KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW:

TABLICE ANALITYCZNE

(LOGIKA MATEMATYCZNA: WYKŁADY 18,19)

SEMESTR LETNI 2007–2008

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

LOGIKA MATEMATYCZNA (18–19)

KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW:

TABLICE ANALITYCZNE

Pierwsza z omawianych operacji konsekwencji w KRP to konsekwencja wyznaczona przez ***tablice analityczne***.

18.1. O drzewach — przypomnienie

Wszystkie potrzebne elementarne pojęcia dotyczące drzew podane zostały na wykładach 11–12. Tu przypomnimy jedynie, z jakich pojęć będziemy korzystać:

- drzewo, korzeń, gałąź, liść
- (bezpośredni) przodek i (bezpośredni) potomek wierzchołka
- poziom drzewa, wysokość drzewa
- rząd wierzchołka, rząd drzewa
- drzewa: skończone, nieskończone, rzędu skończonego
- Lemat Königa
- poddrzewo, przedłużenie drzewa (na gałęzi) drzewem
- poprzeczny i wzdłużny porządek wierzchołków drzewa.

Definicje tych pojęć podano w pliku tabkrz.pdf.

18.1.1. Drzewa znakowane

Przypomnijmy jeszcze wyraźnie pojęcie drzewa znakowanego:

DEFINICJA 18.1.1. ***Drzewa znakowane.***

Przez ***drzewo znakowane*** elementami zbioru A rozumiemy układ (D, f) taki, że:

- $D = (X, x_0, R)$ jest drzewem,
- $f : D \to A$ jest funkcją (przyporządkowującą każdemu wierzchołkowi drzewa D element zbioru A).

W podanych niżej konstrukcjach drzewa będą znakowane formułami języka KRP.

DEFINICJA 18.1.2. ***Wystąpienia elementów w drzewie znakowanym.***

Niech (D, f) będzie drzewem znakowanym, a P gałęzią w D. Mówimy, że element $f(x)$ ***występuje*** na gałęzi P, jeśli $x \in P$.

Zauważmy, że jeśli (D, f) jest drzewem znakowanym elementami zbioru A, a P jest gałęzią w D, to element $f(x)$ (gdzie $x \in P$) może na gałęzi P wystąpić wielokrotnie.

DEFINICJA 18.1.3. ***Numeracja wystąpień elementów w drzewie znakowanym.***

Niech (D, f) będzie drzewem znakowanym, P gałęzią w D, gdzie $D = (X, x_0, R)$, a $f : X \to A$. Elementy gałęzi P są, z definicji, liniowo uporządkowane przez relację R. Poszczególne wystąpienia elementu $a \in A$ na gałęzi P można ponumerować, wykorzystując porządek R gałęzi P:

- ***pierwszym*** wystąpieniem a na P jest para (x_i, a) taka, że $a = f(x_i)$ oraz x_i jest R-najmniejszym elementem P takim, że $a = f(x_i)$;
- jeśli (x_i, a) jest n-tym wystąpieniem a na P, przez $n + 1$ wystąpienie a na P rozumiemy parę (x_j, a) taką, że $a = f(x_j)$ oraz x_j jest R-najmniejszym elementem P takim, że $a = f(x_i)$ i $x_i R x_j$. Jeśli takie x_j nie istnieje, to (x_i, a) jest ***ostatnim*** wystąpieniem a na P.

Zauważmy, że w ogólnym przypadku (dla dowolnych drzew znakowanych) na gałęzi nieskończonej dany element może występować nieskończenie wiele razy, ale może też być tak, że na gałęzi nieskończonej elementy zbioru A (będące wartościami f) występują skończenie wiele razy. Rozważane dalej drzewa będą jednak ***rzędu skończonego***. Nadto, będziemy rozważać sytuacje, gdy gałąź jest nieskończona dokładnie wtedy, gdy ***ten sam*** element występuje na niej nieskończenie wiele razy.

18.1.2. Drzewa syntaktyczne termów i formuł

Będziemy przeprowadzać dowody indukcyjne odwołujące się do złożoności formuł. Przy tym, owa złożoność wyznaczona będzie przez budowę formuł, zokodowaną w ich ***drzewach syntaktycznych***. W poprzednich wykładach posługiwaliśmy się tym terminem w sposób nieformalny, teraz jego znaczenie zostanie ustalone.

DEFINICJA 18.1.2.1. ***Drzewa syntaktyczne termów.***

Przez ***drzewo syntaktyczne termu*** rozumiemy każde znakowane drzewo skończonego rzędu (o zadanym poprzecznym porządku wierzchołków) T takie, że:

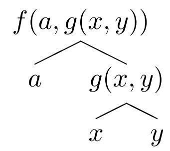
- Liście T są znakowane zmiennymi lub stałymi indywiduowymi.
- Każdy wierzchołek T, nie będący liściem, jest znakowany termem złożonym postaci $f(t_1, \ldots, t_n)$.
- Każdy wierzchołek, który jest znakowany termem postaci $f(t_1, \ldots, t_n)$ ma dokładnie n bezpośrednich potomków, znakowanych przez $t_1, \ldots, t_n$ oraz uporządkowanych (poprzecznie) w tej właśnie kolejności.

Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego termu T jest znakowany termem $f(t_1, \ldots, t_n)$, to mówimy, że T jest ***drzewem syntaktycznym termu*** $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Zauważmy, że:

- Każdy term t ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne.
- Jeśli T jest drzewem syntaktycznym termu bazowego, to liście T nie są znakowane zmiennymi.

Oto prosty przykład drzewa syntaktycznego termu:

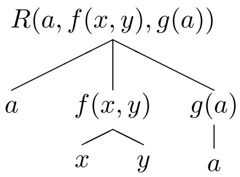


UWAGA. Drzewa syntaktyczne termów nie są, w ogólności drzewami nierozwojowymi w sensie watykańskim. Poszczególne ich wierzchołki (nie będące liśćmi) mogą mieć dowolną skończoną liczbę bezpośrednich potomków, zależną od liczby argumentów symbolu funkcyjnego występującego w danym wierzchołku.

DEFINICJA 18.1.2.2. ***Drzewa syntaktyczne formuł atomowych.***

- Przez ***szkielet drzewa syntaktycznego formuły atomowej*** rozumiemy każde znakowane drzewo rzędu skończonego o wysokości 1, którego korzeń jest znakowany formułą atomową, a liście (w porządku poprzecznym) są znakowane argumentami tej formuły. Jeśli korzeń takiego drzewa jest znakowany formułą atomową $R(t_1, \ldots, t_n)$, to jego liście są znakowane termami $t_1, \ldots, t_n$ (w porządku poprzecznym, w tej właśnie kolejności).
- Przez ***drzewo syntaktyczne formuły atomowej*** rozumiemy każde drzewo otrzymane ze szkieletu drzewa syntaktycznego formuły atomowej otrzymane przez zastąpienie liści tego szkieletu drzewami syntaktycznymi termów znakujących te liście.
- Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego formuły atomowej jest znakowany formułą $R(t_1, \ldots, t_n)$, to mówimy, że jest to ***drzewo syntaktyczne*** tej właśnie formuły.

Wprost z tej definicji wynika, że każda formuła atomowa ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne. Oto przykład prostego drzewa syntaktycznego formuły atomowej:



DEFINICJA 18.1.2.3. ***Szkielety drzew syntaktycznych formuł.***

Szkieletem drzewa syntaktycznego formuły nazywamy każde znakowane nierozwojowe w sensie watykańskim drzewo T z poprzecznym porządkiem wierzchołków takie, że:

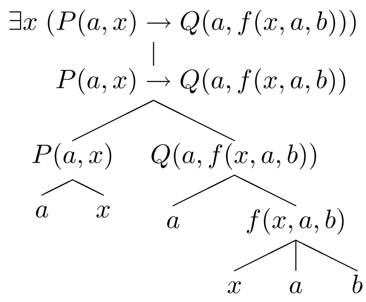
- Liście T są znakowane formułami atomowymi.
- Jeśli w jest wierzchołkiem T nie będącym liściem i w ma dokładnie jednego bezpośredniego potomka znakowanego formułą α, to w jest znakowany jedną z formuł: $\neg\alpha$, $\forall x\ \alpha$ lub $\exists\ \alpha$, dla pewnej zmiennej x.
- Jeśli w jest wierzchołkiem T nie będącym liściem i w ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków znakowanych formułami α oraz β (w tej kolejności, w porządku poprzecznym), to w jest znakowany jedną z formuł: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ lub $\alpha \equiv \beta$.

DEFINICJA 18.1.2.4. ***Drzewa syntaktyczne formuł.***

Przez ***drzewo syntaktyczne formuły*** rozumiemy każde znakowane drzewo z poprzecznie uporządkowanymi wierzchołkami otrzymane ze szkieletu drzewa syntaktycznego formuły poprzez zastąpienie liści tego szkieletu drzewami syntaktycznymi formuł atomowych znakujących te liście.

Jeśli korzeń drzewa syntaktycznego formuły T jest znakowany formułą α, to mówimy, że T jest ***drzewem syntaktycznym formuły*** α.

Oto prosty przykład drzewa syntaktycznego formuły:



Zauważmy, że:

- Każda formuła ma dokładnie jedno drzewo syntaktyczne.
- Jeśli korzeń szkieletu drzewa syntaktycznego jest znakowany formułą α, to wierzchołki tego szkieletu drzewa syntaktycznego są znakowane podformułami formuły α.

DEFINICJA 18.1.2.5. ***Głębokość formuły.***

Głębokością formuły α nazywamy wysokość jej drzewa syntaktycznego.

18.2. Intuicje dotyczące metody TA

Intuicje dotyczące tablic analitycznych dla formuł bez kwantyfikatorów zostały podane na wykładach 11–12. Dodamy teraz pewne intuicyjne objaśnienia dotyczące formuł z kwantyfikatorami.

Definicje podstawowych pojęć semantycznych dla KRP podano w wykładach 16–17. Najistotniejsza dla omawianej metody jest *podstawieniowa* interpretacja kwantyfikatorów. Warunki spełniania formuł języka KRP (przez wartościowania w strukturach relacyjnych) wykorzystują stałe indywiduowe nazywające elementy uniwersum interpretacji. Odpowiadają im następujące, ***intuicyjnie*** (!) sformułowane, ustalenia:

- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznajemy zdanie postaci $\exists x\alpha(x)$, to uznamy też za prawdziwe zdanie postaci $\alpha(a)$, dla ***pewnej*** stałej indywiduowej a, oznaczającej jakiś obiekt w uniwersum tej intepretacji.
- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznamy zdanie postaci $\forall x\alpha(x)$, to uznamy też za prawdziwe wszystkie zdania postaci $\alpha(t)$, dla ***każdego*** termu bazowego oznaczającego jakiś obiekt z uniwersum tejże interpretacji.

Tym intuicyjnym sformułowaniom nadać trzeba oczywiście postać precyzyjną, co czynimy poniżej.

UWAGA. Przypominamy (zobacz wykład 16), że definicja spełniania **formuły** w strukturze przez wartościowanie miała, dla przypadku formuł z kwantyfikatorami, postać następującą:

- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w^i_m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w^i_m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Wartościowanie w^i_m jest ciągiem, w którym na i-tym miejscu występuje element m z uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$.

Dla dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$ w języku rachunku predykatów L niech $L^{\mathfrak{M}}$ oznacza język L, do którego dodajemy stałe indywiduowe c_m dla każdego m należącego do uniwersum interpretacji $\mathfrak{M}$. Stosujemy przy tym umowę, że interpretacją stałej c_m w strukturze $\mathfrak{M}$ jest element m.

Określimy jeszcze interpretację termów bazowych w dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$:

- (przypominamy, że) każda stała indywiduowa c jest interpretowana jako pewien element $c^{\mathfrak{M}}$ uniwersum struktury $\mathfrak{M}$;
- (przypominamy, że) każdy symbol funkcyjny n-argumentowy f jest interpretowany jako pewna n-argumentowa funkcja $f^{\mathfrak{M}}$ określona na uniwersum struktury $\mathfrak{M}$ i o wartościach w tym uniwersum;
- jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami bazowymi, a f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, to interpretacją termu bazowego $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$.

Jeśli każdy element interpretacji $\mathfrak{M}$ jest wartością jakiegoś termu bazowego z L, to można indukcyjnie określić relację $\models$ ***spełniania zdań języka*** L ***w interpretacji*** $\mathfrak{M}$ w następujący sposób (tu $R^{\mathfrak{M}}$ jest relacją będącą interpretacją n-argumentowego predykatu R w $\mathfrak{M}$, a $t^{\mathfrak{M}}$ jest interpretacją termu t w $\mathfrak{M}$):

- $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models \beta$;
- $\mathfrak{M} \models \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models \alpha$;
- $\mathfrak{M} \models \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha(t/x_i)$ dla każdego termu bazowego t;
- $\mathfrak{M} \models \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha(t/x_i)$ dla pewnego termu bazowego t.

Jeśli nie każdy element interpretacji $\mathfrak{M}$ jest wartością jakiegoś termu bazowego z L, to powyższą definicję formułujemy w języku $L^{\mathfrak{M}}$.

UWAGA. Podobnie jak w przypadku KRZ, używanie pojęć semantycznych dla wyrażenia intuicji dotyczących tablic analitycznych w KRP jest jedynie ***chwytem reklamowym***. Metoda tablic analitycznych dla KRP jest metodą czysto ***syntaktyczną***. Jej związek z pojęciami semantycznymi ustalają twierdzenia o trafności i pełności.

18.3. Tablice analityczne dla KRP: definicje

W definicjach TA dla KRP wykorzystamy definicje TA dla KRZ. Reguły dla formuł z kwantyfikatorami wymagają nieco większego stopnia precyzji w ich sformułowaniu: trzeba np. wyraźnie mówić o ***wystąpieniach*** formuły w tablicy analitycznej.

18.3.1. TA dla KRP: definicje, własności, przykłady

DEFINICJA 18.3.1.1. ***Tablice atomowe.***

Niech α oraz β będą dowolnymi formułami, a γ dowolną formułą atomową języka KRP. ***Tablicami atomowymi*** są wszystkie drzewa (znakowane) jednej z trzynastu poniższych postaci:

γ	$\neg\gamma$	$\neg\neg\alpha$ $\vert$ α

$\begin{array}{c}\alpha \wedge \beta \\ \mid \\ \alpha \\ \mid \\ \beta\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ \mid \\ \alpha \\ \mid \\ \neg\beta\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg(\alpha \vee \beta) \\ \mid \\ \neg\alpha \\ \mid \\ \neg\beta\end{array}$

$\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \qquad \beta\end{array}$	$\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \beta \\ \swarrow \searrow \\ \neg\alpha \quad \beta\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg(\alpha \wedge \beta) \\ \swarrow \searrow \\ \neg\alpha \quad \neg\beta\end{array}$

($\forall$) $\begin{array}{c}\forall x\ \alpha(x) \\ \mid \\ \alpha(a/x)\end{array}$ dla każdego termu bazowego a	($\exists$) $\begin{array}{c}\exists x\ \alpha(x) \\ \mid \\ \alpha(a/x)\end{array}$ dla każdej nowej stałej a

($\neg\forall$) $\begin{array}{c}\neg\forall x\ \alpha(x) \\ \mid \\ \neg\alpha(a/x)\end{array}$ dla każdej nowej stałej a	($\neg\exists$) $\begin{array}{c}\neg\exists x\ \alpha(x) \\ \mid \\ \neg\alpha(a/x)\end{array}$ dla każdego termu bazowego a

Przypominamy, że term bazowy to term bez zmiennych. Gdy mówimy w warunkach ($\exists$) oraz ($\neg\forall$) o ***nowych*** stałych, to mamy na myśli stałe nie występujące w formule z korzenia rozważanej tablicy atomowej. Przypomnijmy (zob. wykłady 16–17), że rozważamy język KRP, w których jest przeliczalnie wiele stałych indywiduowych. Dla dowolnej formuły języka KRP można zatem znaleźć stałą, która w tej formule nie występuje.

DEFINICJA 18.3.1.2. ***Tablice analityczne.***

Definicja tablic analitycznych jest indukcyjna:

- (a) Każda tablica atomowa jest tablicą analityczną.
- (b) Jeśli D jest tablicą analityczną, P jest gałęzią w D zawierającą wierzchołek (znakowany przez) α, to również $D \sqcup_{P_\Im} D_\alpha$ jest tablicą analityczną.
- (c) Jeśli $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jest ciągiem tablic analitycznych takim, że D_{n+1} powstaje z D_n (dla $n \geqslant 0$) przez zastosowanie kroku (2), to $\bigsqcup D_n$ jest tablicą analityczną.

UWAGA. Obowiązują oczywiście uwagi dotyczące nowych stałych, podane po definicji tablic atomowych. Jeśli D jest tablicą analityczną, to przez L^D rozumiemy język rachunku predykatów, w którym mamy stałe indywiduowe dla wszystkich nowych stałych, wprowadzonych w trakcie konstrukcji tablicy D.

UWAGA. W przypadku KRP jest istotne, że krok (b) w definicji tablicy analitycznej każe przyłączać do ustalonej gałęzi ***całą*** (a więc łącznie z korzeniem) tablicę atomową. Ma to mianowicie istotne znaczenie w przypadku wystąpień formuł generalnie skwantyfikowanych oraz negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych. Rzecz wyjaśnimy dokładniej w przykładach poniżej.

UWAGA. W definicji tablic analitycznych dla KRP są też istotne ***wystąpienia*** formuł w tablicach. Definicja 18.3.1.2. powinna właściwie uwzględniać ***funkcję znakującą***. Tablice analityczne (w tym oczywiście tablice atomowe) powinny być, dla pełnej precyzji, definiowane jako pary (D, f), gdzie D jest tablicą otrzymaną na mocy któregoś z warunków (a)–(c) definicji 18.3.1.2., a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór F_{KRP} wszystkich formuł języka KRP. Rezygnujemy z tej pedanterii. Będziemy korzystać ze znakowania wierzchołków tablicy analitycznej formułami języka KRP, uznając, że w każdym przypadku dane jest *implicite* znakowanie wierzchołków formułami.

Budowanie tablic analitycznych będzie polegało na przedłużaniu gałęzi o drzewa atomowe. Dla zamykania gałęzi istotne będzie, jakie stałe indywiduowe bądź termy bazowe występują na tych gałęziach. Reguły $(\forall)$ oraz $(\neg\exists)$ pozwalają na posłużenie się dowolnym termem bazowym.

W praktyce, wygodne jest uważanie tablic atomowych dla formuł skwantyfikowanych oraz negacji formuł skwantyfikowanych za wyliczone przez następujące ***reguły*** (odniesienie do ***gałęzi*** w poniższych regułach oznacza gałąź, na której znajduje się formuła z korzenia rozważanej tablicy atomowej):

- ***Reguła dla formuł generalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\forall) \qquad \begin{array}{c} \forall x\ \alpha(x) \\ | \\ \alpha(t/x) \end{array}$$

dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\exists) \qquad \begin{array}{c} \exists x\ \alpha(x) \\ | \\ \alpha(a/x) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla negacji formuł generalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\neg\forall) \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\ \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(a/x) \end{array}$$

dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- ***Reguła dla negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:***

$$R(\neg\exists) \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\ \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(t/x) \end{array}$$

dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ są wzmocnione dodatkowym warunkiem: jeśli na gałęzi, której dotyczy ich zastosowanie nie ma jeszcze żadnej stałej indywiduowej, to posługujemy się jakąś z góry ustaloną stałą.

Powyższe reguły polegają więc na stosowaniu następujących zasad:

- $R(\forall)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\forall x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $A(t)$, dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.
- $R(\exists)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\exists x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $A(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.

- $R(\neg\forall)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\neg\forall x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy formułę postaci $\neg A(a)$, gdzie a jest nową stałą indywiduową, nie występującą dotąd na rozważanej gałęzi.

- $R(\neg\exists)$. Jeśli w danej gałęzi tablicy analitycznej wystąpiła formuła postaci $\neg\exists x A(x)$, to na tejże gałęzi umieszczamy wszystkie formuły postaci $\neg A(t)$, dla każdego termu bazowego t występującego na rozważanej gałęzi.

UWAGA. Każda stała indywiduowa jest termem bazowym. Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ stosują się zatem również w odniesieniu do dowolnych stałych indywiduowych.

W przypadku drugiej i trzeciej z wymienionych wyżej reguł mówimy o ***wprowadzaniu nowej stałej indywiduowej*** (i opuszczaniu kwantyfikatora egzystencjalnego lub zanegowanego kwantyfikatora generalnego), w przypadku pierwszej i czwartej z wymienionych reguł mówimy o ***rozwijaniu formuły generalnie skwantyfikowanej*** ze względu na dany term bazowy [na daną stałą indywiduową] (oraz opuszczaniu kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego).

Budując tablice analityczne w KRP najpierw rozważamy formuły egzystencjalnie skwantyfikowane i wprowadzamy nowe stałe indywiduowe, następnie dla wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych umieszczamy na danej gałęzi odpowiednie formuły otrzymane poprzez opuszczenie kwantyfikatora generalnego (lub negacji kwantyfikatora egzystencjalnego) i zastąpienie wiązanej przezeń zmiennej każdą stałą indywiduową występującą na tej gałęzi. Jeśli nie mamy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, a mamy jakieś formuły generalnie skwantyfikowane (lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych), to wprowadzamy nowe stałe indywiduowe przez rozwinięcie dowolnej formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji egzystencjalnie skwantyfikowanej). Jeśli w formule dla której zaczynamy budować tablicę analityczną występują już jakieś termy bazowe (w szczególności, stałe indywiduowe), to oczywiście obowiązują dla nich reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Metodę TA można stosować nie tylko w odniesieniu do pojedynczych formuł, lecz również biorąc pod uwagę dowolne (w tym także nieskończone) zbiory formuł.

DEFINICJA 18.3.1.3. ***Tablice analityczne ze zbioru założeń.***

Niech S będzie zbiorem zdań języka KRP. ***Tablice analityczne ze zbioru*** S są zdefiniowane przez warunki (a), (b) i (c) definicji 18.3.1.2. oraz dodatkowy warunek:

- (b*) Jeśli D jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S, P gałęzią w D oraz $\alpha \in S$, to $D \sqcup_P \alpha$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S.

Tablice analityczne zdefiniowane w 18.3.1.2. to zatem tablice z pustego zbioru założeń.

DEFINICJA 18.3.1.4. ***Tablice sprzeczne.***

- Niech D będzie tablicą analityczną ze zbioru założeń S i niech P będzie gałęzią w D. Mówimy, że P jest ***sprzeczna***, gdy w P występuje para formuł wzajem sprzecznych, tj. formuły α oraz $\neg\alpha$, dla pewnej α.

- Tablica analityczna D jest ***sprzeczna***, gdy każda gałąź D jest sprzeczna.

Zamiast terminu: *gałąź sprzeczna* używa się też terminu: ***gałąź zamknięta***. Gdy gałąź nie jest zamknięta, to mówimy też, że jest ***gałęzią otwartą***.

Zamiast terminu: *tablica sprzeczna* używa się też terminu: ***tablica zamknięta***. Gdy tablica analityczna D zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą, to mówimy też, że D jest ***otwarta***.

DEFINICJA 18.3.1.5. ***Dowody tablicowe.***

Dowodem tablicowym formuły α ***ze zbioru założeń*** S nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S, to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest ***tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa) z*** S.

Jeśli α jest wyprowadzalna z pustego zbioru założeń, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$ i mówimy, że α jest ***tablicowo wyprowadzalna*** (***dowodliwa***) w KRP.

Zauważmy, że jeśli istnieje dowód tablicowy D formuły α ze zbioru założeń S, to istnieje także ***skończony*** dowód tablicowy α z S: wystarczy ***zamknąć*** każdą gałąź w D z chwilą wystąpienia na niej pary formuł wzajem sprzecznych.

