5 wykładów dla Studium Doktoranckiego Wydziału Neofilologii UAM

LOGIKA WSPÓŁCZESNA (2): WYBRANE LOGIKI NIEKLASYCZNE

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

1 Wstęp

Poprzedni wykład poświęcony był *Elementarzowi Logicznemu*, czyli klasycznej logice pierwszego rzędu (FOL). Ten system logiczny jest najbardziej podstawowy, stanowi niejako punkt wyjścia do rozważania innych systemów, jest systemem o wielorakich aplikacjach, w różnych dyscyplinach, jest wreszcie powszechnie stosowany w opisach metateoretycznych. Zwróćmy uwagę na dwie cechy FOL:

1. *Dwuwartościowość*. W FOL rozważamy dwie wartości logiczne: prawdę oraz fałsz. Przyjmujemy dogmat o dwuwartościowości logicznej: każde zdanie (w sensie logicznym) przyjmuje dokładnie jedną z tych dwóch wartości logicznych.

2. *Ekstensjonalność*. Konstrukcje językowe badane w FOL są czysto ekstensjonalne: mówiąc w uproszczeniu, wartości logiczne zdań złożonych zależą wyłącznie od wartości logicznych ich części składowych (bardziej precyzyjne sformułowanie otrzymamy, przytaczając indukcyjną definicję pojęcia spełniania formuły przez wartościowanie w interpretacji).

Istnieje bardzo wiele systemów logicznych, które powyższych cech nie posiadają. Każdy system logiczny różny od klasycznego (rachunku zdań i FOL) nazywamy *nieklasycznym*. Tego typu systemy nie spełniają któregoś z powyższych dwóch warunków lub np. ograniczają postać tez w nich wyprowadzalnych:

1. *Logiki wielowartościowe* rozszerzają rozumienie pojęcia wartości logicznej: oprócz prawdy i fałszu dopuszczają np. *możliwość* lub całą skalę wartości pośrednich między prawdą a fałszem.

2. *Logiki modalne* charakteryzują pojęcia *intensjonalne*, takie jak np. *konieczność* oraz *możliwość* zarówno syntaktycznie (przez wybór stosownych aksjomatów i reguł wnioskowania), jak i semantycznie, poprzez uwzględnienie dodatkowych – obok wartości logicznych – czynników (*indeksów*, *światów możliwych*).

3. *Logiki doksastyczne i epistemiczne* charakteryzują w podobny sposób pojęcia: *przekonania* oraz *wiedzy*, uwzględniając przy tym jeszcze dodatkowo parametry odnoszące się do podmiotów żywiących przekonania.

4. *Logika intuicjonistyczna* nie przyzwala, aby zachodziły w niej niektóre tezy logiki klasycznej, m.in. te, które umożliwiają dowody *niekonstruktywne* – jak np. *prawo wyłączonego środka*.

To tylko wybrane przykłady logik nieklasycznych. W ogólności, rozważa się olbrzymią różnorodność takich logik, formalizujących pewne pojęcia oraz rozumowania, wykraczające poza logikę klasyczną. Dalej, rozpatruje się także systemy logiczne, różniące się od logiki klasycznej regułami składniowymi lub ustaleniami, jakiego typu reguły wnioskowania są w nich akceptowalne, np.:

1. *Logiki wyższych rzędów*. W FOL możemy kwantyfikować jedynie zmienne indywiduowe, które wartościowane są jako elementy uniwersum interpretacji. Gdy dopuszczamy kwantyfikację po predykatach i symbolach funkcyjnych, wkraczamy na teren *logiki drugiego rzędu*, a dopuszczając kwantyfikację po bardziej jeszcze złożonych tworach syntaktycznych otrzymujemy *logiki wyższych rzędów*.

2. *Logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami*. FOL wykorzystuje jedynie dwa kwantyfikatory: generalny oraz egzystencjalny. Jest jednak o wiele więcej wyrażeń kwantyfikujących, których składnia i semantyka wykracza poza FOL (np.: kwantyfikatory Q_α, Changa, Härtiga, Reschera, Henkina,. . .) – możemy je potraktować jako dodatkowe stałe logiczne, podając dla nich odpowiednie semantyki.

3. *Logiki infinitarne*. FOL jest logiką *finitarną*: rozważane w niej konstrukcje składniowe są skończone, każda reguła wnioskowania ma zawsze skończoną liczbę przesłanek. Ważne – zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego

punktu widzenia – są również systemy, w których dopuszczamy nieskończone koniunkcje i alternatywy lub akceptujemy reguły wnioskowania z nieskończonymi zbiorami przesłanek.

W tym wykładzie powiemy parę słów na temat logik wielowartościowych, logik modalnych, doksastycznych i epistemicznych oraz logiki intuicjonistycznej (o logice drugiego rzędu, logikach z uogólnionymi kwantyfikatorami oraz logikach infinitarnych powiemy trochę na wykładzie następnym). Tak jak w przypadku wykładu poprzedniego, również ten wykład ma charakter czysto informacyjny a nie dydaktyczny – aby *nauczyć się* operowania systemem logicznym trzeba *samodzielnie* rozwiązać, powiedzmy, kilkaset zadań, przeczytać cały podręcznik oraz wysłuchać choćby propedeutycznego wykładu.

2 Logiki wielowartościowe

Spróbujmy zastanowić się nad oceną prawdziwości następujących wyrażeń:

1. Sześć tysięcy lat temu $\sqrt{2}$ był liczbą wymierną.
2. Król Salomon był synem króla Dawida.
3. Pojutrze odwalę kitę.
4. Za tysiąc lat $\sqrt{2}$ będzie liczbą niewymierną.

Jest dość oczywiste, że pewne zdania mówiące o przeszłości lub przyszłości mają *dzisiaj* ustalone wartości logiczne – np. zdanie 1 jest fałszywe, a zdanie 4 jest prawdziwe. Ustalenie wartości logicznej zdań mówiących o przeszłości może być dzisiaj łatwe lub trudne, zależnie od dostępnych świadectw historycznych. Natomiast ustalenie wartości logicznej zdań mówiących o przyszłości jest – w ogólności – po części *zgadywaniem*. Jeśli przyczyny zdarzenia przyszłego sięgają dnia dzisiejszego lub wcześniejszego, to takie zgadywanie może mieć w miarę racjonalne podstawy. Gdy natomiast tak nie jest, to skłaniamy się do mówienia, że dane zdarzenie przyszłe jest *możliwe*, ale że *możliwe* jest także, iż zdarzenie to nie będzie miało miejsca. Chcąc zatem oceniać pod względem logicznym zajście takich zdarzeń musimy wzbogacić zestaw klasycznych wartości logicznych o dodatkową wartość (*możliwość*), lub o cały zestaw takich wartości (powiedzmy, stopnie prawdopodobieństwa). Dodatkowym argumentem za koniecznością takiego rozszerzenia rozumienia pojęcia wartości logicznej może być stanowisko *indeterminizmu*, przejawiające się m.in. w przekonaniu, iż istnieje coś takiego jak *wolna wola*, że nie wszystkie zdarzenia przyszłe są już w chwili obecnej (lub wcześniej) całkowicie zdeterminowane. W istocie, takie właśnie poglądy inspirowały Jana Łukasiewicza, twórcę (obok Emila Posta) pierwszych logik wielowartościowych. Poniżej nie dokonujemy żadnego kompletnego przeglądu logik wielowartościowych – zainteresowany czytelnik zechce sięgnąć w tym celu np. do monografii Malinowski 2006. Podamy jedynie kilka faktów dotyczących wybranych logik wielowartościowych.

Przy omawianiu systemów Łukasiewicza posłużymy się – dla celów poglądowych – jego notacją, zwaną też notacją *polską*. W tym sposobie zapisu formuł symbol funktora poprzedza symbole jego argumentów. Dzięki temu zbędne stają się nawiasy – każda formuła zapisana w notacji polskiej ma jednoznaczną strukturę składniową.

Notacja infiksowa	Notacja polska
$\neg\alpha$	$N\alpha$
$\alpha \wedge \beta$	$K\alpha\beta$
$\alpha \vee \beta$	$A\alpha\beta$
$\alpha \rightarrow \beta$	$C\alpha\beta$
$\alpha \equiv \beta$	$E\alpha\beta$

Oto kilka formuł zapisanych w obu notacjach:

Notacja infiksowa	Notacja polska
$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$	$AK\alpha\beta\gamma$
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$K\alpha A\beta\gamma$
$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	$CKC\alpha\beta N\beta N\alpha$
$(\neg((\alpha \wedge \beta) \equiv \gamma) \vee \delta) \rightarrow \varepsilon$	$CANEK\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$
$\neg((((\alpha \rightarrow \alpha) \vee \alpha) \wedge \alpha) \equiv \alpha)$	$NEKAC\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$

Słuchacze zechcą sprawdzić, że formuły z lewej kolumny mają takie samo drzewo składniowe, jak odpowiadające im formuły z kolumny prawej. Ponadto, proszę zastanowić się nad następującymi problemami:

1. Jak opisać algorytm przekładu notacji infiksowej na notację polską (oraz przekładu odwrotnego)?

2. Języki etniczne wykorzystują notację infiksową. Dlaczego właśnie ta notacja, a nie notacja polska jest preferowana w codziennej komunikacji?

2.1 Logika trójwartościowa Łukasiewicza

Logikę trójwartościową podał Łukasiewicz z początku w postaci *matrycowej*, dopiero później została ona opisana aksjomatycznie. Rozważmy zatem trzy wartości logiczne: 0 (*fałsz*), 1 (*prawda*), $\frac{1}{2}$ (trzecia wartość – *możliwość*, lub *niezdeterminowanie*). Wyjściowe w tym systemie są spójniki negacji (N) oraz implikacji (C). Ich tabliczki prawdziwościowe wyglądają następująco (odtąd dla spójników dwuargumentowych przyjmujemy następującą zasadę ich opisu: wartość logiczna pierwszego argumentu w pierwszej kolumnie, drugiego – w pierwszym wierszu, a wartość formuły o tych argumentach – na przecięciu odpowiedniego wiersza i kolumny):

α	$N\alpha$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

C	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Pozostałe funktory wprowadza Łukasiewicz za pomocą definicji:

$$\begin{array}{lll} A\alpha\beta & =_{df} & CC\alpha\beta\beta \\ K\alpha\beta & =_{df} & NAN\alpha N\beta \\ E\alpha\beta & =_{df} & KC\alpha\beta C\beta\alpha \end{array}$$

Tabliczki prawdziwościowe dla tych funktorów przyjmują postać:

A	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

K	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

E	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Warto może w tym miejscu poczynić następujące uwagi:

1. Jeśli wykreślić z powyższych tabliczek wiersz i kolumnę dla wartości $\frac{1}{2}$, to otrzymamy tabliczki prawdziwościowe dla klasycznej dwuwartościowej logiki zdaniowej.

2. Nie jest konieczne interpretowanie powyższych trzech wartości rachunkowo, jak liczb – trzy wartości logiczne w tym systemie mają być po prostu trzema różnymi przedmiotami. Interpretacja arytmetyczna ma swoje zalety (zwłaszcza w logikach o większej liczbie wartości logicznych), gdyż pozwala na proste rachunkowo wzory opisujące semantykę stosownych funktorów.

Pojęcie tautologii, kontrtautologii oraz inne pojęcia semantyczne określa się dla tego systemu standardowo. Należy zauważyć, że zbiory tautologii klasycznego dwuwartościowego rachunku zdań i omawianego właśnie systemu zasadniczo się różnią. Dla przykładu, ani prawo wyłączonego środka ($ApNp$) ani prawo niesprzeczności ($NKpNp$), które są tautologiami klasycznymi, nie są tautologiami tego systemu. Z kolei, klasyczna kontrtautologia $EpNp$ w systemie logiki trójwartościowej Łukasiewicza nie jest kontrtatutologią. Wszystkie te fakty uzasadniamy rozważając wartościowanie, które zmiennej zdaniowej p przyporządkowuje wartość $\frac{1}{2}$.

