

Logika Matematyczna (5-7)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

15, 22, 29 XI 2007

Plan na dziś

Przedstawimy jedną z możliwości **aksjomatycznego** ujęcia KRZ. Powiemy o:

- systemie aksjomatów dla KRZ
- regułach wnioskowania (pierwotnych i wtórnych)
- dowodach, relacji konsekwencji oraz operacji konsekwencji w KRZ
- twierdzeniach o dedukcji (w wersji syntaktycznej) oraz o postaciach normalnych
- twierdzeniach o pełności, niesprzeczności i rozstrzygalności KRZ
- innych aksjomatykach KRZ
- ogólnym pojęciu konsekwencji.

Uwaga. Od tego momentu zaczynamy na poważnie zajmować się logiką matematyczną. Przedstawione dotychczas rozważania semantyczne stanowiły jedynie preliminaria.

Reguły wnioskowania

Język KRZ został opisany w wykładzie 2. Określimy teraz **relację konsekwencji syntaktycznej**: pewną relację między zbiorami formuł a formułami.

Przypominamy, że przez **regułę wnioskowania** rozumiemy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRZ}} \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Przypominamy, że jeśli R jest regułą wnioskowania oraz $(X, \alpha) \in R$, to:

- parę (X, α) nazywamy **sekwentem** reguły R
- X nazywamy zbiorem **przesłanek** sekwentu (X, α)
- α nazywamy **wnioskiem** sekwentu (X, α) .

Ogólnie, **zbiorami przesłanek** nazywamy poprzedniki relacji R , a **wnioskami** jej następniki.

Dowód i konsekwencja syntaktyczna: ogólnie

Dowodem formuły α w oparciu o zbiory: aksjomatów A , reguł \mathcal{R} oraz założeń X nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $D = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ taki, że:

- α jest identyczna z α_n
- dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ albo $\alpha_i \in A \cup X$ albo istnieje reguła $R \in \mathcal{R}$ oraz zbiór formuł Y występujących w D wcześniej niż na i -tym miejscu takie, że: $(Y, \alpha_i) \in R$ (tj. α_i jest wnioskiem sekwentu $(Y, \alpha_i) \in R$, a przesłanki tego sekwentu są formułami występującymi w ciągu D przed α_i).

Formuła α jest **konsekwencją syntaktyczną** zbioru formuł X , przy ustalonym zbiorze aksjomatów A oraz reguł \mathcal{R} , gdy istnieje dowód α w oparciu o A , X oraz \mathcal{R} .

Aksjomaty KRZ

Niech zbiór Ax aksjomatów KRZ składa się ze wszystkich formuł języka KRZ o budowie podpadającej pod jeden z następujących schematów:

(I) Aksjomaty dla symbolu \rightarrow :

- (A1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (A2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(II) Aksjomaty dla symbolu \wedge :

- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- (A6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$

Aksjomaty KRZ

(III) Aksjomaty dla symbolu \vee :

- (A7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta))$

(IV) Aksjomaty dla symbolu \equiv :

- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \beta))$

(V) Aksjomat dla symbolu \neg :

- (A13) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Aksjomaty KRZ

Większość tych aksjomatów ma nazwy:

- (A1) - prawo sylogizmu hipotetycznego
- (A2) - prawo skracania
- (A3) - prawo symplifikacji (prawo poprzedzania)
- (A4), (A5) - prawa symplifikacji (albo: pochłaniania) dla \wedge
- (A6) - prawo mnożenia następników
- (A7), (A8) - prawa pochłaniania dla \vee
- (A9) - prawo dodawania poprzedników
- (A10), (A11) - prawa pochłaniania dla \equiv
- (A13) - (silne) prawo kontrapozycji.

Aksjomaty

Tak więc, aksjomatami KRZ są np. następujące formuły:

- $(p_2 \wedge p_{12}) \rightarrow p_2$
- $((p_7 \rightarrow p_{100}) \wedge p_5) \rightarrow (p_7 \rightarrow p_{100})$
- $((((p_7 \vee \neg p_5) \rightarrow p_{100}) \wedge p_5) \rightarrow ((p_7 \vee \neg p_5) \rightarrow p_{100}))$

(to przypadki szczególne schematu (A4))

- $p_1 \rightarrow (p_6 \rightarrow p_1)$
- $(p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow (p_6 \rightarrow (p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)))$
- $p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)$

(to przypadki szczególne schematu (A3)).

Reguła pierwotna

Jedyną regułą wnioskowania w tym systemie jest reguła *odrywania* (RO) (zwana też regułą *modus ponens*), o schematycznym zapisie:

$$\frac{\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}}{\beta}$$

Uwaga. Reguły podawane w definicji danego systemu noszą nazwę reguł *pierwotnych*. Później wprowadza się tzw. reguły *wtórne*. Zwykle regułę odrywania zapisuje się w uproszczonej postaci: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$.

Zauważmy, że zbiór Ax wszystkich aksjomatów jest *nieskończony*. Reguła odrywania także jest *nieskończonym* zbiorem sekwentów, z których każdy ma postać podaną powyżej.

Tezy, syntaktyczna konsekwencja i reguły wtórne w KRZ

Tezą KRZ nazywamy każdą formułę, która posiada dowód w oparciu o zbiór aksjomatów Ax , regułę odrywania oraz pusty zbiór założeń.

Formuła α jest **syntaktyczną konsekwencją** zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy posiada dowód w oparciu o aksjomaty Ax , regułę odrywania oraz zbiór założeń X . Jeśli α jest syntaktyczną konsekwencją X , to piszemy $X \vdash_{krz} \alpha$. Mówimy też wtedy, że formuła α jest **wyprowadzalna** ze zbioru X na gruncie KRZ (przy podanej wyżej aksjomatyce, wraz z regułą odrywania).

Mówimy, że zbiór Y jest **wyprowadzalny** ze zbioru X na gruncie KRZ, gdy $X \vdash_{krz} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y . Piszemy wtedy $X \vdash_{krz} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \vdash_{krz} Y$, to piszemy $X \not\vdash_{krz} Y$.

Mówimy, że reguła R jest **wyprowadzalna (wtórna)** w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krz} \alpha$ dla każdego $(X, \alpha) \in R$.

Dowody niektórych tez KRZ

Przedstawimy dowody niektórych tez KRZ oraz pokażemy, że pewne reguły są wyprowadzalne w KRZ. Przedtem zauważmy, że:

- Każdy aksjomat KRZ jest tezą KRZ.
- Fakt, że formuła α jest tezą KRZ będziemy zapisywać $\emptyset \vdash_{krz} \alpha$ lub, krócej: $\vdash_{krz} \alpha$.
- Jeśli $D = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ jest dowodem formuły α_n z pustego zbioru założeń, to dla każdego $1 \leq i \leq n$, formuła α_i jest tezą KRZ.
- Dowodzimy nie konkretnych formuł języka KRZ, ale **schematów** formuł (zob. uwaga w wykładzie 2). Gdy więc podajemy dowód, że np. $\alpha \vee \neg \alpha$ jest tezą KRZ, to jest to dowód ukazujący, że **wszystkie** formuły języka KRZ będące alternatywami **jakiegokolwiek** formuły języka KRZ oraz jej negacji są tezami KRZ.

Dowody niektórych tez KRZ

- Aksjomaty (A1)-(A13) to **schematy** formuł. Występujące w nich symbole α, β, γ pełnią funkcję **metazmiennych**: reprezentują **dowolne** formuły języka KRZ. W dowodach będziemy wykorzystywać operację **(pseudo)podstawiania**: za metazmiennę występującą w aksjomatach wstawiać będziemy formuły języka KRZ.
- Operację takiego (pseudo)podstawiania zaznaczać będziemy przez $\alpha[\beta/\gamma]$ (za symbol β w formule α podstawiamy formułę γ). W praktyce, ponieważ podstawienia te będą występowały jedynie w komentarzach do wierszy dowodowych, będziemy pisać β/γ .
- Jeśli α jest tezą KRZ, to $\alpha[\beta/\gamma]$ również jest tezą KRZ.
- Można podać skończony układ aksjomatów KRZ. Do reguł wnioskowania zaliczyć trzeba wtedy regułę **podstawiania** formuł za zmienne zdaniowe. Definicja takiej reguły ma postać indukcyjną.