DEFINICJA 18.3.1.6. ***Zbiory tablicowo sprzeczne.***

Zbiór formuł S języka KRP jest ***tablicowo sprzeczny***, gdy $S \vdash_{tab} \alpha \wedge \neg\alpha$ dla pewnego zdania α języka KRP. W przeciwnym przypadku S jest ***tablicowo niesprzeczny***.

Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ będzie wyliczeniem wszystkich termów bazowych rozważanego języka KRP. Oczywiście wszystkie stałe indywiduowe $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ są elementami tego wyliczenia. Będziemy zakładać, że te wyliczenia określają ustalone porządki liniowe w zbiorze wszystkich termów bazowych oraz w zbiorze wszystkich stałych indywiduowych.

W poniższych definicjach zakłada się też, że dana jest jakaś funkcja znakująca wierzchołki tablic analitycznych formułami.

DEFINICJA 18.3.1.7. ***Zredukowane wystąpienia formuł.***

Niech $D = \bigsqcup D_n$ będzie tablicą analityczną ze zbioru założeń S, a P gałęzią w D. Niech (v, α) będzie i-tym wystąpieniem α w P. Mówimy, że wystąpienie (v, α) jest ***zredukowane*** w P, gdy zachodzi jeden z następujących przypadków:

- α nie jest ani postaci $\forall x\ \beta(x)$ ani postaci $\neg\exists x\ \beta(x)$ i dla pewnego j tablica D_{j+1} otrzymana jest z tablicy D_j przez zastosowanie reguły (b) z definicji 18.3.1.2. do α oraz stosownego odcinka początkowego P, tj. $D_{j+1} = D_j \sqcup_{Q_\mho} D_\alpha$, gdzie $Q = P \cap |D_j|$ oraz $Q_\mho = v$;
- lub:
  - α jest postaci $\forall x\ \beta(x)$ i $\beta(t_i)$ występuje w P oraz w P istnieje $i+1$-sze wystąpienie α
  - α jest postaci $\neg\exists x\ \beta(x)$ i $\neg\beta(t_i)$ występuje w P oraz w P istnieje $i+1$-sze wystąpienie α.

Tak więc, zredukowanie wystąpienia zdania generalnie skwantyfikowanego lub negacji zdania egzystencjalnie skwantyfikowanego wymusza umieszczenie na rozważanej gałęzi podstawień wszystkich termów bazowych w formułach o wspomnianych typach kwantyfikacji.

DEFINICJA 18.3.1.8. ***Tablice zakończone.***

- Tablica analityczna D jest ***zakończona***, jeśli każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej jest zredukowane.
- Tablica analityczna D ze zbioru założeń S jest ***zakończona***, jeśli każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej jest zredukowane i dla każdej $\alpha in S$ formuła α występuje na każdej gałęzi otwartej w D.
- Tablice analityczne, które nie są zakończone nazywamy ***niezakończonymi***.

Zanim zdefiniujemy tablice systematyczne przypomnijmy, że wierzchołki każdego drzewa można uporządkować liniowo (wzdłużnie lub poprzecznie). W następnej definicji wykorzystamy (kanoniczny) poprzeczny porządek wierzchołków. Przypomnijmy, że jest on jednoznacznie określony przez kolejność wierzchołków (lewa gałąź, prawa gałąź) w tablicach atomowych.

DEFINICJA 18.3.1.8. ***Tablice systematyczne.***

Niech α będzie zdaniem języka KRP. ***Systematyczną tablicę analityczną*** $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$ dla α budujemy w sposób następujący:

KROK POCZĄTKOWY.

Tablica $D^0(\alpha)$ jest tablicą atomową dla α. W przypadkach $(\forall)$ oraz $(\neg\exists)$ korzystamy z termu bazowego t_1, a w przypadkach $(\exists)$ i $(\neg\forall)$ korzystamy ze stałej a_i dla pierwszego dostępnego i (tj. w tym przypadku takiego, że a_i nie występuje w α). Wtedy oczywiście (jedyne) wystąpienie α w $D^0(\alpha)$ jest zredukowane.

KROK NASTĘPNIKOWY.

Przypuśćmy, że tablica $D^n(\alpha)$ została skonstruowana. Jeśli każde wystąpienie α w $D^n(\alpha)$ jest zredukowane, to kończymy konstrukcję i $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$ jest tablicą systematyczną dla α.

W przeciwnym przypadku, niech v będzie pierwszym (w porządku poprzecznym) wierzchołkiem takim, że dla pewnej formuły β wystąpienie (v, β) nie jest zredukowane na pewnej otwartej gałęzi P tablicy $D^n(\alpha)$. Tablicę $D^{n+1}(\alpha)$ budujemy wykorzystując jeden z następujących (wzajem się wykluczających) przypadków:

- Jeśli β nie jest ani postaci $\forall x\ \gamma(x)$ ani postaci $\neg\exists x\ \gamma(x)$, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^m(\alpha) \sqcup_P D_\beta)$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^m(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β). [Przypominamy, że D_β jest tablicą atomową o korzeniu (znakowanym przez) β.] Jeśli β jest postaci $\exists x\ \gamma(x)$ lub postaci $\neg\forall x\ \gamma(x)$, to korzystamy ze stałej a_j o najmniejszym dostępnym numerze.
- W przeciwnym przypadku:
  - Jeśli β jest postaci $\forall x\ \gamma(x)$ i (v, β) jest i-tym wystąpieniem β w P, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^m(\alpha) \sqcup_P D_\beta^{t_i})$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^m(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β), a drzewo $D_\beta^{t_i}$ składa się jedynie z korzenia β oraz liścia $\gamma(t_i)$.
  - Jeśli β jest postaci $\neg\exists x\ \gamma(x)$ i (v, β) jest i-tym wystąpieniem β w P, to $D^{n+1}(\alpha) = \bigsqcup(D^m(\alpha) \sqcup_P D_\beta^{t_i})$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych P w $D^m(\alpha)$, zawierających wystąpienie (v, β), a drzewo $D_\beta^{t_i}$ składa się jedynie z korzenia β oraz liścia $\neg\gamma(t_i)$.

KROK GRANICZNY.

W granicy bierzemy sumę: $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$.

DEFINICJA 18.3.1.9. ***Tablice systematyczne ze zbioru założeń.***

Tablicę systematyczną zdania α ***ze zbioru założeń*** S, oznaczaną przez $D(S, \alpha) = \bigsqcup D^n(S, \alpha)$ budujemy w sposób następujący:

- W krokach parzystych ($n = 2k$) postępujemy, jak w definicji 18.3.1.8.
- W krokach nieparzystych ($n = 2k + 1$) $D^{n+1}(S, \alpha) = \bigsqcup(D^n(S, \alpha) \sqcup_P \alpha_k)$, gdzie suma $\bigsqcup$ brana jest po wszystkich gałęziach otwartych w $D^n(S, \alpha)$, a α_k jest k-tym elementem zbioru S (zakładamy, że S jest liniowo uporządkowany).
- Kontynuujemy tę konstrukcję tak długo, aż wszystkie elementy zbioru S zostaną uwzględnione.
- $D(S, \alpha) = \bigsqcup D^n(S, \alpha)$.

Chociaż tablice systematyczne są, w ogólności, drzewami nieskończonymi, to — jak udowodnimy niżej — są one zawsze tablicami zakończonymi.

Pora na ilustrację wprowadzonych konstrukcji przykładami. Dla celów praktycznych konieczne jest ustalenie jakiejś notacji. Proponowana poniżej jest nieco nadmiarowa, ale sądzimy, że jest przyjazna dla czytelnika. Doświadczenia dydaktyczne ostatnich lat pokazują, że odbiorcami naszej posługi dydaktycznej są teraz dzieci z pokolenia ***ikonicznego***, do których łatwiej docierają obrazki i rysunki niż np. notacja algebraiczna.

18.3.2. TA dla KRP: notacja

Stosować będziemy następującą umowę notacyjną w graficznych reprezentacjach tablic analitycznych:

- $\sqrt{}a$ oznacza opuszczenie kwantyfikatora egzystencjalnego (bądź negacji kwantyfikatora generalnego) i wprowadzenie w formule za tym kwantyfikatorem (odpowiednio, w negacji formuły) nowej stałej indywiduowej a w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;

- $\star a$ oznacza zastąpienie formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) przez formułę bez kwantyfikatora generalnego (odpowiednio, negację formuły), ze stałą indywiduową a wstawioną w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator; notację $\star t$ stosujemy też, ogólniej, dla dowolnego termu bazowego t;

- numery (z kropką) umieszczane w górnej frakcji po prawej stronie formuł informują o kolejności wykonywanych działań; po kropce występuje symbol spójnika (bądź negacji spójnika) do którego stosujemy odnośną regułę (z reguł budowania tablic analitycznych w KRZ) lub symbole $\surd$ albo $\star$ wraz z termem bazowym (w szczególności, ze stałą indywiduową), których dotyczą;

- numery (w nawiasach) po lewej stronie formuł informują o wynikach wykonywanych działań; formuły z pnia drzewa, które nie powstały w wyniku stosowania żadnych reguł otrzymują numery 0.1, 0.2, $0.3, \ldots$;

- gałąź zamkniętą oznaczamy liściem $\times_{n,m}$, gdzie (n) oraz (m) są numerami formuł wzajem sprzecznych, występujących na tej gałęzi;

- gałęzie otwarte oznaczamy liściem $\circ$; jeśli mamy więcej gałęzi otwartych, to liście te kolejno numerujemy; czasem używamy też np. symboli $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ oraz $\spadesuit$ (ewentualnie z indeksami numerycznymi) na oznaczenie gałęzi otwartych.

Przypomnijmy, że przez *pień* drzewa rozumiemy część wspólną wszystkich jego gałęzi.

Tak więc, symbol $\surd$ dotyczy zastosowań reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$, natomiast symbol $\star$ zastosowań reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Zilustrujmy podane wyżej reguły oraz umowę przykładami. We wszystkich tych przykładach kolejne kroki budowania tablic analitycznych wyliczane są przez komentarze (z prawej strony, w górnej frakcji) opatrzone numerami z kropką; wyniki wykonania tych kroków są numerowane z lewej strony, numery otrzymanych formuł podawane są w nawiasach. Śledzenie budowy tablicy analitycznej sprowadza się do obserwowania kolejności wykonywanych kroków (z prawej strony formuł) i otrzymywanych wyników (z lewej strony formuł).

Stosowanie reguł dających rozgałęzienia (np. $R(\rightarrow)$, $R(\neg\wedge)$ daje w wyniku dwie formuły; będziemy wtedy używać numerów (w nawiasach) z indeksami dolnymi: l (dla lewej formuły) oraz p (dla prawej formuły). W przypadku reguł bez rozgałęzień dających dwie formuły (np. $R(\wedge)$, $R(\neg\rightarrow)$ otrzymane formuły numerować będziemy numerami z indeksami dolnymi g (dla pierwszej, górnej formuły) oraz d (dla drugiej, dolnej formuły). Reguły nie powodujące rozgałęzień i dające w wyniku jedną formułę (np. $R(\neg\neg)$, $R(\forall)$, $R(\neg\exists)$) nie wymagają sztuczek z indeksami. Wreszcie, reguły $R(\equiv)$ oraz $R(\neg\equiv)$ dają w rezultacie cztery formuły, numerowane liczbami z indeksami dolnymi: lg, ld, pg oraz pd (odpowiednio: lewa górna, lewa dolna, prawa górna, prawa dolna).

Najpierw będziemy rozważać przykłady w języku KRP bez symboli funkcyjnych. W punkcie 18.7.2. podamy przykłady dla języka KRP z symbolami funkcyjnymi.

18.3.3. TA dla KRP: proste przykłady, z komentarzem

PRZYKŁAD 18.3.3.1.

Pokażemy, krok po kroku, jak tworzymy tablicę analityczną. Wybierzmy proste zdanie:

$$(\exists x\ Px \rightarrow \exists y\ Qy) \rightarrow \exists x\ (Px \rightarrow Qx).$$

Umieszczamy formułę w korzeniu tablicy:

$$(\exists x\ Px \rightarrow \exists y\ Qy) \rightarrow \exists x\ (Px \rightarrow Qx)$$

Jest to implikacja, a więc stosujemy regułę dotyczącą tego spójnika, dającą w rezultacie rozgałęzienie. Zastosowanie reguły dotyczącej implikacji zaznaczamy z prawej strony formuły, której to zastosowanie dotyczy, przy numerze kroku, który tym samym wykonujemy. Formuły otrzymane w rezultacie wykonania tego kroku opatrujemy numerami w nawiasach z lewej strony, jeśli potrzeba, to z indeksami. W rozważanym przypadku z prawej strony formuły, od której zaczęliśmy umieszczamy komentarz $^{1.\rightarrow}$, który możemy odczytać: w kroku pierwszym stosujemy regułę dotyczącą implikacji do formuły z lewej strony komentarza. Otrzymujemy, zgodnie ze stosowaną regułą, zaprzeczony poprzednik implikacji (formuła w gałęzi lewej, o numerze (1_l)) oraz, w gałęzi prawej, następnik tej implikacji (formuła o numerze (1_p)):

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \to \exists x\; (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}} \\
/ & \backslash \\
(1_l)\quad \neg(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) & (1_p)\quad \exists x\; (Px \to Qx)
\end{array}$$

Zajmiemy się najpierw gałęzią lewą. Formuła o numerze (1_l) jest zaprzeczoną implikacją, a więc zastosowanie odpowiedniej reguły (co zaznaczamy pisząc w komentarzu z prawej strony ${}^{2.\neg\to}$) daje w wyniku dwie formuły: poprzednik tej implikacji (formuła o numerze (2_g)) oraz jej zaprzeczony następnik (formuła o numerze (2_d)), umieszczone jedna pod drugą na rozważanej gałęzi:

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \to \exists x\; (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}} \\
/ & \backslash \\
(1_l)\quad \neg(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \quad {}^{2.\neg\to} & (1_p)\quad \exists x\; (Px \to Qx) \\
| & \\
(2_g)\quad \exists x\; Px & \\
| & \\
(2_d)\quad \neg\exists y\; Qy &
\end{array}$$

Formuła o numerze (2_g) jest formułą egzystencjalnie skwantyfikowaną, możemy więc zastosować do niej regułę dotyczącą wprowadzania nowych stałych indywiduowych; zaznaczamy wykonanie kroku trzeciego pisząc z lewej strony formuły o numerze (2_g) komentarz ${}^{3.\surd a}$ (wprowadzenie nowej stałej indywiduowej a) i otrzymując w rezultacie formułę o numerze (3):

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \to \exists x\; (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}} \\
/ & \backslash \\
(1_l)\quad \neg(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \quad {}^{2.\neg\to} & (1_p)\quad \exists x\; (Px \to Qx) \\
| & \\
(2_g)\quad \exists x\; Px \quad {}^{3.\surd a} & \\
| & \\
(2_d)\quad \neg\exists y\; Qy & \\
| & \\
(3)\quad Pa &
\end{array}$$

Względem nowowprowadzonej stałej indywiduowej a należy rozwinąć (tzn. zastosować regułę opuszczania kwantyfikatora generalnego lub zanegowanego kwantyfikatora egzystencjalnego) wszystkie formuły generalnie skwantyfikowane lub zaprzeczenia wszystkich formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych znajdujących się na rozpatrywanej gałęzi. Tu mamy formułę o numerze (2_d), która jest zaprzeczeniem formuły generalnie skwantyfikowanej. Krok czwarty polega więc na zastosowaniu odnośnej reguły, tj. $R(\neg\forall)$ i zapisania komentarza ${}^{4.\star a}$ z prawej strony formuły, do której reguła jest stosowana. Otrzymujemy w ten sposób formułę o numerze (4):

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \to \exists x\; (Px \to Qx) \quad {}^{1.\to}} \\
/ & \backslash \\
(1_l)\quad \neg(\exists x\; Px \to \exists y\; Qy) \quad {}^{2.\neg\to} & (1_p)\quad \exists x\; (Px \to Qx) \\
| & \\
(2_g)\quad \exists x\; Px \quad {}^{3.\surd a} & \\
| & \\
(2_d)\quad \neg\exists y\; Qy \quad {}^{4.\star a} & \\
| & \\
(3)\quad Pa & \\
| & \\
(4)\quad \neg Qa &
\end{array}$$

To kończy budowanie lewej gałęzi drzewa; do znajdujących się na niej formuł nie można już zastosować żadnej z reguł, które mamy do dyspozycji.

UWAGA. Stosujemy w tym momencie dwa uproszczenia, które będziemy także konsekwentnie stosować wszędzie dalej.

1. Po pierwsze, powinniśmy dopisać do tej gałęzi nie tylko formułę $Q(a)$, ale także raz jeszcze formułę $\neg\exists y\ Qy$, a dokładniej, powinniśmy przedłużyć gałąź o drzewo:

$$\begin{array}{c} \neg\exists y\ Qy \\ | \\ Q(a) \end{array}$$

zgodnie z definicją (budowania) tablicy analitycznej. Dla prostoty, zamiast wykonania tej procedury, dopisujemy do rozważanej gałęzi jedynie formułę $Q(a)$.

2. Po drugie, z czysto teoretycznego punktu widzenia, jeśli na gałęzi jest formuła generalnie skwantyfikowana, lub — jak to właśnie ma miejsce w rozważanym przypadku — zanegowana formuła egzystencjalnie skwantyfikowana $\neg\exists y\ Qy$, to do tej gałęzi dopisać należałoby wszystkie formuły postaci $Q(t)$, gdzie t jest dowolnym termem bazowym, a dokładniej, do tej gałęzi dołączyć należałoby wszystkie drzewa atomowe postaci:

$$\begin{array}{c} \neg\exists y\ Qy \\ | \\ Q(t) \end{array}$$

gdzie t jest dowolnym termem bazowym. Zarówno w rozważanym tu przypadku, jak i wszędzie dalej, będziemy konsekwentnie stosować również to drugie opisane tu uproszczenie: ograniczamy się do dopisania jedynie formuły $Q(a)$, gdyż a jest jedyną stałą na rozważanej gałęzi, względem której stosować można regułę $R(\neg\exists)$ do formuły $\neg\exists y\ Qy$.

Jak postępować, gdy na rozważanej gałęzi jest zdanie generalnie skwantyfikowane (lub zanegowane zdanie egzystencjalnie skwantyfikowane) oraz ***więcej niż jedna*** stała indywiduowa (lub, ogólniej, term bazowy), zobaczymy w jednym z następnych przykładów.

Zwinnie przeskakujemy teraz na gałąź prawą. Formuła o numerze (1_p) jest egzystencjalnie skwantyfikowana, stosujemy więc do niej regułę $R(\exists)$ dotyczącą opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego i wprowadzania nowej stałej indywiduowej. Ten, piąty krok zaznaczamy pisząc komentarz $^{5.\sqrt{}b}$ z prawej strony formuły o numerze (1_p) i otrzymujemy w rezultacie formułę o numerze (5):

$$\begin{array}{c} (\exists x\ Px \to \exists y\ Qy) \to \exists x\ (Px \to Qx)\ ^{1.\to} \\ \swarrow \qquad\qquad \searrow \\ \begin{array}{rl} (1_l) & \neg(\exists x\ Px \to \exists y\ Qy)\ ^{2.\neg\to} \\ & | \\ (2_g) & \exists x\ Px\ ^{3.\sqrt{}a} \\ & | \\ (2_d) & \neg\exists y\ Qy\ ^{4.\star a} \\ & | \\ (3) & Pa \\ & | \\ (4) & \neg Qa \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (1_p) & \exists x\ (Px \to Qx)\ ^{5.\sqrt{}b} \\ & | \\ (5) & Pb \to Qb \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Jedyne, co można jeszcze zrobić na tej gałęzi, to zastosowanie reguły dotyczącej implikacji do formuły o numerze (5). Ten, szósty krok (zaznaczony komentarzem $^{6.\to}$ z prawej strony formuły o numerze (5)) daje w rezultacie rozgałęzienie na formuły o numerach (6_l) oraz (6_p):

$$(\exists x\ Px \to \exists y\ Qy) \to \exists x\ (Px \to Qx)\ {}^{1.\to}$$]

- $(1_l)\quad \neg(\exists x\ Px \to \exists y\ Qy)\ {}^{2.\neg\to}$
  - $(2_g)\quad \exists x\ Px\ {}^{3.\surd a}$
  - $(2_d)\quad \neg\exists y\ Qy\ {}^{4.\star a}$
  - $(3)\quad Pa$
  - $(4)\quad \neg Qa$
- $(1_p)\quad \exists x\ (Px \to Qx)\ {}^{5.\surd b}$
  - $(5)\quad Pb \to Qb$
    - $(6_l\ \neg Pb$
    - $(6_p)\ Qb$

Budowa tablicy została zakończona. Dodajmy jeszcze, że w rozważanym przypadku kolejność stosowania reguł była jednoznacznie określona. Nie zawsze będziemy zmuszeni do tak rozkosznej bezmyślności; często to, jakie reguły stosować w jakiej kolejności jest niezwykle istotne dla budowania tablic w sposób możliwie najbardziej efektywny (ze względu na rozważany problem), a ponadto zaspokoić pozwala tęsknoty estetyczne (budowane drzewa powinny być ***ładne***), które nie są zarezerwowane jedynie dla przedstawicieli wyższej klasy średniej w krajach cywilizacji judeochrześcijańskiej i euroatlantyckiej.

Zauważmy też, że w gałęzi prawej mogliśmy się posłużyć symbolem a dla wprowadzenia nowej stałej indywiduowej (krok 5.). Tak samo jak w KRZ, to co „dzieje się" na jednej gałęzi nie ma żadnego wpływu na to, co „dzieje się" na pozostałych gałęziach.

PRZYKŁAD 18.3.3.2.

Rozważmy formułę:

$$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y,z) \vee Q(x,y)).$$

Zbudujemy dla niej tablicę analityczną, stosując pewne uproszczenia, które oczywiście objaśnimy:

$$(0)\ \exists x \forall y \forall z\ (R(x,y,z) \vee Q(x,y))\ {}^{1.\surd a}$$

$$(1)\ \forall y \forall z\ (R(a,y,z) \vee Q(a,y))\ {}^{2.\star a}$$

$$(2)\ \forall z\ (R(a,a,z) \vee Q(a,a))\ {}^{3.\star a}$$

$$(3)\ R(a,a,a) \vee Q(a,a)\ {}^{4.\vee}$$

- $(4_l)\ R(a,a,a)$
- $(4_p)\ Q(a,a)$

Formuła w korzeniu jest skwantyfikowana egzystencjalnie, co nakazuje wprowadzenie nowej stałej a (krok 1.). Otrzymana formuła o numerze (1) jest formułą generalnie skwantyfikowaną, i na tworzonej gałęzi występuje stała a. Trzeba więc do formuły (1) zastosować regułę $R(\forall)$ względem tej stałej (krok 2.). Otrzymana formuła o numerze (2) jest formułą generalnie skwantyfikowaną, i na tworzonej gałęzi występuje stała a. Trzeba więc do formuły (2) zastosować regułę $R(\forall)$ względem tej stałej (krok 3.). Otrzymana formuła o numerze (3) nie rozpoczyna sie od kwantyfikatora; jest alternatywą, a więc trzeba do niej zastosować regułę $R(\vee)$ (krok 4.). Otrzymujemy rozgałęzienie. Ani do formuły o numerze (4_l), ani do formuły o numerze (4_l) nie można już stosować żadnych reguł, bo są to formuły atomowe. Koniec pracy.

Uproszczenie polega tu na tym, że notacja $\star a$ zastępuje (teoretycznie wymagane) dopisanie do tworzonej gałęzi na nowo formuły, z której prawej strony notacja ta jest umieszczona. Będziemy stosować to uproszczenie.