Łukasiewicz chciał mieć możliwość wyrażenia w tym systemie funktorów *konieczności* oraz *możliwości* (w jego notacji, odpowiednio: L oraz M), przy zachowaniu ich wzajemnej definiowalności:

$$L\alpha =_{df} NMN\alpha.$$

Przy tym, zachowane miały być w tej logice pewne „naturalne”, „oczywiste” twierdzenia o zdaniach modalnych, jak np.:

1. $CNM\alpha N\alpha$
2. $CN\alpha CN\alpha NM\alpha$
3. $KM\alpha MN\alpha$ dla pewnych α.

Definicję funktora możliwości M, spełniającego w tej logice powyższe trzy warunki podał Tarski:

$$M\alpha =_{df} CN\alpha\alpha.$$

Przy tej definicji tabelki dla M oraz L wyglądają następująco:

α	$M\alpha$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	1

α	$L\alpha$
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

Ponadto, zdefiniować również można funktor *jest przypadkowe*:

$$I\alpha =_{df} KM\alpha NL\alpha,$$

którego tabliczka przedstawia się wtedy następująco:

α	$I\alpha$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	0

W terminach tego funktora zapisać można m.in. odpowiedniki prawa wyłączonego środka oraz prawa niesprzeczności dla rozważanej logiki, odpowiednio:

1. $ApAIpNp$
2. $NKpKNIpNp$.

Nie wdając się w szczegóły techniczne (dotyczące tzw. *pełności definicyjnej*) powiemy tylko, że w powyższym systemie logiki trójwartościowej nie można zdefiniować (w terminach C oraz N) funktora stałego, który dawałby wartość $\frac{1}{2}$ dla każdej z trzech wartości swojego argumentu. Słupecki uzupełnił system Łukasiewicza dodając właśnie ten funktor T:

α	$T\alpha$
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$

Aksjomatykę dla implikacyjno-negacyjnego trójwartościowego rachunku zdań Łukasiewicza podał Wajsberg. Obowiązują w niej reguły: podstawiania i odrywania oraz następujące cztery aksjomaty:

1. $CpCqp$
2. $CCpqCCqrCpr$
3. $CCNpNqCqp$
4. $CCCpNppp$.

Dla systemu z funktorem Słupeckiego dodaje się jeszcze dwa aksjomaty:

1. $CTpNTp$
2. $CNTpTp$.

2.2 Logiki n-wartościowe Łukasiewicza

Analogicznie jak w przypadku trójwartościowym określać możemy matryce dla logik n-wartościowych, gdzie $n \geqslant 3$. Zbiór wartości logicznych logiki n-wartościowej wygodnie jest – dla celów rachunkowych – utożsamiać ze zbiorem liczb

$$\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}.$$

Element 1 stanowi tu wartość *wyróżnioną* (można nazywać ją *prawdą*). Tabliczki prawdziwościowe dla funktorów N, C, A, K, E tego systemu podać można wtedy w postaci następującej (tu $\min$, $\max$, $|\ |$ oznaczają kolejno: minimum, maksimum oraz wartość bezwzględną, a funktory A, K, E są definiowane przez N oraz C dokładnie tak samo, jak w przypadku omówionym wyżej):

1. $Nx = 1 - x$
2. $Cxy = \min(1, 1 - x + y)$
3. $Axy = \max(x, y)$
4. $Kxy = \min(x, y)$
5. $Exy = 1 - |x - y|$.

Można próbować wiązać jakieś intuicje z pozostałymi – oprócz fałszu i prawdy – wartościami wybranej logiki n-wartościowej. Operowanie takimi *ćwierćprawdami*, *półprawdami*, itd. może jednak wydawać się podejrzane (epistemologicznie). Niezależnie od ewentualnych zastosowań, logiki n-wartościowe wyposażone są w ciekawe struktury algebraicznie, charakteryzujące ich semantykę. Ustalać można też zależności między poszczególnymi takimi logikami oraz własności takich logik zależne od tego, jakie własności arytmetyczne ma liczba wartości logicznych. Dla przykładu:

1. Każda tautologia logiki n-wartościowej Łukasiewicza jest też tautologią klasyczną.
2. Dla dowolnych m oraz n następujące warunki są równoważne:
   (a) Każda tautologia logiki n-wartościowej Łukasiewicza jest tautologią logiki m-wartościowej Łukasiewicza.
   (b) $m - 1$ dzieli $n - 1$.

2.3 Logiki nieskończenie wielowartościowe Łukasiewicza

Rozważa się np. logikę o $\aleph_0$ wartościach logicznych (możemy reprezentować je np. przez liczby wymierne z przedziału jednostkowego $[0, 1]$) oraz logikę o kontinuum wartości (możemy reprezentować je np. przez liczby rzeczywiste z przedziału jednostkowego $[0, 1]$). W każdym z tych przypadków 1 odpowiada wartości wyróżnionej, a pozostałe liczby można interpretować – dla przykładu – jako stopnie prawdopodobieństwa, albo jeszcze inaczej, zależnie co się komu marzy.

Tabliczki prawdziwościowe poszczególnych funktorów są w przypadku obu tych logik nieskończenie wartościowych podane dokładnie tymi samymi wzorami, co w przypadku logik n-wartościowych:

1. $Nx = 1 - x$
2. $Cxy = \min(1, 1 - x + y)$
3. $Axy = \max(x, y)$
4. $Kxy = \min(x, y)$
5. $Exy = 1 - |x - y|$.

Aksjomatyczne ujęcie logiki $\aleph_0$-wartościowej polegać może na przyjęciu reguł podstawiania i odrywania oraz aksjomatów:

1. $CpCqp$
2. $CCpqCCqrCpr$
3. $CCNpNqCqp$
4. $CCCpqqCCqpp$.

Do ciekawych zależności semantycznych dotyczących logik nieskończenie wielowartościowych Łukasiewicza należą np.:

1. Zbiór tautologii logiki $\aleph_0$-wartościowej Łukasiewicza pokrywa się ze zbiorem tautologii logiki wielowartościowej Łukasiewicza o kontinuum wartości logicznych.
2. Zbiór tautologii logiki $\aleph_0$-wartościowej Łukasiewicza pokrywa się z przekrojem zbiorów tautologii wszystkich n-wartościowych logik Łukasiewicza.

3 Logiki modalne

Spróbujmy zastanowić się nad oceną prawdziwości następujących wyrażeń:

1. Wprowadzenie stanu wojennego w PRL było konieczne.
2. Możliwe, że jutro odwalę kitę.
3. Musisz się ze mną ożenić.

4. Papież nie może być kobietą.
5. Jest konieczne, iż $2 + 2 = 4$.
6. Nie jest wykluczone, że przestrzeń ma strukturę dyskretną („ziarnistą"), a nie ciągłą.

Próbując uzasadniać, że pewne z powyższych zdań miałyby być *prawdziwe*, inne zaś *fałszywe* sięgniemy zapewne do różnorakich argumentów. Inaczej będziemy argumentować, gdy rozmawiamy o jakiejś konieczności *fizycznej*, związanej ze strukturą świata, a inaczej, gdy będziemy mieli na uwadze konieczność rozumianą np. jako podanie niepodważalnego dowodu matematycznego.

Pojęcia *konieczności* i *możliwości* (oraz pojęcia przez nie definiowane, np. *niemożliwości*) istotnie rozumieć można na wiele – jak się okazuje nawet na nieskończenie wiele – różnorakich sposobów. Funktory konieczności i możliwości nie są *ekstensjonalne*, są *intensjonalne*. Rozważmy taki oto przykład:

1. Układ Słoneczny liczy osiem planet.
2. Jest konieczne, że Układ Słoneczny liczy osiem planet.

Pierwsze zdanie jest (faktualnie, w 2011 roku) prawdziwe. Nie jest to jednak prawda *konieczna* – być może planet w naszym układzie było kiedyś więcej, uważamy też za *możliwe*, że układ ten miałby tylko siedem planet – przecież nie wykluczamy sytuacji, że zbiorowym wysiłkiem szaleńców doprowadzimy do rozpadu Ziemi. Do 2006 roku uważano, że planet w naszym układzie jest dziewięć – obecnie Plutona nie uważa się już za planetę.

Próbując określać własności semantyczne wyrażeń zawierających funktory modalne bierzemy pod uwagę coś więcej niż to, co wystarcza w analizie logiki klasycznej. Bierzemy mianowicie pod uwagę nie jedno tylko („rzeczywiste") odniesienie przedmiotowe, ale całą różnorodność *punktów odniesienia*, *„światów możliwych"*.

Zauważmy też, że chociaż pierwsze z podanych niżej zdań uznamy za prawdziwe, niezależnie od tego kto, kiedy i gdzie je wygłosił, to opatrzenie tego zdania funktorem konieczności powoduje, że całość traci ową niezależną od kontekstu prawdziwość:

1. Jestem tu teraz.
2. Jest konieczne, że jestem tu teraz.

W logice nie interesujemy się bezpośrednio jakkolwiek rozumianą koniecznością *fizyczną* (powiedzmy, odzwierciadlającą jakoś *prawidłowości* natury). Interesują nas raczej związki *inferencyjne* – staramy się charakteryzować reguły wnioskowania, mające szczególne własności: np. zachowujące prawdziwość (dające prawdziwy wniosek przy prawdziwych przesłankach), chociaż możemy także ograniczać się do czysto syntaktycznych własności reguł wnioskowania, nie wspominając wcale o prawdzie. W logikach modalnych próbujemy zatem scharakteryzować sposoby wnioskowania zawierające wyrażenia z funktorami modalnymi. Na drodze syntaktycznej uzyskujemy takie opisy np. poprzez stosowne systemy aksjomatyczne. Na drodze semantycznej także mamy kilka możliwości opisu; poniżej wspomnimy o jednej z nich (o *semantyce Kripke'go*).

Osobnym problemem w logikach modalnych jest sprawa rozumienia *iteracji* modalności. Istotnie, można się przecież zastanawiać, cóż miałoby znaczyć *Jest konieczne, że jest konieczne, że* α. Czy znaczy to coś istotnie różnego od wyrażenia *Jest konieczne, że* α? A cóż miałby znaczyć jakiś dłuższy jeszcze ciąg modalności, powiedzmy: *Jest konieczne, że jest możliwe, że jest konieczne, że nie jest możliwe, że nie jest konieczne, że jest możliwe, że* α? Jak zobaczymy, w pewnych systemach modalnych istnieje tylko skończona liczba wzajem nierównoważnych modalności, a w innych takich iterowanych nierównoważnych modalności jest nieskończenie wiele.

Warto może przypomnieć, że tradycyjnie odróżnia się dwa rozumienia modalności: *de re* oraz *de dicto*:

1. Modalność *de dicto* przysługuje całemu zdaniu.

2. Modalność *de re* przysługuje czasownikowi.

W omawianych niżej systemach modalnych zajmujemy się modalnością *de dicto*. Tradycja każe uznawać m.in. takie zależności między tak rozumianymi modalnościami:

1. Konieczność α implikuje możliwość α.

2. Konieczność α implikuje α (*a necesse esse ad esse valet consequentia*).

3. α implikuje możliwość α (*ab esse ad posse valet consequentia*).

4. Możliwość $\neg\alpha$ jest równoważna z zaprzeczeniem konieczności α.

5. Konieczność $\neg\alpha$ jest równoważna z zaprzeczeniem możliwości α.

W polskiej literaturze przedmiotu godną polecenia pozycją jest Świrydowicz 2004. Literatura obcojęzyczna na temat logik modalnych jest olbrzymia, na końcu tekstu podajemy kilka wybranych podręczników.

