Logika, II rok Etnolingwistyki UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .... GRUPA: I

Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany*?

- (a) *Drink nie jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*
- (b) *Jeśli drink nie jest zmieszany, to nie jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q).$$

3. Przypuśćmy, że ***fałszywe są zdania***:

Nie wszystkie Pierzaste są Myszaste. Wśród Myszastych są Ogoniaste. Ogoniastych nie ma.

Co można wtedy ***prawdziwie*** powiedzieć o związkach między Pierzastymi i Ogoniastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) *modus (ponendo) ponens*
- (b) De Morgana dla koniunkcji
- (c) komutacji.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów P oraz Q takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)).$$

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

Logika, II rok Etnolingwistyki UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .... GRUPA: II

Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany*?

- (a) *Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty.*
- (b) *Drink jest zmieszany dokładnie wtedy, gdy jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r).$$

3. Przypuśćmy, że ***fałszywe są zdania***:

Nie wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Pewien Pierzasty jest Ogoniasty. Nie ma Myszastych.

Co można wtedy ***prawdziwie*** powiedzieć o związkach między Myszastymi i Pierzastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) *modus (tollendo) tollens*
- (b) De Morgana dla alternatywy
- (c) dodawania poprzedników.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów P oraz Q takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg Q(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

Logika, II rok Etnolingwistyki UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .... GRUPA: III

Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany*?

- (a) *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany.*
- (b) *Drink jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r).$$

3. Przypuśćmy, że ***fałszywe są zdania***:

Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste. Pewien Pierzasty nie jest Ogoniasty. Myszastych nie ma.

Co można wtedy ***prawdziwie*** powiedzieć o związkach między Myszastymi i Ogoniastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) sylogizmu hipotetycznego (bezkoniunkcyjne)
- (b) zaprzeczenia implikacji
- (c) mnożenia następników.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów P oraz Q takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$\forall x\ (P(x) \to Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \wedge Q(x)).$$

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

Rozwiązania

GRUPA: I

1. Niech:

- zmienna zdaniowa p zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa q zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła $p \wedge \neg q$. Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy p ma wartość 1, a q ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Drink jest nie zmieszany, o ile jest wstrząśnięty* odpowiada formuła $p \to \neg q$,
- (b) zdaniu *Jeśli drink nie jest zmieszany, to nie jest wstrząśnięty* odpowiada formuła $\neg q \to \neg p$.

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy $p \wedge \neg q$ przyjmuje wartość 1. Pamiętamy: formuła β wynika logicznie z formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy β przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym α przyjmuje wartość 1.

Dla $p = 1$ oraz $q = 0$ mamy:

- formuła $p \to \neg q$ ma wartość 1,
- formuła $\neg q \to \neg p$ ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła $p \to \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.
- Formuła $\neg q \to \neg p$ nie wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

1.	$(p \wedge q) \to r$	założenie
2.	$p \wedge \neg r$	założenie
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	q	ON: 3
5.	p	OK: 2
6.	$\neg r$	OK: 2
7.	$p \wedge q$	DK: 5,4
8.	r	RO: 1,7
9.	$\perp$	sprzeczność: 6,8.

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty
- $O(x)$ — x jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

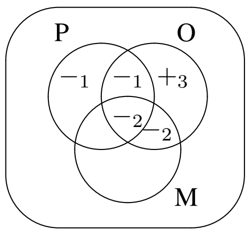
- $\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow M(x))$
- $\exists x\ (M(x) \wedge O(x))$
- $\neg\exists x\ O(x)$.

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1) $\forall x\ (P(x) \rightarrow M(x))$
- (2) $\neg\exists x\ (M(x) \wedge O(x))$
- (3) $\exists x\ O(x)$.

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów P, M i O) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Pierzastymi oraz Ogoniastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty*: $\neg\exists x\ (P(x) \wedge O(x))$.
- *Nie wszystkie Ogoniaste są Pierzaste*: $\neg\forall x\ (O(x) \rightarrow P(x))$.

4.

- (a) $((p \to q) \land p) \to q$
- (b) $\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$
- (c) $(p \to (q \to r)) \to ((q \to p) \to r)$.

5. Zdanie $\forall x\ (P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x))$ jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów P i Q, aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla P i Q:

- $P(x)$ — $x \leqslant x$
- $Q(x)$ — $x < x$.

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\forall x\ (x \leqslant x \lor x < x)$$

i jest niewątpliwie prawdziwy w uniwersum liczb naturalnych. Następnik naszej implikacji też jest implikacją i ma teraz postać:

$$\forall x\ x \leqslant x \to \forall x\ x < x.$$

Jej poprzednik jest oczywiście prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Stąd i cała ta implikacja jest fałszywa. Wreszcie, rozważana na początku implikacja także jest fałszywa w tej interpretacji.

1. Niech:

- zmienna zdaniowa p zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa q zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła $p \wedge \neg q$. Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy p ma wartość 1, a q ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty* odpowiada formuła $\neg p \rightarrow q$,
- (b) zdaniu *Drink jest zmieszany dokładnie wtedy, gdy jest wstrząśnięty* odpowiada formuła $q \equiv p$.