Może komuś wydawać się dziwne (albo i dziwaczne), że tłumaczymy te wszystkie uproszczenia. Należy podkreślić rzecz następującą. Precyzyjne definicje (tablicy analitycznej, tablicy systematycznej, itd.) są ***niezbędne***, aby udowodnić, że metoda tablic analitycznych w KRP jest ***poprawna*** (trafna i pełna). Natomiast przy rozważaniu konkretnych, zwykle nieskomplikowanych przykładów tablic analitycznych użyteczne stają się pewne uproszczenia, pozwalające zaoszczędzić czas, siły, miejsce na kartce, itd. Oczywiście, uproszczenia te nie mogą prowadzić do ***błędnych*** wyników.

Tak więc, gdy w tablicy analitycznej mamy zdanie generalnie skwantyfikowane postaci $\forall x\ \alpha(x)$ (lub zanegowane zdanie egzystencjalnie skwantyfikowane postaci $\neg\exists x\ \ \alpha(x)$), to ***teoretycznie*** powinniśmy dołączyć do rozważanej gałęzi ***każde*** drzewo atomowe postaci:

$$\begin{array}{c} \forall x\ \alpha(x) \\ | \\ \alpha(t) \end{array}$$

lub ***każde*** drzewo atomowe postaci:

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\ \alpha(x) \\ | \\ \neg\alpha(t) \end{array}$$

dla dowolnego termu bazowego t.

W ***praktyce*** dołączamy jednak w takich przypadkach jedynie formuły $\alpha(t)$ (lub $\neg\alpha(t)$), dla tych termów bazowych (w szczególności: dla tych stałych), które występują na rozważanej gałęzi.

PRZYKŁAD 18.3.3.3.

Rozważmy formułę:

$$\exists x \forall y\ R(a, x, y).$$

Jej tablica analityczna ma postać następującą:

$$\begin{array}{c} (0)\ \exists x\forall y\ R(a,x,y)\ ^{1.\checkmark b} \\ | \\ (1)\ \forall y\ R(a,b,y)\ ^{2.\star b\ \ 3.\star b} \\ | \\ (2)\ R(a,b,b) \\ | \\ (3)\ R(a,b,a) \end{array}$$

Formuła w korzeniu tablicy to formuła egzystencjalna, a więc w kroku 1. stosujemy regułę $R(\exists)$ i wprowadzamy nową stałą b, otrzymując formułę o numerze (1). Jest to formuła generalnie skwantyfikowana, a na rozważanej gałęzi mamy dwie stałe: a oraz b. Trzeba zatem do formuły (1) ***dwukrotnie*** zastosować regułę $R(\forall)$: raz względem stałej b, a po raz drugi względem stałej a (kolejność nie gra roli). W wyniku wykonania każdego z tych kroków (kroków 2. oraz 3.) otrzymujemy zdanie atomowe. Koniec pracy.

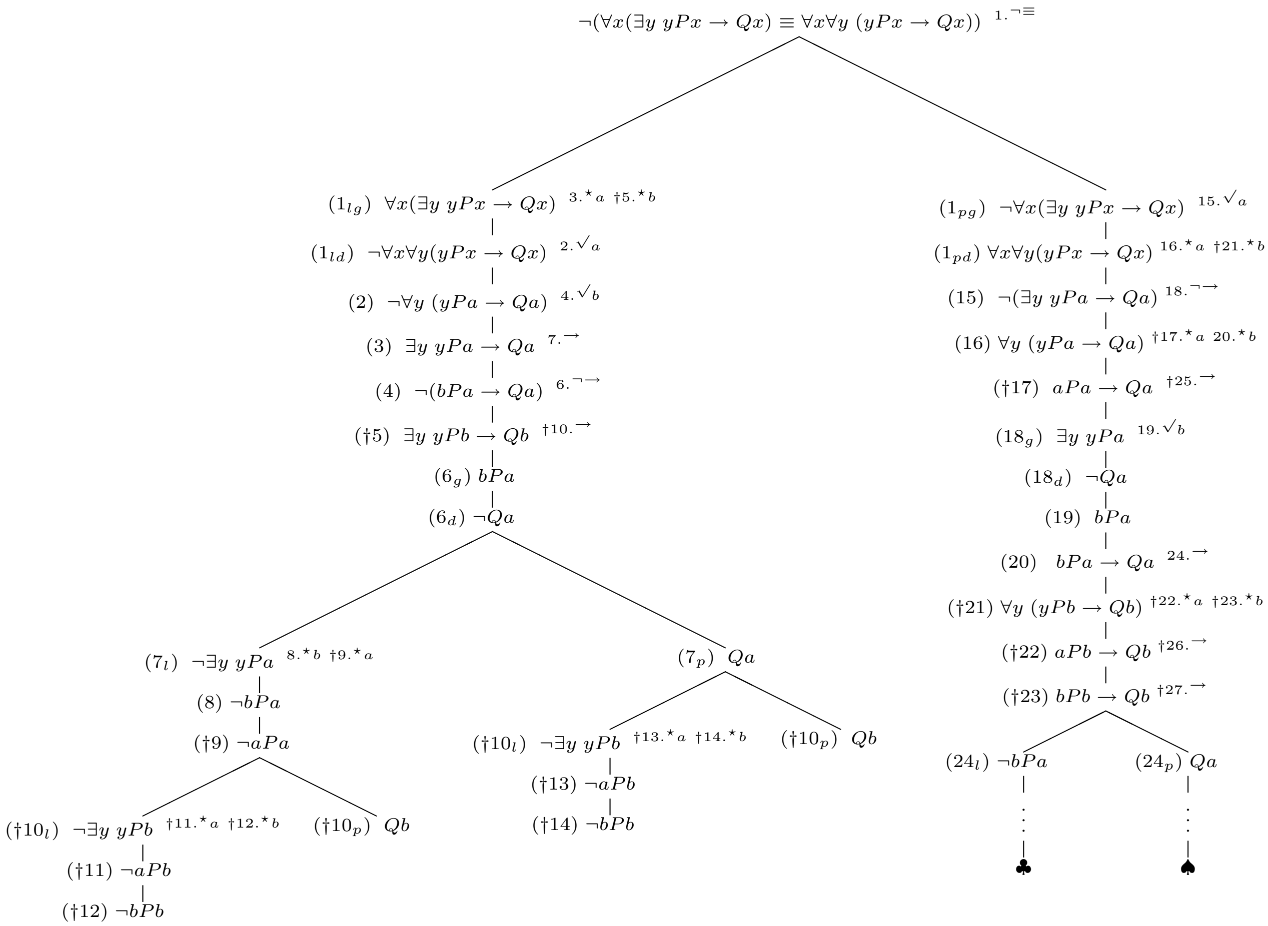
Bardziej złożone przypadki zostaną omówione w dalszych przykładach w tym wykładzie.

PRZYKŁAD 18.3.3.4.

Pora już chyba na rozważenie jakiegoś naprawdę paskudnego, skomplikowanego przykładu. Pozwolimy sobie przy tym na bardzo drobiazgowe komentarze dotyczące podanej za chwilę tablicy analitycznej. Komentarze te mają przy tym na celu zwrócenie uwagi na to, ***po co*** właściwie budujemy tablice analityczne.

UWAGA. W tym i w wielu następnych przykładach, dla predykatów jednoarumentowego oraz dwuargumentowych będziemy pisać Rx (zamiast $R(x)$) oraz xRy (zamiast $R(x, y)$).

Rozważmy formułę $\neg(\forall x(\exists y\ yPx \rightarrow Qx) \equiv \forall x\forall y\ (yPx \rightarrow Qx))$ oraz jej tablicę analityczną:



Na pierwszy rzut oka tablica ta nie wygląda najlepiej: zwichrowane drzewo, mnóstwo numerków z groźnymi krzyżami, jakieś zwisające z prawej strony czarne liście, itp. ***Spokojnie.*** Wszystko zostanie skrupulatnie objaśnione. Do ogrodów logiki droga wiedzie czasem przez chwasty.

W korzeniu tablicy znajduje się zanegowana równoważność. Stosujemy $R(\neg \equiv)$ i otrzymujemy dwie gałęzie: na lewej gałęzi mamy pierwszy człon rozważanej równoważności (1_{lg}) oraz negację drugiego członu (1_{ld}), na gałęzi prawej mamy negację pierwszego członu rozważanej równoważności (1_{pg}) oraz jej drugi człon (1_{pd}).

Bez żadnych uprzedzeń politycznych (nie sympatyzujemy ani z Sojuszami Mańkutów ani z Wszechnawiedzoną Prawicą) ***rozpatrzmy najpierw gałąź lewą.***

W (1_{ld}) mamy zanegowaną formułę generalną, a więc stosujemy $R(\neg\forall)$, wprowadzając nową stałą indywiduową a, co zaznaczamy pisząc z prawej strony formuły (1_{ld}) komentarz: $^{2.\surd a}$; otrzymana w wyniku formuła otrzymuje (z lewej strony) numer (2). Zdaniem generalnym na tej gałęzi jest (1_{lg}), a więc stosujemy $R(\forall)$, umieszczając z prawej strony formuły (1_{lg}) komentarz $^{3.\star a}$ i otrzymując formułę o numerze (3) (umieszczonym z lewej strony). Formuła o numerze (2) jest zanegowaną formułą generalną, a więc stosujemy regułę $R(\neg\forall)$, wprowadzając nową stałą indywiduową b i zaznaczając to działanie komentarzem $^{4.\surd b}$ umieszczonym z prawej strony formuły o numerze (2); otrzymujemy przy tym formułę o numerze (4). Następny, piąty krok to zastosowanie $R(\forall)$ do formuły generalnie skwantyfikowanej o numerze (1_{lg}) dla wprowadzonej stałej b: umieszczamy komentarz $^{\dagger 5.\star b}$ z prawej strony formuły (1_{lg}) i otrzymujemy formułę o numerze $(\dagger 5)$.

UWAGA. Te kroki oraz otrzymane w wyniku ich wykonania formuły, które mają z lewej strony znak † są, jak wkrótce wyjaśnimy, ***zbędne*** z punktu widzenia podstawowego celu budowania tablic analitycznych, tj. szukania na poszczególnych gałęziach par formuł wzajem sprzecznych. Notację taką stosujemy tylko w tym przykładzie, aby problem klarownie przedstawić i wyjaśnić. Stosowny komentarz znajdą Czytelniczki po skonstruowaniu całego tego CHWASTA.

W tym momencie nie ma już na rozważanej gałęzi formuł, do których można byłoby zastosować regułę $R(\exists)$ lub regułę $R(\neg\forall)$, żadne nowe stałe indywiduowe nie zostaną więc wprowadzone. Ponadto, względem każdej z już nowowprowadzonych stałych (tu: a oraz b) zastosowano też wszędzie gdzie należało regułę $R(\forall)$. Do formuły o numerze (4) stosujemy regułę $R(\neg \rightarrow)$, zaznaczając to komentarzem $^{6.\neg\rightarrow}$ i otrzymując formuły o numerach (6_g) i (6_d) (umieszczone jedna pod drugą w budowanej obecnie gałęzi). Z kolei, do formuły o numerze (3) stosujemy regułę $R(\rightarrow)$, umieszczając komentarz $^{7.\rightarrow}$ z prawej strony formuły o numerze (3) i otrzymując rozgałęzienie drzewa: w lewej gałęzi tego rozgałęzienia mamy formułę o numerze (7_l), a w prawej formułę o numerze (7_p).

W otrzymanej lewej gałęzi pojawiła się negacja formuły egzystencjalnej, a więc powinna ona zostać rozwinięta względem wszystkich występujących na tej gałęzi (idąc od korzenia drzewa) stałych indywiduowych, tj. w naszym przypadku: względem a oraz b. Wykonujemy te działania, tzn. stosujemy do formuły o numerze (7_l) regułę $R(\neg\exists)$: w kroku o opatrzonym komentarzem $^{8.\star b}$ otrzymujemy formułę o numerze (8), a w kroku opatrzonym komentarzem $^{\dagger 9.\star a}$ otrzymujemy formułę o numerze $(\dagger 9)$.

Ostatnimi formułami budowanej lewej części (wychodzącej z korzenia) dotąd utworzonego drzewa są formuły o numerach: $(\dagger 9)$ oraz (7_p). Jedyną formułą na części wspólnej gałęzi kończących się tymi liśćmi, do której można zastosować jakiekolwiek reguły opuszczania stałych logicznych jest formuła o numerze $(\dagger 5)$.[1] Jest to implikacja, a więc zastosowanie odnośnej reguły, tj. $R(\rightarrow)$ daje dwa nowe rozgałęzienia: wykonując krok o komentarzu $^{\dagger 10.\rightarrow}$ tworzymy te rozgałęzienia (formuły o numerach $(\dagger 10_l)$ oraz $(\dagger 10_p)$) zarówno w gałęzi zakończonej formułą $(\dagger 9)$, jak i w gałęzi zakończonej formułą o numerze (7_p). W otrzymanych czterech gałęziach tej części budowanej tablicy tylko do formuły o numerze $(\dagger 10_l)$ (występującej na dwóch z tych gałęzi) zastosować można jeszcze jakieś reguły: jest to bowiem negacja formuły egzystencjalnej, a więc nadająca się do zastosowania do niej reguły $R(\neg\exists)$ względem stałych a oraz b. Żwawo wykonujemy tę pracę: kroki opatrzone komentarzami $^{\dagger 11.\star a}$ oraz $^{\dagger 12.\star b}$ dają w rezultacie formuły o numerach, odpowiednio, $(\dagger 11)$ i $(\dagger 12)$, które umieszczamy pod formułą o numerze $(\dagger 10_l)$ w najbardziej lewej gałęzi drzewa. Podobną pracę musimy wykonać w przypadku formuły o numerze $(\dagger 10_l)$, ale znajdującej się na trzeciej od lewej gałęzi drzewa: kroki opatrzone komentarzami $^{\dagger 13.\star a}$ oraz $^{\dagger 14.\star b}$ dają w rezultacie formuły o numerach, odpowiednio, $(\dagger 13)$ i $(\dagger 14)$, które umieszczamy pod tą formułą. Dlaczego raz umieszcza się formułę o danym numerze na różnych gałęziach drzewa, a potem wykonując na niej *takie same* operacje (a więc i otrzymując *takie same* wyniki) stosuje się numerację odrębną? To powinno być jasne: formuła o numerze $(\dagger 10_l)$ ***musiała*** być wpisana, jako (lewy) potomek formuły o numerze $(\dagger 5)$ zarówno pod formułą o numerze $(\dagger 9)$, jak i pod formułą o numerze (7_p). Natomiast kroki $^{\dagger 11.\star a}$ i $^{\dagger 12.\star b}$ są już ***wykonywane na innej*** gałęzi niż kroki $^{\dagger 13.\star a}$ oraz $^{\dagger 14.\star b}$, i stąd inna numeracja. Wykonanie jakiegoś kroku na danej formule jest istotne dla wszystkich formuł, będących ***potomkami*** tej formuły. Mówiąc metaforycznie, każdy krok wykonany na danej formule jest istotny dla wszystkich formuł znajdujących się niżej w drzewie od tej formuły. Żaden z wykonywanych kroków ***nie*** „działa w górę" drzewa.

Teraz Czytelniczki widzą całą lewą część drzewa, wychodzącą z korzenia budowanej tablicy analitycznej. Do żadnej z występujących tu formuł nie można już zastosować żadnej z reguł. Tak więc, ta część tablicy zakończona jest czterema liśćmi. Nie mamy tu nic więcej do roboty.

Wracamy teraz do ***prawej gałęzi*** wyrastającej z korzenia tablicy, tj. do formuł o numerach (1_{pg}) oraz (1_{pd}). Do formuły (1_{pg}) stosujemy regułę $R(\neg\forall)$; wprowadzamy nową ***na tej gałęzi*** stałą — możemy użyć jeszcze nie użytego symbolu, np. c, ale równie dobrze możemy użyć symbolu a, i tak właśnie (z wielkopolską oszczędnością) uczynimy.[2] Z prawej strony formuły o numerze (1_{pg}) umieszczamy więc komentarz $^{15.\surd a}$ i otrzymujemy formułę o numerze (15). Formuła o numerze (1_{pd}) jest generalnie skwantyfikowana, należy zatem zastosować do niej regułę $R(\forall)$ względem wprowadzonej przed chwilą nowej stałej a. Jest to krok, do którego komentarz o postaci $^{16.\star a}$ umieszczamy po prawej stronie formuły o numerze (1_{pd}) i w wyniku którego otrzymujemy formułę o numerze (16). Jest to formuła generalnie skwantyfikowana, stosujemy więc do niej regułę $R(\forall)$ względem stałej a; zaznaczamy ten krok pisząc z prawej strony formuły o numerze (16) komentarz $^{\dagger 17.\star a}$ i otrzymujemy formułę o numerze $(\dagger 17)$. Do formuły o numerze (15) stosujemy regułę $R(\neg \rightarrow)$, pisząc w odpowiednim miejscu stosowny komentarz i otrzymując formuły o numerach (18_g) oraz (18_d). Formuła o numerze (18_g) jest egzystencjalnie skwantyfikowana, a więc stosujemy regułę $R(\exists)$ wprowadzając nową ***na tej gałęzi*** stałą indywiduową b, umieszczamy komentarz $^{19.\surd b}$ z prawej strony formuły o numerze (18_g) i otrzymujemy formułę o numerze (19). Na gałęzi, na której teraz pracujemy, są dwa zdania generalnie skwantyfikowane, do których zastosować należałoby regułę $R(\forall)$ względem stałej b: są to formuły o numerach (1_{pd}) oraz (16). Stosujemy najpierw regułę $R(\forall)$ do formuły o numerze (16) względem stałej b, umieszczając z prawej strony formuły o numerze (16) komentarz $^{20.\star b}$ i otrzymując formułę o numerze (20).

Stosujemy jeszcze trzykrotnie regułę $R(\forall)$: do formuły o numerze (1_{pd}) w kroku $^{\dagger 21.\star b}$, i dwukrotnie do formuły

[1] Zajmujemy się tą formułą ***dopiero*** teraz (tj. ***po*** wykonaniu kroku $^{6.\neg\rightarrow}$) z powodów natury pragmatycznej: aby uniknąć rozgałęzienia w drzewie, podwajającego liczbę gałęzi.

[2] To, co „dzieje się" na danej gałęzi drzewa jest niezależne od tego, co „dzieje się" na pozostałych gałęziach, jeśli tę metaforę uznać za tłumaczącą cokolwiek.

o numerze $(\dagger 21)$,[3] w krokach o numerach $^{\dagger 22.\star a}$ oraz $^{\dagger 23.\star b}$, dających w rezultacie formuły o numerach $(\dagger 22)$ oraz $(\dagger 23)$, odpowiednio.

W prawej części tablicy, na gałęzi na której teraz pracujemy, nie można już stosować żadnych reguł dotyczących kwantyfikatorów.

Do formuły o numerze (20) stosujemy $R(\rightarrow)$ otrzymując rozgałęzienie: formuły o numerach (24_l) oraz (24_p).

Przerywamy w tym miejscu dalszą konstrukcję, i to nie dlatego, że braknie miejsca na stronie. Do pełnego narysowania prawych gałęzi drzewa wyrastających z korzenia potrzeba byłoby jeszcze wykonać trzy kroki: mianowicie do formuł o numerach $(\dagger 17)$, $(\dagger 22)$ oraz $(\dagger 23)$ zastosować regułę $R(\rightarrow)$. Kroki te mają numery: $^{\dagger 25.\rightarrow}$, $^{\dagger 26.\rightarrow}$ oraz $^{\dagger 27.\rightarrow}$, odpowiednio. W rezultacie otrzymamy ostatecznie w prawej części tablicy szesnaście gałęzi (rysunek za chwilę).

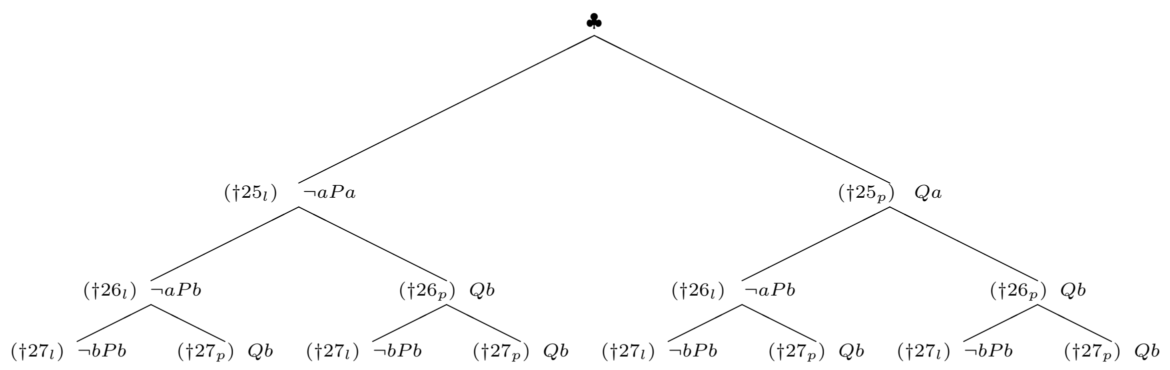
Teraz wytłumaczmy, dlaczego przerwaliśmy konstrukcję (i dlaczego wielokrotnie straszyliśmy Czytelniczki znakiem krzyża †). Otóż tablice analityczne budujemy w jakimś celu, a nie po to, aby zbudować je po prostu do końca. Proszę zauważyć, że na każdej z sześciu gałęzi powyższego (niedokończonego) drzewa (a w sumie na każdej z dwudziestu gałęzi całego drzewa, jak za chwilę ujrzymy) występuje para formuł sprzecznych (tj. takich, iż jedna jest zaprzeczeniem drugiej); są to formuły o numerach:

- (6_g) oraz (8);
- (6_d) oraz (7_p);
- (19) oraz (24_l);
- (18_d) oraz (24_p).

W przypadku omawianej metody tablic analitycznych sprzeczność cieszy, bo oznacza zakończenie pracy na danej gałęzi. Inaczej niż w wojsku, reguły budowania drzew wykorzystywać należy z rozsądkiem. Otóż, jak za chwilę się okaże, kompletne wypisywanie tych gałęzi danej tablicy analitycznej, które zawierają parę formuł postaci A oraz $\neg A$ nie jest potrzebne dla celów przeprowadzanej analizy. Może ucieszymy (?) Humanistki metaforą, zanim podamy stosowne techniczne definicje: gałęzie zawierające parę formuł sprzecznych są ***martwe***. SPRZECZNOŚĆ TO ŚMIERĆ LOGICZNA.

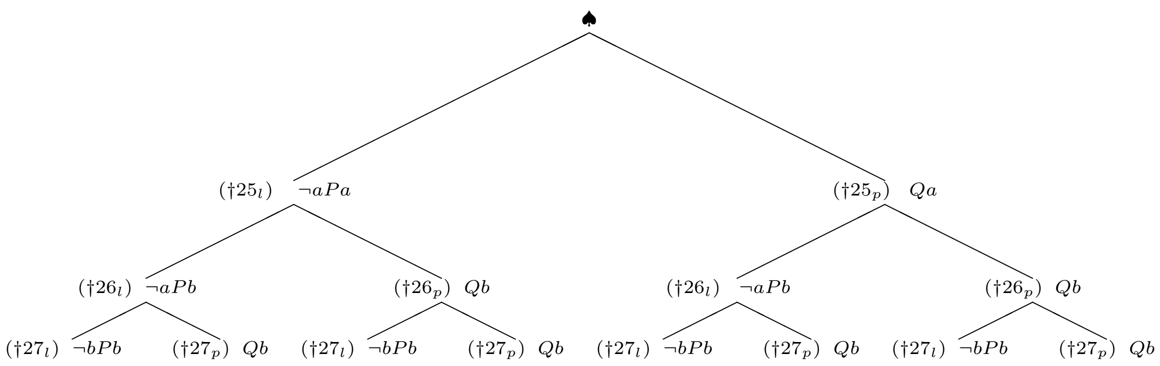
Aby jednak czytający ten tekst Wojskowi nie poczuli się urażeni (nie było naszym zamiarem dworowanie sobie z Sił Zbrojnych oraz ich Zwierzchnika!) podajemy niżej resztę powyższego CHWASTA, a mianowicie te jego fragmenty, które trzeba wpisać w miejsce liści: ♣ oraz ♠ (oczywiście usuwając jednocześnie ♣ oraz ♠ z drzewa).