Dowody niektórych tez KRZ

Jeśli α jest którymś z aksjomatów (A1)-(A13), to zapis $\alpha[\beta/\gamma]$ należy rozumieć następująco:

- aksjomatem KRZ jest formuła języka KRZ powstająca z α poprzez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu β w α poprzez γ .

Dla przykładu, aksjomatem KRZ jest formuła α postaci: $p_1 \rightarrow (p_6 \rightarrow p_1)$.
Jeśli γ jest np. formułą $p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)$, to $\alpha[p_1/\gamma]$ jest formułą:

$$(p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow (p_6 \rightarrow (p_{17} \vee (p_1 \wedge p_2))).$$

Powinno być także jasne, że **niedozwolone** jest w powyższym przykładzie wstawianie czegokolwiek za np. $p_6 \rightarrow p_1$.

Dowody niektórych tez KRZ

Dowody będą zapisywane w postaci numerowanych wierszy, opatrzonych z prawej strony komentarzem, wyjaśniającym zasadność poszczególnych kroków dowodowych. Zaczniemy od dowodu **prawa tożsamości**:

(T1) $\alpha \rightarrow \alpha$

1. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ (A2): β/α
2. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ (A3): β/α
3. $\alpha \rightarrow \alpha$ RO: 1,2.

Pierwszy krok tego dowodu to formuła otrzymana z aksjomatu (A2) poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień symbolu β formułą α . Drugi krok to formuła otrzymana z aksjomatu (A3) poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień symbolu β formułą α . Trzeci krok to formuła otrzymana z formuł w wierszach 1. i 2. poprzez zastosowanie reguły odrywania.

Dowody niektórych tez KRZ

(T2) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

1. $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ (A3): $\alpha/\alpha \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ (A2): β/α
3. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ (A3): β/α
4. $\alpha \rightarrow \alpha$ RO: 2,3
5. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ RO: 1,4.

Widać, że w dowodzie (T2) skorzystaliśmy z dowodu tezy (T1).

Dowody niektórych tez KRZ

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

1. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
2. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
3. $(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$
4. $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Ze względów typograficznych komentarze podajemy poniżej:

1. (A3): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg\beta$
2. (A13)
3. (A1): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \gamma/\alpha \rightarrow \beta$
4. RO: 3,1
5. RO: 4,2.

Niektóre reguły wtórne KRZ

M.in. dla uproszczenia dowodów warto wzbogacić środki dowodowe o możliwość stosowania reguł wyprowadzalnych (wtórnych). To, że takie rozszerzenie środków dowodowych jest poprawne, gwarantuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$ taki, że α jest identyczna z β_n , a dowolny element ciągu $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$:

- jest elementem zbioru X , **albo**
- jest tezą KRZ, **albo**
- powstał z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu w wyniku zastosowania reguły odrywania lub dowolnej reguły wyprowadzalnej w KRZ.

W szczególności, dla $X = \emptyset$ twierdzenie to głosi, że stosowanie w dowodach (z aksjomatów, bez założeń) wcześniej udowodnionych tez oraz reguł wtórnych nie wyprowadza poza zbiór tez KRZ. [Dowód twierdzenia 5.1. w Dodatku 2.](#)

Niektóre reguły wtórne KRZ

Pokażemy wyprowadzalność kilku reguł wtórnych, a następnie wykorzystamy twierdzenie 5.1. w dowodach dalszych tez.

W dowodzie wyprowadzalności reguły

$$\frac{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}}{\beta}$$

pierwsze n wierszy to kolejne założenia: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Potem następują kroki dowodowe, w których możemy korzystać z:

- aksjomatów (i stosownych podstawień aksjomatów)
- wcześniej udowodnionych tez (i ich podstawień)
- reguły pierwotnej i wcześniej udowodnionych reguł wtórnych.

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$:

1.	α	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$	(A6): $\beta/\alpha, \gamma/\beta$
4.	$\alpha \rightarrow \alpha$	(T1)
5.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	RO: 3,4
6.	$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	(A3): $\alpha/\beta, \beta/\alpha$
7.	$\alpha \rightarrow \beta$	RO: 6,2
8.	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	RO: 5,7
9.	$\alpha \wedge \beta$	RO: 8,1.

Możemy zatem stosować w dowodach regułę **dołączania koniunkcji (DK)**:

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$:

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\beta \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | (A1) |
| 4. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | RO: 3,1 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | RO: 4,2. |

Możemy zatem w dowodach używać reguły sylogizmu hipotetycznego (RSyl):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}.$$

Jeśli w dowodzie stosujemy regułę wtórną R , to zaznaczamy to w komentarzu pisząc po R : numery wierszy jej przesłanek.

Niektóre reguły wtórne KRZ

Dowód, że $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$:

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	(A1)
4.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,2
5.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow$ $\rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$	(A1): $\beta/\beta \rightarrow \gamma,$ $\gamma/\alpha \rightarrow \gamma$
6.	$((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	RO: 5,1
7.	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 6,4
8.	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	(A2): β/γ
9.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 8,7.

Możemy zatem używać w dowodach reguły sylogizmu Fregego (RFr):

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}.$$

Ćwiczenie 1

Spróbuj udowodnić, że poniższe reguły są wyprowadzalne:

- $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ (reguła **komutacji** (RKom))
- $\{\alpha\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$ (reguła **poprzedzania** (RPP)).

Spróbuj udowodnić, że są tezami KRZ:

- (T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- (T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
- (T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$
- (T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$.

Nie martw się, jeśli ci się nie uda od razu. Później będzie łatwiej. **Rozwiązania** wszystkich ćwiczeń: na końcu tej prezentacji.

Kilka własności relacji konsekwencji syntaktycznej

Twierdzenie 5.2. Dla dowolnych zbiorów formuł X , Y , Z oraz dowolnej formuły α zachodzą następujące warunki:

- \vdash_{krz} jest zwrotna: $X \vdash_{krz} X$
- \vdash_{krz} jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Y \vdash_{krz} Z$, to $X \vdash_{krz} Z$
- \vdash_{krz} jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{krz} Y$
- \vdash_{krz} jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \vdash_{krz} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{krz} Z$
- $\emptyset \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą KRZ.

Dowód twierdzenia 5.2.: w Dodatku 2.

Porównaj te własności z własnościami relacji \models_{KRZ} , omówionymi na wykładzie trzecim.

(Syntaktyczne) twierdzenie o dedukcji wprost

Twierdzenie 5.3. Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$, to $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
- Jeśli $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

Twierdzenie o dedukcji wprost wyraża bardzo ważną własność relacji konsekwencji syntaktycznej. W szczególności, dla pustego zbioru założeń, głosi ono, że formuła $\alpha \rightarrow \beta$ jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy β jest syntaktyczną konsekwencją α . Pokazuje to, że dla dowolnej implikacji będącej tezą KRZ, wyprowadzalna jest reguła o przesłance będącej poprzednikiem tej implikacji i wniosku pokrywającym się z następnikiem tej implikacji. **Dowód twierdzenia 5.3.:** w Dodatku 2.

(Syntaktyczne) twierdzenie o dedukcji nie wprost

Twierdzenie 5.4. Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzą równoważności:

- (1) $X \vdash_{krz} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.
- (2) $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$.

Zgodnie z twierdzeniem 5.4.(1), zamiast wyprowadzać z jakiegoś zbioru formuł X formułę negacyjną $\neg\alpha$ wystarczy z tego zbioru powiększonego o formułę α wyprowadzić dowolną parę formuł wzajem sprzecznych.

Dowód twierdzenia 5.4.: w Dodatku 2. Oba syntaktyczne twierdzenia o dedukcji zastosujemy teraz w dowodach dalszych tez KRZ.

Dowody dalszych tez

$$(T8) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

(prawo komutacji)

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności:

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ jest tezą wttw, gdy

$\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ wttw, gdy

$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ wttw, gdy

$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma, \beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \gamma$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma, \beta, \alpha)\} \vdash_{krz} \gamma$.

