

Logika Matematyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

4 X 2007

Plan konwersatorium

- Dzisiaj: wprowadzenie.
- Semestr zimowy: Elementarz — Klasyczny Rachunek Zdań (KRZ).
- Semestr letni: Elementarz — Klasyczny Rachunek Predykatów (KRP).

Materiały dydaktyczne będą dostępne na stronie Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

www.logic.amu.edu.pl

Tam także: linki do stron poświęconych logice matematycznej.

Konwersatorium kończy się egzaminem pisemnym.

Sylabus oraz spis zalecanej literatury są dostępne na wspomnianej stronie internetowej.

Logika — działy

- Logika matematyczna
- Logika filozoficzna
- Ogólna metodologia nauk
- Semiotyka logiczna
- Logiczne podstawy informatyki.

Logika w rozwiniętej postaci wyłoniła się z refleksji filozoficznej Zachodu. Obecnie wszystkie jej działy posługują się narzędziami matematycznymi. Logika jest dyscypliną o najbardziej rozwiniętej i usystematyzowanej metodologii.

Logika matematyczna— działy

- Elementarz Logiczny (KRZ + KRP)
- Teoria dowodu
- Teoria modeli
- Teoria rekursji
- Metalogika.

Z logiką matematyczną blisko związane są Podstawy Matematyki, obejmujące m.in. [Teorię Mnogości](#).

Są dwa sposoby dydaktyki logiki:

- Logica docens
- Logica utens.

Logika — kilka podstawowych pojęć

Pojęcia **syntaktyczne**:

- wnioskowanie, przesłanka, wniosek;
- aksjomat, dowód, teza;
- operacja konsekwencji, teoria.

Pojęcia **semantyczne**:

- wynikanie logiczne,
- prawo logiki (tautologia).

Pojęcia **metalogiczne**:

- system logiczny;
- niesprzeczność, pełność, zupełność, itd.

System logiczny

Logiką (**systemem logicznym**) nazywamy trójkę uporządkowaną (L, C, S) , gdzie:

- L jest **językiem** systemu;
- C jest **operatorem konsekwencji**;
- S jest **semantyką** systemu.

L jest (precyzyjnie określonym) **językiem formalnym**. C jest **funkcją** przyporządkowującą każdemu zbiorowi X formuł z L zbiór $C(X)$ wszystkich logicznych konsekwencji X . S jest pewną klasą **systemów relacyjnych** (układów złożonych ze zbioru obiektów oraz wiążących je relacji).

Języki formalne

Określenie języka systemu logicznego wymaga podania:

- alfabetu języka;
- reguł formowania wyrażeń złożonych (ustalonych kategorii składniowych).

Komponentem składniowym systemu logicznego (L, C, S) jest też operacja konsekwencji C rozważana w tym systemie. Może ona być opisana na różne sposoby, np. poprzez wybranie pewnych aksjomatów oraz reguł inferencji.

Systemy logiczne: składnia

Rozważmy prosty przykład języka formalnego L_{\heartsuit} .

Alfabet języka L_{\heartsuit} zawiera wyłącznie:

- nieskończony zbiór $A_{\heartsuit} = \{\heartsuit_1, \heartsuit_2, \heartsuit_3, \dots\}$
- dwa symbole: \S oraz \star .

Zbiór F_{\heartsuit} wszystkich **wyrażeń** języka L_{\heartsuit} definiujemy przez indukcję:

- (1) $A_{\heartsuit} \subseteq F_{\heartsuit}$
- (2) Jeśli $\alpha, \beta \in F_{\heartsuit}$, to $\S\alpha\beta \in F_{\heartsuit}$
- (3) Jeśli $\alpha \in F_{\heartsuit}$, to $\star\alpha \in F_{\heartsuit}$
- (4) Każde wyrażenie w F_{\heartsuit} jest bądź elementem A_{\heartsuit} , bądź powstaje z elementów F_{\heartsuit} przez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Aksjomatami systemu $(L_{\heartsuit}, C_{\heartsuit})$ są wszystkie wyrażenia postaci:

- $\xi\xi\alpha\beta\xi\xi\beta\gamma\xi\alpha\gamma$
- $\xi\xi\star\alpha\alpha\alpha$
- $\xi\alpha\xi\star\alpha\beta$

Reguła odcinania ogona to zbiór wszystkich par postaci $((\xi\alpha\beta, \alpha), \beta)$, gdzie $\alpha, \beta \in F_{\heartsuit}$. **Dowodem** wyrażenia α ze zbioru wyrażeń X nazywamy każdy skończony ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczne z α_n , a każdy element α_k tego ciągu jest bądź aksjomatem L_{\heartsuit} , bądź elementem X , bądź drugim elementem pary w regule odcinania ogona, gdzie pierwszy element tej pary składa się z wyrażeń występujących w tym ciągu wcześniej niż α_k . Dla dowolnego $X \subseteq F_{\heartsuit}$ niech:

$$C_{\heartsuit}(X) = \{\alpha \in F_{\heartsuit} : \text{istnieje dowód } \alpha \text{ z } X\}.$$

Tezą systemu $(L_{\heartsuit}, C_{\heartsuit})$ jest każde wyrażenie α takie, że istnieje dowód α z aksjomatów $(L_{\heartsuit}, C_{\heartsuit})$.