W miejsce liścia ♣ należy wpisać:



Natomiast w miejsce liścia ♠ należy wpisać:

[3]Zauważmy, że formuła o numerze $(\dagger 21)$ jest formułą generalnie skwantyfikowaną, należy więc rozwinąć ją ze względu na wszystkie występujące na rozważanej gałęzi stałe indywiduowe.



Bystre Czytelniczki zauważą natychmiast, że w miejsce liścia ♣ wpisujemy dokładnie to samo, co w miejsce liścia ♠. I te Czytelniczki mają absolutną rację! Tak właśnie ma być — wymagają tego reguły budowania tablic analitycznych.

Teraz to już naprawdę nie można dalej kultywować tego CHWASTA. Do żadnej z formuł, w żadnej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł. Budowa tablicy została zakończona. Aby ujrzeć je w całości, wystarczy wkleić kopie powyższego drzewa w miejsce liści ♣ oraz ♠ w poprzednio budowanym drzewie. Zachęcamy do precyzyjnego wykonania tych czynności (nie tylko osoby odsiadujące zasłużone wyroki).

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia użycie znaku krzyża † w numeracji formuł i komentarzy w rozważanym drzewie. Jak wspomnieliśmy, ma on sygnalizować, że odnośne kroki były ***zbędne*** dla uzyskania stosownych efektów: dla uzyskania pary formuł wzajem sprzecznych. Przypomnijmy, że gałąź nazywamy ***zamkniętą*** (albo ***sprzeczną***), gdy występuje na niej para formuł wzajem sprzecznych, a więc para formuł postaci: α oraz $\neg\alpha$.

PRZYPOMNIENIE. Gałąź zamkniętą drzewa kończymy liściem z symbolem $\times$ opatrzonym indeksami wskazującymi numery formuł z tej gałęzi, które pozwalają ją zamknąć, tj. które są wzajem sprzeczne.

W drzewie z tego przykładu (nazwanego CHWASTEM), po formule o numerze (8) możemy gałąź z tą formułą zamknąć, dodając liść postaci: $\times_{6_g,8}$ (i tym samym zakończyć budowanie tej gałęzi), jako iż formuła o numerze (6_g) ma postać bPa, natomiast formuła o numerze (8) jest postaci $\neg bPa$. Prawdę mówiąc, ***wszystkie*** gałęzie tej tablicy analitycznej można zamknąć: po formule o numerze (7_p) dodajemy liść $\times_{6_d,7_p}$ (wyrzucając wszystkie formuły z obu gałęzi pod formułą o numerze (7_p)), po formule o numerze (24_l) dodajemy liść $\times_{19,24_l}$ (zamiast poddrzewa, które wklejaliśmy w miejsce zaznaczone przez ♣), a po formule o numerze (24_p) dodajemy liść $\times_{18_d,24_p}$ (zamiast poddrzewa, które wklejaliśmy w miejsce zaznaczone przez ♠).

Zauważmy, że tablice analityczne z pierwszych trzech przykładów miały wszystkie gałęzie otwarte.

To co najważniejsze z praktycznego punktu widzenia, jeśli chodzi o metodę tablic analitycznych da się streścić tak oto. Masz jakąś formułę (dokładnie: zdanie) języka KRP. Budujesz jej tablicę analityczną. Każda z konstruowanych gałęzi jest próbą konstrukcji interpretacji, w której rozważana formuła jest prawdziwa. Jeśli gałąź jest zamknięta (zawiera parę formuł wzajem sprzecznych), to gałąź taka ***nie może*** odpowiadać żadnej interpretacji, w której badana formuła jest prawdziwa. Zamykanie gałęzi to zatem ***wykluczanie*** zachodzenia pewnych sytuacji. Natomiast istnienie gałęzi otwartych w tablicy analitycznej danej formuły ukazuje, że istnieją interpretacje, w których formuła ta jest prawdziwa.

WAŻNA UWAGA NATURY PRAGMATYCZNEJ.

Kiedy budowę tablicy analitycznej uważamy za zakończoną? Dopiero wtedy, gdy do żadnej formuły, na żadnej gałęzi ***dotąd otrzymanego*** drzewa nie można już stosować żadnych reguł, budowa tablicy jest zakończona. Wystosujmy następujący (nieco demagogiczny) apel do Humanistek (dla wzmocnienia mocy perswazyjnej, podajemy go w dwóch wersjach):[4]

- ***Bądź mądrzejsza od komputera!***
- ***Nie bądź głupsza od komputera!***

[4]Wersje te nie są semantycznie równoważne. Problematyka dotycząca porównywania możliwości intelektualnych człowieka z możliwościami programu komputerowego należy do ważnych zagadnień badanych w *Artificial Intelligence*. W tym miejscu chodzi nam jedynie o to, że Humanistka może poczuć wyższość intelektualną wobec programu komputerowego w rozwiązywaniu niektórych problemów logicznych.

Jeśli podczas tworzenia łańcucha formuł w konstruowanej tablicy analitycznej uzyskamy w tym łańcuchu parę formuł wzajem sprzecznych, to dalsza praca z tym łańcuchem jest niepotrzebna: możemy ją zakończyć, doklejając do takiego łańcucha liść z informacją o uzyskaniu sprzeczności i otrzymując w ten sposób gałąź zamkniętą drzewa, traktowaną jako twór kompletny. Pamiętasz: SPRZECZNOŚĆ TO ŚMIERĆ LOGICZNA. Nadto, z kultury masowej pamiętasz: A KTO UMARŁ, TEN NIE ŻYJE. Podstawowym celem budowania tablic analitycznych jest uzyskiwanie łańcuchów zamkniętych, tj. zbiorów formuł wśród których jest para formuł wzajem sprzecznych. Jeśli jakiś zbiór formuł zawiera parę formuł wzajem sprzecznych, to ***każdy*** jego nadzbiór także tę parę zawiera. Można zakończyć pracę.

Mam nadzieję, że ten (również nieco nieprecyzyjny) komentarz trochę ułatwi zrozumienie, na czym w istocie polega metoda tablic analitycznych.

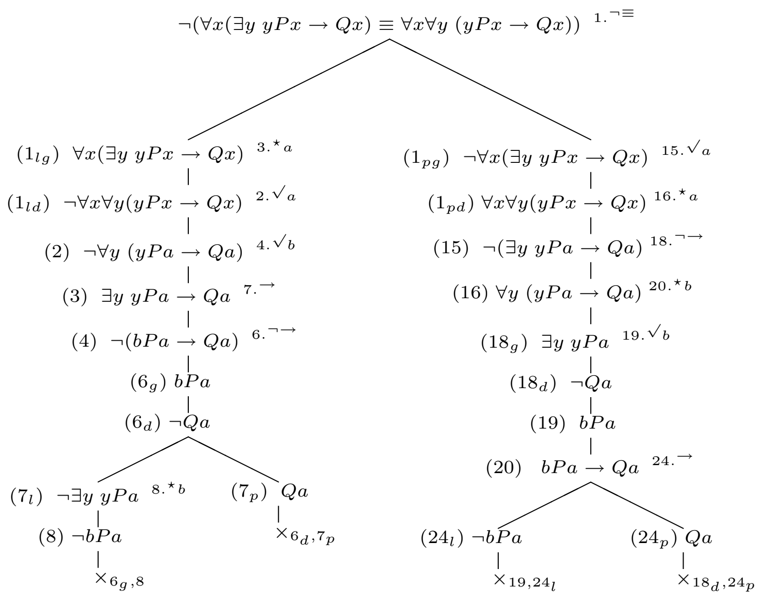
Sens powyższego apelu proszę odbierać następująco: nie wykonuj bezmyślnie wszystkich reguł, staraj się pamiętać, jakiemu celowi służy Twoja praca — masz mianowicie ***wykluczać*** zachodzenie pewnych sytuacji.

Koniec uwagi pragmatycznej.

Gdy wszystkie gałęzie tablicy analitycznej zdania α są zamknięte, to nie istnieje interpretacja, w której zdanie to jest prawdziwe. Gdy któraś gałąź tablicy analitycznej zdania α jest otwarta, to gałąź taka odpowiada interpretacji, w której α jest prawdziwa, tj. biorąc pod uwagę wszystkie formuły (atomowe) występujące na tej gałęzi można podać interpretację, w której wszystkie formuły tej gałęzi (a więc także formuła stanowiąca korzeń drzewa) są prawdziwe. Poniżej pokazujemy, że gałęzie otwarte tablic analitycznych (budowanych w pewien specjalny, pedantyczny sposób) tworzą *zbiory Hintikki*, a więc na mocy lematu Hintikki mają modele.

Na zakończenie omawiania tego przykładu pokażmy jeszcze tablicę analityczną rozważanej formuły, w której gałęzie zamykamy z chwilą otrzymania pary formuł wzajem sprzecznych. Opuszczono kroki o numerach: 5, 9, 10, 12, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 23, 25, 26 i 27. Wszystkie one były zbędne dla zamykania gałęzi. Nie zmieniamy numeracji pozostałych kroków (i otrzymanych w wyniku ich wykonania formuł), dla możliwości porównania tej (schludnej) tablicy o wszystkich czterech gałęziach sprzecznych z wyjściową tablicą o dwudziestu gałęziach.

Mamy nadzieję, że takie porównanie wzmocni wymowę naszego powyższego apelu, skierowanego do Humanistek.



PRZYKŁAD 18.3.3.5.

Niewinnie wyglądająca formuła języka KRP

$$\exists x\ Px \wedge \forall y \exists z\ yQz$$

ma nieskończoną tablicę analityczną:

$$
\begin{array}{rll}
 & \exists x\ Px \wedge \forall y \exists z\ yQz & ^{1.\wedge} \\
 & \mid & \\
(1_g) & \exists x\ Px & ^{2.\surd a} \\
 & \mid & \\
(1_d) & \forall y \exists z\ yQz & ^{3.\star a\ 5.\star b\ 7.\star c} \\
 & \mid & \\
(2) & Pa & \\
 & \mid & \\
(3) & \exists z\ aQz & ^{4.\surd b} \\
 & \mid & \\
(4) & aQb & \\
 & \mid & \\
(5) & \exists z\ bQz & ^{6.\surd c} \\
 & \mid & \\
(6) & bQc & \\
 & \mid & \\
(7) & \exists z\ cQz & \\
 & \mid & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Powinno być widoczne, że budowy tej tablicy analitycznej zakończyć nie można. Tak, jak każą reguły, wprowadziliśmy stałą indywiduową opuszczając kwantyfikator egzystencjalny w formule o numerze (1_g). Rozwinięcie formuły generalnej (1_d) ze względu na tę stałą dało w wyniku zdanie egzystencjalne. Wprowadziliśmy nową stałą, rozwinęliśmy względem niej formułę generalną (1_d), znów otrzymaliśmy formułę egzystencjalną, itd.

Jeśli Czytelniczki pragną bliższego oswojenia się z ewentualnymi interpretacjami tej formuły, to proponujemy czytać Px np. jako x ***jest bezrobotna***, zaś xQy jako x ***jest zapożyczona u*** y. Czy zdanie: ***Nie dość, że mamy bezrobocie, to w dodatku wszyscy mają długi*** brzmi swojsko?

PRZYKŁAD 18.3.3.6.

Zdanie:

Jest ktoś, kto jest szczęśliwy tylko wtedy, gdy wszyscy są nieszczęśliwi.

ma dość ponury wydźwięk społeczny. Pokażemy, że choć istnienie takiego osobnika nie jest (niestety) logicznie wykluczone, to nie jest też ono (na szczęście) logicznie konieczne.

Uznajmy (zgroza!), że ***być szczęśliwym*** to predykat jednoargumentowy. Czytajmy Sx jako: x ***jest szczęśliwy***. Zbudujmy tablicę analityczną dla formuły języka KRP, która odpowiada strukturze składniowej rozważanego zdania:

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\ (Sx \rightarrow \neg Sy) \quad ^{1.\surd a} \\
\mid \\
(1)\ \ \forall y\ (Sa \rightarrow \neg Sy) \quad ^{2.\star a} \\
\mid \\
(2)\ \ Sa \rightarrow \neg Sa \quad ^{3\rightarrow} \\
\begin{array}{cc}
(3_l)\ \ \neg Sa & \qquad (3_p)\ \ \neg Sa \\
\mid & \mid \\
\circ & \circ
\end{array}
\end{array}
$$

Na tym budowę tablicy musimy zakończyć — na żadnej gałęzi nie ma żadnych formuł, do których można byłoby stosować jakiekolwiek reguły opuszczania stałych logicznych.

Ponieważ ta tablica ma gałęzie otwarte, więc rozważana formuła jest prawdziwa w jakichś interpretacjach. Na przykład, jest prawdziwa w uniwersum jednoelementowym, w którym dopełnienie denotacji predykatu S zawiera całe to uniwersum. Wracając do interpretacji wyjściowej, rozpatrywane zdanie jest prawdziwe np. w świecie złożonym z jednego nieszczęśliwego osobnika. Jako ćwiczenie polecamy namysł nad tym, w jakich innych jeszcze światach zdanie to jest prawdziwe (czy mogą w nich istnieć ludzie szczęśliwi?).

Zbudujmy teraz tablicę analityczną dla negacji rozważanej formuły:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \neg(\exists x\forall y(Sx \rightarrow \neg Sy)) & {}^{1.\star a\ 3.\star b\ 7.\star c} \\
 & | & \\
(1) & \neg\forall y\ (Sa \rightarrow \neg Sy) & {}^{2.\checkmark b} \\
 & | & \\
(2) & \neg(Sa \rightarrow \neg Sb) & {}^{4.\neg\rightarrow} \\
 & | & \\
(3) & \neg\forall y\ \ (Sb \rightarrow \neg Sy) & {}^{6.\checkmark c} \\
 & | & \\
(4_g) & Sa & \\
 & | & \\
(4_d) & \neg\neg Sb & {}^{5.\neg\neg} \\
 & | & \\
(5) & Sb & \\
 & | & \\
(6) & \neg(Sb \rightarrow \neg Sc) & {}^{8.\neg\rightarrow} \\
 & | & \\
(7) & \neg\forall y\ (Sc \rightarrow \neg Sy) & \\
 & | & \\
(8_g) & Sb & \\
 & | & \\
(8_d) & \neg\neg Sc & {}^{9.\neg\neg} \\
 & | & \\
(9) & Sc & \\
 & | & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Na początku, nie mamy tu do dyspozycji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy bezpośrednio zastosować regułę $R(\exists)$ ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej, do której moglibyśmy zastosować regułę $R(\neg\forall)$. W takich przypadkach wprowadzamy nową stałą indywiduową korzystając z dowolnego zdania generalnie skwantyfikowanego lub negacji zdania egzystencjalnie skwantyfikowanego, tzn. rozwijamy takie zdanie ze względu na ***dowolną*** stałą indywiduową z języka KRP.[5] Tu mamy do czynienia z drugim z takich przypadków. Wprowadzenie nowej stałej daje w wyniku negację zdania generalnie skwantyfikowanego, to pozwala wprowadzić kolejną nową stałą; zastosowanie wobec tej drugiej stałej reguły $R(\neg\exists)$ generuje następne zdanie egzystencjalne, itd.

W rezultacie otrzymujemy gałąź nieskończoną. Jak zobaczymy później, oznacza to, że formuła $\exists x\forall y(Sx \rightarrow \neg Sy)$ nie jest tautologią KRP. A więc — w szczególności — istnienie kogoś, kto żywiłby się wyłącznie ***Schadenfreude*** nie jest logicznie konieczne. Jako ćwiczenie proponujemy Czytelniczkom znalezienie kilku innych jeszcze, w miarę możności wesołych, acz przyzwoitych (lub choćby mieszczących się w granicach prawa) interpretacji dla predykatu S i odczytanie co „mówi" o tych interpretacjach badana formuła.

W rozpatrywanych w dalszym ciągu przykładach (w punktach 18.5.5., 18.7.1., 18.7.2. oraz 19.) będziemy, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, stosować jeszcze pewne dalsze, przyjazne dla Czytelniczek, uproszczenia.

18.4. Niektóre własności

TWIERDZENIE 18.4.1.

Każda systematyczna tablica analityczna jest zakończona.

DOWÓD.

Niech $D(\alpha) = \bigsqcup D^n(\alpha)$ będzie tablicą systematyczną pewnej formuły α. Przypuśćmy, że (v, β) jest niezredukowanym wystąpieniem β na jakiejś otwartej gałęzi P w $D(\alpha)$ oraz że (v, β) jest wystąpieniem β w $D^k(\alpha)$. Istnieje tylko skończenie wiele wierzchołków w $|D^k(\alpha)|$, które poprzedzają (w kanonicznym porządku poprzecznym) wierzchołek v, niech będzie ich m. Z definicji tablicy systematycznej, wystąpienie (v, β) zostanie zredukowane w tablicy $D^{k+m+1}(\alpha)$. Tak więc, każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej w $D(\alpha)$ jest zredukowane.

Takie samo rozumowanie pokazuje, że każde wystąpienie każdej formuły na każdej gałęzi otwartej w $D(S, \alpha)$ jest zredukowane, gdzie $D(S, \alpha)$ jest systematyczną tablicą analityczną ze zbioru założeń S dla formuły α.

[5]Logicy uprawiają ***semantykę z zabezpieczeniem***, mówiąc po aptekarsku. Zakłada się, że w języku mamy do dyspozycji stałe indywiduowe, a więc zawsze można ich użyć, gdy jest taka potrzeba. Tu mamy do czynienia z taką właśnie sytuacją. Dodajmy jeszcze, że możliwość *konstruowania* odniesienia przedmiotowego (interpretacji) języka KRP z wyrażeń tego języka jest jedną z podstawowych technik pokazywania ***pełności*** KRP, a także ***pełności*** metody tablic analitycznych. Wykorzystywane są przy tym uniwersa Herbranda, o których piszemy niżej, i które umożliwiają zbudowanie interpretacji języka KRP z wyrażeń tego języka, bez odwoływania się do jakiejkolwiek innej, zgrzebnej, siermiężnej, itp. rzeczywistości.

TWIERDZENIE 18.4.2.

Jeśli każda gałąź systematycznej tablicy analitycznej D jest sprzeczna, to D jest tablicą skończoną.

DOWÓD.

Zauważmy, że w konstrukcji tablicy systematycznej nie przedłużamy żadnej gałęzi sprzecznej. Teza twierdzenia wynika zatem z Lematu Königa.

18.5. Poprawność metody TA w KRP

Pokażemy, że metoda TA jest trafna i pełna. Przedtem potrzebne będzie wprowadzenie kilku pojęć używanych w dowodach twierdzeń o trafności i pełności.

18.5.1. Uniwersa Herbranda

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez ***uniwersum Herbranda*** dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

- (i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.
Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.
Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S.
Interpretacją Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

- $\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;
- $\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S.
Zauważmy, że uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP. Tak więc, zawsze mamy możliwość budowania interpretacji, o ile tylko dany jest język. Wystarczy budować struktury relacyjne z samych wyrażeń językowych.

18.5.2. Zbiory Hintikki

Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury). Mówimy, że S jest ***zbiorem Hintikki***, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

- (i) jeśli α jest formułą atomową bez zmiennych wolnych, to α nie należy do S lub $\neg(\alpha)$ nie należy do S
- (ii) jeśli $(\alpha) \wedge (\beta)$ należy do S, to α należy do S oraz β należy do S
- (iii) jeśli $(\alpha) \vee (\beta)$ należy do S, to α należy do S lub β należy do S
- (iv) jeśli $\forall x_n\ (\alpha)$ należy do S, to $\alpha(a_k/x_n)$ należy do S, dla każdej stałej indywiduowej a_k
- (v) jeśli $\exists x_n\ (\alpha)$ należy do S, to $\alpha(a_k/x_n)$ należy do S, dla co najmniej jednej stałej indywiduowej a_k.

W powyższych punktach (iv) oraz (v) wyrażenie $\alpha(a_k/x_n)$ jest wyrażeniem powstającym z formuły α poprzez zastąpienie w niej wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x_n stałą indywiduową a_k.

18.5.2.1. LEMAT HINTIKKI.

Każdy zbiór Hintikki ma model.

DOWÓD.

Dowód Lematu Hintikki w pełnej ogólności nie będzie nam potrzebny. Dla wykazania pełności metody tablic analitycznych wystarczy dowód punktów (a) oraz (b) w twierdzeniu 18.5.4.1. poniżej.

Ważną konsekwencją Lematu Hintikki dla metody tablic analitycznych jest to, że każda gałąź otwarta w każdej systematycznej tablicy analitycznej jest zbiorem Hintikki, a więc, na mocy powyższego lematu, jest także zbiorem spełnialnym (ma model).

18.5.3. Trafność metody TA w KRP

Pokażemy, że każda formuła, która ma dowód tablicowy, jest tautologią KRP. Wykorzystamy następujące twierdzenie pomocnicze.

TWIERDZENIE 18.5.3.1.

Niech S będzie zbiorem zdań, a α zdaniem języka rachunku predykatów L. Jeśli $D = \bigcup_n D_n$ jest tablicą analityczną ze zbioru założeń S o korzeniu $\neg\alpha$, to dla dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$ języka L, która jest modelem $S \cup \{\neg\alpha\}$ istnieje interpretacja $\mathfrak{M}'$ języka L^D taka, że dla pewnej gałęzi P w D zachodzi następujący warunek $W(P, \mathfrak{M}')$:

$W(P, \mathfrak{M}')$ Dla każdego zdania β:

- β występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \models \beta$
- $\neg\beta$ występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \not\models \beta$.

DOWÓD.

Naszym jedynym zadaniem będzie znalezienie interpretacji $c_i^{\mathfrak{M}}$ w $\mathfrak{M}$ nowych stałych c_i, wprowadzonych w trakcie konstrukcji tablicy D dla wszystkich zdań występujących na gałęzi P.

Gałąź P oraz ciąg $(c_i^{\mathfrak{M}})$ zdefiniujemy przez indukcję po n, czyli po etapach D_n budowy tablicy D.

W każdym kroku indukcyjnym otrzymamy gałąź P_n w tablicy D_n oraz strukturę $\mathfrak{M}_n$ o tym samym uniwersum, co $\mathfrak{M}$ takie, że:

- $W(P_n, \mathfrak{M}_n)$
- wszystkie nowe stałe c_i w D_n są zinterpretowane jako $c_i^{\mathfrak{M}_n}$.

Wtedy $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{M}, (c_i^{\mathfrak{M}_n})_{i,n})$ jest szukaną strukturą, a $P = \bigsqcup_n P_n$ szukaną gałęzią, dla których zachodzi teza twierdzenia. Przypominamy (wykład 16), że $(\mathfrak{A}, (a_i^{\mathfrak{A}})_i)$ jest strukturą, w której podano interpretacje wszystkich stałych a_i w uniwersum struktury $\mathfrak{A}$.

Przy tym, jeśli D_{n+1} jest utworzona z D_n przez rozszerzanie innej gałęzi niż P_n, to:

- $P_{n+1} = P_n$
- $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}_n$.

Krok początkowy indukcji dotyczy tablicy atomowej $D_0 = D_{\neg\alpha}$ oraz struktury $\mathfrak{M}$. Z założenia, $\mathfrak{M} \models \neg\alpha$. Zarówno w kroku początkowym, jak i w krokach następnikowych stosujemy następującą procedurę.

Przypuśćmy, że D_{n+1} otrzymujemy z D_n na jeden z następujących sposobów:

- (1) $D_{n+1} = D_n \sqcup_{P_n} \alpha_k$ dla pewnej formuły $\alpha_k \in S$
- (2) $D_{n+1} = D_n \sqcup_{P_n} D_\beta$ dla pewnego wystąpienia zdania β w P_n.