3.1 Kilka systemów modalnych

Ograniczymy się do zdaniowych systemów modalnych, pomijając systemy modalne z kwantyfikatorami. Wracamy do notacji infiksowej, której będziemy się trzymali już do końca tego wykładu. Rozważmy zatem język ze zmiennymi zdaniowymi oraz spójnikami: $\neg$ negacji, $\wedge$ koniunkcji, $\vee$ alternatywy, $\rightarrow$ implikacji oraz $\equiv$ równoważności, a także funktorami:

1. $\Box$ konieczności – formułę $\Box\alpha$ czytamy: jest konieczne, że α.
2. $\Diamond$ możliwości – formułę $\Diamond\alpha$ czytamy: jest możliwe, że α.

Rozważmy teraz następujące formuły w tym języku (w pierwszej kolumnie podane są umowne nazwy tych formuł, które wykorzystamy później w tworzeniu kilku systemów modalnych):

K	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
T	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$
D	$\Box\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha$
4	$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
B	$\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\Box\alpha$
5	$\neg\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\Box\alpha$
GL	$\Box(\Box\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$
3	$\Box(\Box\alpha \rightarrow \beta) \vee \Box(\Box\beta \rightarrow \alpha)$
M	$\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$
$G1$	$\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
Ver	$\Box\alpha$
Tr	$(\Box\alpha) \equiv \alpha$
Fls	$\neg\Box\alpha$

Dalej, rozważmy następujące – wybrane spośród możliwych do wykorzystania – reguły wnioskowania w owym modalnym języku zdaniowym:

1. *Reguła odrywania* MP: $\frac{\alpha\rightarrow\beta,\alpha}{\beta}$.
2. *Reguła regularności* RR: $\frac{\alpha\rightarrow\beta}{\Box\alpha\rightarrow\Box\beta}$.
3. *Reguła konieczności* RN: $\frac{\alpha}{\Box\alpha}$.
4. *Reguła ekstensjonalności* RE: $\frac{\alpha\equiv\beta}{\Box\alpha\equiv\Box\beta}$.

Niech Ax będzie aksjomatyką klasycznego rachunku zdań (formuły (A1) do (A12) podane w poprzednim wykładzie). Niech $PC_\Box$ będzie zbiorem wszystkich tez klasycznego rachunku zdań opartego na aksjomatyce Ax oraz wszystkich formuł powstających z tych tez przez podstawienie za zmienne zdaniowe (niekoniecznie wszystkie) formuł języka modalnego. Poniżej wyliczamy przykłady ważnych, często wykorzystywanych aksjomatycznych systemów modalnych. W każdym przypadku systemy te zawierają aksjomatykę $PC_\Box$, różnią się zestawami aksjomatów charakteryzujących modalności oraz przyjmowanymi regułami wnioskowania. Dzielimy te systemy na dwie grupy, zgodnie z rozpowszechnioną współcześnie klasyfikacją Lemmona (zob. Świrydowicz 2004, 46–47). Mówi się mianowicie o dwóch klasach systemów modalnych:

1. *regularnych* – zawierających aksjomat K oraz domkniętych na regułę regularności RR,
2. *normalnych* – zawierających aksjomat K oraz domkniętych na regułę konieczności RN.

Każda logika normalna jest regularna, lecz nie na odwrót. W badaniach systemów modalnych przyjmuje się zwykle następujące zależności, pozwalające definiować jedną modalność poprzez drugą:

1. $D_\Diamond$: $\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$
2. $D_\Box$: $\Box\alpha \equiv \neg\Diamond\neg\alpha$.

W systemach *multimodalnych*, o których nie będziemy pisać w tych notatkach, a które zawierają indeksowane modalności, zakłada się podobne zależności między modalnościami typu konieczności a tymi typu możliwości.

Dla wyliczonych niżej systemów modalnych podajemy tradycyjnie przyjmowany dla nich symbol, aksjomaty i reguły wnioskowania oraz nazwę.

Systemy regularne:

1. $C2: \ K, D_\Diamond; \ MP, RR$ – najmniejsza logika regularna
2. $D2: \ K, D, D_\Diamond; \ MP, RR$ – regularna logika deontyczna
3. $E2: \ K, T, D_\Diamond; \ MP, RR$ – regularna logika epistemiczna
4. $E4: \ K, T, 4, D_\Diamond; \ MP, RR$
5. $Fls: \ Fls, D_\Diamond; \ MP$ – system *Falsum*

Systemy normalne:

1. $K: \ K, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – najmniejsza logika normalna
2. $T: \ K, T, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – system Feysa-von Wrighta
3. $D: \ K, D, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – normalna logika deontyczna
4. $S4: \ K, T, 4, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – system $S4$ Lewisa
5. $B: \ K, T, B, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – system Brouwera
6. $S5: \ K, T, B, 5, D_{\Diamond};\ MP, RN$ – system $S5$ Lewisa
7. $Tr: \ Tr, D_{\Diamond};\ MP$ – system trywialny
8. $Ver: \ Ver, D_{\Diamond};\ MP$ – system *Verum*.

W literaturze przedmiotu spotykamy czasem różnice w rozumieniu poszczególnych systemów modalnych. Popularna jest konwencja nazywania systemów normalnych uwzględniająca symbole poszczególnych aksjomatów jako składniki takiej nazwy. I tak wyróżnia się np.:

1. $KD4$: system deontyczny $S4$
2. $KD5$: system deontyczny $S5$
3. $KT4M$: system $S4.1$.
4. $KT4G$: system $S4.2$.
5. $K4GL$: system Gödla-Löba.

Czasami pewne aksjomaty zapisuje się w postaci schematów, uwzględniających umowne skróty:

$$\Box^0\alpha =_{df} \alpha \qquad \Box^{n+1}\alpha =_{df} \Box(\Box^n\alpha)$$

$$\Diamond^0\alpha =_{df} \alpha \qquad \Diamond^{n+1}\alpha =_{df} \Diamond(\Diamond^n\alpha).$$

Możemy wtedy rozważać schematy o postaci:

$$G^{jklm} =_{df} \Diamond^j\Box^k\alpha \to \Box^l\Diamond^m\alpha.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, które z wymienionych na początku aksjomatów modalnych podpadają pod ten schemat.

Nie będziemy w tych notatkach rozwodzić się nad własnościami tych systemów ani nad zależnościami między nimi. Tytułem przykładu wspomnijmy jedynie, że zachodzą następujące inkluzje (rozumiane jako inkluzje zbiorów tez wymienionych systemów):

1. $C2 \subseteq D2$
2. $C2 \subseteq E2 \subseteq E4$
3. $K \subseteq T \subseteq S4$
4. $K \subseteq T \subseteq B \subseteq S5$
5. $C2 \subseteq K$
6. $E2 \subseteq T$
7. $D2 \subseteq D$
8. $E4 \subseteq E4$
9. $D2 \subseteq E2$
10. $D \subseteq T$.

Najsłabszym systemem modalnym jest system E, którego zbiorem aksjomatów jest $PC_{\Box}$, a regułami wnioskowania RE oraz MP.

Jak różnorodne mogą być iterowane modalności w poszczególnych systemach modalnych? Bez wdawania się w szczegóły powiedzmy jedynie, że:

1. W systemie $S5$ jest tylko sześć wzajem nierównoważnych modalności: α, $\neg\alpha$, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$, $\neg\Box\alpha$ oraz $\neg\Diamond\alpha$.
2. W systemie $S4$ jest tylko czternaście wzajemnie nierównoważnych modalności.
3. W systemie T jest nieskończenie wiele wzajemnie nierównoważnych modalności.

Osobne problemy stwarzają systemy modalne rozważane w językach pierwszego rzędu. To zagadnienia już o wiele bardziej skomplikowane, zainteresowanego czytelnika zachęcamy do konsultowania podręczników. Proponujemy czytelnikowi – zanim znajdzie odpowiedź w owych podręcznikach – chwilę zastanowienia się nad intuicjami, które można byłoby wiązać np. z następującą równoważnością:

$$\Box\forall x\alpha(x) \equiv \forall x\Box\alpha(x).$$

Warto może jeszcze wspomnieć o próbach charakterystyki pojęcia wynikania logicznego w terminach modalnych, a konkretnie o systemach *implikacji ścisłej*. Rozważano mianowicie systemy z funktorem $\Rightarrow$ takiej implikacji, definiowanym na jeden z następujących sposobów:

1. $\alpha \Rightarrow \beta \equiv_{df} \neg\Diamond(\alpha \wedge \beta)$
2. $\alpha \Rightarrow \beta \equiv_{df} \Box(\alpha \rightarrow \beta)$

W celu eliminacji pewnych paradoksalnych własności tak zdefiniowanego funktora żądać można zachodzenia pewnych dalszych warunków, np. tego, aby poprzednik oraz następnik takiej implikacji zawierały co najmniej jedną wspólną zmienną zdaniową (miałoby to jakoś oddawać fakt istnienia *związku treściowego* między poprzednikiem a następnikiem).

3.2 Semantyka Kripkego

W logikach modalnych odniesienie przedmiotowe języka rozumiane jest nieco ogólniej, niż w klasycznej logice pierwszego rzędu. Ponieważ chcemy mówić o *możliwościach*, *koniecznościach*, *niemożliwościach*, itd., więc rozważamy nie jedno ustalone odniesienie przedmiotowe, ale całą gamę takich odniesień, przy czym uważamy, że są one ze sobą jakoś łączone, porównywane. Rozważamy zatem wiele *punktów odniesienia*, *światów możliwych*, *indeksów* (stosowana jest różna terminologia). Dopuszczamy różnorakie interpretacje pojęcia *świat możliwy*. Do pomyślenia jest np. świat różniący się od rzeczywistego tym, że nie ma w nim piszącego te słowa – w istocie już wkrótce przyjdzie słuchaczom żyć właśnie w takim świecie. Do pomyślenia jest świat, w którym nie ma Kościoła Katolickiego, albo świat, w którym Marszałek Józef Piłsudski zajmuje w 1921 roku Piotrogód i Moskwę, Lenin, Trocki i Stalin odsiadują dożywocie w polskim więzieniu, a Hitler zostaje zastrzelony przez nieznanych sprawców (nie wyklucza się działań polskich komandosów). Dalej, do pomyślenia są światy z inteligencją rozwijającą się inaczej niż ludzka, a nawet światy, których pewne parametry fizyczne są inne niż w „naszym" świecie. Jakie natomiast światy *nie są do pomyślenia*? Logicy i matematycy odpowiedzą zapewne: światy *sprzeczne*, czyli takie, w których zachodzić miałoby jakieś zdanie oraz jego zaprzeczenie. Filozofowie, teoretycy literatury, marzyciele mogą mniemać, że również światy sprzeczne – w jakiś sposób – istnieją.

Z logicznego punkty widzenia dopuszczamy więc wielość interpretacji pojęcia *możliwy świat*. Rozważamy też zależności między takimi światami, polegające na tym, iż jedne są *alternatywne* wobec drugich, że jedne są – w jakimś określonym sensie – *osiągalne* – z drugich. Podstawowa intuicja dotycząca modalności (tych *aletycznych*: *konieczności* oraz *możliwości*) jest taka, że:

1. to, co możliwe w jednym ze światów jest prawdziwe w co najmniej jednym świecie do niego alternatywnym;
2. to co konieczne w jednym ze światów jest prawdziwe w co najmniej jednym świecie do niego alternatywnym.

W zależności od interpretacji, możemy zakładać, że owa relacja alternatywności (osiągalności) ma różne własności: że np. jest przechodnia, albo symetryczna, itd. Pora na formalne definicje.

