

# Logika

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

25 listopada 2010

# Wprowadzenie

**Klasyczny Rachunek Zdań** (KRZ) jest podstawowym systemem logicznym.

- Jego **syntaktyka** (składnia) analizuje złożoność zdań jako funkcję użytych funktorów zdaniotwórczych;
- **Semantyka** semantyka opisuje własności tych spójników przy użyciu prawdy i fałszu.

W KRZ analizujemy jedynie zdania w sensie logicznym, czyli podlegające ocenie ze względu na ich prawdziwość bądź fałszywość.

# Alfabet KRZ

Poprawnie skonstruowane zdania KRZ zawierają trzy rodzaje znaków: zmienne zdaniowe, spójniki zdaniowe lub symbole pomocnicze.

- **Zmienne zdaniowe** są jedynym rodzajem zmiennych używanych w KRZ. Będziemy je oznaczać odpowiednio:

$p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2 \dots s_n$ .

- **Spójniki zdaniowe** — funktory zdaniotwórcze o argumentach zdaniowych

- **negacja**: „ $\neg$ ” ( $\neg\alpha$  „nieprawda, że  $\alpha$ ”);
- **implikacja**: „ $\rightarrow$ ” ( $\alpha \rightarrow \beta$  „jeżeli  $\alpha$ , to  $\beta$ ”);
- **alternatywa**: „ $\vee$ ” ( $\alpha \vee \beta$  „ $\alpha$  lub  $\beta$ ”);
- **koniunkcja**: „ $\wedge$ ” ( $\alpha \wedge \beta$  „ $\alpha$  oraz  $\beta$ ”);
- **równoważność**: „ $\equiv$ ” ( $\alpha \equiv \beta$  „ $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$ ”).  
(Istnieje o wiele więcej spójników.)

- **Symbole pomocnicze** — nawias lewy oraz prawy  $()$ .

# Język KRZ

Mając zdefiniowany alfabet, możemy zdefiniować indukcyjnie zbiór wszystkich **formuł** KRZ ( $F_{KRZ}$ ):

- (1)  $p, q, r, \dots \in F_{KRZ}$ ;
- (2) jeżeli  $\alpha \in F_{KRZ}$ , to  $\neg(\alpha) \in F_{KRZ}$ ;
- (3) jeżeli  $\alpha, \beta \in F_{KRZ}$ , to:  $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in F_{KRZ}$ ,  $(\alpha) \vee (\beta) \in F_{KRZ}$ ,  $(\alpha) \wedge (\beta) \in F_{KRZ}$ ,  $(\alpha) \equiv (\beta) \in F_{KRZ}$ ;
- (4) każda formuła KRZ jest albo zmienną zdaniową, albo powstaje ze zmiennych zdaniowych, nawiasów i spójników według zasady z (2) i (3).

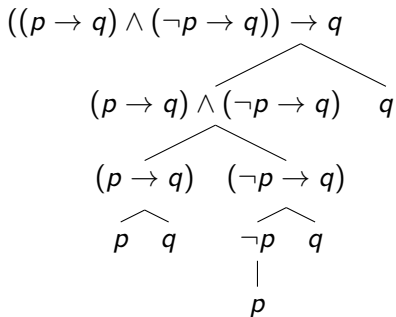
W celu ułatwienia sobie życia opuszczamy nawiasy otaczające pojedyncze zmienne.

Symbolami greckimi  $\alpha, \beta, \chi$  oznaczamy dowolne formuły KRZ.

Symbolami  $X, Y, Z$  oznaczamy dowolne zbiory formuł KRZ. Obydwa typy symboli należą do **metajęzyka**.

## Język KRZ

Reprezentacja budowy składniowej formuły  $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ :



## Język KRZ

Przedstawione pięć spójników logicznych w języku naturalnym można wyrażać na wiele sposobów, m.in.