W przypadku (1), $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}_n$ oraz zachodzi $W(P_{n+1}, \mathfrak{M}_{n+1})$, ponieważ z założenia twierdzenia mamy: $\mathfrak{M}_{n+1} \models \alpha_k$.

W przypadku (2), należy rozważyć wszystkie możliwości, odpowiadające postaciom tablicy atomowej D_β. Przy tym, zachodzi warunek indukcji dla n, tj.:

- $W(P_n, \mathfrak{M}_n)$
- wszystkie nowe stałe c_i w D_n są zinterpretowane jako $c_i^{\mathfrak{M}_n}$.

W tych przypadkach, gdy β jest postaci: $\neg\gamma$, $\gamma \wedge \delta$, $\gamma \vee \delta$, $\gamma \rightarrow \delta$ lub $\gamma \equiv \delta$ rozszerzamy P_n do P_{n+1} tak samo, jak w przypadku tablic analitycznych dla KRZ. Wtedy oczywiście $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}_n$ oraz zachodzi $W(P_{n+1}, \mathfrak{M}_{n+1})$.

Pozostają do rozważenia cztery przypadki:

- (a) β jest postaci $\forall x\ \gamma(x)$. Wtedy D_β jest postaci:

$$\begin{array}{c} \forall x\ \gamma(x) \\ | \\ \gamma(t/x) \end{array}$$

- (b) β jest postaci $\neg\exists x\ \gamma(x)$. Wtedy D_β jest postaci:

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\ \gamma(x) \\ | \\ \neg\gamma(t/x) \end{array}$$

- (c) β jest postaci $\exists x\ \gamma(x)$. Wtedy D_β jest postaci:

$$\begin{array}{c} \exists x\ \gamma(x) \\ | \\ \gamma(c/x) \end{array}$$

- (d) β jest postaci $\neg\forall x\ \gamma(x)$. Wtedy D_β jest postaci:

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\ \gamma(x) \\ | \\ \neg\gamma(c/x) \end{array}$$

W każdym z tych przypadków mamy: $P_{n+1} = P_n \sqcup D_\beta$. W przypadkach (a) oraz (b) t jest dowolnym termem bazowym.

W przypadku (a) mamy, na mocy założenia indukcyjnego: $\mathfrak{M}_n \models \forall x\ \gamma(x)$, a stąd, na mocy definicji relacji $\models$, mamy: $\mathfrak{M}_n \models \gamma(t/x)$ dla dowolnego termu bazowego t.

W przypadku (b) mamy, na mocy założenia indukcyjnego: $\mathfrak{M}_n \models \neg\exists x\ \gamma(x)$, a stąd, na mocy definicji relacji $\models$, mamy: $\mathfrak{M}_n \models \neg\gamma(t/x)$ dla dowolnego termu bazowego t.

W przypadkach (c) oraz (d), c jest ***nową*** stałą, tj. taką, która nie występuje ani w zdaniach z S, ani w wystąpieniach żadnego zdania w P_n. Trzeba zdefiniować interpretację stałej c w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$.

W przypadku (c), z założenia indukcyjnego mamy: $\mathfrak{M}_n \models \exists x\, \gamma(x)$. Z definicji relacji $\models$, istnieje m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}_n$ (tj. w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, ponieważ wszystkie struktury $\mathfrak{M}_j$ mają to samo uniwersum, co struktura $\mathfrak{M}$) taki, że $(\mathfrak{M}_n, m) \models \gamma(c/x)$. Ustalamy zatem, że $c^{\mathfrak{M}_{n+1}} = m$. Wtedy oczywiście $\mathfrak{M}_{n+1} \models \gamma(c)$, gdzie $\mathfrak{M}_{n+1} = (\mathfrak{M}_n, c^{\mathfrak{M}_{n+1}})$.

W przypadku (d), z założenia indukcyjnego mamy: $\mathfrak{M}_n \models \neg\forall x\, \gamma(x)$. Z definicji relacji $\models$, istnieje m w uniwersum struktury $\mathfrak{M}_n$ (tj. w uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, ponieważ wszystkie struktury $\mathfrak{M}_j$ mają to samo uniwersum, co struktura $\mathfrak{M}$) taki, że $(\mathfrak{M}_n, m) \models \neg\gamma(c/x)$. Ustalamy zatem, że $c^{\mathfrak{M}_{n+1}} = m$. Wtedy oczywiście $\mathfrak{M}_{n+1} \models \neg\gamma(c)$, gdzie $\mathfrak{M}_{n+1} = (\mathfrak{M}_n, c^{\mathfrak{M}_{n+1}})$.

Gałąź P definiujemy warunkiem: $P = \bigsqcup\limits_n P_n$, natomiast za strukturę $\mathfrak{M}'$ bierzemy:

$$(\mathfrak{M}, (c^{\mathfrak{M}_n})_n).$$

Tym samym dowód twierdzenia został zakończony. Jego bezpośrednią konsekwencją jest:

TWIERDZENIE 18.5.3.2. ***Trafność metody tablic analitycznych w KRP.***

Jeśli istnieje istnieje dowód tablicowy D z założeń S dla α, to $S \models \alpha$.

DOWÓD.

Niech D będzie dowodem tablicowym α z założeń S. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models S$ oraz $\mathfrak{M} \models \neg\alpha$. Na mocy twierdzenia 18.5.3.1. istnieje wtedy gałąź P oraz struktura $\mathfrak{M}'$ takie, że:

$W(P, \mathfrak{M}')$ Dla każdego zdania β:

- β występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \models \beta$
- $\neg\beta$ występuje w P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M}' \not\models \beta$.

Jednak z założenia, P jest gałęzią sprzeczną, czyli zawiera parę zdań postaci β, $\neg\beta$. Ponieważ, na mocy definicji relacji $\models$, żadna struktura nie spełnia pary zdań wzajem sprzecznych, otrzymujemy stąd sprzeczność.

Ostatecznie, jeśli formuła α ma dowód tablicowy z założeń S, to $S \models \alpha$.

18.5.4. Pełność metody TA w KRP

Pokażemy, że każda tautologia KRP ma dowód tablicowy. Pokażemy nawet (w pewnym sensie) nieco więcej: udowodnimy, że dla dowolnego zbioru założeń S oraz dowolnej formuły α albo możemy wykazać, że $S \models \alpha$, albo wskazać model dla S oraz $\neg\alpha$. Wykorzystamy uniwersa Herbranda oraz Lemat Hintikki, a także pewien szczególny sposób dowodzenia przez indukcję po złożoności formuł. Najpierw twierdzenie pomocnicze.

TWIERDZENIE 18.5.4.1.

Niech P będzie gałęzią otwartą w systematycznej tablicy analitycznej D z założeń S i o korzeniu $\neg\alpha$. Wtedy istnieje interpretacja $\mathfrak{M}^P$, w której wszystkie elementy S są prawdziwe, a α jest fałszywa.

DOWÓD.

Dziedziną tworzonej interpretacji $\mathfrak{M}^P$ jest uniwersum Herbranda utworzone ze wszystkich termów bazowych języka L^D. Przypominamy, że jeśli $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}$ są termami bazowymi, a f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, to (zgodnie z definicją uniwersum Herbranda):

$$f^{\mathfrak{M}^P}(t_{i_1}^{\mathfrak{M}^P}, \ldots, t_{i_n}^{\mathfrak{M}^P}) = f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}).$$

Term po prawej stronie tego równania traktowany jest oczywiście jako wartość odnośnej funkcji z lewej strony równania.

Dla dowolnego predykatu n-argumentowego R definiujemy relację $R^{\mathfrak{M}^P}$:

$R^{\mathfrak{M}^P}(t_{i_1}^{\mathfrak{M}^P}, \ldots, t_{i_n}^{\mathfrak{M}^P})$ wtedy i tylko wtedy, gdy w P istnieje wystąpienie zdania atomowego $R(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$.

Aby móc stwierdzić, że $\mathfrak{M}^P$ jest strukturą, o której mówi teza twierdzenia, należy jeszcze udowodnić, że dla dowolnego zdania β:

- (a) jeśli istnieje wystąpienie β w P, to $\mathfrak{M}^P \models \beta$;
- (b) jeśli istnieje wystąpienie $\neg\beta$ w P, to $\mathfrak{M}^P \models \neg\beta$.

Po pierwsze, zauważmy, że jeśli D jest systematyczną tablicą analityczną, to dla dowolnej formuły β, każde wystąpienie β (oraz każde wystąpienie $\neg\beta$) w P jest zredukowane: jest to konsekwencja twierdzenia 18.4.1.

Dowód punktów (a) oraz (b) przeprowadzimy przez indukcję po złożoności β. W istocie, jest to dowód pewnej szczególnej wersji Lematu Hintikki. Złożoność, o której mowa, to złożoność ***drzew syntaktycznych*** formuł. Indukcję będziemy prowadzić po ***głębokości formuł*** (zob. punkt 18.1.2.x.) powyżej.

(1) Jeśli β jest zdaniem atomowym, to jest postaci $R(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$.
Jeżeli β występuje w P, to zachodzi:

$$R^{\mathfrak{M}^P}(t_{i_1}^{\mathfrak{M}^P}, \ldots, t_{i_n}^{\mathfrak{M}^P}),$$

czyli $\mathfrak{M}^P \models \beta$.
Jeżeli $\neg\beta$ występuje w P, to, ponieważ P jest gałęzią otwartą (nie jest gałęzią sprzeczną), β nie występuje w P. Wtedy, zgodnie z definicją, nie zachodzi:

$$R^{\mathfrak{M}^P}(t_{i_1}^{\mathfrak{M}^P}, \ldots, t_{i_n}^{\mathfrak{M}^P}),$$

a więc $\mathfrak{M}^P \models \neg\beta$.

(2) Niech β będzie postaci $\gamma \wedge \delta$.
Jeżeli $\gamma \wedge \delta$ występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, γ oraz δ występują w P. Z założenia indukcyjnego, $\mathfrak{M}^P \models \gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma \wedge \delta$.
Jeżeli $\neg(\gamma \wedge \delta)$ (czyli $\neg\beta$) występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, albo $\neg\gamma$, albo $\neg\delta$ występuje w P. Jeśli $\neg\gamma$ występuje w P, to $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$, na mocy założenia indukcyjnego (podobnie dla $\neg\delta$). Tak więc, albo $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$, albo $\mathfrak{M}^P \models \neg\delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \neg(\gamma \wedge \neg\delta)$.

(3) Niech β będzie postaci $\gamma \vee \delta$.
Jeżeli $\gamma \vee \beta$ występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, więc albo γ albo δ występuje w P. Jeśli γ występuje w P, to $\mathfrak{M}^P \models \gamma$, na mocy założenia indukcyjnego (podobnie dla δ). Tak więc, albo $\mathfrak{M}^P \models \gamma$, albo $\mathfrak{M}^P \models \delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma \vee \delta$.
Z kolei, jeżeli $\neg(\gamma \vee \delta)$ (czyli $\neg\beta$) występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, zarówno $\neg\gamma$, jak i $\neg\delta$ występują w P. Z założenia indukcyjnego mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy: $\mathfrak{M}^P \models \neg(\gamma \vee \delta)$.

(4) Niech β będzie postaci $\gamma \rightarrow \delta$.
Jeżeli $\gamma \rightarrow \delta$ występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, albo $\neg\gamma$, albo δ występuje w P. Jeśli $\neg\gamma$ występuje w P, to $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$, na mocy założenia indukcyjnego (podobnie dla δ). Tak więc, albo $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$, albo $\mathfrak{M}^P \models \delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma \rightarrow \delta$.
Z kolei, jeżeli $\neg(\gamma \rightarrow \delta)$ (czyli $\neg\beta$) występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, zarówno γ, jak i $\neg\delta$ występują w P. Z założenia indukcyjnego mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy: $\mathfrak{M}^P \models \neg(\gamma \rightarrow \delta)$.

(5) Niech β będzie postaci $\gamma \equiv \delta$.
Jeżeli $\gamma \equiv \delta$ występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, albo γ oraz δ występują w P, albo $\neg\gamma$ oraz $\neg\delta$ występują w P. Z założenia indukcyjnego, albo $\mathfrak{M}^P \models \gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \delta$, albo $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma \equiv \delta$.
Jeżeli $\neg(\gamma \equiv \delta)$ występuje w P, to, ponieważ D jest tablicą zakończoną, albo γ oraz $\neg\delta$ występują w P, albo $\neg\gamma$ oraz δ występują w P. Z założenia indukcyjnego, albo $\mathfrak{M}^P \models \gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\delta$, albo $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \delta$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \neg(\gamma \equiv \delta)$.

(6) Niech β będzie postaci $\neg\gamma$.

Jeżeli $\neg\gamma$ występuje w P, to, z założenia indukcyjnego, nie zachodzi $\mathfrak{M}^P \models \gamma$. Z definicji relacji $\models$, zachodzi wtedy $\mathfrak{M}^P \models \gamma$.

Jeżeli $\neg\neg\gamma$ występuje w P, to, z założenia indukcyjnego, nie zachodzi $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma$. Z definicji relacji $\models$, zachodzi wtedy $\mathfrak{M}^P \models \neg\neg\gamma$.

(7) Niech β będzie postaci $\forall x\ \gamma(x)$.

Jeśli $(i, \forall x\ \gamma(x))$ jest i-tym wystąpieniem $\forall x\ \gamma(x)$ w P, to (ponieważ D jest tablicą zakończoną) $\gamma(t_i)$ występuje w P oraz istnieje $i+1$-te wystąpienie $(i+1, \forall x\ \gamma(x))$ zdania $\forall x\ \gamma(x)$ w P. Tak więc, jeżeli $\forall x\ \gamma(x)$ występuje w P, to $\gamma(t)$ występuje w P, dla każdego termu bazowego t. Ponieważ głębokość formuły $\gamma(t)$ jest mniejsza od głębokości formuły $\forall x\ \gamma(x)$, więc, na mocy założenia indukcyjnego, mamy: $\mathfrak{M}^P \models \gamma(t)$ dla każdego termu bazowego t. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \forall x\ \gamma(x)$.

Jeżeli $\neg\forall x\ \gamma(x)$ występuje w P, to (ponieważ D jest tablicą zakończoną) $\neg\gamma(t)$ występuje w P, dla pewnego termu bazowego t. Z założenia indukcyjnego, $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma(t)$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \neg\forall x\ \gamma(x)$.

(8) Niech β będzie postaci $\exists x\ \gamma(x)$.

Jeżeli $\exists x\ \gamma(x)$ występuje w P, to (ponieważ D jest tablicą zakończoną) $\gamma(t)$ występuje w P, dla pewnego termu bazowego t. Z założenia indukcyjnego, $\mathfrak{M}^P \models \gamma(t)$. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \exists x\ \gamma(x)$.

Jeśli $(i, \neg\exists x\ \gamma(x))$ jest i-tym wystąpieniem $\neg\exists x\ \gamma(x)$ w P, to (ponieważ D jest tablicą zakończoną) $\neg\gamma(t_i)$ występuje w P oraz istnieje $i+1$-te wystąpienie $(i+1, \neg\exists x\ \gamma(x))$ zdania $\neg\exists x\ \gamma(x)$ w P. Tak więc, jeżeli $\neg\exists x\ \gamma(x)$ występuje w P, to $\neg\gamma(t)$ występuje w P, dla każdego termu bazowego t. Ponieważ głębokość formuły $\neg\gamma(t)$ jest mniejsza od głębokości formuły $\neg\exists x\ \gamma(x)$, więc, na mocy założenia indukcyjnego, mamy: $\mathfrak{M}^P \models \neg\gamma(t)$ dla każdego termu bazowego t. Z definicji relacji $\models$ mamy wtedy: $\mathfrak{M}^P \models \neg\exists x\ \gamma(x)$.

Pokazaliśmy więc, że (a) oraz (b) zachodzą dla dowolnego zdania β. Tym samym dowód twierdzenia został zakończony.

UWAGA. W punktach (7) i (8) powyższego dowodu w sposób istotny wykorzystuje się fakt, że w tablicach analitycznych w KRP operacja przedłużania gałęzi polega na „doczepianiu” do niej ***całej*** tablicy atomowej (dla zdań generalnie skwantyfikowanych oraz negacji zdań egzystencjalnie skwantyfikowanych), tj. tablic atomowych ***łącznie*** z ich korzeniami. Bez tego założenia nie można udowodnić pełności metody tablic analitycznych w KRP.

Bezpośrednim wnioskiem z powyższego twierdzenia jest twierdzenie następujące.

TWIERDZENIE 18.5.4.2.

Dla dowolnego zdania α oraz zbioru zdań S zachodzi alternatywa:

- systematyczna tablica analityczna z założeń S o korzeniu $\neg\alpha$ jest dowodem tablicowym α z S;
- istnieje gałąź otwarta P w tablicy analitycznej z założeń S o korzeniu $\neg\alpha$ oraz struktura $\mathfrak{M}^P$ (zdefiniowana w twierdzeniu 18.5.4.1.) takie, że: $\mathfrak{M}^P \models S$ oraz $\mathfrak{M}^P \models \neg\alpha$.

TWIERDZENIE 18.5.4.3. ***Pełność metody tablic analitycznych w KRP.***

- (1) Każda tautologia KRP ma dowód tablicowy.
- (2) Dla dowolnych S oraz α: jeśli $S \models \alpha$, to istnieje dowód tablicowy α ze zbioru założeń S.
- (3) Dla dowolnego zbioru zdań S: S nie jest spełnialny (nie ma modelu) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest tablicowo sprzeczny (tj. istnieje dowód tablicowy zdania $\beta \wedge \neg\beta$ ze zbioru założeń S, dla pewnego zdania β).

DOWÓD.

Punkt (2) jest konsekwencją twierdzenia 18.5.4.2. Jeśli α nie ma dowodu tablicowego z S, to zachodzi drugi człon alternatywy z twierdzenia 18.5.4.2., czyli istnieje model dla $S \cup \{\neg\alpha\}$. Wtedy oczywiście nie zachodzi $S \models \alpha$.

Punkt (1) jest konsekwencją punktu (2): za S bierzemy zbiór pusty.

Wreszcie, dla dowodu punktu (3), zauważmy, że na mocy (2) oraz twierdzenia o trafności tablic analitycznych w KRP mamy: $S \vdash_{tab} \beta \wedge \neg\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \models \beta \wedge \neg\beta$.

Możemy zatem określić operację ***konsekwencji tablicowej*** C_{tab} w KRP:

DEFINICJA 18.5.4.1. ***Konsekwencja tablicowa w KRP.***

Dla dowolnego zbioru zdań S języka KRP niech:

$$C_{tab}(S) = \{\alpha : S \vdash_{tab} \alpha\}.$$

Z twierdzeń o trafności i pełności metody tablic analitycznych w KRP otrzymujemy:

$$\alpha \in C_{tab}(S) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S \models \alpha.$$

18.5.5. Zastosowania twierdzeń o trafności i pełności TA w KRP

Skoro metoda TA w KRP jest trafna i pełna, to można ją wykorzystywać m.in. dla odpowiedzi na następujące pytania:

- czy dane zdanie języka KRP jest tautologią (pamiętając przy tym, że jeśli α jest tautologią KRP, to uzyskamy odpowiedź, ale jeśli α tautologią KRP nie jest, to tablica analityczna zdania $\neg\alpha$ może być nieskończona, i wtedy metoda TA nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków);
- czy dany zbiór formuł języka KRP nie jest spełnialny;
- czy zdanie α wynika logicznie ze zbioru zdań S, itp.

Pamiętamy oczywiście, że metoda TA nie dostarcza ***algorytmu*** dla ustalania tautologiczności formuł języka KRP.
Podamy garstkę przykładów, ilustrujących te zastosowania. Więcej przykładów — w części 19., zawierającej ćwiczenia. Przykłady poniżej zostaną podzielone na trzy grupy.

18.5.5.1. Tautologie KRP

Przypominamy, że formuła α jest ***tautologią*** KRP, gdy jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach. Oznacza to, że formuła α ***nie jest*** tautologią, dokładnie wtedy, gdy w co najmniej jednej interpretacji prawdziwe jest zaprzeczenie formuły α, tj. formuła $\neg\alpha$. Zatem, formuła α jest tautologią KRP dokładnie wtedy, gdy w tablicy analitycznej formuły $\neg A\alpha$ wszystkie gałęzie są ***zamknięte***.

Sprawdzenie metodą tablic analitycznych, czy dana formuła α jest tautologią KRP polega więc na:

- przypuszczeniu, że $\neg\alpha$ jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- zbudowaniu tablicy analitycznej formuły $\neg\alpha$;
- sprawdzeniu, czy wszystkie gałęzie są zamknięte;
  - jeśli tak jest, to formuła α jest tautologią KRP;
  - jeśli tak nie jest, tzn. drzewo zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą (skończoną lub nieskończoną), to α nie jest tautologią KRP.

Sprawdzanie, czy dana formuła jest kontrtautologią KRP jest procedurą dualną do powyższej. Przypomnijmy, że formuła α jest ***kontrtautologią*** KRP wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywa we wszystkich interpretacjach. Tak więc, formuła α ***nie jest*** kontrtautologią dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Aby sprawdzić, czy formuła α jest kontrtautologią KRP procedurę tablic analitycznych stosujemy następująco:

- przypuszczamy, że α jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji;
- budujemy tablicę analityczną dla α;
- jeśli wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, to formuła α jest kontrtautologią KRP;
- jeśli tablica analityczna dla α zawiera gałęzie otwarte, to α nie jest kontrtautologią KRP, a z gałęzi otwartych odtworzyć możemy interpretacje, w których α jest prawdziwa.

PRZYKŁAD 18.5.5.1.1.: ABRAHAM LINCOLN

Formule języka KRP $\exists x \forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ zPz$ przy interpretacji $x_1 P x_2$ jako x_1 ***oszukuje*** x_2 odpowiada, jak się wydaje,[6] zdanie polskie:

Jeśli jest ktoś, kto oszukuje wszystkich, to ktoś sam siebie oszukuje.

Wypowiedziane ze stosowną emfazą (oraz, ewentualnie, odpowiednio dramatyczną gestykulacją) brzmi ono całkiem kaznodziejsko. Pokażemy, że formuła języka KRP, która odpowiada jego strukturze składniowej jest tautologią KRP. Sprawę jej wykorzystania jako oręża np. homiletycznego pozostawiamy ew. zainteresowanym.

Aby przekonać się, czy formuła $\exists x \forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ zPz$ jest tautologią KRP trzeba sprawdzić, czy jest ona prawdziwa we wszystkich interpretacjach. Oczywiście, *wszystkich* interpretacji żaden śmiertelnik sprawdzić nie może, nawet jeśli jest wysoko wykwalifikowanym pracownikiem Shin Beth lub Mossadu. Możemy jednak próbować ***wykluczyć, że formuła ta jest fałszywa*** we wszelkich interpretacjach. Gdy próba taka się powiedzie, to badana przez nas formuła ***jest tautologią*** — skoro nie jest fałszywa w żadnej interpretacji, to w każdej interpretacji jest prawdziwa. Dla pokazania, że dana formuła jest tautologią wystarczy więc dowieść, że wykluczone jest, aby jej negacja była prawdziwa. W przełożeniu na terminologię omawianej metody tablic analitycznych, pokazanie, iż dana formuła jest tautologią sprowadza się do wykazania, że tablica analityczna jej negacji jest sprzeczna, czyli ma wszystkie gałęzie zamknięte.

Tablica analityczna negacji rozważanej formuły ma postać następującą:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ zPz)\ ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \exists x \forall y\ xPy\ ^{2.\surd a} \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\exists z\ zPz\ ^{3.\star a} \\
| \\
(2)\ \ \forall y\ aPy\ ^{4.\star a} \\
| \\
(3)\ \ \neg aPa \\
| \\
(4)\ \ aPa \\
| \\
\times_{3,4}
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tej tablicy (w tym przypadku: jedyna gałąź) są zamknięte. Zanegowana formuła umieszczona w korzeniu ***nie jest zatem prawdziwa w żadnej interpretacji***. Stąd, formuła $\exists x \forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ zPz$ ***jest prawdziwa w każdej interpretacji***. Widać zatem, że formuła ta jest tautologią KRP.