Strukturą Kripke'go (dla zdaniowego języka modalnego S, z operatorami $\Box$ i $\Diamond$) jest para (W, R), gdzie $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$. *Modelem Kripke'go* jest trójka uporządkowana (W, R, V), gdzie V jest funkcją ze zbioru zmiennych zdaniowych języka S w rodzinę $\wp(W)$ wszystkich podzbiorów zbioru W. Określamy relację $\Vdash \subseteq W \times S$ w sposób następujący:

1. $w \Vdash p_i$ dokładnie wtedy, gdy $w \in V(p_i)$
2. $w \Vdash \neg\alpha$ dokładnie wtedy, gdy nie zachodzi $w \Vdash \alpha$;
3. $w \Vdash \alpha \wedge \beta$ dokładnie wtedy, gdy $w \Vdash \alpha$ oraz $w \Vdash \beta$
4. $w \Vdash \alpha \vee \beta$ dokładnie wtedy, gdy $w \Vdash \alpha$ lub $w \Vdash \beta$
5. $w \Vdash \alpha \to \beta$ dokładnie wtedy, gdy: jeśli $w \Vdash \alpha$, to $w \Vdash \beta$
6. $w \Vdash \alpha \equiv \beta$ dokładnie wtedy, gdy: $w \Vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \Vdash \beta$
7. $w \Vdash \Box\alpha$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $u \in W$: jeśli $R(w, u)$, to $u \Vdash \alpha$
8. $w \Vdash \Diamond\alpha$ dokładnie wtedy, gdy istnieje $u \in W$ taki, że $R(w, u)$ oraz $u \Vdash \alpha$.

Warunki definiujące relację $\Vdash$ przypominają zatem warunki występujące w definicji pojęcia spełniania w klasycznej logice pierwszego rzędu. Czasami powyższe warunki zapisuje się tak, że pierwszym argumentem relacji $\Vdash$ jest para $((W, R, V), w)$ (czyli para złożona z modelu i świata), a drugim formuła języka S, a więc piszemy $((W, R, V), w) \Vdash \alpha$.

Mówimy, że formuła α jest *prawdziwa* w:

1. modelu (W, R, V), gdy $w \Vdash \alpha$ dla wszystkich $w \in W$;
2. strukturze (W, R), gdy jest prawdziwa w każdym modelu (W, R, V);
3. klasie struktur $\mathbb{K}$, gdy jest prawdziwa w każdej strukturze z $\mathbb{K}$.

W to zbiór *światów* (punktów odniesienia), R to relacja *osiągalności* (dostępności, alternatywności). Funkcja V to *wartościowanie*: określa ona, mówiąc intuicyjnie, z jakich faktów składają się poszczególne światy możliwe. Niech:

1. $Thm(\mathbb{K})$ = zbiór wszystkich formuł prawdziwych w $\mathbb{K}$;
2. $Mod(X)$ = klasa wszystkich struktur, w których prawdziwe są wszystkie formuły z X.

Mówimy, że:

1. X *jest trafny względem* $\mathbb{K}$, gdy $X \subseteq Thm(\mathbb{K})$;
2. X *jest pełny względem* $\mathbb{K}$, gdy $Thm(\mathbb{K}) \subseteq X$;
3. X *jest wyznaczony przez* $\mathbb{K}$, gdy $\mathbb{K} = Mod(X)$.

W zależności od tego, jakie formalne własności ma R, otrzymujemy różne systemy logiki modalnej. Ponadto, dowodzi się, że aksjomatyki poszczególnych systemów modalnych są trafne i pełne względem odpowiednich klas struktur. Wyliczymy tutaj, dla przykładu, niektóre z tych faktów.

Przypomnijmy przedtem pewne własności relacji dwuargumentowych R na dowolnym zbiorze U. Mówimy mianowicie, że $R \subseteq U$ jest (w zbiorze U):

1. *zwrotna*, gdy $\forall x \in U\ R(x, x)$
2. *przeciwzwrotna*, gdy $\forall x \in U\ \neg R(x, x)$
3. *symetryczna*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U\ (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
4. *asymetryczna*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U\ (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$
5. *antysymetryczna*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U\ ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$
6. *spójna*[1], gdy $\forall x \in U \forall y \in U \forall z \in U\ ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow (R(y, z) \vee R(z, y)))$
7. *przechodnia*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U \forall z \in U\ ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
8. *euklidesowa*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U \forall z \in U\ ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z))$
9. *zbieżna*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U \forall z \in U\ ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow \exists u \in U\ (R(y, u) \wedge R(z, u)))$

[1]To terminologia używana w logice modalnej. Jak pamiętamy, w rachunku relacji mówimy, że relacja jest *spójna*, gdy $\forall x \in U \forall y \in U\ (\neg x = y \rightarrow (R(x, y) \vee R(y, x)))$.

10. *seryjna*, gdy $\forall x \in U \exists y \in U\ R(x, y)$.

Przypomnijmy też, że dla dowolnej relacji R definiuje się przez indukcję:

1. $R^1(x, y) \equiv R(x, y)$
2. $R^{n+1}(x, y) \equiv \exists z\ (R(x, z) \wedge R(z, y))$.

Dowodzi się, że następujące aksjomaty modalne są prawdziwe odpowiednio w następujących klasach modeli (nazwy tych klas modeli odpowiadają własnościom rozważanych w nich relacji osiągalności):

1. D – w modelach seryjnych
2. T – w modelach zwrotnych
3. 4 – w modelach przechodnich
4. B – w modelach symetrycznych
5. 5 – w modelach euklidesowych.

Zachodzą też następujące twierdzenia, ustalające związki między syntaktycznymi (aksjomatycznymi) opisami logik modalnych a prawdziwością formuł modalnych w klasach struktur:

1. Logika K jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest dowolną relacją.
2. Logika T jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją zwrotną.
3. Logika B jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją zwrotną i symetryczną.
4. Logika $S4$ jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją zwrotną i przechodnią.
5. Logika $S5$ jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją równoważności (zwrotną, symetryczną i przechodnią).
6. Logika $S4.2$ jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją zwrotną, przechodnią i zbieżną.

7. Logika $S4.3$, która powstaje z systemu $S4$ przez dodanie aksjomatu:

$$3. \quad \Box(\Box\alpha \to \beta) \vee \Box(\Box\beta \to \alpha)$$

jest pełna względem klasy wszystkich modeli, w których relacja osiągalności jest relacją zwrotną, przechodnią i spójną.

8. Logika zawierająca aksjomat G^{klmn} jest wyznaczona przez modele, w których relacja osiągalności R spełnia warunek:

$$\forall x \forall y \forall z \; ((R^k(x,y) \wedge R^m(x,z)) \to \exists v \; (R^l(y,v) \wedge R^n(z,v))).$$

Czytelnik domyśla się, że otrzymywać można wiele dalszych twierdzeń tego typu, wiążących własności formalne relacji osiągalności ze stosownymi aksjomatami dla formuł z funktorami modalnymi.

Warto może nadmienić, że formułami modalnymi nie można wyrazić ani własności przeciwzwrotności, ani własności asymetrii.

Semantyka Kripke'go (zwana także semantyką relacyjną) zyskała sporą popularność w wielu zastosowaniach, także w badaniach lingwistycznych. Słuchacze tego kursu zapewne mieli okazję zetknąć się już wcześniej z jakąś jej wersją.

Semantyka Kripke'go nie jest jedyną semantyką braną pod uwagę w opisie systemów modalnych. Innymi bardzo ważnymi ujęciami problematyki semantycznej dla logik modalnych są np.: *semantyka otoczeniowa* (*topologiczna*), *semantyka algebraiczna*.

4 Logiki deontyczne

Funktory deontyczne: *jest nakazane*, *jest zabronione*, *jest dozwolone* (łączące się ze zdaniem i dające w wyniku zdanie) opisywać można podobnie, jak omówione przed chwilą funktory modalne, odpowiednio: *jest konieczne*, *jest niemożliwe* (czyli: *nie jest możliwe*), *jest możliwe*. Nasuwa się także możliwość osobnego wprowadzenia tych funktorów, dołączenia ich do języka modalnego, zawierającego klasyczne modalności *aletyczne*, ewentualnie dodania także innych jeszcze pojęć – np. pojęcia *sankcji*.

Logika funktorów deontycznych musi poradzić sobie z różnymi problemami dotyczącymi znaczenia norm, ich rozumienia, zależności inferencyjnych między zdaniami normatywnymi. Omawianie tych problemów wykracza poza ramy tego wykładu. Ograniczymy się jedynie do podania przykładu jednego systemu logiki deontycznej – tzw. systemu OS von Wrighta. Język tego systemu jest językiem zdaniowym, zawierającym klasyczne funktory zdaniowe oraz jednoargumentowy funktor O: formułę $O\alpha$ czytamy „α jest obowiązkowe" (nakazane). Aksjomaty systemu są następujące:

1. Zbiór wszystkich formuł powstających z praw klasycznego rachunku zdań poprzez konsekwentne podstawienie na miejsce zmiennych zdaniowych jakichś formuł języka systemu OS.

2. $O(\alpha \wedge \beta) \equiv O\alpha \wedge O\beta$

3. $\neg O(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Regułami wnioskowania systemu OS są:

1. Reguła odrywania.

2. Reguła ekstensjonalności o postaci: jeśli $\alpha \equiv \beta$ jest prawem klasycznego rachunku zdań, to $O\alpha \equiv O\beta$ jest tezą systemu OS.

W systemie tym zdefiniować możemy dalsze funktory deontyczne:

1. $F\alpha \equiv_{df} O\neg\alpha$ ($F\alpha$ czytamy: „α jest zakazane").

2. $P\alpha \equiv_{df} \neg O\neg\alpha$ ($P\alpha$ czytamy: „α jest dozwolone").

Wśród tez tego systemu są m.in. następujące:

1. $O\alpha \rightarrow P\alpha$

2. $P(\alpha \vee \beta) \equiv P\alpha \vee P\beta$

3. $F(\alpha \vee \beta) \equiv F\alpha \wedge F\beta$

4. $(O(\alpha \vee \beta) \wedge O\neg\alpha) \rightarrow O\beta$

5. $(O(\alpha \rightarrow \beta) \wedge O\alpha) \rightarrow O\beta$.

Czytelnik zechce ustalić, czy podane wyżej tezy zgodne są z jego obywatelskimi intuicjami dotyczącymi sprawiedliwego systemu prawa. Pewne tezy tego systemu uważać można za paradoksalne, np.:

1. *Paradoks dobrego Samarytanina*: $Fp \rightarrow O(p \rightarrow q)$ (*jeśli zabijanie jest zakazane, to obowiązkowe jest obrabowanie nieboszczyka, o ile zabito*).

2. *Paradoks Alfa Rossa*: $Op \rightarrow O(p \vee q)$ (*jeśli płacenie podatków jest obowiązkowe, to obowiązkiem jest płacić podatki lub oszukiwać w zeznaniu podatkowym*).

Te paradoksy powstają jednak ze względu na to, że w klasycznym rachunku zdań obowiązują, odpowiednio, prawo Dunsa Scotusa $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ oraz prawo $p \rightarrow (p \vee q)$. Iterowanie modalności deontycznych dostarcza innych jeszcze przykładów paradoksów.

W przypadku logik deontycznych stosować możemy semantykę Kripke'go. Relacja osiągalności jest wtedy interpretowana np. w terminach *preferowania* jednego świata względem drugiego. Obowiązkowe w świecie x mogłoby być wtedy np. to, co zachodzi we wszystkich światach preferowanych względem x (jakoś „lepszych" od niego), albo – powiedzmy – w światach najbardziej preferowanych, deontycznie doskonałych.

Należy pamiętać, że sam formalizm matematyczny nie dostarcza niezawodnej metody rozstrzygającej np. spory prawne. Dobra logika deontyczna musi być poprzedzona porządną teorią obowiązku prawnego.

5 Logiki temporalne

Wyrażanie zależności odwołujących się do czasu traktować można jako pewne modalności. Jeśli zdecydujemy się na *de dicto* rozumienie tych modalności, to trzeba wprowadzić stosowne funktory, reprezentujące zależności czasowe. Alternatywne ujęcie to rozważanie np. struktur *wielodziedzinowych*, gdzie – oprócz dziedziny obiektów – rozważamy zbiór momentów czasowych, chwil, bądź innych jeszcze elementów, mających tworzyć czas.