- $\neg p$  — „nie  $p$ ”, „nie prawda, że  $p$ ”, „nie jest tak, że  $p$ ”, itd;
- $p \rightarrow q$  — „jeżeli  $p$ , to  $q$ ”, „jeśli  $p$ , to  $q$ ”, „skoro  $p$ , to  $q$ ”, „ $q$  o ile  $p$ ”, „ $q$  pod warunkiem, że  $p$ ”, itd;
- $p \wedge q$  — „ $p$  oraz  $q$ ”, „ $p$  i  $q$ ”, „ $p$  a  $q$ ”, „ $p$  zaś  $q$ ”, „ $p$  mimo że  $q$ ”, itd;
- $p \vee q$  — „ $p$  lub  $q$ ”, „albo  $p$  albo  $q$ ”, „ $p$  bądź  $q$ ”, itd;
- $p \equiv q$  — „ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ ”, „ $p$  zawsze i tylko wtedy, gdy  $q$ ”, „ $p$  dokładnie wtedy, gdy  $q$ ”, itd.

# Język KRZ

Znając pojęcia zmiennych i spójników i znaków pomocniczych można przekładać zdania języka naturalnego na język KRZ.

- $p \vee \neg p$   
*Idę albo nie idę.*
- $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$   
*Jeśli nie jesteś studentem, to dobrze się odżywasz i nie musisz zakuwać do sesji.*
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$   
*Jeżeli Jan był na miejscu zbrodni, to widział przestępcę, a jeżeli Jana tam nie było, to nie mógł go widzieć.*

## Uwaga!

Zgodnie z przyjętą konwencją siła wiązania zmiennych przez spójniki jest stopniowalna: najsilniej wiąże negacja „ $\neg$ ”, słabiej wiążą koniunkcja „ $\wedge$ ” i alternatywa „ $\vee$ ” (obie jednakowo), następnie implikacja „ $\rightarrow$ ”, najslabiej wiążąca jest równoważność „ $\equiv$ ”.

# Ćwiczenia — język KRZ

Zbuduj schematy poniższych zdań:

- (1) *Pouczę się logiki lub pójdę do pubu.*
- (2) *Marek dotrwał do końca imprezy, a Janusz odpadł przed północą.*
- (3) *Jeżeli nie masz nic, to nie masz nic do stracenia.*
- (4) *Nauczę się tańczyć walca lub zacznę pisać sonety i nauczę się grać na klarnecie.*
- (5) *Nieprawda, że jeśli dostanę awans, to zwolnię połowę personelu lub obniżę wynagrodzenia.*
- (6) *Jan zdobędzie serce Marzeny, o ile zacznie regularnie uczęszczać na siłownię, a jeżeli nie zacznie regularnie uczęszczać na siłownię, to albo pójdzie na solarium albo nie zdobędzie serca Marzeny.*



# Ćwiczenia — język KRZ

Sparafrazuj podane zdania tak, by móc do nich zastosować symbolikę KRZ oraz podaj ich schematy:

- *Ministra Ochrony Środowiska nie ma obecnie w kraju.*
- *Kiedykolwiek widzę rottweilera bez kagańca, sięgam po gaz pieprzowy.*
- *Może ten akwizytor to człek poczciwy do szpiku kości, a może niebywale naiwny.*
- *Narzekając na los dajemy wyraz frustracji względnie oczekujemy pocieszenia.*
- *Opinia publiczna staje się, mówiąc krótko, najwyższym autorytetem za każdym razem, gdy społeczeństwo zatracza wyższe ideały pogrążając się w postawach hedonistycznych.*

(T. Hołówka, 2005. *Kultura logiczna w przykładach*. PWN.)

# Ćwiczenia — język KRZ

Sformułuj w sposób stylistycznie poprawny (i jednoznaczny) zdania powstające z podanych niżej schematów przez podstawienie: za  $p$  — „Teoria Freuda ma prawo do miana nauki”, za  $q$  — „Teoria Freuda może być potwierdzona przez eksperymenty”, za  $r$  — „Teoria Freuda może być obalona przez eksperymenty”.

- $p \rightarrow (q \vee r)$
- $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $(q \wedge r) \rightarrow p$
- $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$
- $\neg q \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$
- $\neg[\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r)]$

(Ćwiczenie pochodzi z podręcznika: B. Stanosz, *Ćwiczenia z logiki*)

# Tabelki prawdziwościowe

Świat, który bada logika jest prosty — składa się z dwóch różnych elementów 0 oraz 1. Przyjmujemy, że 0 oznacza **fałsz** a 1 **prawdę**.