Dydaktykę logiki w czasach Polskiej Rzeczpospolitej Ludowej wspomagały często działania Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej, nachalnie lub choćby odruchowo prowokujące do skojarzeń natury np. historycznej. Abraham Lincoln miał jakoby powiedzieć (nie po polsku, oczywiście): *Można oszukiwać wszystkich przez pewien czas, lub niektórych przez cały czas; ale nie można oszukiwać wszystkich przez cały czas.* Czytelniczki mogą spróbować zastanowić się, jaka formuła KRP najbliższa jest strukturze składniowej tej wypowiedzi (pomijając modalności).

PRZYKŁAD 18.5.5.1.2.: KRZEPKO I PRZAŚNIE

Niech $\alpha(x)$ będzie dowolną formułą języka KRP o zmiennej wolnej x. Do ważnych, bardzo często wykorzystywanych praw KRP należą *prawa De Morgana*:

[6] Przy znajdowaniu odpowiedników w języku naturalnym dla formuł języka KRP w których występują kwantyfikatory pojawiają się, rzecz jasna, problemy z anaforą!

$$\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x)$$
$$\neg\forall x\ \alpha(x) \equiv \exists x\ \neg\alpha(x)$$
$$\exists x\ \alpha(x) \equiv \neg\forall x\ \neg\alpha(x)$$
$$\forall x\ \alpha(x) \equiv \neg\exists x\ \neg\alpha(x)$$

Pokażemy, że pierwsza z tych formuł jest tautologią KRP. Pokazanie, że tautologiami są również pozostałe trzy formuły niech stanie się prostym, kształcącym nawyki logiczne treningiem dla Czytelniczek.

Aby wykazać, że

$$\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x)$$

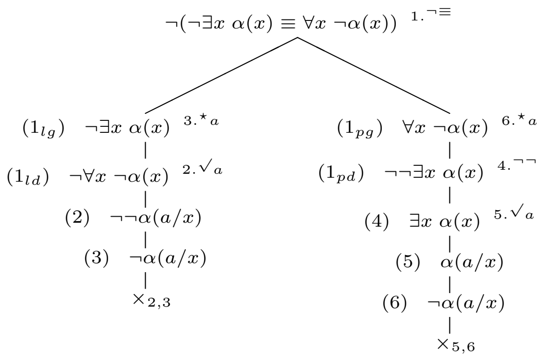
jest tautologią KRP należy wykluczyć możliwość, by formuła ta była fałszywa w jakiejś interpretacji. Trzeba zatem wykluczyć możliwość, aby jej zaprzeczenie, tj. formuła

$$\neg(\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x))$$

była w jakiejkolwiek interpretacji prawdziwa. A to sprowadza się do pokazania, że tablica analityczna formuły

$$\neg(\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x))$$

ma wszystkie gałęzie zamknięte. Przejdźmy od krzepkich słów do prząsnych czynów:



Przypominamy, że $A\alpha(a/x)$ oznacza formułę otrzymaną z formuły $\alpha(x)$ przez wstawienie stałej indywiduowej a w miejsce wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x.

Wszystkie gałęzie powyższej tablicy są zamknięte. Zatem formuła umieszczona w korzeniu nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji. Oznacza to, że formuła

$$\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x)$$

jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach, czyli jest tautologią KRP. Zauważmy, że lewa gałąź drzewa została zamknięta jeszcze przed zastosowaniem wszelkich możliwych reguł (konkretnie: nie było potrzeby stosowania reguły $R(\neg\neg)$ do formuły o numerze (2), aby zamknąć gałąź).

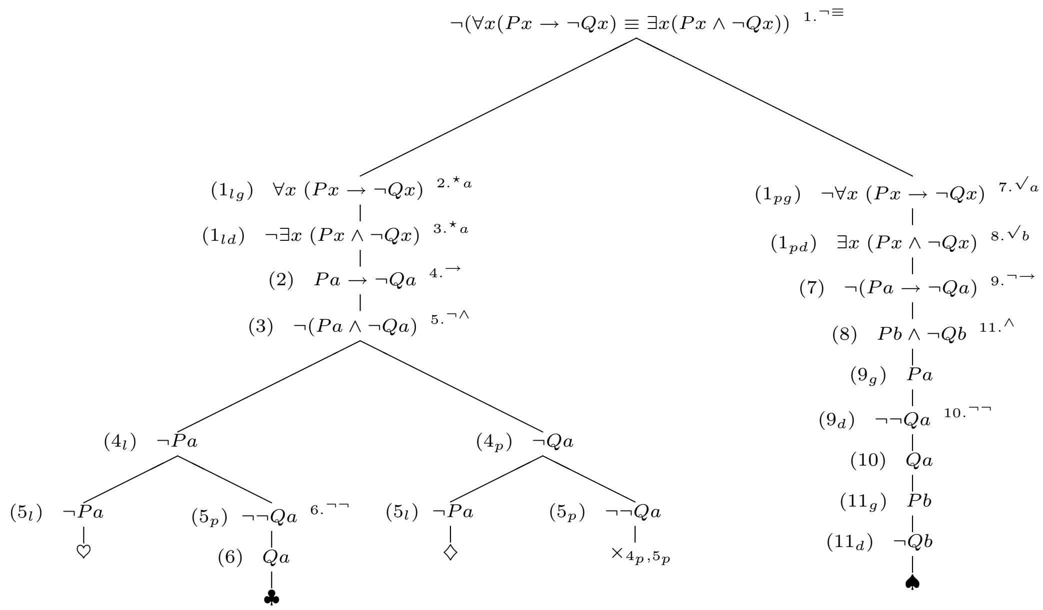
Z ustaleń tego przykładu korzystamy bardzo często w dalszym wykładzie.

PRZYKŁAD 18.5.5.1.3.: BOGACTWO DUCHOWE A ZBAWIENIE WIECZNE

Rozpatrzmy formułę, dla której „na pierwszy rzut oka” widać, że nie jest ona tautologią KRP:

$$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx) \equiv \exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

Oczywiście, logika nie polega na „rzucaniu okiem”; pokażemy przekonująco i dobitnie, że formuła powyższa tautologią nie jest. Upublicznimy mianowicie fakt, że tablica analityczna zaprzeczenia powyższej formuły ma gałęzie otwarte, co oznacza, że jest ono (owo zaprzeczenie) prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. A skoro zaprzeczenie jakiejś formuły jest prawdziwe w jakiejś interpretacji, to sama ta formuła w tejże interpretacji jest fałszywa, a zatem nie jest tautologią KRP. Oto obiecana tablica:



Rozpoczynając budowę lewej części drzewa nie mieliśmy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej (ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej). W formule z korzenia drzewa nie występuje też żadna stała indywiduowa. Jak pamiętamy, możemy w takim przypadku rozwinąć dowolną obecną na rozważanej gałęzi formułę generalnie skwantyfikowaną (lub negację formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) ze względu na dowolną stałą indywiduową. Przypominamy, że zakłada się, iż w języku KRP mamy zawsze do dyspozycji stałe indywiduowe. Z tej właśnie możliwości skorzystaliśmy w kroku $^{2.\star a}$.

Otrzymana tablica ma jedną gałąź zamkniętą i trzy gałęzie otwarte. Do żadnej z formuł, na żadnej z otwartych gałęzi tej tablicy, nie można już zastosować żadnej z reguł.[7] Ponieważ tablica ma gałęzie otwarte, a więc formuła w korzeniu jest prawdziwa w jakichś interpretacjach. Stąd, rozważana na początku równoważność (której negacja jest w korzeniu) jest w tychże interpretacjach fałszywa. Nie jest ona zatem tautologią KRP.

Poniższe tabelki podają interpretacje wyznaczone przez gałęzie otwarte powyższego drzewa:

♡	P	Q
a	–	?

♣	P	Q
a	–	+

♢	P	Q
a	–	–

♠	P	Q
a	+	+
b	+	–

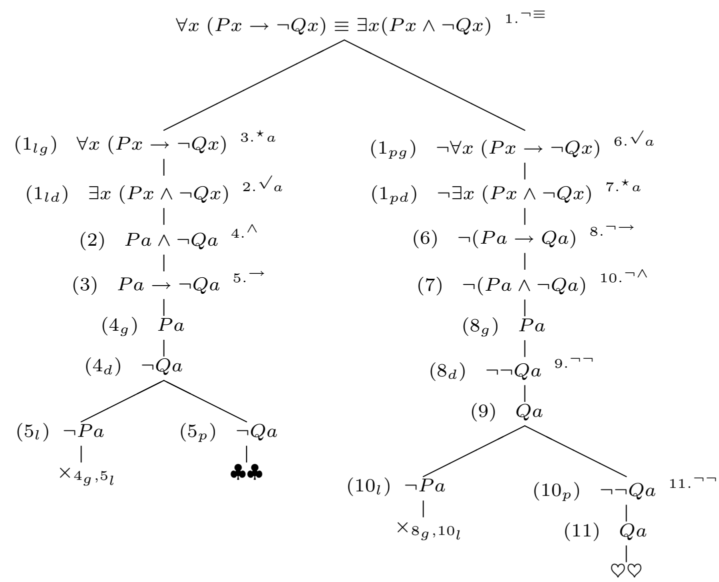
Odczytujemy informację z tych tabelek w sposób następujący. Wiersze (oprócz pierwszego) odpowiadają obiektom interpretacji. Kolumny (oprócz pierwszej) odpowiadają denotacjom rozważanych predykatów. Znak „+” na przecięciu wiersza odpowiadającego obiektowi oraz kolumny odpowiadającej denotacji predykatu jednoargumentowego (tj. własności) oznacza, że obiekt ten należy do tej denotacji (ma daną własność); znak „–”, że nie należy. Znak „?” wskazuje, że dana gałąź otwarta nie rozstrzyga, czy dany obiekt ma rozważaną własność — w miejsce „?” może wystąpić zarówno „+”, jak i „–” (a zatem tabelka ze znakiem „?” rozumiana jest jako skrótowy zapis dla dwóch

[7] Oczywiście, można dowolnie wiele razy wykonywać krok postaci $^{n.\star t_n}$, gdzie at_n jest dowolnym termem bazowym z języka KRP, na gałęziach otwartych zawierających formułę o numerze (1_{lg}), ale nie doprowadzi to do zamknięcia żadnej z tych gałęzi.

tabelek: jednej ze znakiem „+” zamiast „?”, i drugiej, ze znakiem „−” zamiast „?”. Nieco bardziej skomplikowane tabelki tego typu pojawią się w dalszych przykładach.

Zauważmy, że interpretacje wyznaczone przez tego typu tabelki związane są z uniwersami Herbranda, o których wspominano powyżej. Odniesienia przedmiotowe (interpretacje) języka KRP możemy budować z samych wyrażeń tego języka.

Badana równoważność ***nie jest*** tautologią. Pokażemy, że ***nie jest*** ona także kontrtautologią, tj. iż istnieją interpretacje, w których jest ona prawdziwa. Interpretacje takie wyznaczone są przez gałęzie otwarte tablicy analitycznej rozważanej równoważności:



Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tej tablicy, nie można już zastosować żadnej z reguł. Tablica ma dwie gałęzie otwarte, zatem w interpretacjach wyznaczonych przez te gałęzie formuła z korzenia jest prawdziwa; nie jest ona zatem kontrtautologią.

Z otwartych gałęzi tablicy wyznaczyć można dwie interpretacje, w których formuła z korzenia jest prawdziwa:

♣♣	P	Q
a	+	−

♡♡	P	Q
a	+	+

Czytelniczki zechcą zauważyć,[8] że z budowy powyższych dwóch tablic widoczne jest także to, iż:

- implikacja $\forall x\,(Px \rightarrow \neg Qx) \rightarrow \exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$ nie jest tautologią;
- implikacja $\exists x\,(Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \forall x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$ nie jest tautologią;
- implikacja $\forall x\,(Px \rightarrow \neg Qx) \rightarrow \exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$ nie jest kontrtautologią;
- implikacja $\exists x\,(Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \forall x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$ nie jest kontrtautologią.

Na koniec, coś dla Humanistek, a więc próby uroczystego odczytania „tłumaczeń” rozważanej formuły w języku polskim.

[8] Dla tych, które ***widzą Ciemność***: wskazówka w następnym przykładzie.

Nadajmy predykatom P oraz Q np. taką interpretację:

Px czytamy x ***jest ubogi duchem***;

Qx czytamy x ***będzie zbawiony***.

Wtedy rozpatrywana w tym przykładzie równoważność czytana może być, powiedzmy, tak oto:

> *Ktoś ubogi duchem nie będzie zbawiony dokładnie wtedy, gdy każdy, kto jest ubogi duchem nie będzie zbawiony.*

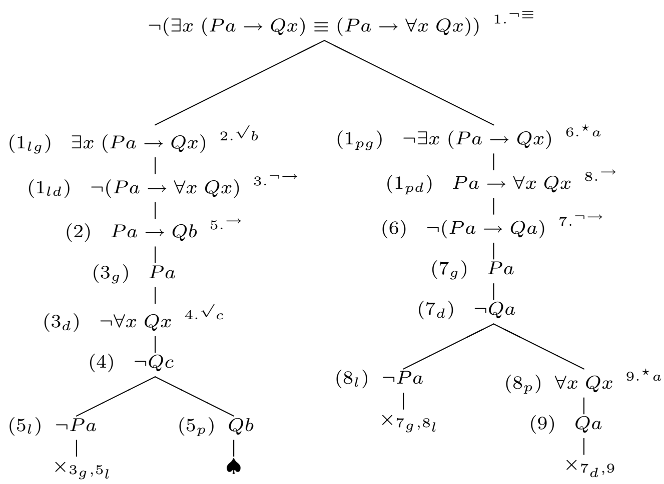
Sądzimy, że jaskrawa niedorzeczność tego odczytania umacnia duchowo Humanistki, łaknące ubogacenia bezdusznych (?) formułek.

PRZYKŁAD 18.5.5.1.4.: KIESZENIE PEŁNE SZCZĘŚCIA

Pokażemy, że nie jest tautologią KRP następująca formuła, w której występuje stała indywiduowa a:

$$\exists x\,(Pa \to Qx) \equiv (Pa \to \forall x\, Qx)$$

W tym celu zbudujemy tablicę analityczną negacji tej formuły. Okaże się, że ma ona gałęzie otwarte. Skoro tak, to owa zanegowana formuła jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji, a to oznacza, że sama formuła powyższa nie jest tautologią (bo gdy jej zaprzeczenie jest prawdziwe w jakiejś interpretacji, to ona sama jest w tejże interpretacji fałszywa; nie jest więc prawdziwa **we wszystkich** interpretacjach, *ergo* nie jest tautologią KRP). Oto tablica:



Tablica ma jedną gałąź otwartą i do żadnej z formuł na tej gałęzi nie można już zastosować żadnej z reguł. Negacja równoważności umieszczona w korzeniu jest prawdziwa w interpretacji wyznaczonej przez tę gałąź. W konsekwencji, badana równoważność nie jest tautologią KRP (skoro jej zaprzeczenie jest prawdziwe w jakiejś interpretacji).

W powyższej tablicy stała indywiduowa a występowała w formule z korzenia. W konsekwencji, reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ względem tej stałej obowiązywały na ***wszystkich*** gałęziach. W tym konkretnym przypadku, reguły te były jednak stosowane tylko w formułach o numerach (1_{pg}) oraz (8_p).

Zauważmy ponadto, że prawa część tablicy (tj. poddrzewo o korzeniu (1_{pg})) ma wszystkie gałęzie zamknięte. Oznacza to że implikacja

$$(Pa \to \forall x\, Qx) \to \exists x\,(Pa \to Qx)$$

jest tautologią KRP. To implikacja do niej odwrotna, a mianowicie

$$\exists x\,(Pa \to Qx) \to (Pa \to \forall x\, Qx)$$

nie jest tautologią KRP, na co wskazuje gałąź otwarta oznaczona liściem ♠. W konsekwencji, badana równoważność, będąca — jak wiemy z KRZ — równoważna semantycznie implikacji prostej i odwrotnej, nie jest tautologią KRP.

Interpretacja wyznaczona przez gałąź otwartą tablicy przedstawiona jest w poniższej tabelce:

♠	P	Q
a	+	?
b	?	+
c	?	−

Pozwólmy sobie na podanie banalnego przykładu interpretacji stałych indywiduowych a, b oraz c i predykatów P oraz Q; niech np.:

Px będzie interpretowane jako x ***jest obrzydliwie bogaty***;

Qx będzie interpretowane jako x ***jest głęboko szczęśliwy***;

a, b i c denotują, odpowiednio, ***Pana Prezesa***, ***Pana Prezydenta*** oraz ***Pana Premiera***.

Zgodnie z ustaleniami zawartymi w tabelce, Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, Pan Prezydent jest głęboko szczęśliwy, natomiast Pan Premier głęboko szczęśliwy nie jest. Można spróbować odczytać przy tej interpretacji obie wspomniane implikacje:[9]

$$\exists x\ (Pa \rightarrow Qx) \rightarrow (Pa \rightarrow \forall x\ Qx)$$

Jeśli co najmniej jedna obywatelka jest głęboko szczęśliwa, o ile Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, to jeśli Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty, to wszyscy są głęboko szczęśliwi.

$$(Pa \rightarrow \forall x\ Qx) \rightarrow \exists x\ (Pa \rightarrow Qx)$$

Jeśli obrzydliwe bogactwo Pana Prezesa implikuje, że wszyscy są głęboko szczęśliwi, to co najmniej jedna obywatelka jest głęboko szczęśliwa, o ile Pan Prezes jest obrzydliwie bogaty.

Nie mają te odczytania żadnego głębszego sensu, ale zawsze przyjemnie posłuchać, że — gdzieś tam daleko, przy spełnieniu się różnych bajecznych okoliczności — wszyscy są głęboko szczęśliwi. Proszę zauważyć, że w odczytaniach tych nie mówimy jawnie o szczęściu Pana Prezesa, a o stanie majątkowym Pana Prezydenta i Pana Premiera to już całkiem milczymy, jak zaklęci.

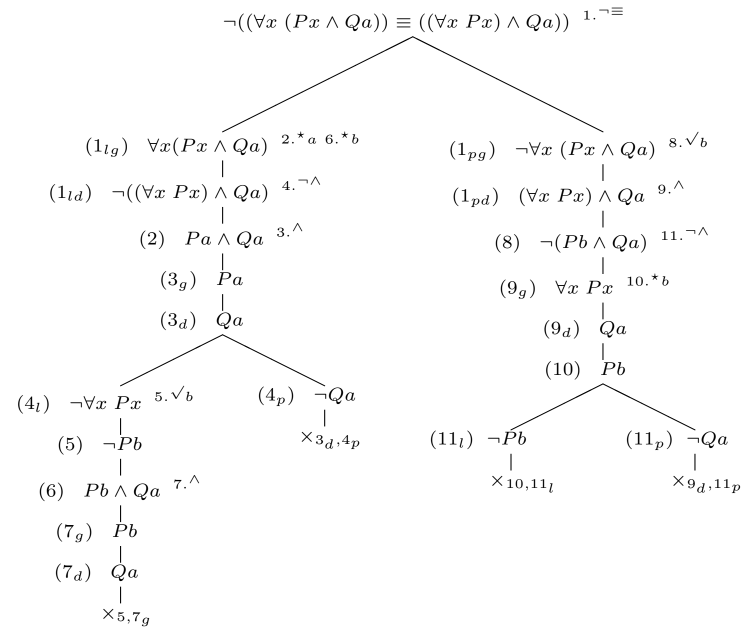
PRZYKŁAD 18.5.5.1.5.: NIETAKTY GRAMATYCZNE

Pokażemy, że równoważność:

$$(\forall x(Px \wedge Qa)) \equiv ((\forall x\ Px) \wedge Qa)$$

jest tautologią KRP. W formule tej występuje stała indywiduowa a. Budujemy tablicę analityczną negacji tej równoważności:

[9] Mam zwyczaj, aby słowa *obywatel* oraz *obywatelka* traktować jako odpowiadające predykatom uniwersalnym.



Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Nie istnieje więc interpretacja, w której zanegowana równoważność z korzenia tego drzewa byłaby prawdziwa. Stąd, równoważność

$$(\forall x\ (Px \wedge Qa)) \equiv ((\forall x\ Px) \wedge Qa)$$

jest prawdziwa w każdej interpretacji, a więc jest tautologią KRP.

Z praw KRZ i z powyższego ustalenia widzimy natychmiast, że także obie implikacje:

$$(\forall x\ (Px \wedge Qa)) \rightarrow ((\forall x\ Px) \wedge Qa)$$

$$((\forall x\ Px) \wedge Qa) \rightarrow (\forall x\ (Px \wedge Qa))$$

są tautologiami.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że ponieważ w formule z korzenia wystąpiła stała indywiduowa a, więc należało oczywiście zastosować względem niej regułę $R(\forall)$, na ***wszystkich*** gałęziach. Jednak stosowanie $R(\forall)$ względem a w formule o numerze (9_g) byłoby zbędne, bo i bez wykonania tego kroku otrzymalibyśmy wszystkie gałęzie zamknięte. W krokach $^{5.\sqrt{}b}$ oraz $^{8.\sqrt{}b}$ wprowadzaliśmy ***dwie nowe*** stałe indywiduowe; to, że można się było posłużyć tym samym symbolem b uzasadnione jest tym, że stałe te wprowadzane były na ***różnych*** gałęziach.

Ze względu na budowę syntaktyczną rozpatrywanej formuły podawanie jakichś prób jej przekładu na język naturalny byłoby nietaktem zarówno wobec niej samej, jak i wobec Czytelniczek.

Nie. Jednak nie. Nadąsane usteczka i pokrzywdzone, świdrujące spojrzenia spod zmarszczonych brewek Humanistek.[10] To nie do wytrzymania, *it really hurts...* Zinterpretujmy więc jakkolwiek predykaty P i Q oraz stałą indywiduową a, niech np.:

Px będzie interpretowane jako x ***jest ubożuchną rencistką, nigdy nie zapominającą o dołożeniu się do tacy w niedzielę***;

[10] Tak to wygląda z mojego punktu widzenia, gdy miotam się przed tablicą. Nie obrażacie się, prawda? Zapewniam, że moje uwagi motywowane są empatią dydaktyczną; w żadnym wypadku nie jest moim zamiarem okazywanie lekceważenia mojemu ulubionemu audytorium, tj. Humanistkom. Proszę pamiętać, że nauczanie Humanistek logiki matematycznej to naprawdę trudna praca. Zamieszczone w tekście niniejszych notatek (w zamierzeniu) żartobliwe elukubracje proszę odbierać z humorem i wyrozumiałością dla autora. Nie ma on zresztą jakichkolwiek podstaw do okazywania komukolwiek najmniejszych choćby przejawów rzekomej wyższości intelektualnej. W tej Przygodzie Edukacyjnej, w której bierzemy udział, wszyscy jesteśmy Humanistkami.

Qx będzie interpretowane jako x ***jest w wielkich opałach finansowych***;

a denotuje ***Watykan***.