Wystarczy zatem dowieść, że: $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma, \beta, \alpha)\} \vdash_{krz} \gamma$.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ założenie
2. β założenie
3. α założenie
4. $\beta \rightarrow \gamma$ RO: 1,3
5. γ RO: 4,2.

Dowody dalszych tez

$$(T9) (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$$

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności:

$(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy

$\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \neg\alpha$ wttw,

gdy $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Wystarczy zatem dowieść, że:

$\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$.

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $\alpha \rightarrow \neg\beta$ | założenie |
| 2. | β | założenie |
| 3. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | (T4) |
| 4. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ | RSyl: 3,1 |
| 5. | $(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | (A13): $\alpha/\beta, \beta/\neg\alpha$ |
| 6. | $\beta \rightarrow \neg\alpha$ | RO: 5,4 |
| 7. | $\neg\alpha$ | RO: 6,2. |

Dowody dalszych tez

(T10) $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$

Na mocy twierdzenia 5.3. zachodzi ciąg równoważności: $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$. Wystarczy więc dowieść, że: $\{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \vdash_{krz} \neg\alpha$.

1.	$\alpha \rightarrow \neg\alpha$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha))$	(T7): $\beta/\neg(\alpha \rightarrow \alpha)$
3.	$\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)$	RFr: 2,1
4.	$\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\alpha)$	(T9): $\beta/\alpha \rightarrow \alpha$
5.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\alpha$	RO: 4,3
6.	$\alpha \rightarrow \alpha$	(T1)
7.	$\neg\alpha$	RO: 5,6.

Uwaga. W wierszu 3 podstawiamy w RFr: $\beta/\neg\alpha$, $\gamma/\neg(\alpha \rightarrow \alpha)$.

Dowody dalszych tez

(T11) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ (prawo dylematu konstrukcyjnego)

Na mocy twierdzenia 5.3. wystarczy udowodnić, że:

$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha.$

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\alpha \rightarrow \neg\beta$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | (T9) |
| 4. | $\beta \rightarrow \neg\alpha$ | RO: 3,2 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \neg\alpha$ | RSyl: 1,4 |
| 6. | $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ | (T10) |
| 7. | $\neg\alpha$ | RO: 6,5. |

Dowody dalszych tez

(T12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

(prawo transpozycji prostej)

Na mocy twierzeń 5.3. i 5.4. zachodzi ciąg równoważności:

 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ wttw,gdy $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{krz} \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta, \alpha\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ . Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta, \alpha\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ .

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\neg\beta$ założenie
3. α założenie
4. β RO: 1,3.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 3.

Dowody dalszych tez

(T13) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

(prawo niesprzeczności)

Na mocy twierdzenia 5.4. zachodzi ciąg równoważności: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ wttw, gdy $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β . Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\alpha \wedge \neg\alpha\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β .

- | | | |
|----|---|--------------------------|
| 1. | $\alpha \wedge \neg\alpha$ | założenie |
| 2. | $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ | (A4): $\beta/\neg\alpha$ |
| 3. | α | RO: 2,1 |
| 4. | $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ | (A5): $\beta/\neg\alpha$ |
| 5. | $\neg\alpha$ | RO: 4,1. |

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 5.

Dowody dalszych tez

(T14) $\alpha \vee \neg\alpha$

(prawo wyłączzonego środka)

Na mocy twierdzenia 5.4. zachodzi ciąg równoważności: $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} \alpha \vee \neg\alpha$ wttw, gdy $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β . Wystarczy zatem pokazać, że: $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\} \vdash_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β .

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$	(A7): $\beta/\neg\alpha$
3.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$	(A8): $\beta/\neg\alpha$
4.	$(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)) \rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha)$	(T12): $\beta/\alpha \vee \neg\alpha$
5.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$	RO: 4,2
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,1
7.	$\alpha \vee \neg\alpha$	RO: 3,6.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 1 i 7.

Dowody dalszych tez

$$(T15) \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$$

Na mocy twierdzenia 5.3. wystarczy pokazać, że: $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$.

1.	α	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$	(A6): $\beta/\alpha, \gamma/\beta$
4.	$\alpha \rightarrow \alpha$	(T1)
5.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	RO: 3,4
6.	$\alpha \rightarrow \beta$	RPp: 2
7.	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	RO: 5,6
8.	$\alpha \wedge \beta$	RO: 7,1.

Zauważ, że dowód ten jest różny od podanego wcześniej dowodu, iż $\{\alpha, \beta\} \vdash_{krz} \alpha \wedge \beta$.

Dowody dalszych tez

$$(T16) (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta)$$

No mocy twierdzeń 5.3. i 5.4. wystarczy udowodnić, że:

$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ .

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\neg\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 3. | $\neg\beta$ | założenie |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | (T12) |
| 5. | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | RO: 4,1 |
| 6. | $\neg\alpha$ | RO: 5,3 |
| 7. | β | RO: 2,6. |

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 7.

Dowody dalszych tez

$$(T17) ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$$

Na mocy twierdzeń 5.3. i 5.4. wystarczy udowodnić, że:

$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \alpha \rightarrow \gamma, \neg\gamma\} \vdash_{krz} \{\delta, \neg\delta\}$ dla pewnej formuły δ .

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \gamma$	założenie
3.	$\neg\gamma$	założenie
4.	$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha)$	(T12): β/γ
5.	$\neg\gamma \rightarrow \neg\alpha$	RO: 4,2
6.	$\neg\alpha$	RO: 5,3
7.	$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	(T3)
8.	$\alpha \rightarrow \beta$	RO: 7,6
9.	γ	RO: 1,8.

Szukaną parę formuł sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Drzewa dowodowe

Dowody mogą być reprezentowane przez **drzewa**. Dowód formuły α z aksjomatów przy użyciu jedynie reguły pierwotnej RO jest drzewem, w którego korzeniu znajduje się formuła α , a w liściach umieszczone są aksjomaty. Każdy wierzchołek drzewa, nie będący jego liściem jest formułą otrzymaną z (dwóch) swoich potomków poprzez regułę odrywania RO.

Podobnie dla dowodów reguł wtórnych: dowód, że $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vdash_{krz} \beta$ jest drzewem, w którego korzeniu znajduje się formuła β , liśćmi są $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, a wierzchołki nie będące liśćmi są formułami otrzymanymi z (dwóch) swoich potomków poprzez regułę odrywania RO. Podobnie dla wierzchołków otrzymywanych w wyniku stosowania reguł wtórnych.

Można dokonywać drzewowej reprezentacji dowodów także dla przypadków, gdy wierzchołki drzewa znakowane są **zbiorami** formuł, a nie pojedynczymi formułami (o takich drzewach opowiemy później).

Drzewa dowodowe

Drzewa dowodowe rysowane są zwykle w postaci podanej w poniższym przykładzie: korzeń na dole, liście na górze, wierzchołki będące bezpośrednimi potomkami wierzchołka x nad kreską, pod którą umieszczamy x .

Dla przykładu, dowód, że $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$ reprezentowany jest przez drzewo:

$$\frac{\beta \rightarrow \gamma \quad \frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha}{\beta}}{\gamma}$$

Ćwiczenie. Narysuj drzewa dowodowe dla dowodów kilku tez oraz dowodów wyprowadzalności kilku reguł.

Ćwiczenie 2.1.

Pokaż, że są tezami KRZ:

- (T18) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\alpha))$
- (T19) $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (T20) $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ (prawo eksportacji)
- (T21) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ (prawo importacji)
- (T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (wersja prawa [Dunsa Scotusa](#))

Wskazówka: jeśli nie znajdziesz dowodu bezpośrednio z aksjomatów, to skorzystaj z Twierdzeń o Dedukcji. W szczególności, postąp tak w przypadku (już udowodnionej) tezy (T3).

Ćwiczenie 2.2.

Pokaż, że następujące reguły są wyprowadzalne w KRZ:

- 2.2.(a) $\{\alpha \equiv \beta, \beta\} \vdash_{krz} \alpha$
- 2.2.(b) $\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$
- 2.2.(c) $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$
- 2.2.(d) $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$

Wskazówka: skorzystaj z Twierdzeń o Dedukcji.