**Spójnik prawdziwościowy** — (ekstensjonalny) jest niewrażliwy na treść łączonych zdań, wartość logiczna zdania złożonego jest funkcją wartości logicznych zdań składowych.

**Wartościowaniem logicznym** formuły w KRZ nazywamy każdą funkcję  $v : F_{KRZ} \rightarrow \{0, 1\}$  taką, że:

- $v(\neg\alpha) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\alpha) = 0$ ,
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\alpha) = 1$  i  $v(\beta) = 0$ ,
- $v(\alpha \vee \beta) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\alpha) = 0$  i  $v(\beta) = 0$ ,
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\alpha) = 1$  i  $v(\beta) = 1$ ,
- $v(\alpha \equiv \beta) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\alpha) = v(\beta)$ .

## Tabelki prawdziwościowe

Wszystkie spójniki logiczne można opisać przy pomocy **tabelek zero-jedynkowych**.

Spójniki jednoargumentowe:

$\alpha$	$\neg\alpha$	$A\alpha$	$V\alpha$	$F\alpha$
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

Spójniki dwuargumentowe:

$\alpha$	$\beta$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1		0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0		0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

## Tabelki prawdziwościowe

Pięć wyróżnionych spójników:

$\alpha$	$\neg\alpha$
0	1
1	0

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \equiv \beta$
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

## Tabelki prawdziwościowe — ćwiczenia

Ustal wartość logiczną zdań zbudowanych wedle podanych niżej schematów przez podstawienie zdania prawdziwego w miejsce  $p$ , a fałszywego w miejsce  $q$  (i odwrotnie).

- $(p \wedge q) \rightarrow p$
- $p \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \vee q) \rightarrow p$
- $p \rightarrow (p \vee q)$
- $\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$
- $\neg p \rightarrow \neg(p \vee q)$
- $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

(Ćwiczenie pochodzi z podręcznika: B. Stanosz, *Ćwiczenia z logiki*)

## Tabelki prawdziwościowe — ćwiczenia

Przyjmijmy, że  $\alpha$  jest zdaniem prawdziwym. Czy można ustalić wartość logiczną zdania  $\beta$ , jeżeli wiemy, że:

- (1) Zdanie  $\alpha \wedge \beta$  jest prawdziwe.
- (2) Zdanie  $\alpha \vee \beta$  jest prawdziwe.
- (3) Zdanie  $\alpha \rightarrow \beta$  jest prawdziwe.
- (4) Zdanie  $\beta \rightarrow \alpha$  jest prawdziwe.
- (5) Zdanie  $\alpha \equiv \beta$  jest prawdziwe.
- (6) Zdanie  $\alpha \wedge \beta$  jest fałszywe.
- (7) Zdanie  $\alpha \vee \beta$  jest fałszywe.
- (8) Zdanie  $\alpha \rightarrow \beta$  jest fałszywe.
- (9) Zdanie  $\beta \rightarrow \alpha$  jest fałszywe.
- (10) Zdanie  $\alpha \equiv \beta$  jest fałszywe.

(Ćwiczenie pochodzi z podręcznika: Marek Tokarz, *Wykłady z logiki*)

# Równoważność zdań i formuł

Dwa zdania są **równoważne** jeżeli posiadają tę samą wartość logiczną.

Dwie formuły  $\alpha$  i  $\beta$  są **równoważne**, gdy są opisywane za pomocą tych samych tabelki. Własność ta przysługuje tylko formułom złożonym.

Równoważność jest rodzajem identyczności, np:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Równoważne formuły  $\alpha$  i  $\beta$  są wymienne w każdej formule  $\gamma$  bez zmiany jej wartości logicznej:

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p \equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

Odwołując się do pojęcia równoważności formuł można definiować spójniki logiczne:

$$p \rightarrow q =^{df} \neg p \vee q$$



# Równoważność zdań i formuł

**Pełność funkcyjna KRZ** — używając pięciu wyróżnionych spójników dwuargumentowych ( $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \equiv$ ) można definiować pozostałe 15 oraz każdy spójnik prawdziwościowy o dowolnej liczbie argumentów.