Pozostawiamy odczytanie badanej równoważności przy tej interpretacji zainteresowanym Humanistkom. Sami tego nie zrobimy, ze względu na wstyd gramatyczny.[11]

PRZYKŁAD 18.5.5.1.6.: KRUSZYNA MISTYKI[12]

Dzień bez odrobiny mistycyzmu to dla Humanistki dzień szary, nijaki, nie warty przeżycia. Zobligowani czujemy się więc — aby dydaktyka logiki odbierana była przez Humanistki jako *nie-bez-duszna* — do ubogacania jej, na dostępne nam sposoby. Prosimy np. przenieść się w (przepastnej u Humanistek) wyobraźni z pomieszczeń wykładowych w dawnej fabryce czołgów HCP Cegielski[13] do $\aleph_0$-gwiazdkowego Hotelu Hilberta i epatujemy dziewczęta próbą semantycznej analizy powiedzmy następującego zdania:

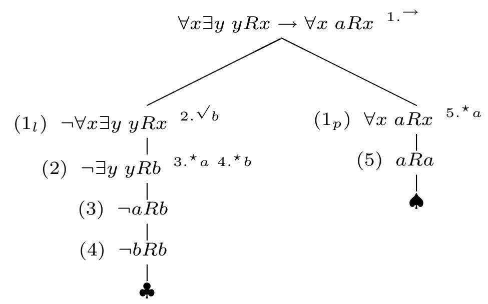
> *O ile za każdą liczbą naturalną następuje niemniejsza od niej liczba naturalna, to Jedyna Tajna Liczba Naturalna Kodująca Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH jest niemniejsza od wszystkich liczb naturalnych.*

Powinniśmy pominąć w tym miejscu szereg szczerych, spontanicznych wypowiedzi Humanistek w reakcji na wysłuchanie tego zdania (np.: wyrażanie sympatii dla liczb 36 oraz 69, a chłodu emocjonalnego dla liczb 96 oraz 666). Rozważmy natomiast formułę języka KRP odpowiadającą mu składniowo:

$$(*) \qquad \forall x \exists y\, yRx \rightarrow \forall x\, aRx$$

(predykat R nazywa tu relację ***niemniejszości***, a stała indywiduowa a jest skromnym symbolem dla ***Jedynej Tajnej Liczby Naturalnej Kodującej Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH***; to, czy kodowanie podlega regułom znanym Cadykowi z Leżajska, Jego Świątobliwości Dalajlamie, słynnemu ze swojej dociekliwości Ignacemu Loyoli, czy jakiemukolwiek głodnemu sławy Prałatowi, nie ma tu oczywiście znaczenia).

Sprawdzimy najpierw, czy formuła $(*)$ jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji:



Tablica ma dwie gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest zatem kontrtautologią KRP. Poniższe tabelki podają interpretacje, w których $(*)$ jest prawdziwa:

---

[11] To nie są jedynie głupie, złośliwe docinki. Język naturalny *naprawdę* istotnie różni się od języka KRP. „Przekłady" niektórych formuł języka KRP na język naturalny brzmią czasem banalnie, czasem dziwacznie, a nawet (pragmatycznie) nieakceptowalnie. Jak już wspominaliśmy wcześniej, „przekłady" w drugą stronę sprawiają jeszcze większe trudności. Nie załamujmy jednak członków: kłopoty te to przecież niewyczerpywalne źródło tematów na rozmaite rozprawy i badania semiotyczne, sponsorowane przez podatników.

[12] Ten przykład zaczerpnęliśmy z naszego tekstu *Agnostyczny jeż w lesie semantycznym* (współautorka: Izabela Bondecka-Krzykowska), złożonego do druku w Księdze Jubileuszowej dedykowanej Panu Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu. Formuła $(*)$ dyskutowana w tym przykładzie wzięta jest z artykułu Witolda Marciszewskiego: On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study. *Mathesis Universalis*, nr **11** *On the Decidability of First Order Logic*, 2002, dostępnego w Internecie na stronie www.calculemus.org/MathUniversalis/NS/11/Beyond.pdf. Polecamy ten artykuł, jako zawierający interesujące uwagi na temat metody tablic analitycznych.

[13] UAM dzierżawi tam pomieszczenia, miejmy nadzieję, że bez strat dla potęgi militarnej Rzeczpospolitej Polskiej. Zresztą, oszukaliśmy: HCP produkowała silniczki do łódeczek.

$R_\clubsuit$	a	b
a	?	–
b	?	–

$R_\spadesuit$	a
a	+

Spróbujmy z kolei zbudować tablicę analityczną negacji formuły $(*)$:

$\neg(\forall x \exists y\ yRx \to \forall x\ aRx)$ $^{1.\neg\to}$

(1_g) $\forall x \exists y\ yRx$ $^{3.\star a\ 4.\star b\ 7.\star c\ 8.\star d\ \ldots}$

(1_d) $\neg\forall x\ aRx$ $^{2.\surd b}$

(2) $\neg aRb$

(3) $\exists y\ yRa$ $^{5.\surd c}$

(4) $\exists y\ yRb$ $^{5.\surd d}$

(5) cRa

(6) dRb

(7) $\exists y\ yRc$ $^{9.\surd e}$

(8) $\exists y\ yRd$ $^{10.\surd f}$

$\vdots$

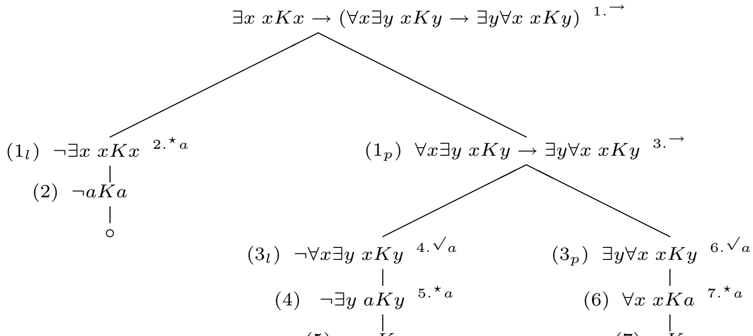
Budowy tej tablicy zakończyć nie można, co powinno być wyraźnie widoczne po prześledzeniu kilku pierwszych kroków w powyższej konstrukcji. Formuła $(*)$ nie jest tautologią KRP. Metoda tablic analitycznych nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków. Możemy jednak, zauważając regularność w konstruowaniu coraz to większych fragmentów tablicy analitycznej negacji formuły $(*)$, podać interpretację nieskończoną, w której negacja $(*)$ jest prawdziwa. Nie upoważnia nas do tego sama metoda — kierujemy się zatem *intuicjami* (wychodzącymi poza logikę pierwszego rzędu).

PRZYKŁAD 18.5.5.1.7.: LAWINA MIŁOŚCI

Jak się wydaje,[14] strukturze składniowej zdania ***O ile choćby jeden osobnik jest zakochany sam w sobie, to jeśli każdy kogoś kocha, to ktoś jest kochany przez wszystkich*** odpowiada następująca formuła języka KRP:

$$(\bigstar) \qquad \exists x\ xKx \to (\forall x \exists y\ xKy \to \exists y \forall x\ xKy)$$

Czy jest ona prawdziwa w jakiejś interpretacji? Budujemy tablicę analityczną tej formuły:



[14] Przyjmując, że pasywizacja w języku naturalnym odpowiada braniu konwersu relacji.

Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tej tablicy (akurat wszystkie gałęzie są otwarte), nie można już zastosować żadnej z reguł. Formuła ta jest zatem prawdziwa np. w świecie, w którym zażywa istnienia narcystyczny, zakochany w sobie samolub, a także w świecie, w którym toczy swój żywot brzydzący się sobą, nie potrafiący samego siebie pokochać niesamolub. Widoczne jest więc, że badana formuła ***nie jest*** kontrtautologią.

Czy jest prawdziwa w ***każdej*** interpretacji, tj. czy jest tautologią? Aby to sprawdzić, budujemy tablicę analityczną jej negacji. Jeśli wszystkie jej gałęzie będą zamknięte, to wykluczona zostanie sytuacja, że owa negacja jest prawdziwa w jakiejś interpretacji. Automatycznie oznaczałoby to, że sama badana formuła jest w każdej interpretacji prawdziwa, czyli jest tautologią. Oto stosowna tablica:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x\, xKx \rightarrow (\forall x \exists y\, xKy \rightarrow \exists y \forall x\, xKy)) \quad {}^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \exists x\, xKx \quad {}^{3.\surd a_1} \\
| \\
(1_d)\ \neg(\forall x \exists y\, xKy \rightarrow \exists y \forall x\, xKy) \quad {}^{2.\neg\rightarrow} \\
| \\
(2_g)\ \forall x \exists y\, xKy \quad {}^{4.\star a_1\ 8.\star a_2\ 10.\star a_3} \\
| \\
(2_d)\ \neg\exists y \forall x\, xKy \quad {}^{5.\star a_1\ 9.\star a_2\ 11.\star a_3} \\
| \\
(3)\ a_1 K a_1 \\
| \\
(4)\ \exists y\, a_1 K y \quad {}^{6.\surd a_2} \\
| \\
(5)\ \neg\forall x\, xKa_1 \quad {}^{7.\surd a_3} \\
| \\
(6)\ a_1 K a_2 \\
| \\
(7)\ \neg a_3 K a_1 \\
| \\
(8)\ \exists y\, a_2 K y \quad {}^{12.\surd a_4} \\
| \\
(9)\ \neg\forall x\, xKa_2 \quad {}^{13.\surd a_5} \\
| \\
(10)\ \exists y\, a_3 K y \quad {}^{14.\surd a_6} \\
| \\
(11)\ \neg\forall x\, xKa_3 \quad {}^{15.\surd a_7} \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Tablica jest nieskończona, tzn. nie można zakończyć jej budowy w skończonej liczbie kroków. Zatem formuła $(\bigstar)$ nie jest tautologią KRP. Zauważmy, że:

- po wprowadzeniu stałej indywiduowej a_1 należało względem niej rozwinąć formuły o numerach (2_g) oraz (2_d);
- po wykonaniu tych kroków w drzewie pojawiły się dwie nowe formuły, nakazujące wprowadzenie dwóch nowych stałych indywiduowych a_2 oraz a_3;
- rozwinięcie formuł o numerach (2_g) oraz (2_d) względem stałych a_2 oraz a_3 wprowadziło cztery nowe formuły, nakazujące wprowadzenie czterech nowych stałych indywiduowych: a_4, a_5, a_6 i a_7;
- jeśli, tak jak każą reguły, rozwiniemy teraz formuły o numerach (2_g) i (2_d) ze względu na stałe a_4, a_5, a_6 i a_7, to otrzymamy osiem nowych formuł, nakazujących wprowadzenie kolejnych nowych ośmiu stałych indywiduowych;
- itd.

Zadając niewinne pytanie, czy negacja formuły $(\bigstar)$ jest prawdziwa, uruchomiliśmy zatem olbrzymią lawinę związków uczuciowych...Proszę zauważyć, że na tej nieskończonej gałęzi występuje nieskończenie wiele formuł atomowych i negacji formuł atomowych — w odczytaniu negacji formuły $(\bigstar)$ proponowanym na początku tego przykładu odpowiadają one sytuacjom polegającym na tym, że dana osoba kocha (lub nie) drugą osobę. Usilnie namawiamy Czytelniczki do wykonania następujących dwóch ćwiczeń, jednego banalnego, a drugiego nieco trudniejszego:

- wykonaj następne kroki w konstrukcji tego drzewa, powiedzmy do momentu, w którym na gałęzi będzie co najmniej dwadzieścia stałych indywiduowych;
- spróbuj znaleźć ***wzór na miłość*** uprawianą na tej gałęzi, tj. spróbuj ustalić, dla jakich indeksów i oraz j na gałęzi znajduje się formuła atomowa a_iKa_j, a dla jakich formuła $\neg a_iKa_j$.

Zauważmy jeszcze, na koniec tego przykładu, że podobną „lawinę" stałych indywiduowych otrzymamy próbując zbudować drzewo semantyczne dla ***negacji*** następującej formuły:

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \forall x \exists y\, xKy \rightarrow \exists y \forall x\, xKy.$$

Formuła ($\bigstar\bigstar$) nie jest więc tautologią KRP. Choć tablica analityczna jej negacji nie jest skończona, to potrafimy podać interpretacje, w których ($\bigstar\bigstar$) jest fałszywa, tj. takie interpretacje, w których poprzednik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. W podręcznikach logiki często podaje się następującą interpretację o tych własnościach:

- uniwersum interpretacji stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych;
- predykat K denotuje relację mniejszości.

W tej interpretacji wyrażenie aKb czytamy więc: liczba a jest mniejsza od liczby b (lub, równoważnie, liczba b jest większa od liczby a). Wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba od niej większa (a więc poprzednik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest w tej interpretacji prawdziwy) oraz wiadomo, że nie istnieje liczba naturalna, większa niż wszystkie liczby naturalne (czyli następnik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest w tej interpretacji fałszywy).[15] Przy interpretacji K jako relacji $<$ następnik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest zresztą fałszywy także dlatego, że ***żadna*** liczba naturalna nie jest mniejsza od ***samej siebie***. Można też interpretować predykat K jako relację $\leqslant$ w zbiorze wszystkich liczb naturalnych. Wtedy również poprzednik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest w tej interpretacji prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Nietrudno także podać ***skończone*** interpretacje, w których poprzednik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Wyobraźmy sobie np., że Ludzkość składa się tylko z dwojga osobników, powiedzmy ***Adama*** i ***Chawy***, Adam kocha Chawę, siebie samego nie kocha (bo np. ma wstręt do autoerotyzmu), a Chawa kocha tylko siebie, taka już jest. W takim świecie Adama nie kocha nikt, żadna Istota. Pozostawmy ten świat swemu losowi.

Także np. w świecie, w którym żyją jedynie Adam i Chawa, kochający się nawzajem (i nikogo poza tym, a więc bez narcyzmu) poprzednik implikacji ($\bigstar\bigstar$) jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

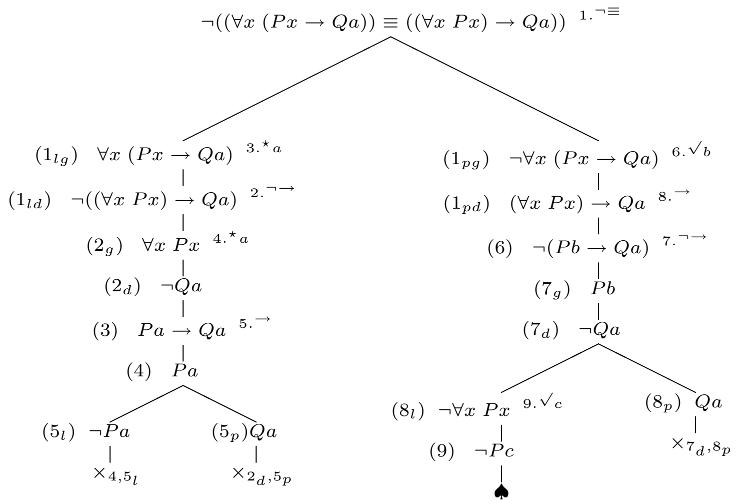
PRZYKŁAD 18.5.5.1.8.: Z ŻYCIA PARAFII

Zajmiemy się teraz ustaleniem, czy do praw logiki zaliczyć można następującą równoważność:

$$\forall x\, (Px \rightarrow Qa) \equiv ((\forall x\, Px) \rightarrow Qa)$$

Pokażemy, że nie jest ona tautologią: tablica analityczna zbudowana dla negacji tej formuły będzie miała gałąź otwartą, a to oznacza, że negacja badanej równoważności może być prawdziwa w jakiejś interpretacji; w tejże interpretacji sama badana równoważność jest więc fałszywa, a zatem nie jest tautologią. Zwróćmy uwagę, że w badanej formule występuje stała indywiduowa a. Oto stosowna tablica:

[15] To całkiem oczywiste, prawda? Graliśmy przecież na wykładzie w tę grę: *Podaj liczbę.* I ja zawsze wygrywałem, podając liczbę większą od podanej przez Ciebie (to było sprawiedliwe: gdybym ja zaczynał, to Ty byś wygrywała). Tak naprawdę, to jednak wcale nie jest to takie oczywiste i wymaga przyjęcia stosownych założeń dotyczących nieskończoności. O tym też wspominaliśmy na wykładzie.



Zauważmy, że w lewej części drzewa wykonanie kroku $^{2.\neg\to}$ ***przed*** krokiem $^{3.\star a}$ było niezgodne z podawanymi wcześniej zaleceniami, dotyczącymi kolejności stosowania reguł. Nie miało to jednak znaczenia dla wyników pracy na rozważanych gałęziach. W prawej części drzewa nie było żadnej formuły generalnie skwantyfikowanej (ani negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej), które można byłoby rozwinąć ze względu na stałą indywiduową a występującą w formule w korzeniu drzewa.

Gałąź oznaczona liściem ♠ jest otwarta, i taka już pozostanie, na wieki wieków. Do formuł na niej umieszczonych nie można zastosować już żadnych reguł. Gałąź ta wyznacza interpretację, w której znajdująca się w korzeniu drzewa zaprzeczona równoważność

$$\neg((\forall x\ (Px \to Qa)) \equiv ((\forall x\ Px) \to Qa))$$

jest prawdziwa. W konsekwencji, formuła

$$\forall x\ (Px \to Qa) \equiv ((\forall x\ Px) \to Qa)$$

jest w tejże interpretacji fałszywa, a więc — jako fałszywa w co najmniej jednej interpretacji — nie jest tautologią KRP.

Interpretacja wyznaczona przez gałąź otwartą powyższej tablicy ma w uniwersum denotacje stałych indywiduowych a, b oraz c. Przy tym, denotacja stałej b jest elementem denotacji predykatu P (w tejże interpretacji), zaś denotacja stałej a nie jest elementem denotacji predykatu Q, a denotacja stałej c nie jest elementem denotacji predykatu P (tamże). Sytuację tę ilustruje tabelka:

♠	P	Q
a	?	–
b	+	?
c	–	?

(to, czy denotacja a należy do denotacji P oraz czy denotacje b i c należą do denotacji Q nie ma znaczenia, co oddaje znak „?” umieszczony w stosownych miejscach w tabeli). Nietrudno obliczyć, że tabelka powyższa jest skrótowym zapisem ośmiu różnych interpretacji — na tyle bowiem sposobów zastąpić możemy w niej znak zapytania znakami plusa i minusa.

Spójrzmy raz jeszcze na powyższą tablicę. Jej lewa część (poddrzewo) wychodząca z korzenia jest jednocześnie drzewem semantycznym dla formuły:

$$\neg(\forall x\ (Px \to Qa) \to ((\forall x\ Px) \to Qa)$$

czyli dla zaprzeczonej implikacji, w której poprzedniku jest pierwszy człon rozważanej na początku równoważności, a w następniku drugi z tych członów. Fakt, że ta tablica ma wszystkie gałęzie zamknięte ukazuje, iż implikacja:

$$\forall x\ (Px \to Qa) \to ((\forall x\ Px) \to Qa)$$

jest tautologią KRP. Natomiast fakt, że prawa wychodząca z korzenia część (poddrzewo) drzewa dla zanegowanej równoważności zawiera gałąź otwartą świadczy o tym, że implikacja odwrotna do powyższej, tj.:

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

tautologią nie jest (bo jej zaprzeczenie jest prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji). Powinno być oczywiste, że gdy budujemy drzewa semantyczne dla równoważności lub zaprzeczonych równoważności, to jednocześnie uzyskujemy informacje o własnościach implikacji prostej i odwrotnej, których koniunkcja jest semantycznie równoważna rozpatrywanej równoważności.

Odruchowo skonstruujmy jeszcze jakąś interpretację predykatów P i Q oraz stałej indywiduowej a, aby nie zawieść Humanistek. Niech np.:

Px będzie interpretowane jako x ***żarliwie się modli***;

Qx będzie interpretowane jako x ***miewa się nienajgorzej***;

a denotuje ***Naszego Proboszcza***.

Aby bezpodstawnie nie uogólniać, niech uniwersum interpretacji odnosi się do ***Naszej Parafii***; oznacza to, że słowo ***parafianin*** odpowiada predykatowi uniwersalnemu.

Wtedy formułę:

$$\forall x\ (Px \rightarrow Qa) \rightarrow ((\forall x\ Px) \rightarrow Qa)$$

odczytujemy np. tak:

> **Jeśli**, *gdy weźmiemy pod uwagę dowolnego parafianina, Nasz Proboszcz ma się nienajgorzej, o ile tenże parafianin żarliwie się modli,* **to** *gdy wszyscy modlą się żarliwie, to Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej.*

Natomiast formuła

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

odczytana może być, powiedzmy, tak:

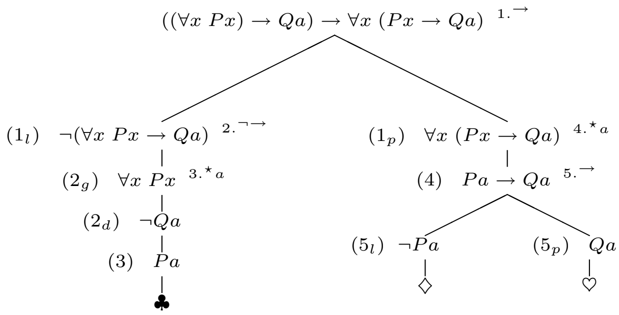
> **Jeżeli** *Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej, o ile wszyscy się modlą,* **to** *dla dowolnego parafianina, gdy tenże modli się żarliwie, to Nasz Proboszcz nienajgorzej się miewa.*

Nie trzeba być wytrawną Humanistką, aby poczuć się niedobrze ujrzawszy te teksty. (Kto, do licha, w ten sposób mówi?!) Oba te odczytania uważamy za nieco chrome stylistycznie, co spowodowane jest między innymi tym, iż w języku naturalnym konstrukcje syntaktyczne mające być „przekładami" konstrukcji logicznych źle współżyją gramatycznie.

Na koniec tego przykładu zauważmy jeszcze, że pokazaliśmy dotąd, że formuła:

$$((\forall x\ Px) \rightarrow Qa) \rightarrow \forall x\ (Px \rightarrow Qa)$$

jest fałszywa ***w co najmniej jednej*** interpretacji. Nie przesądza to, czy formuła ta jest fałszywa ***we wszystkich*** interpretacjach, tj. czy jest kontrtautologią. Pokażmy, że formuła ta kontrtautologią ***nie jest***. Aby tego dokonać, wystarczy znaleźć co najmniej jedną interpretację, w której ta formuła jest prawdziwa, a więc pokazać, że tablica analityczna tej formuły ma co najmniej jedną gałąź otwartą. Budujemy tę tablicę:



Tablica ma gałęzie otwarte (akurat wszystkie jej gałęzie są otwarte) i do żadnej z formuł, na żadnej z tych gałęzi, nie można już zastosować żadnej z reguł. Tak więc, rozważana formuła jest prawdziwa w jakichś interpretacjach; zatem nie jest ona kontrtautologią KRP.

Może nie wypada, ale mimo to chyba warto, uczynić następującą uwagę. Powyższa tablica analityczna ma ***wszystkie*** gałęzie otwarte. Przestrzegamy przed błędnym (sporadycznie przez studentki popełnianym) stąd wnioskiem, że formuła z korzenia takiej tablicy jest w każdej interpretacji prawdziwa. Pokazaliśmy już wyżej, że negacja tej formuły jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji (zobacz 8 interpretacji podanych w tabelce ♠), a więc w interpretacjach z tabelki ♠ badana teraz formuła jest fałszywa. Proponujemy Humanistkom refleksję nad następującym problemem. Które z poniżej wyliczonych sytuacji są możliwe dla dowolnej, ustalonej formuły A (i co wtedy o A lub o $\neg A$ można przesądzić):

- wszystkie gałęzie tablicy dla α i wszystkie gałęzie tablicy dla $\neg\alpha$ są otwarte;
- wszystkie gałęzie tablicy dla α i wszystkie gałęzie tablicy dla $\neg\alpha$ są zamknięte;
- tablica dla α ma wszystkie gałęzie otwarte, a tablica dla $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie zamknięte;
- tablica dla α ma wszystkie gałęzie zamknięte, a tablica dla $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie otwarte;
- tablica dla α ma gałęzie otwarte i zamknięte, a także tablica dla $\neg\alpha$ ma gałęzie otwarte i zamknięte;
- tablica dla α ma wszystkie gałęzie zamknięte, a tablica dla $\neg\alpha$ ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- tablica dla α ma wszystkie gałęzie otwarte, a tablica dla $\neg\alpha$ ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- tablica dla $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie zamknięte, a tablica dla A ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte;
- tablica dla $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie otwarte, a tablica dla α ma pewne gałęzie zamknięte, a pewne otwarte.