Postacie normalne formuł

Mówimy, że formuły α oraz β są **inferencyjnie równoważne**, jeśli $\vdash_{KRZ} \alpha \equiv \beta$. Jeśli α i β są inferencyjnie równoważne, to piszemy $\alpha \approx \beta$.

Twierdzenie 5.5. Relacja \approx ma następujące własności:

- \approx jest relacją równoważności w zbiorze F_{KRZ} .
- Jeśli $\alpha \approx \beta$ i α jest tezą KRZ, to także β jest tezą KRZ.
- Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w koniunkcyjnej postaci normalnej.
- Każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w alternatywnej postaci normalnej.

Twierdzenie 5.5. ma ważne zastosowania, np.: może być wykorzystane w dowodzie twierdzenia o pełności KRZ, pozwala też na wprowadzenie interesującej struktury algebraicznej w zbiorze F_{KRZ} / \approx . [Dowód 5.5.:](#) w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Określono dwa zbiory formuł języka KRZ: zbiór wszystkich tautologii oraz zbiór wszystkich tez. Pierwszy zdefiniowany był w terminach semantycznych, a drugi w terminach syntaktycznych. Jednym z najważniejszych twierdzeń metalogicznych dotyczących KRZ jest twierdzenie mówiące, że te dwa zbiory są identyczne.

Każdy z aksjomatów (A1)-(A13) jest tautologią KRZ.

Dowód. Proste ćwiczenie w stosowaniu tabelki prawdziwościowych.

Reguła odrywania, jako reguła niezawodna, zachowuje własność bycia tautologią.

Twierdzenie 5.6. (Twierdzenie o trafności aksjomatyki.) Każda teza KRZ jest tautologią KRZ.

Dowód: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Pokazanie, że każda tautologia KRZ jest tezą KRZ jest trudniejsze, niż wykazanie trafności aksjomatyki. Można to zrobić różnymi technikami. Wybieramy metodę wykorzystującą twierdzenie [Lindenbauma-Assera](#):

Twierdzenie 5.7. (Twierdzenie Lindenbauma-Assera.) Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α : jeśli $X \not\vdash \alpha$, to istnieje zbiór $L^\alpha(X)$ o następujących własnościach:

- (1) $\alpha \notin L^\alpha(X)$
- (2) $X \subseteq L^\alpha(X)$
- (3) dla każdej formuły β : jeśli $L^\alpha(X) \vdash_{krz} \beta$, to $\beta \in L^\alpha(X)$
- (4) dla każdej formuły β : jeśli $\beta \notin L^\alpha(X)$, to $L^\alpha(X) \cup \{\beta\} \vdash_{krz} \alpha$.

Zbiór $L^\alpha(X)$ nazywamy *α -relatywnym nadzbiorem zbioru X* .

Dowód twierdzenia 5.7.: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

α -relatywny nadzbiór zbioru X ma następujące własności:

Twierdzenie 5.8. Dla dowolnych formuł α, β, γ oraz zbioru formuł X zachodzą równoważności:

- $\beta \wedge \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^\alpha(X)$ oraz $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- $\beta \vee \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^\alpha(X)$ lub $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- $\beta \rightarrow \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy (jeśli $\beta \in L^\alpha(X)$, to $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- $\beta \equiv \gamma \in L^\alpha(X)$ wttw, gdy ($\beta \in L^\alpha(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in L^\alpha(X)$)
- $\neg\beta$ jest elementem $L^\alpha(X)$ wttw, gdy β nie jest elementem $L^\alpha(X)$.

Dowód twierdzenia 5.8.: w Dodatku 2.

Pełność KRZ

Twierdzenie 5.9. (Twierdzenie o pełności KRZ.) Dla dowolnej formuły α zachodzi równoważność: α jest tezą KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRZ.

Dokładny dowód twierdzenia 5.9.: w Dodatku 2.

Szkic dowodu. Implikacja \Rightarrow to twierdzenie o trafności. Dla dowodu implikacji \Leftarrow zakładamy, że α jest tautologią i przypuszczamy (nie wprost), że α nie jest tezą, tj. $\emptyset \not\models \alpha$. Istnieje wtedy zbiór $L^\alpha(\emptyset)$ o własnościach opisanych w twierdzeniach 5.7. i 5.8. Definiujemy wartościowanie $h : F_{KRZ} \rightarrow \{0, 1\}$ przez warunek: $h(\beta) = 1$, gdy $\beta \in L^\alpha(\emptyset)$, a $h(\beta) = 0$ w przeciwnym przypadku. Skoro $\alpha \notin L^\alpha(\emptyset)$, to $h(\alpha) = 0$, a więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, iż α jest tautologią. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie, że α nie jest tezą. Tak więc, każda tautologia jest tezą. Ostatecznie, zbiór tez pokrywa się ze zbiorem tautologii.

Pełność KRZ

Kolejne twierdzenie ustanawia odpowiedniość między dalszymi pojęciami syntaktycznymi i semantycznymi:

Twierdzenie 5.10. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi równoważność: $X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

Dowód: w Dodatku 2.

Twierdzenie 5.10. głosi, że relacja konsekwencji syntaktycznej w KRZ trafnie i w sposób pełny opisuje (semantyczną) relację wynikania logicznego w KRZ. Mamy więc:

$$\vdash_{krz} = \models_{KRZ} .$$

Ćwiczenie 3

Wykorzystaj twierdzenie o pełności KRZ dla pokazania, że są tezami KRZ:

- (a) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$
- (b) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$
- (c) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$
- (d) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$
- (e) $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$
- (f) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$

Uwaga. Ćwiczenie to polega zatem na pokazaniu, że powyższe formuły są tautologiami KRZ.

Niesprzeczność KRZ

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krz} \alpha$ oraz $X \vdash_{krz} \neg\alpha$.

Twierdzenie 5.11. Zbiór tez KRZ jest niesprzeczny.

Dowód. Przypuśćmy, że zbiór tez KRZ nie jest niesprzeczny. Wtedy istnieje formuła α taka, że zarówno $\vdash_{krz} \alpha$, jak i $\vdash_{krz} \neg\alpha$. Na mocy twierdzenia o pełności KRZ, zarówno α , jak i $\neg\alpha$ jest tautologią. Oznacza to, że dla każdego wartościowania h mamy: $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\neg\alpha) = 1$. To jednak jest sprzeczne z definicją wartościowania. Musimy więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie, zbiór tez KRZ jest niesprzeczny.

Uwaga. Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że $X \not\vdash \alpha$. Dowód: **ćwiczenie**.

Rozstrzygalność KRZ

Na wykładach 2, 3 i 4 pokazaliśmy efektywne metody rozstrzygania, czy dowolna formuła języka KRZ jest tautologią KRZ:

- tzw. metodę 0-1, tj. sprawdzenie jaka jest wartość formuły przy każdym wzz (przypominamy, że jeśli w badanej formule występuje n zmiennych zdaniowych, to trzeba dokonać 2^n takich sprawdzeń)
- tzw. skróconą metodę 0-1, tj. rozumowanie nie wprost, polegające na próbie wykluczenia, że badana formuła przyjmuje wartość 0 przy jakimś wartościowaniu (tu liczba potrzebnych sprawdzeń może być znacząco mniejsza niż w metodzie poprzedniej)
- sprowadzanie badanej formuły do koniunkcyjnej postaci normalnej.

Na mocy Twierdzenia o Pełności KRZ, każda teza jest tautologią. W konsekwencji, zbiór wszystkich tez KRZ jest rozstrzygalny.

Inne aksjomatyki KRZ

Jest bardzo dużo różnych aksjomatycznych systemów dla KRZ. Na pierwszym wykładzie podaliśmy system Łukasiewicza dla implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań. Obok tego systemu, najbardziej popularne są różne wersje aksjomatyki Hilberta i Bernaysa.

W każdej z pozycji wymienionych na końcu tej prezentacji wykorzystuje się inny system aksjomatów (i czasem także reguł pierwotnych). Aksjomatyki te są oczywiście równoważne, w tym sensie, że generują dokładnie ten sam zbiór tez.