**Klasy Поста** — zbiory spójników gwarantujących pełność funkcyjną KRZ:  
 $\{\neg, \rightarrow\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee, \wedge\}$ .

Wyrażenie

$$p \rightarrow q =^{df} \neg p \vee q$$

jest definicją spójnika implikacji w klasie  $\{\neg, \vee\}$ .

Wyrażenie

$$p \wedge q =^{df} \neg(\neg p \vee \neg q)$$

jest definicją spójnika koniunkcji w tej samej klasie.

## Ćwiczenia — równoważność formuł KRZ

- (1) Zdefiniuj spójniki jednoargumentowe  $A$ ,  $V$ ,  $F$  oraz dwuargumentowe: „ $\wedge$ ”, „ $\vee$ ” w klasie  $\{\neg, \rightarrow\}$ .
- (2) Zdefiniuj spójnik „ $\equiv$ ” w klasie  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ .
- (3) Używając wyłącznie spójnika „ $\rightarrow$ ” zdefiniuj „ $\vee$ ”.
- (4) Spójnik **binegacji** („ $\downarrow$ ”) odpowiadający w języku naturalnym wyrażeniu „ani ... ani ...” opisywany jest w kolumnie nr 9. Zdefiniuj go w klasie  $\{\neg, \vee\}$ .
- (5) Spójnik **alternatywy rozłącznej** („ $\underline{\vee}$ ”) opisywany w kolumnie nr 7 zdefiniuj w klasie  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ .
- (6\*) Spójnik z kolumny nr 15 nazywa się **spójnikiem Sheffera**. „ $\alpha/\beta$ ” (co najwyżej jedno z dwojga). Jest to jeden spójnik gwarantujący pełność KRZ. Używając spójnika Sheffera zdefiniuj: „ $\neg$ ”, „ $\rightarrow$ ”, „ $\vee$ ”, „ $\wedge$ ”.

# Tautologie

**Tautologia** jest to zdanie, które jest schematem wyłącznie zdań prawdziwych.

Zbiór wszystkich tautologii będziemy oznaczać „*TAUT*”.

Wszystkie formuły należące do *TAUT* przyjmują wartość 1 przy dowolnym wartościowaniu wchodzących w ich skład zmiennych.

- $TAUT = \{\alpha \in For : v(\alpha) = 1 \text{ dla dowolnego wartościowania } v : For \rightarrow \{0, 1\}\}$
- „ $\models \alpha$ ” — „ $\alpha$  jest tautologią”;
- „ $\not\models \alpha$ ” — „ $\alpha$  nie jest tautologią”;

Zbiór *TAUT* jest **rozstrzygalny** — istnieje efektywny sposób rozstrzygnięcia, czy dowolna formuła KRZ jest tautologią.

# Tautologie

Tautologie są **prawami** KRZ.

Kilka najważniejszych praw logiki:

- (1) prawo podwójnej negacji:  $\neg\neg p \equiv p$ ,
- (2) prawo wyłączonego środka:  $p \vee \neg p$ ,
- (3) zasada sprzeczności:  $\neg(p \wedge \neg p)$ ,
- (4) modus ponens:  $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ ,
- (5) modus tollens:  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ,
- (6) prawo tożsamości:  $p \rightarrow p$ ,
- (7) I prawo redukcji do absurdu:  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ .

Pełniejszą listę podstawowych praw logiki podajemy w Dodatku nr 1 udostępnionym na stronie Zakładu.

# Tautologie

Aby sprawdzić tautologiczność formuły należy dokonać wszystkich możliwych podstawień, których liczba dla formuły o  $n$  zmiennych wynosi  $2^n$ .

Dla formuły o 2 zmiennych otrzymujemy cztery możliwe wartościowania.  
Rozpatrzmy prawo modus tollens:  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ :

$$\begin{array}{l|l}
 (1) \ v(p) = 1, v(q) = 1 & (2) \ v(p) = 1, v(q) = 0 \\
 (1 \rightarrow 1) \wedge \neg 1 \rightarrow \neg 1 & (1 \rightarrow 0) \wedge \neg 0 \rightarrow \neg 1 \\
 1 \wedge 0 \rightarrow 0 & 0 \wedge 1 \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow 0 & 0 \rightarrow 0 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 (3) \ v(p) = 0, v(q) = 1 & (4) \ v(p) = 0, v(q) = 0 \\
 (0 \rightarrow 1) \wedge \neg 1 \rightarrow \neg 0 & (0 \rightarrow 0) \wedge \neg 0 \rightarrow \neg 0 \\
 1 \wedge 0 \rightarrow 1 & 1 \wedge 1 \rightarrow 1 \\
 0 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 1 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