6. Struktury relacyjne

Komponent semantyczny systemu logicznego (L, C, S) to odniesienie przedmiotowe języka L .

Struktura relacyjna to układ postaci:

$$\mathfrak{A} = \langle U, \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K} \rangle$$

- U jest zbiorem, zwanym **uniwersum** struktury \mathfrak{A}
- $\{R_i\}_{i \in I}$ jest rodziną **relacji** na zbiorze U
- $\{f_j\}_{j \in J}$ jest rodziną **funkcji** określonych na zbiorze U i o wartościach w tym zbiorze
- $\{a_k\}_{k \in K}$ jest rodziną **elementów wyróżnionych** zbioru U .

Struktury relacyjne

Kilka uwag (terminologicznych):

- Gdy $J = K = \emptyset$, to mówimy o strukturach relacyjnych **czystych**.
- Gdy $I = K = \emptyset$, to mówimy o **algebrach**.
- Często rozważamy struktury **wielosortowe**: zamiast zbioru U mamy wtedy rodzinę zbiorów $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$; wtedy odpowiednio określone są relacje oraz funkcje takiej wielosortowej struktury.
- Struktury relacyjne są interpretacjami języka Klasycznego Rachunku Predykatów (z identycznością).

Matryce logiczne

Matryce logiczne to algebry, w których uniwersum pewne elementy są wyróżnione. **Matrycą logiczną** nazywamy więc układ postaci:

$$\mathfrak{M} = \langle U, \{f_j\}_{j \in J}, D \rangle,$$

gdzie $\{f_j\}_{j \in J}$ jest rodziną funkcji na U , a D jest pewnym podzbiorem U .

W Klasycznym Rachunku Zdań posługiwać się będziemy matrycą dwuelementową, z jednym elementem wyróżnionym. Funkcje z tej matrycy będą semantycznymi odpowiednikami **spójników prawdziwościowych** (znanych wszystkim ze szkoły).

Pojęcie izomorfizmu

Pojęcie **izomorfizmu** struktur relacyjnych omówimy w grubym uproszczeniu, dla struktur z jedną relacją dwuargumentową oraz jedną funkcją jednoargumentową. Powiemy, że struktury

$$\mathfrak{A}_1 = \langle U_1, R_1, f_1 \rangle \quad \text{i} \quad \mathfrak{A}_2 = \langle U_2, R_2, f_2 \rangle$$

są **izomorficzne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja f z U_1 na U_2 taka, że dla dowolnych $x, y \in U_1$:

- $xR_1y \equiv f(x)R_2f(y)$
- $f(f_1(x)) = f_2(f(x))$.

Funkcja $f : U_1 \rightarrow U_2$ jest **homomorfizmem** \mathfrak{A}_1 w \mathfrak{A}_2 , gdy dla dowolnych $x, y \in U_1$:

- jeśli xR_1y , to $f(x)R_2f(y)$
- $f(f_1(x)) = f_2(f(x))$.

Elementarz Logiczny

System $(L_{\heartsuit}, C_{\heartsuit})$ to (składniowo-inferencyjna) część Elementarza Logicznego — jak później zobaczymy, może on być utożsamiany z (implikacyjno-negacyjnym) [Klasycznym Rachunkiem Zdań](#).

Trzeba jeszcze określić komponent [semantyczny](#) S_{\heartsuit} , tj. określić takie matryce logiczne $\mathfrak{M} = \langle U, \{f_j\}_{j \in J}, D \rangle$, że przy każdym homomorfizmie L_{\heartsuit} w \mathfrak{M} tezy systemu $(L_{\heartsuit}, C_{\heartsuit})$ (i tylko one) będą miały wartości wyłącznie w zbiorze D .

Tym właśnie zajmiemy się na dalszych zajęciach.

Przestrogi

Będziemy uczyć się jedynie Elementarza Logicznego. Pominięte zostaną aspekty pragmatyczne (o tym — na roku IV).

Akceptujemy klasyczną definicję prawdy.

Nie traktujemy Logiki Matematycznej jako dyscypliny normatywnej.

W zastosowaniach (znajdowanie „przekładów” z języka naturalnego na języki systemów logicznych) ograniczamy się do wybranych fragmentów języków etnicznych.

Motto

Naszym mottem w tym roku będzie hasło jednego z Bohaterów I Wojny Światowej:



Do zobaczenia na dalszych wykładach.

jp