W cytowanej monografii W.A. Pogorzelskiego znaleźć można także informacje na temat aksjomatyk różnych systemów nieklasycznych, np. rachunków: intuicjonistycznego, wielowartościowego, pozytywnego implikacyjnego rachunku Hilberta, minimalnego rachunku Kołmogorowa, rachunków modalnych S4 i S5 Lewisa.

Inne aksjomatyki KRZ

Korzystamy z systemu aksjomatów (wzorowanego na systemie Hilberta i Bernaysa) przedstawionego w książce [Iwony Marek](#) (zob. spis literatury na końcu tej prezentacji).

W książce [Małgorzaty Porębskiej i Wojciecha Suchonia](#) na aksjomaty grupy I składają się: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ oraz $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. Nie ma w rozważanym języku symbolu \equiv , a więc także aksjomatów grupy IV. Pozostałe aksjomaty są takie, jak w tej prezentacji.

W książce [Romana Murawskiego i Kazimierza Świrydowicza](#) na aksjomaty grupy I składają się: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ i $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Aksjomaty pozostałych grup są takie, jak w tej prezentacji.

RO jest jedyną regułą pierwotną w tych systemach.

Inne aksjomatyki KRZ

W monografii [W.A. Pogorzelskiego](#) aksjomatami są (A1)-(A13), zapisane jednak nie przy użyciu metazmiennych, lecz zmiennych zdaniowych. Jest to więc [skończony](#) układ aksjomatów. Regułami pierwotnymi są: RO oraz reguła [podstawiania](#) (formuł za [zmiennie zdaniowe](#)).

W podręczniku [Tadeusza Batoga](#) aksjomatyka również jest skończona. Mamy aksjomaty grup: II, III i IV (zapisane przy użyciu zmiennych zdaniowych, a nie metazmiennych). Aksjomaty implikacji to: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ oraz $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. Aksjomaty negacji to: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, $\neg\neg p \rightarrow p$ oraz $p \rightarrow \neg\neg p$. Regułami pierwotnymi są: RO oraz reguła [podstawiania](#) (formuł za [zmiennie zdaniowe](#)).

Dostępne w sieci wykłady [Andrzeja Wiśniewskiego](#) zawierają aksjomatykę taką, jak w systemie używanym przez Batoga:

http://www.staff.amu.edu.pl/~p_lup/aw_pliki/logika_1/

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Za aksjomaty KRZ można przyjąć następujące formuły języka KRZ:

(I) Aksjomaty dla symbolu \rightarrow :

- (A1) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$
- (A2) $(p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$
- (A3) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$

(II) Aksjomaty dla symbolu \wedge :

- (A4) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$
- (A5) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_2$
- (A6) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)))$

Skończona aksjomatyka dla KRZ

(III) Aksjomaty dla symbolu \vee :

- (A7) $p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$
- (A8) $p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$
- (A9) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_3 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \vee p_3) \rightarrow p_2))$

(IV) Aksjomaty dla symbolu \equiv :

- (A10) $(p_1 \equiv p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$
- (A11) $(p_1 \equiv p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
- (A12) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_1 \equiv p_2))$

(V) Aksjomat dla symbolu \neg :

- (A13) $(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Jedynymi regułami pierwotnymi tego systemu są: reguła odrywania RO oraz reguła podstawiania RP. Indukcyjna definicja operacji $Sub(\alpha, p_1, \gamma)$ **podstawienia w formule α za zmienną p_1 formuły γ** jest następująca:

- $Sub(p_1, p_1, \gamma) = \gamma$
- $Sub(p_2, p_1, \gamma) = p_2$
- $Sub(\neg\alpha, p_1, \gamma) = \neg Sub(\alpha, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \wedge \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \wedge Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \vee \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \vee Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \rightarrow \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \rightarrow Sub(\beta, p_1, \gamma)$
- $Sub(\alpha \equiv \beta, p_1, \gamma) = Sub(\alpha, p_1, \gamma) \equiv Sub(\beta, p_1, \gamma)$

(wybór zmiennej p_1 jest oczywiście nieistotny, podobnie jak wybór zmiennych w zapisie aksjomatów).

Skończona aksjomatyka dla KRZ

Można rozszerzyć powyższą definicję na przypadek jednoczesnego podstawienia w formule α : formuły γ_1 za zmienną p_1 , formuły γ_2 za zmienną p_2 , \dots , formuły γ_n za zmienną p_n . Oznaczmy wynik takiej operacji przez $Sub(\alpha, p_1/\gamma_1, p_2/\gamma_2, \dots, p_n/\gamma_n)$. Definicja **reguły podstawiania** RP przyjmuje wtedy postać następującą:

$(\alpha, \beta) \in RP$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją formuły $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ takie, że $\beta = Sub(\alpha, p_1/\gamma_1, p_2/\gamma_2, \dots, p_n/\gamma_n)$.

RP jest zatem regułą o jednej przesłance.

Można podać inną jeszcze definicję RP (zob. niżej, w omówieniu ogólnych operacji konsekwencji).

Wszystkie dowody pokazane w tej prezentacji mogą zostać natychmiast przekształcone w dowody w podanej skończonej aksjomatyce KRZ, z regułami RO oraz RP.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka (zdaniowego) J . Nie jest istotne, jakie spójniki występują w J . Niech \mathcal{R} będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J . Niech \mathcal{N} oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przez **operację konsekwencji w J wyznaczoną przez \mathcal{R}** rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \rightarrow 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J :

- $C_{\mathcal{R}}^0(X) = X$
- $C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X) = C_{\mathcal{R}}^k(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C_{\mathcal{R}}^k(X)) (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}^k(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do \mathcal{R} . Podamy kilka własności tak ogólnie rozumianej operacji konsekwencji. **Dowody twierdzeń 5.12.-5.14.: w Dodatku 3.**

Ogólne pojęcie konsekwencji

Rozważamy języki postaci $J = \langle V, \{\xi_i : i \in I\}, S \rangle$, gdzie:

- V jest zbiorem zmiennych zdaniowych,
- $\{\xi_i : i \in I\}$ jest rodziną spójników,
- S jest (przeliczalnym) zbiorem wszystkich formuł (zdefiniowanym indukcyjnie, w ten sam sposób, jak dla KRZ).

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest **domknięty na wszystkie reguły ze zbioru \mathcal{R}** : $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \rightarrow \alpha \in X$.

(to oczywiście definicja **metajęzykowa**, zapisana w języku teorii mnogości, który znasz z zajęć **Wstępu do matematyki**.)

Ogólne pojęcie konsekwencji

Niech $e : V \rightarrow X$ będzie dowolnym odwzorowaniem ze zbioru V zmiennych zdaniowych w jakiś zbiór formuł X . Funkcję e można jednoznacznie rozszerzyć do endomorfizmu $h^e : S \rightarrow S$ w następujący sposób:

- $h^e(p_i) = e(p_i)$
- $h^e(\xi_j^1(\alpha)) = \xi_j^1(h^e(\alpha))$ (dla spójników 1-argumentowych ξ_j^1)
- $h^e(\xi_j^2(\alpha, \beta)) = \xi_j^2(h^e(\alpha), h^e(\beta))$ (dla spójników 2-argumentowych ξ_j^2).

Regułę **podstawiania za zmienne zdaniowe** można wtedy określić następująco: α_2 powstaje z α_1 przez podstawienie (formuł ze zbioru X za zmienne zdaniowe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $e : V \rightarrow X$ taka, że $\alpha_2 = h^e(\alpha_1)$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Twierdzenie 5.12. Relacja konsekwencji wyznaczona przez reguły \mathcal{R} ma następujące własności:

- (1) Jeśli $n < m$, to $C_{\mathcal{R}}^n(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}^m(X)$.
- (2) $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(Y)$.
- (3) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R}) \rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
- (4) $((P, \alpha) \in R \wedge R \in \mathcal{R} \wedge P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)) \rightarrow \alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Uwaga. Z 5.12.(2). wynika, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest iloczynem wszystkich zbiorów zawierających X i domkniętych ze względu na reguły z \mathcal{R} . Zatem $C_{\mathcal{R}}(X)$ można tak właśnie definiować.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Twierdzenie 5.12. (ciąg dalszy).