## Tautologie KRZ — ćwiczenia

Zbadaj tautologiczność dwóch poniższych formuł:

- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- $(p \equiv q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$

# Tautologie

W celu uproszczenia procedury sprawdzania tautologiczności stosuje się tzw. skróconą metodę zero-jedynkową. Polega ona na wykazaniu, że istnieje bądź nie istnieje podstawienie falsyfikujące dane formułę, czyli przypisujące jej wartość 0.

Jeżeli zakładając, że wartość  $\alpha$  jest 0, posługując się tabelkami zero-jedynkowymi dojdziemy do sprzeczności oznacza to, że badana formuła jest tautologią.

Sprawdzamy II prawo redukcji do absurdu:  $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$

Sprawdzamy formułę:  $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [r \rightarrow (p \vee q)]$

## Ćwiczenia — tautologie

Sprawdź skróconą metodą zero-jedynkową, które z poniższych formuł są tautologiami:

- (1)  $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- (2)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (3)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (4)  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
- (5)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
- (6)  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
- (7)  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (8)  $((p \vee q) \wedge (q \vee r)) \rightarrow (p \vee r)$
- (9)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \rightarrow r))$
- (10)  $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$



# Tautologie

Wszystkie Tautologie KRZ są formułami, które przyjmują wartość wyróżnioną przy dowolnym wartościowaniu tylko ze względu na swoją budowę składniową oraz ustalone znaczenie stałych logicznych. Zdanie, którego schematem jest tautologia nazywa się **prawdą logiczną** i jest ono prawdziwe bez względu na jego treść.

Zdania języka naturalnego, które są prawdziwe ze względu na znaczenie użytych w nich wyrażen to **zдания analityczne**, np.:

- Kawaler jest to mężczyzna nieżonaty.

Zdania języka naturalnego, których prawdziwość lub fałszywość ustala się przez konfrontację ich treści z danymi empirycznymi, nazywa się **zdaniami syntetycznymi**, np.:

- Reprezentacja Polski w piłkę nożną jest drużyną urodzonych zwycięzców.

# Kontrtautologie

**Kontrtautologie** to formuły, które przyjmują wartość 0 przy dowolnym wartościowaniu.

Formuła KRZ nie jest kontrtautologią, jeżeli przy co najmniej jednym wartościowaniu przyjmuje wartość 1.

Zbiór *CONTR* zawiera formuły będące kontrtautologiami:

$$CONTR = \{ \alpha \in For : v(\alpha) = 0 \text{ dla dowolnego wartościowania } v : For \rightarrow \{0, 1\} \}$$

Zdanie, którego schematem jest kontrtautologia nazywamy **fałszem logicznym**, np.:

- Idę oraz nie idę.

**Zdanie kontradiktoryczne** — jest zawsze fałszywe na mocy znaczenia zawartych w nim wyrażeń, np.:

- Kwadrat jest trójkątem.

# Kontrtautologie

Zbadaj skróconą metodą zero-jedynkową, który z poniższych schematów jest *kontrtautologią*.

- $\neg[(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)];$
- $\neg[(p \wedge \neg q) \vee (p \rightarrow q)];$
- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \vee q);$
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q);$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q);$

## Wynikanie analityczne

Ze zdania  $Z_1$  wynika analitycznie zdanie  $Z_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy z uwagi tylko na samą strukturę  $Z_1$  i  $Z_2$  oraz znaczenie występujących w nich wyrażen nie może być tak, by  $Z_1$  było prawdą a jednocześnie  $Z_2$  fałszem.

Na przykład ze zdania:

*W zamachu zastrzelono premiera Burundi*

wynika analitycznie zdanie:

*Premier Burundi nie żyje.*

Parę zdań taką, że ze zdania  $Z_1$  wynika analitycznie zdanie  $Z_2$  i ze zdania  $Z_2$  wynika analitycznie zdanie  $Z_1$  nazywa się zdaniami **analitycznie równoważnymi**.