Czas to trudne w analizie pojęcie. Rozważa się różne koncepcje czasu, nie sposób ich tu wyliczać. Nadto, inaczej podchodzi się do czasu np. w fizyce, a inaczej w psychologii lub językoznawstwie. W tej ostatniej dyscyplinie rozważa się m.in. odpowiedniości między zależnościami czasowymi, a ich wyrażaniem w postaci czasu oraz aspektu gramatycznego. Języki świata oferują w tym względzie spore zróżnicowanie, jak doskonale wiedzą lingwiści.

Semantyka Kripke'go jest naturalnym narzędziem do opisu zależności czasowych. Jeśli *świat rozważany w czasie* to następujące po sobie *stany świata*, to momenty czasowe traktować możemy jako indeksujące owe stany, a funkcja wartościująca będzie ustalała, z jakich to stanów składa się świat w danym momencie.

Rozważmy język zdaniowy (z klasycznymi funktorami zdaniowymi oraz) z następującymi funktorami temporalnymi:

1. P: wyrażenie $P\alpha$ czytamy „choć raz w przeszłości było tak, że α".
2. F: wyrażenie $F\alpha$ czytamy „choć raz w przyszłości będzie tak, że α".

Uznajmy, że formuły bez funktorów temporalnych stwierdzają to, co dzieje się w chwili obecnej. W terminach powyższych funktorów zdefiniować można inne funktory temporalne, np.:

1. $G\alpha \equiv_{df} \neg F \neg \alpha$ – wyrażenie $G\alpha$ czytamy wtedy „zawsze będzie tak, że α.
2. $H\alpha \equiv_{df} \neg P \neg \alpha$ – wyrażenie $G\alpha$ czytamy wtedy „zawsze było tak, że α.

Można też wyjść od funktorów G oraz H (wraz z podaną ich interpretacją) i zdefiniować funktory F oraz P:

1. $F\alpha \equiv_{df} \neg G \neg \alpha$
2. $P\alpha \equiv_{df} \neg H \neg \alpha$.

Semantykę dla takich funktorów temporalnych określamy następująco. Niech (W, R, V) będzie *modelem temporalnym*, czyli układem złożonym z:

1. Niepustego zbioru W (światy możliwe, nazywane w tym przypadku *momentami*).
2. $R \subseteq W \times W$ (relacja osiągalności, interpretowana w tym przypadku jako *następstwo czasowe*: gdy $R(x, y)$, to mówimy, że y następuje po x, lub, równoważnie, że x występuje przed y).
3. Funkcji V (*wartościowania*), przyporządkowującej każdemu momentowi $x \in W$ pewien zbiór zmiennych zdaniowych rozważanego języka. Intuicja związana z tą funkcją to: $p \in V(x)$ dokładnie wtedy, gdy stan świata w momencie x jest taki, iż p w nim zachodzi.

Definicja relacji spełniania $\Vdash$ formuł języka temporalnego w elemencie $x \in W$ takiego modelu jest indukcyjna i wygląda następująco:

1. $(W, R, x) \Vdash p_i$ dokładnie wtedy, gdy $p_i \in V(x)$
2. $(W, R, x) \Vdash \neg\alpha$ dokładnie wtedy, gdy nie zachodzi $(W, R, x) \Vdash \alpha$
3. $(W, R, x) \Vdash \alpha \to \beta$ dokładnie wtedy, gdy:
   jeśli $(W, R, x) \Vdash \alpha$, to $(W, R, x) \Vdash \beta$
4. $(W, R, x) \Vdash \alpha \wedge \beta$ dokładnie wtedy, gdy $(W, R, x) \Vdash \alpha$ oraz $(W, R, x) \Vdash \beta$
5. $(W, R, x) \Vdash \alpha \vee \beta$ dokładnie wtedy, gdy $(W, R, x) \Vdash \alpha$ lub $(W, R, x) \Vdash \beta$

6. $(W, R, x) \Vdash \alpha \equiv \beta$ dokładnie wtedy, gdy: $(W, R, x) \Vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(W, R, x) \Vdash \beta$

7. $(W, R, x) \Vdash F\alpha$ dokładnie wtedy, gdy istnieje $y \in W$ taki, że $R(x, y)$ oraz $(W, R, y) \Vdash \alpha$

8. $(W, R, x) \Vdash P\alpha$ dokładnie wtedy, gdy istnieje $y \in W$ taki, że $R(y, x)$ oraz $(W, R, y) \Vdash \alpha$

9. $(W, R, x) \Vdash G\alpha$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $y \in W$: jeśli $R(x, y)$, to $(W, R, y) \Vdash \alpha$

10. $(W, R, x) \Vdash H\alpha$ dokładnie wtedy, gdy dla wszystkich $y \in W$: jeśli $R(y, x)$, to $(W, R, y) \Vdash \alpha$.

Standardowo określamy dalej prawdziwość formuły w strukturze oraz prawdziwość formuły w klasie struktur:

1. α jest prawdziwa w strukturze (W, R), gdy $(W, R, x) \Vdash \alpha$ dla wszystkich $x \in W$ oraz wszystkich wartościowań V.

2. α jest prawdziwa w klasie struktur $\mathbb{K}$, gdy α jest prawdziwa w każdej strukturze należącej do $\mathbb{K}$.

Domyślamy się, że zależnie od przyjętych założeń na temat własności następstwa czasowego, czyli relacji R, otrzymujemy różne semantyki dla rozważanych funktorów temporalnych. Całkiem naturalne wydaje się zakładanie przechodniości następstwa czasowego, rozważać można czas liniowy, kolisty, rozgałęziający się (w przyszłość lub w przeszłość), dyskretny lub gęsty, seryjny, posiadający moment pierwszy lub ostatni, itd. Takim warunkom dla relacji R odpowiadają pewne aksjomaty stosownych logik temporalnych; mogą w tych aksjomatach wystąpić iteracje funktorów temporalnych.

Ograniczymy się do podania aksjomatyki jednego systemu temporalnego, dość prostego, a mianowicie systemu K_t. Jego aksjomatami są:

1. Wszystkie prawa klasycznego rachunku zdań oraz wszystkie formuły powstające z tych praw poprzez podstawienie za zmienne (niekoniecznie wszystkie) formuł języka temporalnego.

2. $G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$

3. $H(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)$

4. $\alpha \to HF\alpha$
5. $\alpha \to GP\alpha$.

Regułami wnioskowania w tym systemie są reguły konieczności dla funktorów G oraz H, czyli:

$$\frac{\alpha}{G\alpha} \qquad \frac{\alpha}{H\alpha}.$$

Funktory P oraz F są w tym systemie definiowane, dokładnie w taki sposób, jak opisano to już wcześniej. Przykładowymi twierdzeniami systemu K_t są:

1. $G(\alpha \to \beta) \to (F\alpha \to F\beta)$
2. $H(\alpha \to \beta) \to (P\alpha \to P\beta)$
3. $G(\alpha \wedge \beta) \equiv (G\alpha \wedge G\beta)$
4. $H(\alpha \wedge \beta) \equiv (H\alpha \wedge H\beta)$
5. $F(\alpha \vee \beta) \to (F\alpha \vee F\beta)$
6. $P(\alpha \vee \beta) \to (P\alpha \vee P\beta)$
7. $PG\alpha \to \alpha$
8. $FH\alpha \to \alpha$.

Dla systemu K_t dowodzi się twierdzenia o pełności: jego tezami są dokładnie formuły prawdziwe we wszystkich modelach (W, R, V), gdzie nie zakłada się niczego o własnościach relacji następstwa czasowego R.

Rozważać można również systemy, w których modalności temporalne są jakoś splecione z modalnościami aletycznymi, a więc próbować charakteryzować rozumienie terminów takich, jak np.: *będzie możliwe*, *będzie konieczne*, itp. Na marginesie dodajmy, że tradycja przekazuje dwa rozumienia modalności temporalnych:

1. Diodorus:
   (a) $\Diamond\alpha \equiv \alpha \vee F\alpha$
   (b) $\Box\alpha \equiv \alpha \wedge G\alpha$
2. Arystoteles:
   (a) $\Diamond\alpha \equiv P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$

(b) $\Box\alpha \equiv H\alpha \wedge \alpha \wedge G\alpha$.

Na koniec tego punktu spójrzmy jeszcze na kilka przykładowych własności relacji następstwa czasowego i odpowiadające im formuły temporalne (tutaj $\perp$ oznacza stałą *falsum*, zaś T stałą *verum*):

1. Czas ma (przynajmniej w jednej ze swoich ścieżek) element ostatni: $FG\perp$.
2. Czas ma nieskończone ścieżki w przyszłość, w tym sensie, że:

$$\forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow \exists z\ R(y,z)).$$

   Własności tej odpowiada formuła: $FG\mathrm{T}$.

Można wyrażać – w stosownych systemach temporalnych – różne bardziej skomplikowane własności relacji następstwa czasowego, otrzymując np. czas ciągły, kołowy, rozgałęziający się, itd.

6 Logiki doksastyczne i epistemiczne

Spróbujmy zastanowić się nad oceną prawdziwości następujących wyrażeń:

1. Kasia wie, że bawiła się w noc sylwestrową z: Romanem, Kubą, Robertem, Krzysztofem.
2. Kasia wie, że Robert jest ojcem jej dziecka.
3. Wiem, że byłem wczoraj w kościele.
4. Wierzę (jestem przekonany, sądzę, mniemam), że byłem wczoraj w kościele.
5. Wiem, że byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę.
6. Wiem, że nie wiem, że byłem wczoraj w kościele.
7. Wiem, że ty wiesz, że ja wiem, że byłem wczoraj w kościele.
8. Wierzę, że mój system przekonań jest niesprzeczny.
9. Wiem, że mój system przekonań jest sprzeczny.
10. Wiem, że nic nie wiem.

W zdaniach tych mamy wyrażenia dotyczące *żywienia przekonań* bądź posiadania *wiedzy*. Współcześnie (ale i zgodnie z długą tradycją) uważa się, że wiedza to trafne (prawdziwe) uzasadnione przekonanie. Ludzie żywią różnorakie przekonania, mniemają jedni to, a drudzy coś całkiem innego, jak widać choćby z mnogości wyznawanych wierzeń religijnych. Pewne przekonania określamy jako *zdroworozsądkowe*, mające jakoby być w zgodzie z obserwacjami związanymi z doświadczeniem potocznym. Podejrzliwość wobec trafności mniemań jest jednym ze źródeł filozofii. W całej tradycji filozoficznej – nie tylko Zachodu – szukano metod pozwalających oddzielać całkiem dowolne mniemania od przekonań trafnych i posiadających uzasadnienie, a więc tworzących wiedzę.

Z czysto formalnego punktu widzenia żywienie przekonań lub posiadanie wiedzy opisywać możemy w terminach modalności *doksastycznych* lub *epistemicznych*, składniowo reprezentowanych przez funktory od argumentu zdaniowego (*wierzę, że* α, *wiem, że* α) lub zdaniowego i nazwowego (x *wierzy, że* α, x *wie, że* α). Poniżej podajemy kilka przykładów systemów z tego typu funktorami.