- (5) $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
- (6) $X \subseteq Y \rightarrow C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
- (7) $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \rightarrow C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
- (8) $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
- (9) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (10) $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
- (11) Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny \mathcal{X} zachodzi alternatywa $X \subseteq Y \vee Y \subseteq X$, to:
 $C_{\mathcal{R}}(\bigcup \{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}.$

Symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza moc zbioru X , a \aleph_0 jest mocą zbioru \mathcal{N} , jak wiesz ze [Wstępu do matematyki](#).

Reguły dopuszczalne

Zbiór $Perm(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł **dopuszczalnych** ze względu na X i \mathcal{R} definiujemy następująco:

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Twierdzenie 5.13.

$R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

Reguła R jest zatem dopuszczalna ze względu na X oraz \mathcal{R} wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na tę regułę.

Reguły wyprowadzalne

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł **wyprowadzalnych** ze względu na X i \mathcal{R} definiujemy następująco:

$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Twierdzenie 5.14.

- (1) $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł \mathcal{R}' : $C_{R \cup \mathcal{R}' \cup \{r\}}(X \cup Y) \subseteq C_{R \cup \mathcal{R}'}(X \cup Y)$.
- (2) $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (3) Istnieją: \mathcal{R} oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.
- (4) $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (5) $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.
- (6) $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap \{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.

Reguły strukturalne

Reguła R jest regułą **strukturalną** w S wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego $e : V \rightarrow S$ także sekwent $(h^e[X], h^e(\alpha))$ należy do R .

Reguła strukturalna to zatem, intuicyjnie (i niezbyt precyzyjnie) mówiąc, reguła zawierająca wszelkie sekwenty (X, α) będące podstawieniami jakiegokolwiek sekwentu z tej reguły.

W prezentowanym tu aksjomatycznym opisie KRZ reguły wnioskowania są strukturalne. Usprawiedliwia to zatem zapisywanie tych reguł schematycznie, np. reguły odrywania w postaci:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}.$$

Ogólne pojęcie konsekwencji

Można rozważyć jeszcze ogólniejsze pojęcie konsekwencji, niezrelatywizowane do zbioru reguł \mathcal{R} . Niech $\overline{S} \leq \aleph_0$. Powiemy, że funkcja $C : 2^S \rightarrow 2^S$ jest **operacją konsekwencji** w J , gdy spełnione są następujące warunki, dla dowolnych $X, Y \in 2^S$:

- (C1) $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)
- (C2) jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)
- (C3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)
- (C4) $C(X) \subseteq \bigcup \{C(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{Y} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

Takie rozumienie operacji konsekwencji zaproponowane było przez **Alfreda Tarskiego**.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Ogólna relacja konsekwencji $\vdash \subseteq 2^S \times S$ w S określona jest dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ przez warunki:

- (\vdash 1) $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$
- (\vdash 2) jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$
- (\vdash 3) jeśli dla każdej $\beta \in Y$ $X \vdash \beta$ oraz $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$
- (\vdash 4) jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje Y taki, że: $Y \subseteq X$, $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ oraz $Y \vdash \alpha$.

Operacje i relacje konsekwencji są wzajemnie przez siebie definiowalne:

(★) $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(X)$

(tj. dla każdej \vdash istnieje C taka, że (★), a także dla każdej C istnieje \vdash taka, że (★)).

Ogólne pojęcie konsekwencji

Powiemy, że operacja C_2 jest **nadkonsekwencją** operacji C_1 (wtedy mówimy, że C_1 jest **podkonsekwencją** operacji C_2 i piszemy $C_1 \preceq C_2$), gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, dla każdego $X \in 2^S$.

Relacja \preceq jest częściowym porządkiem w zbiorze \mathcal{C}_S wszystkich operacji konsekwencji określonych na S . Jeśli $\{C_t : t \in T\}$ jest dowolną rodziną operacji konsekwencji na S , to określamy **kres dolny** $\bigwedge\{C_t : t \in T\}$ oraz **kres górny** $\bigvee\{C_t : t \in T\}$:

- $\bigwedge\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$
- $\bigvee\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap_{t \in T} \{C(X) : C_t \preceq C\}$.

Układ (\mathcal{C}_S, \preceq) jest **kratą zupełną**. Co to krata zupełna wiesz ze **Wstępu do matematyki**.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Punkty stałe operacji C , tj. zbiory X , dla których zachodzi równość $C(X) = X$ nazywane są **teoriami dedukcyjnymi** (w języku J z operacją C).

Każda operacja konsekwencji określona warunkami (C1)-(C4) ma następującą własność:

- $C(X) = \bigcap \{Y : X \subseteq Y \wedge C(C(Y)) = Y\}$.

Każda ogólna relacja konsekwencji \vdash określona warunkami ($\vdash 1$)-($\vdash 4$) ma własność:

- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap \{Y \in D_{\vdash} : X \subseteq Y\}$

gdzie $D_{\vdash} = \{X \subseteq S : \alpha \in X \equiv X \vdash \alpha\}$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Będziemy wielokrotnie w tych wykładach przywoływać oba wymienione ogólne rozumienia konsekwencji. Wyliczmy jeszcze niektóre podstawowe własności mogące przysługiwać operatorom konsekwencji:

Konsekwencja C jest **niesprzeczna**, gdy $C(\emptyset) \neq S$.

Konsekwencja C jest **zupełna**, gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdej $\alpha \notin C(\emptyset)$.

Konsekwencja C jest **maksymalna** w rodzinie \mathcal{C}_S , gdy nie istnieje niesprzeczna konsekwencja C' taka, że $C \preceq C'$ oraz $C \neq C'$. Konsekwencje maksymalne to dokładnie wszystkie niesprzeczne konsekwencje zupełne.

Konsekwencja C jest **zwarta**, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: jeśli $C(X) = S$, to istnieje skończony zbiór Y taki, że $Y \subseteq X$ oraz $C(Y) = S$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Konsekwencja C jest **strukturalna**, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $e : V \rightarrow S$ zachodzi inkluzja: $h^e[C(X)] \subseteq C(h^e[X])$.

Konsekwencja C (wyznaczona przez jakiś zbiór reguł) jest **strukturalnie zupełna**, gdy każda reguła strukturalna i dopuszczalna ze względu na C jest wyprowadzalna ze względu na C .

Złożenie $C_1 \circ C_2$ dwóch operatorów konsekwencji określone wzorem $C_1 \circ C_2(X) = C_1(C_2(X))$ nie musi być operatorem konsekwencji. Następujące warunki są równoważne:

- $C_1 \circ C_2 \in \mathcal{C}_S$
- $C_1 \circ C_2 = \bigvee \{C_1, C_2\}$
- $C_1 \circ C_2(C_1 \circ C_2(X)) \subseteq C_1 \circ C_2(X)$
- $C_2 \circ C_1 \preceq C_1 \circ C_2$.

Ogólne pojęcie konsekwencji

Omawiana w tym wykładzie relacja konsekwencji syntaktycznej dla KRZ jest relacją \vdash_{krz} wyznaczoną przez zbiór Ax aksjomatów KRZ oraz jednoelementowy zbiór $\{RO\}$ reguł pierwotnych KRZ:

$X \vdash_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód α w oparciu o aksjomaty Ax , założenia X oraz regułę RO .

Odpowiadająca jej operacja konsekwencji w KRZ to funkcja $C^{KRZ} : 2^{F_{KRZ}} \rightarrow F_{KRZ}$ zdefiniowana wzorem:

$$C^{krz}(X) = \{\alpha \in F_{KRZ} : X \vdash_{krz} \alpha\}.$$

Ćwiczenie. Pokaż, że C^{krz} spełnia warunki (C1)-(C4).

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

$$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \quad (\text{reguła komutacji (RKom)})$$

$$1. \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

założenie

$$2. \quad (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$$

(A1): $\alpha/\beta, \beta/\alpha \rightarrow \beta, \gamma/\alpha \rightarrow \gamma$

$$3. \quad \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

(A3): $\alpha/\beta, \beta/\alpha$

$$4. \quad ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

RO: 2,3

$$5. \quad ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))) \rightarrow \\ \rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

(A1): $\alpha/\alpha \rightarrow \beta, \beta/(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma), \gamma/\alpha \rightarrow \gamma$

Czytaj dalej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

6. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(A1)
7. $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
RO: 5,6
8. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$
(A1): $\beta/\beta \rightarrow \gamma, \gamma/\alpha \rightarrow \gamma$
9. $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
RO: 8,1
10. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
(A2): β/γ

Czytaj dalej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

11. $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow$
 $\rightarrow (((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$
 (A1): $\alpha/(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$, $\beta/\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$, $\gamma/\alpha \rightarrow \gamma$
12. $((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
 RO: 11,9
13. $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 RO: 12,10
14. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 RO: 7,13
15. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 RO: 4,14.