Na przykład zdanie:

*Jan jest stryjem Piotra*

jest analitycznie równoważne ze zdaniem:

*Piotr jest bratankiem Jana.*

# Wynikanie logiczne

Jeżeli  $Z$  i  $W$  są dowolnymi zdaniami i implikacja „ $Z \rightarrow W$ ” jest prawdą logiczną, to  $W$  wynika logicznie z  $Z$ . Wynikanie logiczne jest zatem szczególnym przypadkiem wynikania analitycznego.

Ze skończonego zbioru zdań  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  wynika logicznie zdanie  $W$  ( $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \models W$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie „Jeżeli  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ , to  $W$ ” jest **prawdą logiczną**.

Tautologie to dokładnie te formuły KRZ, które wynikają logicznie ze zbioru pustego  $\emptyset$ .

# Wynikanie logiczne

Pojęcie wynikania logicznego wiąże się z pojęciem tautologii — jeżeli  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \models W$ , to istnieje tautologia, której podstawieniem jest zdanie „Jeżeli  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ , to  $W$ ”.

Niech formuły  $\alpha_{Z_1}, \alpha_{Z_2}, \dots, \alpha_{Z_n}$  oraz  $\beta$  będą odpowiednio schematami zdań  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  oraz  $W$ . Wówczas otrzymujemy równoważność następujących warunków:

- (i)  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \models W$
- (ii)  $\models \alpha_{Z_1} \wedge \alpha_{Z_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{Z_n} \rightarrow \beta$
- (iii) dla dowolnego wartościowania  
 $v : For \rightarrow \{0, 1\}$   $v(\alpha_{Z_1}) = v(\alpha_{Z_2}) = \dots = v(\alpha_{Z_n}) = 1$  implikuje  
 $v(\beta) = 1$

# Wynikanie logiczne

Chcąc sprawdzić, czy między danymi zdaniami zachodzi relacja wynikania logicznego postępujemy wg następującego algorytmu:

Sprawdzamy, czy ze zbioru formuł  $X = \{(p \wedge q) \rightarrow r; p \wedge \neg r\}$  wynika zdanie  $\neg q$

- zgodnie z warunkiem (ii) budujemy implikację, której poprzednikiem jest koniunkcja formuł ze zbioru  $X$ , a następnikiem formuła  $\neg q$ ;
- otrzymujemy formułę:  $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$ ;
- sprawdzamy np. skróconą metodą zero-jedynkową, czy otrzymana formuła jest tautologią. Jeżeli tak, to między formułami zachodzi stosunek wynikania logicznego.

# Sprzeczność semantyczna

Prorotyp sprzecznego układu przesłanek ( $\perp$ ) — układ zdań postaci  $\{p, \neg p\}$

Formuła  $\perp$  jest **logicznie fałszywa** przy dowolnym wartościowaniu  $v : For \rightarrow \{0, 1\}$ .

**Fałsz logiczny** to zdanie, którego schematem jest kontrtautologia.

Układ zdań  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  jest spreczny wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie  $Z_1$  i  $Z_2$  i  $\dots$  i  $Z_n$  jest fałszem logicznym. Układ zdań, który nie jest spreczny nazywamy **niesprzecznym**.

Układ zdań  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  jest spreczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje zero-jedynkowa interpretacja zmieniająca równocześnie wszystkie formuły  $\alpha_{Z_1}, \alpha_{Z_2}, \dots, \alpha_{Z_n}$  w zdania prawdziwe.



# Sprzeczność a wynikanie logiczne

Jeżeli układ zdań  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  jest sprzeczny, to wynika z niego dowolne zdanie  $W$ .