6.1 System Łosia

To bodaj pierwszy w literaturze przedmiotu formalny system logiki epistemicznej. W języku mamy zmienne i funktory zdaniowe, kwantyfikator $\forall$ wiążący zmienne nazwowe (przebiegające zbiór osób). Operator $\boldsymbol{L}_x$ ma następującą interpretację: $\boldsymbol{L}_x p$ oznacza, że człowiek x uznaje, że p. *Aksjomatami* systemu są:

1. $\boldsymbol{L}_x p \equiv \neg \boldsymbol{L}_x \neg p$
2. $\boldsymbol{L}_x((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$
3. $\boldsymbol{L}_x(p \to (\neg p \to q)$
4. $\boldsymbol{L}_x((\neg p \to p) \to p)$
5. $\boldsymbol{L}_x(p \to q) \to (\boldsymbol{L}p \to \boldsymbol{L}q)$
6. $\forall x \boldsymbol{L}_x p \to p$
7. $\boldsymbol{L}_x \boldsymbol{L}_x p \equiv \boldsymbol{L}_x p$

Regułami wnioskowania systemu są: reguła odrywania oraz reguła podstawiania. Dodajmy krótkie komentarze do tej aksjomatyki:

1. Pierwszy aksjomat systemu wyraża pewną formę zasady niesprzeczności.
2. Z pierwszego aksjomatu systemu wynika, że dla dowolnego zdania p: uznane jest bądź p, bądź jego zaprzeczenie $\neg p$.

3. Aksjomaty: 2, 3 i 4 wyrażają uznawanie aksjomatyki Łukasiewicza dla (implikacyjno-negacyjnego) rachunku zdań.

4. Aksjomat 5 wyraża rozdzielność operatora $\boldsymbol{L}_x$ względem implikacji.

5. Aksjomat 6 stwierdza, że zdanie uznawane przez wszystkich jest tezą systemu.

6. Ostatni aksjomat mówi, że iteracja operacji uznawania jest równoważna tej operacji.

7. Aksjomaty systemu są niezależne.

8. System jest niesprzeczny i wielowartościowy.

6.2 System von Wrighta

Modalności epistemiczne rozważane przez von Wrighta to:

1. Vp – p jest (pozytywnie) *zweryfikowane*;

2. Fp – p jest *sfalsyfikowane* (mamy: $Fp \equiv V\neg p$);

3. $\neg Vp \wedge \neg V\neg p$ – p jest *nierozstrzygnięte*.

Aksjomatami systemu są:

1. $\neg F(p \vee q) \equiv (\neg Fp \vee \neg Fq)$

2. $\neg Fp \vee \neg F\neg p$

3. $V\Box(p \equiv q) \rightarrow \Box(Fp \equiv Fq)$

Regułą wnioskowania systemu jest: Jeśli $\vdash p$, to $\vdash Vp$. Symbol $\Box$ oznacza tu funktor *konieczności*. Dla kompletności, można zdefiniować funktor $\neg V\neg p$, co czytamy: „p jest *dopuszczone*”.

6.3 System Hintikki

W pierwotnej wersji system Hintikki operował modalnościami:

1. $\boldsymbol{P}p$ – p jest możliwe ze względu na wiedzę (podmiotu);

2. $\boldsymbol{K}p$ – (podmiot) wie, że p;

3. $\boldsymbol{B}p$ – (podmiot) wierzy, że p.

Dla scharakteryzowania wiedzy danego podmiotu używa się pojęcia *zbioru modelowego*. W poniższej definicji m (ew. z indeksem) jest zbiorem formuł (rozważanego języka), zaś M jest rodziną zbiorów formuł. Zbiory formuł odpowiadają zespołom przekonań.

Przez *system modelowy* rozumiemy każdą rodzinę M zbiorów formuł spełniającą, dla każdego $m \in M$, następujące warunki:

1. Jeśli $p \in m$, to $\neg p \notin m$.
2. Jeśli $p \wedge q \in m$, to $p \in m$ oraz $q \in m$.
3. Jeśli $p \vee q \in m$, to $p \in m$ lub $q \in m$.
4. Jeśli $\neg\neg p \in m$, to $p \in m$.
5. Jeśli $\neg(p \wedge q) \in m$, to $\neg p \in m$ lub $\neg q \in m$.
6. Jeśli $\neg(p \vee q) \in m$, to $\neg p \in m$ oraz $\neg q \in m$.
7. Jeśli $\boldsymbol{P}p \in m$, to istnieje $m_* \in M$ taki, że $p \in m_*$.
8. Jeśli $\boldsymbol{K}p \in m$, to dla każdego $m_* \in M$: $\boldsymbol{K}p \in m_*$.
9. Jeśli $\boldsymbol{K}p \in m$, to $p \in m$.
10. Jeśli $\neg\boldsymbol{K}p \in m$, to $\boldsymbol{P}\neg p \in m$.
11. Jeśli $\neg\boldsymbol{P}p \in m$, to $\boldsymbol{K}\neg p \in m$.

Między elementami zbioru modelowego zachodzić mogą zależności:

1. *doksastycznej alternatywności*;
2. *epistemicznej alternatywności*.

Logikę wiedzy i przekonań otrzymujemy przez dodanie stosownych warunków dla tych relacji. Ujęcie Hintikki jest alternatywą dla semantyki Kripke'go. Jednak to ta ostatnia jest współcześnie najbardziej popularna.

6.4 System Gödla-Löba

Logika *Gödla-Löba*, zwana też logiką *dowodliwości* jest logiką modalną, w której operator konieczności może być interpretowany jako *dowodliwość* (w ustalonym systemie). Dowodzenie jest oczywiście formą uzasadniania, co z kolei jest warunkiem uzyskiwania wiedzy, a więc usprawiedliwia to omawianie tego systemu w tym właśnie punkcie. Można także korzystać z tej logiki przy modelowaniu systemów przekonań, z użyciem funktora $\boldsymbol{B}$, gdzie $\boldsymbol{B}\alpha$ czytamy: „(ustalony podmiot) wierzy, że α. Rozważamy więc język modalny z funktorem $\boldsymbol{B}$ opisanym aksjomatycznie, dla którego uzyskujemy różne interpretacje. Logika Gödla-Löba ma następujące *aksjomaty*:

1. wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań;
2. aksjomaty rozdzielności: $\boldsymbol{B}(\alpha \to \beta) \to (\boldsymbol{B}\alpha \to \boldsymbol{B}\beta)$;
3. wszystkie formuły postaci: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha) \to \boldsymbol{B}\alpha$.

Regułami wnioskowania są: *reguła odrywania* oraz *reguła konieczności* (dla funktora $\boldsymbol{B}$).

Nie wchodząc w szczegóły, powiedzmy jedynie, że możliwe jest „przełożenie” tez logiki Gödla-Löba na stwierdzenia dotyczące dowodliwości twierdzeń aksjomatycznego systemu Peana arytmetyki pierwszego rzędu PA.

6.5 Logika racjonalnych świadomych przekonań

Jedną z propozycji rozumienia pojęcia *świadome racjonalne przekonanie* jest system aksjomatyczny LB podany przez Marka Tokarza w *Elementach pragmatyki logicznej*, będący zdaniową logiką modalną z operatorem $\boldsymbol{B}$ (formułę $\boldsymbol{B}\alpha$ czytamy: „rozważany podmiot wierzy, α”) oraz następującymi *aksjomatami:*

1. α, dla wszystkich tautologii α klasycznego rachunku zdań
2. $\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\alpha$
3. $\neg\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\neg\boldsymbol{B}\alpha$
4. $\boldsymbol{B}\neg\alpha \to \neg\boldsymbol{B}\alpha$
5. $\boldsymbol{B}(\alpha \to \beta) \to (\boldsymbol{B}\alpha \to \boldsymbol{B}\beta)$.

Regułami wnioskowania tego systemu są:

1. *reguła odrywania*: z $\alpha \to \beta$ i α możemy wyprowadzić β

2. *reguła konieczności*: z α możemy wyprowadzić $\boldsymbol{B}\alpha$.

Oto przykłady tez tego systemu:

1. $\neg\boldsymbol{B}(\alpha \wedge \neg\alpha)$
2. $\boldsymbol{B}(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\beta)$
3. $(\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta)$
4. $(\boldsymbol{B}\alpha \wedge \boldsymbol{B}\beta) \equiv \boldsymbol{B}(\alpha \wedge \beta)$
5. $\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \neg\boldsymbol{B}\neg\alpha$
6. $(\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\boldsymbol{B}\alpha) \rightarrow \neg\boldsymbol{B}\neg\beta$
7. $(\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \wedge \boldsymbol{B}\neg\alpha) \rightarrow \boldsymbol{B}\beta$
8. $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boldsymbol{B}\neg\beta \rightarrow \boldsymbol{B}\neg\alpha)$
9. $\neg\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\boldsymbol{B}\neg\alpha \wedge \neg\boldsymbol{B}\beta)$
10. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta)$
11. $\boldsymbol{B}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \beta)$
12. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\alpha \rightarrow \alpha)$

Logika LB ma m.in. następujące własności:

1. W LB zachodzi *Twierdzenie o Dedukcji*.
2. System LB jest domknięty na regułę *ekstensjonalności*: jeśli tezą jest $\alpha \equiv \beta$, to tezą jest też $\boldsymbol{B}\alpha \equiv \boldsymbol{B}\beta$.
3. *Pełność LB*. Formuła α jest tezą logiki LB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich właściwych algebrach filtrowych, tj. w strukturach o postaci
$$\langle A, -, \cap, \cup, *, F \rangle,$$
gdzie $\langle A, -, \cap, \cup \rangle$ jest algebrą Boole'a, F właściwym filtrem tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
4. Logika LB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest *rozstrzygalna*.

Logikę LCB otrzymujemy z LB przez dodanie aksjomatu: $\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\neg\alpha$. Równoważnie, dla otrzymania LCB można dodać do LB każdą z następujących formuł:

1. $\neg\boldsymbol{B}\alpha \to \boldsymbol{B}\neg\alpha$
2. $\boldsymbol{B}(\alpha \vee \beta) \to (\boldsymbol{B}\alpha \vee \boldsymbol{B}\beta)$
3. $(\boldsymbol{B}\alpha \to \boldsymbol{B}\beta) \to \boldsymbol{B}(\alpha \to \beta)$.

Logika LCB ma m.in. następujące własności:

1. Logika LCB jest logiką świadomego, racjonalnego *Besserwissera* – kogoś, kto ma wyrobioną opinię w każdej sprawie.
2. *Pełność LCB*. Formuła α jest tezą logiki LCB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich ultraalgebrach, tj. w strukturach o postaci

   $$\langle A, -, \cap, \cup, *, F\rangle,$$

   gdzie $\langle A, -, \cap, \cup\rangle$ jest algebrą Boole'a, F ultrafiltrem tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
3. Logika LCB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest *rozstrzygalna*.

Dodanie do aksjomatów LB aksjomatu: $\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha$ pozwala interpretować otrzymaną w ten sposób logikę LWB jako logikę *wiedzy*.

1. LCB jest równoważna systemowi modalnemu S5.
2. *Pełność LWB*. Formuła α jest tezą logiki LWB wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich strukturach o postaci

   $$\langle A, -, \cap, \cup, *, F\rangle,$$

   gdzie $\langle A, -, \cap, \cup\rangle$ jest algebrą Boole'a, F filtrem jednostkowym tej algebry, a $*$ funkcją charakterystyczną zbioru F.
3. Logika LWB ma własność modeli skończonych (FMP), a więc jest *rozstrzygalna*.

6.6 Teorie zmiany przekonań

W badaniach logiki wiedzy i przekonań wyróżnić można dwa nurty: pierwszy z nich wiąże systemy wiedzy i przekonań z logikami modalnymi, drugi dotyczy w pierwszym rzędzie problematyki zmian systemów przekonań.

W jaki sposób jednak opisywać *zmiany* systemu przekonań? Czasami zmieniamy przekonania – uzyskujemy nową wiedzę, porzucamy jedne przekonania na rzecz innych, itp. Rozważa się trzy operacje na systemach wiedzy:

1. *ekspansję* – dołączenie nowego zdania do systemu;
2. *kontrakcję* – odrzucenie pewnego zdania;
3. *rewizję* – zastąpienie pewnego twierdzenia jego negacją.