W dowodzie korzystano tylko z aksjomatów oraz reguły pierwotnej.

Ćwiczenie 1: reguła komutacji (RKom)

Przy zastosowaniu Twierdzenia o Dedukcji Wprost dowód wyprowadzalności reguły komutacji polega na udowodnieniu, że: $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$ i sprowadza się do dwóch użyczeń reguły odrywania:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ założenie
2. α założenie
3. β założenie
4. $\beta \rightarrow \gamma$ RO: 1,2
5. γ RO: 4,3.

Jest to, jak łatwo zauważyć, także dowód tezy (T8). Przykład ten pokazuje jak przydatnym środkiem dowodowym jest Twierdzenie o Dedukcji.

Ćwiczenie 1: reguła poprzedzania (Rp)

$$\{\alpha\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \alpha$$

(reguła poprzedzania (RPp))

1. α założenie
2. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ (A3)
3. $\beta \rightarrow \alpha$ RO: 2,1.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T4)

(T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

(mocne prawo podwójnego przeczenia)

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha))$ | (T3): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg(\alpha \rightarrow \alpha)$ |
| 2. | $(\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ | (A13): $\alpha/\alpha \rightarrow \alpha, \beta/\alpha$ |
| 3. | $\neg\neg\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ | RSyl: 1,2 |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ | RKom: 3 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \alpha$ | (T1) |
| 6. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | RO: 4,5. |

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T5)

(T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

(słabe prawo podwójnego przeczenia)

1. $\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$

2. $(\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$

3. $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

(T4): $\alpha/\neg\alpha$ (A13): $\beta/\neg\neg\alpha$

RO: 2,1.

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T6)

(T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$

(prawo podwójnego przeczenia)

- | | | |
|----|--|-------------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ | (T5) |
| 2. | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ | (T4) |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \neg\neg\alpha))$ | (A12): $\beta/\neg\neg\alpha$ |
| 4. | $(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \neg\neg\alpha)$ | RO: 3,1 |
| 5. | $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ | RO: 4,2. |

Ćwiczenie 1: dowód tezy (T7)

(T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

(prawo przepięnienia)

1. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ (T3): $\alpha/\neg\alpha$
2. $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ (T5)
3. $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ RSyl: 2,1.

Ćwiczenie 2.1.: (T18)

$$(T18) (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\alpha))$$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost. Pokażemy, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$, $\gamma \rightarrow \neg\beta$, γ oraz $\neg\neg\alpha$ udowodnić można parę zdań wzajemnie sprzecznych.

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\gamma \rightarrow \neg\beta$ założenie
3. γ założenie
4. $\neg\neg\alpha$ założenie
5. $\neg\beta$ RO: 2,3
6. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (T4)
7. α RO: 6,4
8. β RO: 1,7.

Ćwiczenie 2.1.: (T19)

$$(T19) (\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$1. \quad \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

(T3)

$$2. \quad \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

(A3): $\alpha/\beta, \beta/\alpha$

$$3. \quad (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$$

(A9): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\alpha \rightarrow \beta, \gamma/\beta$

$$4. \quad (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

RO: 3,1

$$5. \quad (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

RO: 4,2.

Ćwiczenie 2.1.: prawo eksportacji

(T20) $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ (prawo eksportacji)

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Zachodzi ciąg równoważności: $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ jest tezą wttw, gdy $\emptyset \vdash_{krz} (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash_{krz} \beta \rightarrow \gamma$ wttw, gdy $\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$. Wystarczy więc udowodnić, że: $\{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha, \beta\} \vdash_{krz} \gamma$.

1. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ założenie
2. α założenie
3. β założenie
4. $\alpha \wedge \beta$ DK: 2,3
5. γ RO: 1,4.

Ćwiczenie 2.1.: prawo importacji

(T21) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ (prawo importacji)

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy udowodnić, że:
 $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \wedge \beta\} \vdash_{krz} \gamma$.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ założenie
2. $\alpha \wedge \beta$ założenie
3. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ (A4)
4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$ (A5)
5. α RO: 3,2
6. β RO: 4,2
7. $\beta \rightarrow \gamma$ RO: 1,5
8. γ RO: 7,6.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — pierwszy dowód

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

(wersja prawa Dunska Scotusa)

1. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(A13)
2. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
(A3): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg\beta$
3. $(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$
(A1): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \gamma/\alpha \rightarrow \beta$
4. $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
RO: 3,2
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
RO: 4,1.

To (podany wcześniej) dowód wykorzystujący tylko aksjomaty i regułę pierwotną.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — drugi dowód

$$(T3) \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

(wersja prawa [Dunsa Scotusa](#))

Zamiast przeprowadzać powyższy pedantyczny dowód warto skorzystać z reguły wtórnej:

1. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (A13)
2. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (A3): $\alpha/\neg\alpha, \beta/\neg\beta$
3. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ RSyl: 2,1.

Ćwiczenie 2.1.: (T3) — trzeci dowód

(T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (wersja prawa [Dunsa Scotusa](#))

Można też skorzystać z poprzednio udowodnionych tez (tu: (T7) i (T8)):

1. $(\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ (T8): $\beta/\neg\alpha, \gamma/\beta$
2. $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ (T7)
3. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ RO: 1,2.

Ćwiczenie 2.2. (a)

$$\{\alpha \equiv \beta, \beta\} \vdash_{krz} \alpha$$

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $\alpha \equiv \beta$ | założenie |
| 2. | β | założenie |
| 3. | $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ | (A12) |
| 4. | $\beta \rightarrow \alpha$ | RO: 3,1 |
| 5. | α | RO: 4,2. |

Ćwiczenie 2.2. (b)

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy pokazać, że:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \wedge \gamma\} \vdash_{krz} \beta \vee \delta.$$

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\gamma \rightarrow \delta$ założenie
3. $\alpha \wedge \gamma$ założenie
4. $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \alpha$ (A4): β/γ
5. α RO: 4,3
6. β RO: 1,5
7. $\beta \rightarrow (\beta \vee \delta)$ (A7): $\alpha/\beta, \beta/\delta$.

Ćwiczenie 2.2. (c)

$$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash_{krz} (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Wprost. Wystarczy pokazać, że:
 $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \wedge \gamma\} \vdash_{krz} \beta \vee \delta$.

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\alpha \wedge \gamma$ założenie
3. $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \alpha$ (A4): β/γ
4. α RO: 3,2
5. β RO: 1,4
6. $\beta \rightarrow (\beta \vee \delta)$ (A7): $\alpha/\beta, \beta/\delta$
7. $\beta \vee \delta$ RO: 6,5.

Ćwiczenie 2.2. (d)

$$\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$$

Korzystamy z Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost. Pokażemy, że $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta), \alpha, \neg\beta\} \vdash_{krz} \{\gamma, \neg\gamma\}$ dla pewnej formuły γ .

1. $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ założenie
2. α założenie
3. $\neg\beta$ założenie
4. $\alpha \wedge \neg\beta$ (DK): 2,3

W wierszach 1 i 4 mamy parę formuł wzajem sprzecznych. Zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost, $\{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)\} \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.

Ćwiczenie 3 (a)

$$(a) (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że

$h((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta))) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \rightarrow \gamma) = 1$.
- $h((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta)) = 0$, czyli $h((\alpha \vee \beta) = 1$ oraz $h(\gamma \vee \beta) = 0$.
- Z $h(\gamma \vee \beta) = 0$ mamy: $h(\gamma) = 0$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \vee \beta) = 1$ oraz $h(\beta) = 0$, to $h(\alpha) = 1$.
- Skoro $h(\alpha \rightarrow \gamma) = 1$ oraz $h(\gamma) = 0$, to $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Trzeba odrzucić przypuszczenie, że $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$ **nie** jest tautologią.