## Twierdzenie o niesprzeczności

- (i)  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \models W$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \neg W\} \models \perp$
- (ii)  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \not\models W$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \neg W\} \not\models \perp$

# Ćwiczenia — wynikanie logiczne

Które z poniższych zdań wynikają logicznie ze zdania *Jeśli sanskryt jest językiem indoeuropejskim, to jest genetycznie spokrewniony z językiem polskim*

- (1) *Jeśli sanskryt nie jest językiem indoeuropejskim, to jest genetycznie spokrewniony z językiem węgierskim.*
- (2) *Jeśli sanskryt nie jest językiem indoeuropejskim, to nie jest genetycznie spokrewniony z językiem polskim.*
- (3) *Sanskryt nie jest językiem indoeuropejskim lub jest spokrewniony z językiem polskim.*
- (4) *Jeśli sanskryt jest genetycznie spokrewniony z językiem polskim, to jest językiem indoeuropejskim.*
- (5) *Jeśli sanskryt nie jest genetycznie spokrewniony z językiem polskim, to nie jest językiem indoeuropejskim.*

# Ćwiczenia — wynikanie logiczne

Z których spośród poniższych zdań wynika logicznie zdanie *Sanskryt nie jest językiem aglutynacyjnym*

- (1) *W sanskrycie nie tworzy się form gramatycznych przez dołączanie do rdzenia afiksów z których każdy pełni tylko jedną funkcję gramatyczną.*
- (2) *Sanskryt nie jest językiem aglutynacyjnym i w sanskrycie nie tworzy się form gramatycznych przez dołączanie do rdzenia afiksów z których każdy pełni tylko jedną funkcję gramatyczną.*
- (3) *Sanskryt jest językiem fleksyjnym.*
- (4) *Sanskryt jest językiem fleksyjnym, a nie aglutynacyjnym.*

## Ćwiczenia — wynikanie logiczne

Zbadaj, czy ze zdań:

- *Liczba  $x$  jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2.*
- *Liczba  $x$  jest podzielna przez 6.*
- *Jeśli liczba  $x$  jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 3 i przez dwa.*

Wynika logicznie zdanie:  *$x$  jest liczbą parzystą.*

(F. Tokarz: Wykłady z logiki. 1998.)

## Ćwiczenia — wynikanie logiczne

Które z poniższych zdań wynikają logicznie ze zdania *Jaś idzie do szkoły wtedy i tylko wtedy, gdy jest brzydka pogoda lub nie ma matematyki*.

- 1 *Jeśli jest brzydka pogoda, a w szkole jest matematyka, to Jaś nie idzie do szkoły.*
- 2 *Jeśli nie ma matematyki, to albo jest brzydka pogoda albo Jaś idzie do szkoły.*
- 3 *O ile pogoda jest brzydka to jeśli nie ma matematyki, to Jaś idzie do szkoły.*
- 4 *Albo pogoda jest brzydka, albo jeśli jest matematyka, to Jaś nie idzie do szkoły.*
- 5 *Jeśli Jaś nie idzie do szkoły, to jest matematyka.*
- 6 *Jeśli pogoda nie jest brzydka, to Jasiu nie idzie do szkoły.*

# Ćwiczenia — sprzeczność semantyczna

Zbadaj niesprzeczność poniższych układów zdań

- (1) *Jeżeli nauka nie ma granic, to odpowie kiedyś na każde pytanie. Jeżeli każda odpowiedź jest źródłem nowych problemów, to nauka nie odpowie nigdy na każde pytanie. Każda odpowiedź jest źródłem nowych problemów, a nauka nie ma granic.*
- (2) *Filozofia nauki nie jest ani nauką empiryczną ani działem logiki. Jeżeli filozofia nauki jest nauką humanistyczną, to jest nauką empiryczną. Jeżeli filozofia nauki nie jest nauką humanistyczną, to jest działem logiki.*
- (3) *Jeżeli matematyka jest nauką empiryczną, to doświadczenie może obalić jej twierdzenia. Jeżeli matematyka znajduje zastosowanie w technice, to jest nauką empiryczną. Lecz matematyka znajduje zastosowanie w technice, a przy tym doświadczenie nie może obalić jej twierdzeń.*