Każda z tych operacji musi spełniać stosowne założenia. Podamy, dla przykładu, aksjomaty charakteryzujące *kontrakcję*. Niech $T - \alpha$ oznacza stan przekonań powstający z T w wyniku usunięcia zdania α. Przypuśćmy, że stan naszych przekonań jest reprezentowany przez teorię T. Usunięcie α z systemu przekonań T powoduje, że musimy z tego systemu przekonań usunąć również inne zdania (z których α może wynikać). Aksjomaty kontrakcji mają zapewniać, że operacja ta ma pożądane własności logiczne:

1. $T - \alpha$ jest teorią (jest domknięty na operację konsekwencji).
2. $T - \alpha \subseteq T$.
3. Jeśli α nie jest tautologią, to $\alpha \notin T - \alpha$.
4. Jeśli $\alpha \notin T$, to $T - \alpha = T$.
5. Jeśli $\alpha \equiv \beta$ jest tautologią, to $T - \alpha = T - \beta$.
6. T jest najmniejszą teorią zawierającą $(T - \alpha) \cup \{\alpha\}$.

7 Logika intuicjonistyczna

Intuicjonizm matematyczny kojarzymy z nazwiskami Leopolda Kroneckera, Luitzena Brouwera, Henri Poincaré'go, Arendta Heytinga, Stephena Kleene'go, Hermanna Weyla, by wymienić jedynie kilku klasyków. Kryterium istnienia obiektu matematycznego to w intuicjonizmie *konstrukcja* tego obiektu. Tak więc, intuicjoniści odrzucają np. *prawo wyłączonego środka* oraz odwołania się do dowodów *niekonstruktywnych*. Intuicjonista nie uzna zatem zdania $\exists x\ P(x)$ na podstawie zdań $\exists x\ P(x) \vee \neg\exists x\ P(x)$ oraz $\neg\neg\exists x\ P(x)$, jak zrobiłby to matematyk klasyczny.

Intuicjonista nie uzna również tego, że: *Istnieją liczby niewymierne dodatnie* x, y *że* x^y *jest liczbą wymierną*, jeśli przedstawimy następujący dowód:

1. Jeśli $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to niech $x = y = \sqrt{2}$ i teza została pokazana.

2. Jeśli $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, to niech $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $y = \sqrt{2}$. Wtedy $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ i znowu teza została pokazana.

W intuicjonizmie przyjmuje się pewne restrykcje dotyczące *nieskończoności*. Uznaje się nieskończoność *potencjalną*, odmawia się natomiast prawomocności pewnym rozważaniom uwzględniającym nieskończoność *aktualną*.

Podajemy niżej – za monografią Pogorzelski, Wojtylak 2008 – aksjomatykę dla zdaniowej logiki intuicjonistycznej. Językiem tej logiki jest standardowy język $\mathcal{S}_2 = (S_2, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg)$ (gdzie S_2 to zbiór wszystkich formuł utworzonych ze zmiennych zdaniowych wedle standardowych reguł). Niech A_{int} będzie następującym zbiorem aksjomatów:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$
4. $p \rightarrow (p \vee q)$
5. $q \rightarrow (p \vee q)$
6. $(p \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow s))$
7. $(p \wedge q) \rightarrow p$
8. $(p \wedge q) \rightarrow q$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))$
10. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$
11. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$.

oraz niech $R_{0*} = \{r_0, r_*\}$, gdzie r_0 jest regułą *odrywania*, a r_* regułą podstawiania w S_2. Wtedy (R_{0*}, A_{int}) jest systemem *intuicjonistycznej logiki zdaniowej*. W wersji niezmienniczej logika intuicjonistyczna jest systemem $(R_0, Sb(A_{int}))$, gdzie $R_0 = \{r_0\}$. Tutaj operacja Sb zastosowana do zbioru formuł X daje w wyniku wszystkie formuły powstające z formuł zbioru X poprzez dowolne podstawienia formuł rozważanego języka za zmienne zdaniowe. Na podstawie własności operacji Sb oraz reguły podstawiania mamy: $C_{R_{0*}}(A_{int}) = C_{R_0}(Sb(A_{int}))$.

Niechaj teraz C^{int} będzie operacją konsekwencji generowaną przez system $(R_0, Sb(A_{int}))$. Mamy zatem dla każdego $X \subseteq S_2$:

$$C^{int}(X) = C_{R_0}(Sb(A_{int}) \cup X).$$

W systemie tym zachodzi twierdzenie o dedukcji:

1. Dla dowolnych $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$:
   $\beta \in C^{int}(X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \to \beta) \in C^{int}(X)$.

Twierdzenie o dedukcji charakteryzuje implikację. Pozostałe funktory logiki intuicjonistycznej są charakteryzowane następująco (formuła $\alpha \equiv \beta$ jest skrótem dla formuły $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$):

1. $C^{int}(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha, \beta\})$
2. $C^{int}(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\})$
3. $(\alpha \equiv \beta) \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = C^{int}(X \cup \{\beta\})$
4. $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = S_2$.

Otrzymujemy stąd, że w logice intuicjonistycznej wyprowadzalna jest reguła *dodawania koniunkcji* r_a:

$$r_a : \quad \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}, \text{ dla wszystkich } \alpha, \beta \in S_2.$$

Zachodzą także następujące fakty:

1. $\alpha \to \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.
2. $\alpha \vee \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.

3. $\alpha \wedge \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cup C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.

4. $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_2 \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.

Nadto, C^{int} jest najmniejszą operacją konsekwencji nad S_2, która spełnia powyższe cztery warunki.

8 Dla zabawy: o szczęściarzach epistemicznych

Pozwolimy sobie, dla relaksu, dodać do tego wykładu mały fragment oparty na naszym tłumaczeniu książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel*, które ukazało się w 2007 roku nakładem *Książki i Wiedzy*, pod tytułem *Na Zawsze Nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik Po Twierdzeniach Gödla.* Obok zagadek o Rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz Łotrach (mówiących zawsze fałsz), książka zawiera zagadki logiczne, w których w formie popularnej przedstawia się *logikę epistemiczną* oraz *logikę dowodliwości*. Rozważane funktory doksastyczne i epistemiczne to:

- $\boldsymbol{B}$ – zdanie $\boldsymbol{B}p$ czytamy: *(rozważany podmiot) wierzy, że* p;
- $\boldsymbol{K}$ – zdanie $\boldsymbol{K}p$ czytamy *(rozważany podmiot) wie, że* p.

(gdzie p jest dowolnym zdaniem języka logiki epistemicznej). Zwykle zakłada się, że $\boldsymbol{K}p \equiv (p \wedge \boldsymbol{B}p)$.

Systemy epistemiczne są interesujące same przez się – w opisie systemów przekonań, w szczególności: racjonalnych świadomych przekonań. Mają one także interesującą i ważną interpretację metalogiczną: $\boldsymbol{B}p$ można interpretować jako *zdanie* p *jest dowodliwe w arytmetyce PA*.
Uwaga. Angielski termin *reasoner* stosowany przez Smullyana oddajemy przez polski neologizm *myślak*.

Przypuśćmy, że jesteś racjonalną, samoświadomą Istotą. Jak to przypuszczenie przełożyć na język logiki epistemicznej? Oto propozycja. Nazwiemy *szczęściarzem epistemicznym* każdą osobę S, której system przekonań spełnia następujące warunki:

- (1a) S wierzy we wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań;
- (1b) system przekonań S jest domknięty na regułę *modus ponens*:
  jeśli S wierzy w p oraz wierzy w $p \to q$, to wierzy także w q;
- (2) dla dowolnych p oraz q, S wierzy w $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \to q)) \to \boldsymbol{B}q$;

- (3) dla dowolnego p, jeśli S wierzy w p, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$;
- (4) dla dowolnego p, S wierzy w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{BB}p$.

Uwaga: rozważamy tylko osoby, które albo zawsze mówią prawdę, albo zawsze mówią fałsz.

Każdą osobę, która spełnia jedynie warunki (1a) i (1b) nazwiemy (bez urazy) *prostaczkiem logicznym*. Zatem, jeśli S jest prostaczkiem logicznym, to jego/jej system przekonań zawiera klasyczną logikę zdaniową, ale S może być tego nieświadom(a). Powiemy, że osoba S jest:

- *normalna*, gdy jeśli wierzy w p, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p$;
- *regularna*, gdy jeśli wierzy w $p \rightarrow q$, to wierzy też w $\boldsymbol{B}p \rightarrow \boldsymbol{B}q$;
- *sprzeczna*, gdy do jej systemu przekonań należy jakaś para zdań wzajem sprzecznych, lub – co na jedno wychodzi – *fałsz logiczny*, który oznaczamy przez $\perp$.

Uwaga. Może bardziej właściwe byłoby mówienie o własnościach *systemów przekonań*, a nie *osób*.

Można udowodnić, że: $(*)$ dowolny szczęściarz epistemiczny S *wie*, że jeśli uwierzy w jakieś zdanie p oraz w jego negację $\neg p$, to stanie się sprzeczny.

O szczęściarzach epistemicznych można udowodnić wiele innych ciekawych rzeczy. Nie wszystkie z nich będą nam dalej potrzebne. Dodajmy może jedynie, że:

- każdy szczęściarz epistemiczny jest normalny, a nawet *wie*, że jest normalny;
- każdy szczęściarz epistemiczny jest regularny i o tym także *wie*;
- wreszcie, każdy szczęściarz epistemiczny jest przekonany o tym, że jest szczęściarzem epistemicznym; a zatem to jego przekonanie jest *trafne* i, w konsekwencji, każdy szczęściarz epistemiczny *wie*, że jest szczęściarzem epistemicznym.

Można rozważać pięć typów myślaków, o wstępujących poziomach samoświadomości:

- Typ 1: prostaczek logiczny.
- Typ 1*: prostaczek logiczny, który, jeśli uwierzył w $p \rightarrow q$, to uwierzy, że jeśli uwierzył w p, to uwierzy w q.

- Typ 2: prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $(\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}(p \to q)) \to \boldsymbol{B}q$.
- Typ 3: myślak typu 2, który, jeśli wierzy w p, to wierzy w $\boldsymbol{B}p$.
- Typ 4: szczęściarz epistemiczny, tj. normalny i regularny prostaczek logiczny, który wierzy we wszystkie zdania postaci $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$, czyli wierzy, że jest normalny.

Uwaga. Terminy: *prostaczek logiczny* oraz *szczęściarz epistemiczny* nie występują w *Forever Undecided*; wprowadzamy je na użytek tej prezentacji.

Z podanych definicji wynika, że:

- Każdy prostaczek logiczny jest myślakiem typu 1^*.
- Każdy myślak typu 1^* jest regularnym prostaczkiem logicznym (i *vice versa*).
- Każdy myślak typu 2 wie, że jest typu 1^*.
- Myślaki typu 3 to dokładnie normalne myślaki typu 2.
- Dla $1 \leqslant n < 4$: każdy myślak typu n jest też myślakiem typu $n + 1$.
- $1 < n \leqslant 4$: każdy myślak typu n wierzy, że jest myślakiem typu $n - 1$.

Uwaga. Ponieważ każdy szczęściarz epistemiczny *wie*, że jest szczęściarzem epistemicznym, więc stanowi on zwieńczenie hierarchii samoświadomych myślaków. Inaczej mówiąc, gdybyśmy chcieli zdefiniować myślaka typu 5 jako takiego, który jest typu 4 i wierzy, iż jest typu 4, to otrzymalibyśmy jedynie myślaka typu 4.

Za chwilę dowiesz się czegoś naprawdę frapującego o swoim systemie przekonań. Udowodnimy mianowicie:

Twierdzenie 1.

Przypuśćmy, że normalny prostaczek logiczny S wierzy w zdanie postaci $p \equiv \neg\boldsymbol{B}p$. Wtedy:

- (a) Jeśli S kiedykolwiek uwierzy w p, to stanie się sprzeczny.
- (b) Jeśli S jest szczęściarzem epistemicznym, to wie, iż jeśli kiedykolwiek uwierzy w p, to stanie się sprzeczny – tj. uwierzy w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B} \perp$.
- (c) Jeśli S jest szczęściarzem epistemicznym i wierzy, że nie może być sprzeczny, to stanie się sprzeczny.