Skoro $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (b)

$$(b) (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że

$$h((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))) = 0. \text{ Stąd:}$$

- $h(\alpha \rightarrow \beta) = 1$
- $h(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) = 0$, czyli $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\beta \vee \gamma) = 0$
- Skoro $h(\beta \vee \gamma) = 0$, to $h(\beta) = 0$ oraz $h(\gamma) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ i $h(\beta) = 0$, to $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Trzeba odrzucić przypuszczenie, że $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ **nie** jest tautologią.

Skoro $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (c)

$$(c) (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))) = 0$.

Stąd:

- $h(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$ oraz $h((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)) = 0$.
- Skoro $h((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)) = 0$, to $h(\beta \wedge \gamma) = 1$ oraz $h(\alpha \wedge \gamma) = 0$.
- Skoro $h(\beta \wedge \gamma) = 1$, to $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$. Zatem $h(\neg\beta) = 0$
- Skoro $h(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$ i $h(\neg\beta) = 0$, to $h(\neg\alpha) = 0$, czyli $h(\alpha) = 1$.
- Skoro $h(\alpha \wedge \gamma) = 0$ i $h(\alpha) = 1$, to $h(\gamma) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przy założeniu, że $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (d)

(d) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ oraz $h(\beta \rightarrow \alpha) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \rightarrow \beta) = 0$, to $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\beta \rightarrow \alpha) = 0$, to $h(\beta) = 1$ i $h(\alpha) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność (nawet dwie; jedna wystarczy, pamiętasz: **raz ładacznicą, zawsze ładacznicą**). Przypuszczenie, że $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (e)

$$(e) ((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h(((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)) = 0$.

Stąd:

- $h((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) = 1$ oraz $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta) = 0$.
- Skoro $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta) = 0$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$ i $h(\beta) = 0$.
- Skoro $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$, to $h(\alpha) = 1$ i $h(\gamma) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$, $h(\beta) = 0$ i $h(\gamma) = 1$, to: $h(\neg\gamma) = 0$, $h(\neg\beta) = 1$, $h(\alpha \wedge \neg\beta) = 1$. Zatem $h((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) = 0$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypuszczenie, że $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $((\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Ćwiczenie 3 (f)

$$(f) (\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$$

Pokażemy, że powyższa formuła jest tautologią. Przypuśćmy, że nie jest. Istnieje wtedy wartościowanie h takie, że $h((\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))) = 0$. Stąd:

- $h(\alpha \equiv \beta) = 1$ i $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 0$.
- Skoro $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 0$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$, a więc $h(\alpha) = 1$ oraz $h(\gamma) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$ i $h(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $h(\beta) = 1$.
- Skoro $h(\alpha) = 1$, $h(\beta) = 1$ i $h(\gamma) = 1$, to $h(\alpha \wedge \gamma) = 1$ oraz $h(\beta \wedge \gamma) = 1$. W konsekwencji, $h((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 1$.
- Otrzymaliśmy sprzeczność. Przypuszczenie, że $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ **nie** jest tautologią trzeba odrzucić.

Skoro $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ jest tautologią, to na mocy Twierdzenia o Pełności jest też tezą KRZ.

Niektóre często używane tezy KRZ

Dowody tez (T1)-(T21) przedstawiono w tej prezentacji. Zachęcam do samodzielnego udowodnienia pozostałych tez.

- (T1) $\alpha \rightarrow \alpha$ prawo tożsamości
- (T2) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- (T3) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ wersja prawa Dunsza Scotusa
- (T4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ mocne prawo podwójnego przeczenia
- (T5) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ słabe prawo podwójnego przeczenia
- (T6) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ prawo podwójnego przeczenia
- (T7) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ prawo przepelnienia (pr. Dunsza Scotusa)
- (T8) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo komutacji
- (T9) $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (słabe) prawo transpozycji
- (T10) $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ (słabe) prawo Claviusa

Niekłóre często używane tezy KRZ

- (T11) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ pr. dylematu konstrukcyjnego
- (T12) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ prawo transpozycji prostej
- (T13) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ prawo niesprzeczności
- (T14) $\alpha \vee \neg\alpha$ prawo wyłączonego środka
- (T15) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ prawo koniunkcji
- (T16) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$
- (T17) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$
- (T18) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\alpha))$
- (T19) $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (T20) $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji
- (T21) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ prawo importacji

Niektóre często używane tezy KRZ

Dowody ok. 300 tez KRZ znaleźć można w monografii
W.A. Pogorzelskiego: **Klasyczny rachunek zdań.**

- $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (mocne) prawo Claviusa
- $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo Fregego
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ prawo redukcji do absurdu
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$ prawo modus ponendo ponens
- $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$ prawo tollendo ponens
- $(\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \neg\beta$ prawo ponendo tollens
- $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta))$ prawo rugowania implikacji
- $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ wyrażanie \rightarrow przez \neg i \vee
- $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ wyrażanie \rightarrow przez \neg i \wedge

Niektóre często używane tezy KRZ

- $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ prawo Peirce'a
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ prawo de Morgana
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ prawo de Morgana
- $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ (mocne) prawo kontrapozycji
- $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$ prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ prawo negowania implikacji
- $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ prawo negowania implikacji
- $\alpha \equiv (\alpha \wedge \alpha)$ prawo tautologii
- $\alpha \equiv (\alpha \vee \alpha)$ prawo tautologii

Niekłóre często używane tezy KRZ

- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\beta \equiv \alpha)$ prawo przemienności
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ prawo nowego czynnika
- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$ prawo nowego składnika
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)) \equiv ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta)$ pr. łączenia i rozłączenia
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ pr. składania i rozkładania
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \gamma))$ pr. nowego czynnika równoważności
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \equiv (\beta \vee \gamma))$ pr. nowego składnika równoważności
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ wyrażenie \equiv przez \rightarrow i \wedge

Niektóre często używane tezy KRZ

- $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ prawo łączności \wedge
- $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$ prawo łączności \vee
- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ prawo dystrybucji
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ prawo dystrybucji
- $(\alpha \equiv \beta) \equiv (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$ prawo obustronnego negowania \equiv
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \delta)))$ pr. mnożenia \equiv stronami
- $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow ((\gamma \equiv \delta) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \equiv (\beta \vee \delta)))$ pr. dodawania \equiv stronami
- $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \wedge ((\alpha \vee \gamma) \wedge \neg(\beta \wedge \delta)) \rightarrow$
 $\rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \wedge (\delta \rightarrow \gamma))$ prawo Haubera (odwracania implikacji)

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, każdej tezie implikacyjnej odpowiada reguła wtórna KRZ, a każdej regule wtórnej — teza implikacyjna.

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

Wyprowadzalność reguł (1)-(5) wykazano w niniejszej prezentacji.
Zachęcam do pokazania wyprowadzalności pozostałych reguł.

- (1) reguła dołączania koniunkcji (**DK**):

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

- (2) reguła sylogizmu hipotetycznego (**RSyl**):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (3) reguła sylogizmu Fregego (**RFr**):

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

- (4) reguła poprzedzania (**RPp**):

$$\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$$

- (5) reguła komutacji (**RKom**):

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (6) reguła tollendo tollens (**MT**):

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$$

- (7) reguła tollendo ponens:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}$$

- (8) reguła ponendo tollens:

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta), \alpha}{\neg\beta}$$

Niektóre często używane reguły wyprowadzalne

- (9) reguła Dunsza Scotusa:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$

- (10) reguła transpozycji:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}$$

- (11) reguła importacji:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}$$

- (12) reguła eksportacji:

$$\frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}$$

Aksjomatyczne ujęcia KRZ omawiane są szczegółowo np. w:

- Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo UAM, Poznań.
- Czeżowski, T. 1968. *Logika*. PWN, Warszawa.
- Grzegorzczak, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Murawski, R., Świrydowicz, K. 2006. *Podstawy logiki i teorii mnogości*. Wydawnictwo UAM, Poznań.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.
- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Możesz także korzystać z literatury obcojęzycznej. Nie ma zakazu.