. mnożenia $\equiv$ stronami
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \equiv (\beta \vee \delta)))$ pr. dodawania $\equiv$ stronami
- $(((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \wedge ((\alpha \vee \gamma) \wedge \neg(\beta \wedge \delta))) \rightarrow$
  $\rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \wedge (\delta \rightarrow \gamma))$ prawo Haubera (odwracania implikacji)

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, każdej tezie implikacyjnej odpowiada reguła wtórna KRZ, a każdej regule wtórnej — teza implikacyjna.

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

Wyprowadzalność reguł (1)-(5) wykazano w niniejszej prezentacji.
Zachęcam do pokazania wyprowadzalności pozostałych reguł.

- (1) reguła dołączania koniunkcji (**DK**):

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

- (2) reguła sylogizmu hipotetycznego (**RSyl**):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (3) reguła sylogizmu Fregego (**RFr**):

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

- (4) reguła poprzedzania (**RPp**):

$$\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$$

- (5) reguła komutacji (**RKom**):

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (6) reguła tollendo tollens (**MT**):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \ \neg\beta}{\neg\alpha}$$

- (7) reguła tollendo ponens:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \ \neg\alpha}{\beta}$$

- (8) reguła ponendo tollens:

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta), \ \alpha}{\neg\beta}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (9) reguła Dunsa Scotusa:

$$\frac{\alpha, \ \neg\alpha}{\beta}$$

- (10) reguła transpozycji:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$$

- (11) reguła importacji:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}$$

- (12) reguła eksportacji:

$$\frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}$$

Zalecana literatura

- Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki.* Wydawnictwo UAM, Poznań.
- Czeżowski, T. 1968. *Logika.* PWN, Warszawa.
- Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa.
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej.* Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Murawski, R., Świrydowicz, K. 2006. *Podstawy logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo UAM, Poznań.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* PWN, Warszawa.

Możesz także korzystać z literatury obcojęzycznej. Nie ma zakazu.