## Ćwiczenia — sprzeczność semantyczna

Zbadaj niesprzeczność poniższych układów zdań

- *Jeżeli Magdalena jest szczęśliwą kobietą, to zna podstawy logiki matematycznej. Jeżeli Marian zaprosi Magdalenę na kawę, to będzie ona szczęśliwą kobietą. Jednak, jeżeli Marian zaprosi Magdalenę, to nie pozna ona podstaw logiki matematycznej.*
- *Logika albo jest wymysłem Boga, albo nie jest wymysłem zwykłych śmiertelników. Jeżeli logika formalna jest wymysłem filozofów, to jednak jest wymysłem zwykłych śmiertelników. Nie jest prawdą, jakoby logika była zarazem, wytworem Lucyfera oraz nie została wymyślona przez filozofów. Logika formalna stworzył Lucyfer, nie stworzył jej Bóg.*

## Ćwiczenia — sprzeczność semantyczna

Zbadaj niesprzeczność poniższych układów zdań

- *Nie jest tak, że gdyby hipoteza N. Chomsky'ego o wrodzonym charakterze „gramatyki uniwersalnej” była prawdziwa, to zdolności gramatyczne byłyby nabywana razem z rozwojem dziecka „od zera”. Język albo jest tworem całkowicie kulturowym, albo zawiera pewne wymiary wrodzone. Jeżeli język jest tworem kulturowym, to N. Chomsky nie ma racji. Natomiast jeśli język posiada wymiary wrodzone, to zdolności gramatyczne są jednak nabywane razem z rozwojem dziecka.*



## Ćwiczenia — sprzeczność semantyczna

Zbadaj niesprzeczność zdań składających się na treść sławnego **Paragrafu 22**:

- *Jeśli ktoś prosi o zwolnienie z działań bojowych, to znaczy, że nie jest on prawdziwym wariatem. Orr jest wariatem i może być zwolniony z działań bojowych jeśli tylko o to poprosi. Jednak jeśli Orr poprosi o zwolnienie z działań bojowych to będzie znaczyło, że nie jest wariatem i tym samym nie może być zwolniony. Nie prawda, że Orr poprosi o zwolnienie z działań bojowych oraz nie jest wariatem. Jest natomiast tak, że albo Orr nie jest wariatem albo może być zwolniony. Skoro Orr nie prosi o zwolnienie z działań bojowych, to znaczy, że mimo wszystko jest wariatem i może zostać z nich zwolniony.*

# Spójniki logiczne — zagadki

Poniższe zagadki wykorzystują własności czterech podstawowych spójników logicznych: „ $\vee$ ”, „ $\wedge$ ”, „ $\rightarrow$ ”, „ $\equiv$ ”.

Ponownie jesteśmy na wyspie rycerzy i łotrów. Przypomnijmy: rycerze zawsze mówią prawdę, a łotry zawsze kłamią.

- Mamy dwóch tubylców A i B. A wygłasza następujące zdanie: „*Jeśli jestem rycerzem, to jest nim też B*”.  
Czy można określić kim są A i B?
- Pytamy A: „*Czy jesteś rycerzem?*” Ten odpowiada: „*Jeśli jestem rycerzem, to zjem mój kapelusz*”.  
Dowiedz, że A musi zjeść swój kapelusz.

# Spójniki logiczne — zagadki

Tym razem przeprowadzamy spis ludności na wyspie rycerzy i łotrów i odwiedzamy jedynie małżeństwa.

- („ $\wedge$ ”) Pukamy do jakichś drzwi, które otwiera mąż. Mówimy mu, że potrzebne są nam informacje o nim i jego żonie. Następnie pytamy, które z nich jest rycerzem, a które, jeśli którekolwiek, jest łotrem? Mężczyzna odpowiada:  
— Oboje jesteśmy **łotrami** — po czym zatrzaskuje drzwi.  
Kim jest mąż, a kim jego żona?
- („ $\vee$ ”) W następnym domu zapytaliśmy męża:  
— Czy oboje jesteście łotrami?  
Mąż odrzekł: — Co najmniej jedno z nas.  
Kim jest każde z nich?

## Spójniki logiczne — zagadki

- („ $\rightarrow$ ”) W następnym domu otwiera nam mężczyzna i poproszony o powiedzenie czegoś o nim i jego żonie odpowiada: „*Jeśli ja jestem rycerzem, to moja żona także*”.  
Jakiego typu jest mąż, a jakiego żona?
- („ $\equiv$ ”) W czwartym domu mąż powiedział: „*Jestem rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy moja żona jest rycerzem*”.  
Co można wywnioskować o mężu, a co o żonie?