

Metalogika — Wstęp

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Cel wykładów

Cel

- Wprowadzenie w problematykę współczesnych badań metalogicznych.
- Omówienie wybranych metatwierdzeń logicznych.
- Zwrócenie uwagi na stosowane techniki dowodowe.

Wymagania

- Zakładamy, że słuchacze mają za sobą elementarny kurs logiki matematycznej (klasyczny rachunek zdań i klasyczny rachunek predykatów).
- Pojęcia matematyczne wykorzystywane w wykładzie będą wyjaśniane na bieżąco.

Spis treści

- Uwagi historyczne. Tworzenie pojęć metalogicznych.

Ujęcie algebraiczne

- Operacje konsekwencji w językach zdaniowych.
- Semantyka matrycowa dla logik zdaniowych.
- Pełność logik zdaniowych.

Ujęcie semantyczne

- Logiki abstrakcyjne: definicje i przykłady.
- Twierdzenia Lindströma.
- Uogólnione kwantyfikatory.
- Logiki infinitarne.

Spis treści

Wybrane twierdzenia

- Metody dowodowe w metatwierdzeniach KRP: trafność, pełność, zwartość, LST.
- Wybrane twierdzenia klasycznej teorii modeli.
- Reprezentowalność funkcji rekurencyjnych w PA. Arytmetyzacja składni.
- Twierdzenia: Churcha, Gödla, Tarskiego, Rossera, Löba.

Dodatki

- Twierdzenie Herbranda i metoda tablic analitycznych.
- Formalizm Gentzena.
- Metalogika a teoria mnogości.

Cel dzisiejszego wykładu

Przed dokładniejszym omówieniem wspomnianych tematów postaramy się w skrócie opowiedzieć o początkach metalogiki oraz kierunkach jej rozwoju.

- Staramy się ograniczyć subiektywizm w wyborze przedstawianych wątków.
- Ograniczamy się do logiki *matematycznej*, pomijając filozoficzne aspekty logiki.
- Przedstawianych wątków nie da się poklasyfikować: przenikają się one wzajemnie.

Ojcowie Założyciele

- Augustus De Morgan, George Boole.
 - Inspiracje z arytmetyzacji analizy matematycznej.
 - Inspiracje lingwistyczne i filozoficzne.
-
- Nurt logistyczny: Peano, Frege, Whitehead i Russell.
 - Nurt algebraiczny: Peirce, Schröder, Löwenheim, Skolem.

Na początku był Hilbert. . .

- Kategoryczne charakterystyki wybranych struktur matematycznych (Hilbert, Dedekind, Postulatyści Amerykańscy).
 - Wyjście *poza* logikę, w stronę refleksji *nad* logiką.
-
- Początki teorii mnogości (Cantor, Dedekind, Zermelo).
 - Program Hilberta.
-
- Tworzenie pojęć metalogicznych: niesprzeczności, dowodliwości, kategoryczności, zupełności, definiowalności, rozstrzygalności, obliczalności.

Pierwsze wielkie problemy metalogiki

- Między *Principia Mathematica* a *Grundlagen der Mathematik*.
 - Problem pełności: Gödel.
 - Początki semantyki formalnej: Tarski.
-
- Problem rozstrzygalności: Church, Turing, Gödel.
 - Problem zupełności: Gödel.
 - Problem dowodliwości niesprzeczności: Gödel, Gentzen.

Teoria modeli

- Początek: twierdzenie Löwenheima-Skołema.
 - Najważniejsze konstrukcje wykorzystywane w teorii modeli.
 - Rodzaje modeli. Spełnianie i omijanie typów.
 - Kategoryczność w mocy a zupełność.
 - Początek współczesnej teorii modeli: twierdzenie Morleya.
 - Teoria klasyfikacji.
-
- Logiki silniejsze od logiki pierwszego rzędu: uogólnione kwantyfikatory i logiki infinitarne.
 - Twierdzenia Lindströma.

Teoria mnogości

- Opisowa teoria mnogości.
- Aksjomatyczne teorie mnogości (Zermelo, Fraenkel, Skolem, von Neuman, Bernays, Gödel).
- Pierwsze modele dla teorii mnogości (Mostowski, Gödel, von Neumann).
- Dowody niesprzeczności i niezależności wybranych zdań (aksjomat wyboru, hipoteza kontinuum). Metoda forcingu (Cohen).
- Duże liczby kardynalne.

Teoria rekursji

- Matematyczne reprezentacje pojęcia obliczalności (Turing, Church, Post, Markow, Gödel, Kleene).
 - Teza Churcha-Turinga.
 - Związki z niezupełnością i nierozstrzygalnością.
 - Teorie rozstrzygalne i nierozstrzygalne.
 - Badanie stopni nierozstrzygalności.
-
- Programowanie w logice.
 - Złożoność obliczeniowa.

Teoria dowodu

- *Beweistheorie* Hilberta.
 - Rachunki Gentzena i Jaśkowskiego.
 - Twierdzenie Herbranda.
-
- Ogólne operacje konsekwencji.
 - Rachunki zdaniowe.
-
- Metody tablicowe.
 - Zastosowania w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Literatura

Dziś podajemy tylko wybrane (trochę *ad hoc*) pozycje podstawowe :

- Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland, Amsterdam New York Oxford.
- Barwise, J., Feferman, S. (Eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Brady, G. 2000. *From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic*. Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo.
- Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A. 1973. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.
- Gödel, K. 1986–2003. S. Feferman *et al.* (eds.) *Kurt Gödel: Collected Works, Volume I 1986, Volume II 1990, Volume III 1995, Volume IV 2003, Volume V, 2003*. Oxford University Press, New York.

- Grattan-Guinness, I. 2000. *The search for mathematical roots 1870–1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Cambridge, Mass.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
- Hodges, W. 1993. *Model theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kleene, S.C. 1952. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam.
- Mancosu, P., Zach, R., Badesa, C. 2004. *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935*. W: Haaparanta, L. (ed.) *The Development of Modern Logic*. Oxford University Press, New York and Oxford.

- Mostowski, A. 1948. *Logika matematyczna*. Warszawa-Wrocław.
- Mostowski, A. 1965. *Thirty Years of Foundational Studies: Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964*. *Acta Philosophica Fennica XVII*, Soc. Philos. Fennica, Helsinki.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic*. Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem*. Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.

- Skolem, T. 1970. *Selected Works in Logic*. Edited by Jens Erik Fenstad. Universiteitsforlaget, Oslo - Bergen - Tromsø.
- Woleński, J. 1993. *Metamatematyka a epistemologia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Wójcicki, R. 1988. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Tarski, A. 1995. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 1: Prawda*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Następny wykład: wyimki z [elementarza logicznego i algebraicznego](#).