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy $p \wedge \neg q$ przyjmuje wartość 1. Pamiętamy: formuła β wynika logicznie z formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy β przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym α przyjmuje wartość 1.

Dla $p = 1$ oraz $q = 0$ mamy:

- formuła $\neg p \rightarrow q$ ma wartość 1,
- formuła $q \equiv p$ ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła $\neg p \rightarrow q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.
- Formuła $q \equiv p$ nie wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

1.	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$	założenie
2.	$p \wedge q$	założenie
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	p	OK: 2
5.	$p \wedge \neg r$	DK: 4,3
6.	$\neg q$	RO: 1,5
7.	q	OK: 2
8.	$\perp$	sprzeczność: 6,7.

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty
- $O(x)$ — x jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

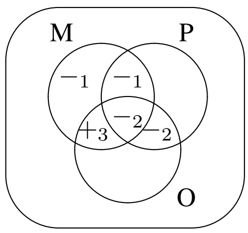
- $\neg\forall x\ (M(x) \rightarrow O(x))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge O(x))$
- $\neg\exists x\ M(x)$.

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1) $\forall x\ (M(x) \rightarrow O(x))$
- (2) $\neg\exists x\ (P(x) \wedge O(x))$
- (3) $\exists x\ M(x)$.

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów P, M i O) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Myszastymi oraz Pierzastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- *Żaden Myszasty nie jest Pierzasty*: $\neg\exists x\ (M(x) \wedge P(x))$.
- *Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste*: $\neg\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))$.

4.

- (a) $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$
- (b) $\neg(p \lor q) \equiv (\neg q \land \neg q)$
- (c) $((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)$.

5. Zdanie $(\exists x\ P(x) \land \exists x\ \neg Q(x)) \to \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))$ jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów P i Q, aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla P i Q:

- $P(x)$ — $x < 10$
- $Q(x)$ — $x < 20$.

Ze względu na znane ze szkoły prawo trychotomii mamy:

- $\neg Q(x)$ — $x \geqslant 20$.

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\exists x\ x < 10 \land \exists x\ x \geqslant 20$$

i jest oczywiście prawdziwy w podanej interpretacji. Natomiast następnik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\exists x\ (x < 10 \land x \geqslant 20)$$

i jest, rzecz jasna, fałszywy w podanej interpretacji. Stąd także cała rozważana na początku implikacja jest fałszywa.

1. Niech:

- zmienna zdaniowa p zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa q zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła $p \wedge \neg q$. Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy p ma wartość 1, a q ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany* odpowiada formuła $\neg p \rightarrow \neg q$,
- (b) zdaniu *Drink jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty* odpowiada formuła

  $p \rightarrow q$.

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy $p \wedge \neg q$ przyjmuje wartość 1. Pamiętamy: formuła β wynika logicznie z formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy β przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym α przyjmuje wartość 1.

Dla $p = 1$ oraz $q = 0$ mamy:

- formuła $\neg p \rightarrow \neg q$ ma wartość 1,
- formuła $p \rightarrow q$ ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła $\neg p \rightarrow \neg q$ wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.
- Formuła $p \rightarrow q$ nie wynika logicznie z formuły $p \wedge \neg q$.

2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

1.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	założenie
2.	$p \vee q$	założenie
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	$p \rightarrow r$	OK: 1
5.	$q \rightarrow r$	OK: 1
6.	$\neg p$	MT: 4,3
7.	$\neg q$	MT: 5,3
8.	q	OA: 2,6
9.	$\perp$	sprzeczność: 7,8.

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty
- $O(x)$ — x jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

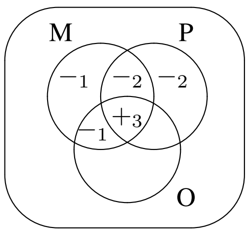
- $\neg\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge \neg O(x))$ (co jest równoważne z: $\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow O(x))$)
- $\neg\exists x\ M(x)$.

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1) $\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))$
- (2) $\neg\exists x\ (P(x) \wedge \neg O(x))$ (co jest równoważne z: $\forall x\ (P(x) \rightarrow O(x))$)
- (3) $\exists x\ M(x)$.

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów P, M i O) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Myszastymi oraz Ogoniastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- *Wśród Myszastych są Ogoniaste*: $\exists x\ (M(x) \wedge O(x))$.
- *Wszystkie Myszaste są Ogoniaste*: $\forall x\ (M(x) \rightarrow O(x))$.

4.

- (a) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
- (b) $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$
- (c) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to (q \wedge r))$.

5. Zdanie $\forall x\ (P(x) \to Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$ jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów P i Q, aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla P i Q:

- $P(x)$ — x jest podzielna bez reszty przez 4
- $Q(x)$ — x jest podzielna bez reszty przez 2.

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

> *Każda liczba podzielna bez reszty przez* 4 *jest też podzielna bez reszty przez* 2.

i jest oczywiście prawdziwy w podanej interpretacji. Natomiast następnik naszej implikacji przyjmuje postać:

> *Każda liczba jest podzielna bez reszty przez* 4 *oraz jest podzielna bez reszty przez* 2.

i jest oczywiście fałszywy w podanej interpretacji. A zatem i podana na początku implikacja jest fałszywa w tej interpretacji.