Dowód Twierdzenia 1.

(a) Przypuśćmy, że S wierzy w p. Będąc normalnym, uwierzy w $\boldsymbol{B}p$. Nadto, ponieważ wierzy w p oraz wierzy w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$, więc musi uwierzyć w $\neg \boldsymbol{B}p$ (bo jest prostaczkiem logicznym). A więc uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p$ oraz w $\neg \boldsymbol{B}p$, a stąd stanie się sprzeczny.

(b) Przypuśćmy, że S jest szczęściarzem epistemicznym. Ponieważ jest wtedy prostaczkiem logicznym i wierzy w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$, więc musi także wierzyć w $p \to \neg \boldsymbol{B}p$. Nadto, S jest regularny, a stąd uwierzy w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\neg \boldsymbol{B}p$. Wierzy też w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p$ (ponieważ wie, że jest normalny). Zatem S uwierzy w $\boldsymbol{B}p \to (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg \boldsymbol{B}p)$, które jest logiczną konsekwencją ostatnich dwóch zdań. Wierzy również w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg \boldsymbol{B}p) \to \boldsymbol{B} \perp$ (na mocy $(*)$, ponieważ dla dowolnego zdania X, S wierzy w $(\boldsymbol{B}X \wedge \boldsymbol{B}\neg X) \to \boldsymbol{B} \perp$, a więc wierzy w jego szczególny przypadek, gdzie X jest zdaniem $\boldsymbol{B}p$). Gdy S już uwierzy jednocześnie w $\boldsymbol{B}p \to (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg \boldsymbol{B}p)$ oraz w $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}p \wedge \boldsymbol{B}\neg \boldsymbol{B}p) \to \boldsymbol{B} \perp$, będzie musiał uwierzyć w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B} \perp$ (ponieważ jest prostaczkiem logicznym).

(c) Ponieważ S wierzy w $\boldsymbol{B}p \to \boldsymbol{B} \perp$ (jak właśnie udowodniliśmy), więc wierzy także w $\neg \boldsymbol{B} \perp \to \neg \boldsymbol{B}p$. Załóżmy teraz, że S wierzy w $\neg \boldsymbol{B} \perp$ (wierzy, że nie może być sprzeczny). Ponieważ wierzy też w $\neg \boldsymbol{B} \perp \to \neg \boldsymbol{B}p$ (jak właśnie widzieliśmy), więc uwierzy w $\neg \boldsymbol{B}p$. A ponieważ wierzy również w $p \equiv \neg \boldsymbol{B}p$, więc uwierzy w p, a stąd stanie się sprzeczny, na mocy (a).

Udowodniliśmy przed chwilą nie byle co, bo modalną (epistemiczną) wersję *II Twierdzenia Gödla* (o niedowodliwości niesprzeczności arytmetyki w samej arytmetyce). Oczywiście był to dowód w postaci wielce uproszczonej – precyzyjny dowód wymagałby, powiedzmy, jednosemestralnego wykładu wstępnego.

W prezentacji korzystaliśmy z rozdziału 12 tłumaczenia książki Raymonda Smullyana *Forever Undecided*. Poddajemy ocenie audytorium, czy ten sposób popularyzacji wiedzy (meta)logicznej można uznać za dydaktycznie przydatny.

Przykład teologiczny. Przypuśćmy, że jesteś studentką teologii i że Twój Ulubiony Profesor teologii mówi do Ciebie:

Bóg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nigdy nie uwierzysz, że Bóg istnieje.

Jeśli wierzysz profesorowi, to wierzysz w zdanie $g \equiv \neg \boldsymbol{B}g$, gdzie g jest zdaniem stwierdzającym, że Bóg istnieje. Wtedy, zgodnie z Twierdzeniem 1, nie możesz wierzyć w swoją własną niesprzeczność bez popadnięcia w sprzeczność. Oczywiście, możesz wierzyć we własną niesprzeczność, bez popadnięcia przy tym w sprzeczność – wystarczy, że przestaniesz ufać Twojemu Ulubionemu Profesorowi. Coś za coś. Przy modalnej interpretacji *dowodliwości* nie mamy jednak takiej możliwości ucieczki, jak w powyższym przykładzie. Wiadomo, że formuła $god(\overline{n})$, stwierdzająca swoją własną niedowodliwość w PA (gdzie $\overline{n}$ jest stosownym numerem gödlowskim), jest prawdziwa, lecz dowodu w PA nie posiada. Można pokazać, że twierdzeniem stosownego systemu modalnego (w którym reprezentujemy dowodliwość w PA) jest:

$$god(\overline{n}) \equiv \neg \boldsymbol{B} god(\overline{n}).$$

Przykład romantyczny. Pokażemy teraz, co wystarcza, aby każda z obecnych tu Uroczych Pań została – powiedzmy – *Miss World 2012*. Będzie to przykład *samospełniającego się przekonania*. Przypuśćmy, że:

- jesteś szczęściarą epistemiczną;
- osoby, które rozważamy albo zawsze mówią fałsz, albo zawsze mówią prawdę (i Ty wiesz, że tak jest);
- wierzysz swojemu chłopakowi, który prawdziwie (!) mówi:

  (†) *Jeśli uwierzysz, że zostaniesz Miss World 2007, to zostaniesz Miss World 2012.*
- wierzysz też mnie (JP), który mówi:

  (‡) *Jeśli wierzysz, że ja zawsze mówię prawdę, to zostaniesz Miss World 2012.*

Twierdzenie 2. Przy powyższych założeniach *zostaniesz* Miss World 2012. Cieszysz się?

Dla skrótu, przyjmijmy oznaczenia:

- k zastępuje zdanie stwierdzające, iż ja (JP) zawsze mówię prawdę;
- α zastępuje zdanie stwierdzające, że zostaniesz Miss World 2012.

Dowód składa się z dwóch części.

1. W pierwszej pokazujemy, że nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\alpha$. Jest to dowód założeniowy, dostępny dla każdej szczęściary epistemicznej.

Mamy udowodnić formułę:

$$(\bigstar) \qquad ((\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha))) \to \boldsymbol{B}\alpha.$$

Uwaga. Zdanie k stwierdza, iż JP zawsze mówi prawdę; a więc prawdą jest, że JP wypowiada (‡) dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv (\ddagger)$, czyli dokładnie wtedy, gdy prawdziwe jest $k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha)$.

1.	$(\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha) \wedge (k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha))$	założenie
2.	$\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha$	OK: 1
3.	$k \equiv (\boldsymbol{B}k \to \alpha)$	OK: 1
4.	$k \to (\boldsymbol{B}k \to \alpha)$	OR: 3
5.	$(\boldsymbol{B}k \to \alpha) \to k$	OR: 3
6.1.	k	założenie dodatkowe
6.2.	$\boldsymbol{B}k \to \alpha$	MP: 4, 6.1.
6.3.	$\boldsymbol{B}k$	6.1. i warunek **(3)**
6.4.	α	MP: 6.2., 6.3.
7.	$k \to \alpha$	6.1.→6.4.
8.	$\boldsymbol{B}(k \to \alpha)$	7 i warunek **(3)**
9.	$\boldsymbol{B}k \to \boldsymbol{B}\alpha$	8 i warunki **(1a)** i **(2)**
10.	$\boldsymbol{B}k \to \alpha$	2, 9 i warunki **(1b)**, **(1a)** (prawo sylog. hipotet.)
11.	k	MP: 5, 10
12.	$\boldsymbol{B}k$	11 i warunek **(3)**
13.	α	MP: 10, 12
14.	$\boldsymbol{B}\alpha$	13 i warunek **(3)**.

2. Ponieważ proroctwo (†) Twojego chłopaka (tj. zdanie $\boldsymbol{B}\alpha \to \alpha$) jest z założenia prawdziwe, a powyższy dowód formuły (★) pokazuje, iż nasze założenia implikują $\boldsymbol{B}\alpha$, więc na mocy reguły odrywania otrzymujemy α, czyli tezę.

Zostaniesz Miss World 2012!!! Cieszysz się???

Uwaga. Powyższy dowód był przykładem *dowodu wprost*. Aby pokazać, że zostaniesz Miss World 2012 nie musieliśmy odwoływać się do *absurdu*. Cieszysz się?

Ciekawostka prowincjonalna. 16 maja 2005 roku odbyły się demokratyczne wybory Dyrektora Instytutu Językoznawstwa UAM. Dwa tygodnie wcześniej, na Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, odczyt *Kto będzie Dyrektorem Instytutu Językoznawstwa UAM?* wygłosiła Pani Dr *Alice Ann Hunter* (*Department of Independent Logic*, *King David University*, Negev Desert). Korzystając z twierdzeń logiki epistemicznej (z Twierdzenia Löba), Dr *Hunter* trafnie przewidziała wynik wyborów. Jak się domyślasz, dowód był podobny do podanego wyżej dowodu, że zostaniesz Miss World 2012. Tekst odczytu dostępny na stronie:

www.logic.amu.edu.pl

9 Zakończenie

Współcześnie rozpatruje się i bada nieprzebrane mrowie logik nieklasycznych. Czyni się to z różnych względów, m.in.:

1. dla badania czysto matematycznych własności systemów logicznych,
2. dla formalizacji rozumowań, w których występują wyrażenia intensjonalne, których adekwatny opis wykracza poza logikę klasyczną,
3. dla badania sposobów rozumowania występujących w matematyce,
4. dla analizy problematyki filozoficznej, np. dotyczącej wiedzy i przekonań.

Badania logik modalnych przeżywają od kilkudziesięciu lat swoisty renesans. Znajdowane są coraz to nowe interpretacje modalności – jako znaczący przykład niech służy tu interpretacja modalności jako wykonanie programu komputerowego. Zniknęły niektóre wcześniejsze uprzedzenia, które żywiono wobec logik modalnych. Zacytujmy na koniec fragment kończący książkę Smullyan 2007:

> Dawniejsza opozycja filozoficzna wobec logiki modalnej była osadzona w przybliżeniu w trzech różnych (i nieporównywalnych) przekonaniach. Po pierwsze, są tacy, którzy są przekonani, że wszystko, co jest prawdziwe jest koniecznie prawdziwe, a stąd nie ma żadnej różnicy między prawdą a prawdą konieczną. Po drugie, są tacy, którzy wierzą, że nic nie jest koniecznie prawdziwe, a stąd dla dowolnego zdania p, zdanie $\boldsymbol{N}p$ (p jest koniecznie prawdziwe) jest po prostu fałszywe! A po trzecie, są i tacy, którzy twierdzą, że słowa „koniecznie prawdziwe" nie niosą jakiegokolwiek sensu. Tak więc, każde z tych nastawień filozoficznych odrzuca logikę modalną ze swoich własnych powodów. W istocie, pewien bardzo znany filozof wsławił się sugestią, że nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu. Na co Boolos bardzo stosownie odpowiedział: „Jeśli nowoczesna logika modalna została poczęta w grzechu, to została wybawiona przez Gödlowskość". [W oryginale: *If modern modal logic was conceived in sin, then it has been redeemed through Gödliness.*]

Zalecana literatura

Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, Cambridge.

Borkowski, L. 1977. *Logika formalna. Systemy logiczne. Wstęp do metalogiki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Chellas, B. 1980. *Modal Logic. An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.

Hughes, G., Cresswell, M.J. 1996. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London New York.

Indrzejczak, A. 2006. *Hybrydowe systemy dedukcyjne w logikach modalnych.* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Malinowski, G. 2006. *Logiki wielowartościowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Perzanowski, J. 1989. *Logiki modalne a filozofia.* Uniwersytet Jagielloński, Rozprawy Habilitacyjne nr 156, Kraków.

Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.

Świrydowicz, K. 2004. *Podstawy logiki modalnej*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Tokarz, M. 1993. *Elementy pragmatyki logicznej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.