Czy niektóre z wyliczonych możliwości „mówią” to samo o α lub $\neg\alpha$?

Przy podanej wyżej interpretacji „nabożnej” formuła

$$((\forall x\ Px) \to Qa) \to \forall x\ (Px \to Qa)$$

jest prawdziwa w parafiach w których:

- Nasz Proboszcz modli się żarliwie i — biedaczysko — nie miewa się nienajgorzej (parafia ♣);
- Nasz Proboszcz nie modli się żarliwie, a o jego samopoczuciu nic nam nie wiadomo (parafia ♢);
- Nasz Proboszcz miewa się nienajgorzej, acz nie wiadomo, jak rzeczy się mają z jego nabożnością (parafia ♡);

(co poza tym dzieje się w wymienionych parafiach nie ma znaczenia). Życzymy wszystkim żarliwości uczuć i dobrego samopoczucia.

* * *

Może warto na koniec tej części przykładów uczynić następującą uwagę. Zwykle, gdy mówi się w podręcznikach o prawach (tautologiach) KRP, to rozważa się formuły w postaci takiej, jak w przykładzie KRZEPKO I PRZAŚNIE. Ze względu na propedeutyczny charakter tych notatek umieszczamy w nich przede wszystkim przykłady mniej ogólne, dla których bezpośrednio podawać można interpretacje, w których rozważane formuły są prawdziwe bądź fałszywe.

18.5.5.2. Semantyczna niesprzeczność w KRP

Przypominamy, że zbiór formuł jest ***semantycznie niesprzeczny*** (***spełnialny***), gdy ma co najmniej jeden model, tj. gdy wszystkie jego elementy są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji. W przeciwnym przypadku, tj. gdy nie ma żadnego modelu (wszystkie jego elementy nie są prawdziwe w żadnej wspólnej interpretacji), jest ***semantycznie sprzeczny***. Badanie rozważaną metodą, czy dany (skończony) zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny polega na:

- przypuszczeniu, że wszystkie rozważane formuły są prawdziwe (w co najmniej jednej wspólnej interpretacji);
- zbudowaniu tablicy analitycznej,tj. drzewa, w którego pniu umieszczone są wszystkie rozważane formuły;
- konkluzji, uzależnionej od kształtu otrzymanego drzewa.

Możliwe są następujące sytuacje dla danego zbioru formuł X:

- wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte; wtedy zbiór X jest semantycznie sprzeczny (wszystkie elementy zbioru X nie mogą być współprawdziwe);
- pewne gałęzie tablicy są otwarte; wtedy X jest semantycznie niesprzeczny, a każda z otwartych gałęzi tablicy pozwala utworzyć interpretację, w której wszystkie elementy zbioru X są współprawdziwe.

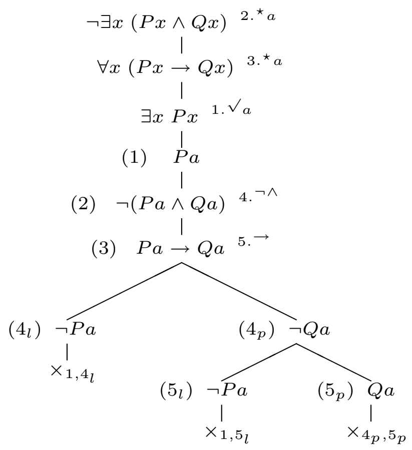
Rozważymy przykłady ilustrujące obie z wyliczonych wyżej sytuacji. Może warto w tym miejscu zaznaczyć, że także problemy omawiane w innych przykładach sprowadzają się do badania, czy pewne zbiory formuł są semantycznie sprzeczne, czy też semantycznie niesprzeczne.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.1: KRAWĘDŹ BANAŁU

Zacznijmy od przykładu na krawędzi banału. Sprawdzimy, czy jest semantycznie niesprzeczny zbiór złożony z następujących formuł:

$$\neg\exists x\ (Px \wedge Qx)$$
$$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$$
$$\exists x\ Px$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły. Jeśli wszystkie gałęzie tej tablicy się zamkną, to badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Jeśli pozostanie jakaś gałąź otwarta, to zbiór ten jest semantycznie niesprzeczny.



Wszystkie gałęzie są zamknięte. Zatem nie istnieje interpretacja, w której wszystkie powyższe formuły byłyby jednocześnie prawdziwe, zbiór tych formuł jest semantycznie sprzeczny.

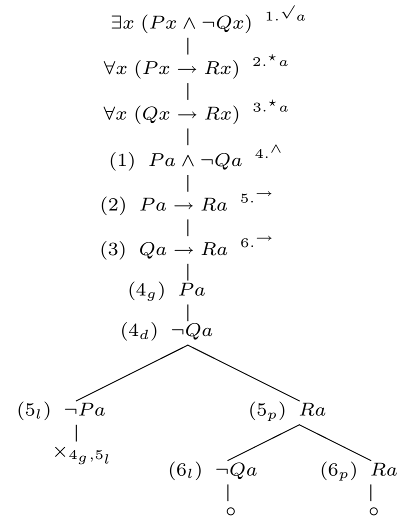
A czemu wspomnieliśmy o krawędzi banału? Spójrzmy (posłuchajmy?!), co „mówią" rozważane trzy zdania. Pierwsze stwierdza, że część wspólna denotacji predykatów P oraz Q jest pusta. Drugie głosi, że denotacja P zawiera się w denotacji Q, a trzecie powiada, że denotacja P jest niepusta. Tak jednocześnie być nie może. Kto lubi rysuneczki, może sporządzić stosowny diagram Venna i przekonać się ***naocznie***, że niemożliwe jest zaznaczenie na nim, które obszary są puste, a które niepuste bez popadnięcia w kolizję logiczną. Każde dwa z rozważanych zdań tworzą zbiór semantycznie niesprzeczny (co łatwo sprawdzić, budując stosowne tablice analityczne dla każdej pary powyższych formuł), wszystkie trzy razem — zbiór semantycznie sprzeczny.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.2.: DRUGA KRAWĘDŹ BANAŁU

W dalszym ciągu ocieramy się o banał. Pokażemy, że zbiór złożony z poniższych formuł jest semantycznie niesprzeczny, tzn. istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe.

$$\exists x\ (Px \wedge \neg Qx)$$
$$\forall x\ (Px \rightarrow Rx)$$
$$\forall x\ (Qx \rightarrow Rx)$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły. Jest to zatem przypuszczenie, że wszystkie one mogą być prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. Przypuszczenie to będzie potwierdzone, jeśli co najmniej jedna gałąź tablicy zostanie otwarta; wtedy, zgodnie z definicją, zbiór tych formuł jest semantycznie niesprzeczny. Gdyby wszystkie gałęzie tablicy zostały zamknięte, to powyższe przypuszczenie musielibyśmy odrzucić — rozważany zbiór formuł byłby semantycznie sprzeczny. A oto tablica:



Tablica ma dwie gałęzie otwarte i do żadnej formuły, na żadnej z tych gałęzi, nie można już stosować żadnych reguł. Zatem istnieją interpretacje, w których wszystkie trzy powyższe formuły są jednocześnie prawdziwe. Z każdej z gałęzi otwartych uzyskać można informację, jakie zdania atomowe zachodzą w każdej z tych interpretacji. W przypadku rozważanej tablicy, informacje te są takie same na każdej gałęzi otwartej; otrzymujemy więc następującą interpretację, w której wszystkie trzy rozważane zdania są prawdziwe:

- uniwersum jest złożone z (co najmniej) jednego obiektu oznaczanego przez stałą a;
- obiekt oznaczany przez stałą a należy do denotacji predykatów P oraz R, a nie należy do denotacji predykatu Q.

Zgodnie z uprzednio proponowaną konwencją, znaleziona interpretacja reprezentowana jest za pomocą tabelki:

	P	Q	R
a	+	−	+

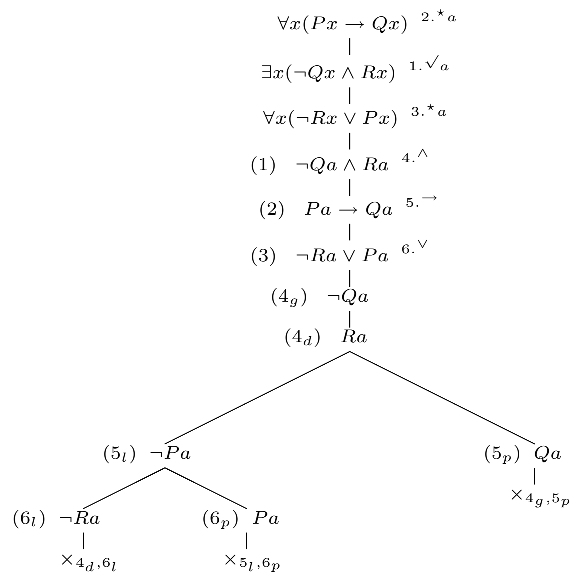
Przypominamy, że znak „+” na przecięciu wiersza odpowiadającego obiektowi oraz kolumny odpowiadającej denotacji predykatu jednoargumentowego (tj. własności) oznacza, że obiekt ten należy do tej denotacji (ma daną własność); znak „−”, że nie należy.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.3.: SIERŚĆ A INTELIGENCJA

U fryzjera należy zachować powagę, a co najmniej ostrożność (uzbrojony facet zajmuje się twoją głową!). Nie zawsze jest to łatwe; gdy usłyszysz np. taki (może nie całkiem pełnosprawny gramatycznie, ale to nieistotne) tekst:

> *Każda blondynka jest inteligentna. Co najmniej jedna brunetka nie jest inteligentna. Każda z Was, miłe dziewczęta: nie jest brunetką lub jest blondynką.*

to być może odruchowo, dla zachowania równowagi logicznej, na której ufasz osadzić także swą równowagę psychiczną, zbudujesz drzewo semantyczne w którego pniu będą formuły języka KRP z jednoargumentowymi predykatami P, Q, R (tu interpretowane: Px — x ***jest blondynką***, Qx — x ***jest inteligentna***, Rx — x ***jest brunetką***). I podczas gdy Mistrz będzie się zajmował zewnętrzem twej kształtnej główki, w jej przestronnym wnętrzu pojawi się następujące wyobrażenie:



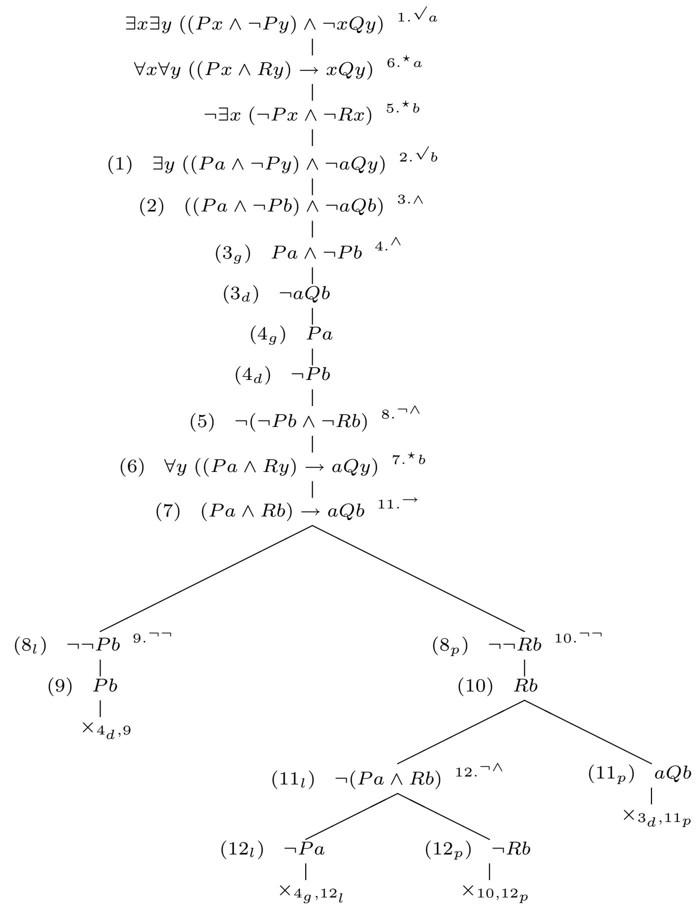
Wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte. Oznacza to zatem, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby jednocześnie pierwsze trzy formuły występujące w pniu tego drzewa. A to z kolei, zgodnie z definicją semantycznej niesprzeczności znaczy, że te trzy formuły tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. Tak więc, choć każde z rozpatrywanych na początku tego przykładu zdań może z osobna być np. prawdziwym komplementem (lub prawdziwą złośliwą obserwacją), to ***wszystkie razem*** nie mogą być prawdziwe, w żadnym świecie, niezależnie od tego, jakie występują w nim korelacje między posiadaniem (lub nie) określonej sierści a ilorazem inteligencji.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.4.: TERAZ POLSKA

Pokażemy, że w żadnej interpretacji nie mogą być jednocześnie prawdziwe następujące formuły:

$$\exists x \exists y\ ((Px \wedge \neg Py) \wedge \neg xQy)$$
$$\forall x \forall y\ ((Px \wedge Ry) \to xQy)$$
$$\neg \exists x\ (\neg Px \wedge \neg Rx)$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe trzy formuły. Postaramy się stosować reguły w takiej kolejności, aby drzewo to miało rozgałęzienia najpóźniej, jak to możliwe — jak wiemy, pozwala to zminimalizować niezbędną pracę (bo nie trzeba powtarzać tych samych kroków w różnych gałęziach drzewa), co stanowi dla nas, jako zadeklarowanych antypracoholików, wartość autoteliczną.



Istotnie, wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Nie istnieje zatem interpretacja, w której trzy powyższe formuły byłyby jednocześnie prawdziwe. Zbiór tych formuł jest więc semantycznie sprzeczny.

Nie zawsze udaje się od razu zbudować „optymalne” drzewo, tj. zastosować tylko te reguły, które prowadzą do jak najszybszego zamknięcia wszystkich gałęzi lub doprowadzenia do sytuacji, w której nie stosują się już żadne reguły (pamiętacie — to oznacza koniec pracy!!!). Pewną wskazówką przy optymalizacji drzew jest np. to, czy w drzewie o wszystkich gałęziach zamkniętych występują formuły złożone, do których nie stosowano żadnych reguł — takie formuły, a więc i kroki do nich prowadzące, można wyeliminować, zyskując na czasie, przestrzeni oraz estetyce, a nie naruszając przy tym poprawności wyniku. Inna wskazówka: stosowanie reguły $R(\neg\neg)$ do formuł, będących podwójnie zaprzeczonymi formułami atomowymi, nie przyczynia się do zamykania gałęzi drzewa.

Jako ćwiczenie uprzejmie proponujemy Czytelniczkom dokładne obejrzenie powyższego drzewa i próbę jego optymalizacji: które kroki nie są niezbędne do zamykania gałęzi? Czy użyto zalecanej i najbardziej efektywnej kolejności stosowania reguł?

Niech predykat P będzie dumnie interpretowany jako własność ***bycia Polakiem***, R jako własność ***bycia obcokrajowcem***, zaś xQy interpretujmy jako x ***szydzi z*** y. Wtedy trzy rozważane na początku tego przykładu formuły uzyskują np. następujące odczytanie:

Pewien Polak nie szydzi z co najmniej jednego Niepolaka. Każdy Polak szydzi ze wszystkich obcokrajowców. Nikt nie jest jednocześnie Niepolakiem oraz nieobcokrajowcem.

Idiotyzm tego tekstu ma wielorakie przyczyny. Jedną z nich jest oczywiście to, że wyjściowy zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny, a semantyczna sprzeczność wypowiadana wszystko jedno jakimi ustami (dziewiczo niewinnymi, charyzmatycznymi, świątobliwymi, itd.) musi — na przekór wszelkim pozorom — brzmieć absurdalnie. Inną z tych przyczyn jest toporne używanie negacji przynazwowej (Niepolak, ew. nie-Polak, nieobcokrajowiec). Wreszcie, trzecia z powyższych formuł (zawierająca pięć wystąpień stałych logicznych) może być — z zachowaniem warunków prawdziwości — sparafrazowana do nieco prostszej formuły, zawierającej dwa wystąpienia takich stałych.

W poprzednim podrozdziale przypomnieliśmy niektóre prawa KRP, m.in. prawa De Morgana ustalające semantyczną równoważność (współprawdziwość we wszystkich interpretacjach) zanegowanych formuł generalnie lub egzystencjalnie skwantyfikowanych ze stosownymi formułami w których negacja nie jest spójnikiem głównym. Jednym z takich praw jest:

$$\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

Z KRZ pamiętamy, że negacja koniunkcji jest semantycznie równoważna alternatywie negacji (to jedno z praw De Morgana dla KRZ) oraz że negacja negacji formuły jest semantycznie tejże formule równoważna. Zbierając razem te fakty, łatwo ustalić, że trzecia z formuł z rozważanego zbioru jest semantycznie równoważna z formułą:

$$\forall x\ (Px \vee Rx)$$

i wykorzystać to przy tworzeniu poniższego — może odrobinę choć mniej niezgrabnego od poprzedniego — tekstu utworzonego ze zdań zbudowanych wedle badanych formuł:

Pewien Polak nie szydzi z kogoś, kto Polakiem nie jest. Wszyscy Polacy szydzą z każdego obcokrajowca. Każdy jest Polakiem lub obcokrajowcem.

Może to i brzmi lepiej po polsku (sic!), ale i tak pozostaje, na mocy uczynionych ustaleń dotyczących semantycznej sprzeczności badanego zbioru formuł, bredzeniem.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.5.: DWUNASTE: NIE BĘDZIESZ (NADAREMNO) MOLESTOWAŁA INTELEKTUALNIE

Semantyczne sprzeczności czają się wszędzie, a wiadomo, że gdy jakiś zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny, to jest on groźny z różnych względów, np.:

- wszystko (dowolna formuła) wynika zeń logicznie (a więc także zdanie mówiące, że gdy czytasz te słowa, to jesteś już praktycznie ***martwa***, Droga Czytelniczko);
- opisuje (?) on interpretacje nieistniejące, a dokładniej, ***nie mogące istnieć***; (np. istnienie różnych Krain Dobrostanu Społecznego, Powszechnego Szczęścia i — rzecz jasna — Sprawiedliwości, itp. ułud ***logicznie*** wykluczone nie jest; ***jest*** natomiast wykluczone logicznie istnienie interpretacji w której prawdziwe byłyby zdania wzajem sprzeczne);
- cokolwiek wypowiesz używając struktur składniowych formuł z tego zbioru będzie — jako całość — brednią, kompletnym nonsensem, choćby nawet najpiękniej się rymowało i brzmiało wręcz niebiańsko; itd.

Szczególnie narażone na cierpienia związane z semantyczną sprzecznością są młode Humanistki, niewinnie ufne w Eufonię Słowa. Im nauka logiki przynieść może największe pożytki, często pomaga poprawić znacząco pozycję społeczną (*Trzeba uważać, ona rozumie, co mówi...*), a czasami jest wręcz niezbędna, aby jak najdłużej, najintensywniej, najciekawiej utrzymać się na szczycie Wielkiego Łańcucha Pokarmowego Planety. Na logice podobno można też zarobić, ale nie będziemy tego akurat wątku rozwijać.

Pokażemy natomiast, że następujący zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny:

$$\forall x \forall y\ (\exists z(zPy \wedge xPz) \rightarrow yPx)$$
$$\neg\exists x\ xPx$$
$$\neg\forall x \forall y\ (yPx \rightarrow \neg xPy)$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły:

$$
\begin{array}{c}
\forall x \forall y\ (\exists z (zPy \wedge xPz) \rightarrow yPx)\ ^{3.\star a} \\
| \\
\neg \exists x\ xPx\ ^{2.\star a} \\
| \\
\neg \forall x \forall y\ (yPx \rightarrow \neg xPy)\ ^{1.\surd a} \\
| \\
(1)\quad \neg \forall y\ (yPa \rightarrow \neg aPy)\ ^{6.\surd b} \\
| \\
(2)\quad \neg aPa \\
| \\
(3)\quad \forall y\ (\exists z\ (zPy \wedge aPz) \rightarrow yPa)\ ^{4.\star a} \\
| \\
(4)\quad \exists z\ (zPa \wedge aPz) \rightarrow aPa\ ^{5.\rightarrow}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
(5_l)\quad \neg \exists z\ (zPa \wedge aPz)\ ^{7.\star b} & (5_p)\quad aPa \\
| & | \\
(6)\quad \neg (bPa \rightarrow \neg aPb)\ ^{8.\neg\rightarrow} & \times_{2,5_p} \\
| & \\
(7)\quad \neg (bPa \wedge aPb)\ ^{10.\neg\wedge} & \\
| & \\
(8_g)\quad bPa & \\
| & \\
(8_d)\quad \neg\neg aPb\ ^{9.\neg\neg} & \\
| & \\
(9)\quad aPb &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
(10_l)\quad \neg bPa & (10_p)\quad \neg aPb \\
| & | \\
\times_{8_g,10_l} & \times_{9,10_p}
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a zatem badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Ćwiczenie: wylicz wszystkie możliwe zastosowania reguł, które pominięto w procesie zamykania gałęzi tego drzewa.

Niewielkim tylko wysiłkiem intelektualnym jest uświadomienie sobie, że nadzbiór zbioru semantycznie sprzecznego też jest semantycznie sprzeczny. Tak więc, cokolwiek (jakiekolwiek formuły) dołożyć do powyższego zbioru, to tak otrzymana całość też będzie semantycznie sprzeczna. Np. w powyższej tablicy każda gałąź (od korzenia do liścia) jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł; cokolwiek do niej dodamy, to otrzymana całość też będzie semantycznie sprzeczna. Tak więc, sprzeczności semantycznej nie można usunąć, ***dodając*** najbardziej nawet wyszukane mądrości, przysięgi, itp., ani też cytując Autorytety, wypowiadając jedno- bądź wieloznaczne groźby, itp.

Trzecia z rozpatrywanych na początku tego przykładu formuł jest semantycznie równoważna z formułą:

$$\exists x \exists y\ (yPx \wedge xPy).$$

(jest tak na mocy praw De Morgana dla kwantyfikatorów oraz pewnych praw KRZ — ufnie pozostawiamy ustalenie, o które prawa KRZ chodzi w tym przypadku pilnym Czytelniczkom).

Wykorzystamy ten fakt w Interpretacji Edukacyjnej (dotyczącej brutalnego transferu wiedzy), tj. przy czytaniu wyrażenia xPy jako x *molestuje intelektualnie* y:

Dla dowolnych dwóch obywateli, jeśli pewien obywatel (obywatelka) jest molestowany(a) intelektualnie przez pierwszego z nich, ale sam(a) molestuje intelektualnie drugiego, to ów drugi obywatel również molestuje intelektualnie pierwszego. Sam siebie nikt nie molestuje intelektualnie. Są tacy obywatele, którzy molestują się intelektualnie nawzajem.

To, że — jak właśnie ustaliliśmy — tekst powyższy jest semantycznie sprzeczny („opisuje” sytuację logicznie niemożliwą) może uspokoi te Humanistki, którym kiedykolwiek zdawało się, że są intelektualnie molestowane. Gdyby nadal dręczył je tego typu niepokój, to mogą wykonać ćwiczenie stylistyczne, polegające na napisaniu powyższego tekstu zgrabniejszą polszczyzną. Jakiekolwiek tego tekstu upiększanie nie odwoła jednak jego semantycznej sprzeczności (oczywiście, jeśli *upiększając* nie będziecie *oszukiwać!*). Wreszcie, można w ramach Programu Łagodzenia Obyczajów, inaczej jeszcze zinterpretować predykat P i otrzymać inny zwięzły, semantycznie sprzeczny, absolutnie nikomu niepotrzebny tekst.

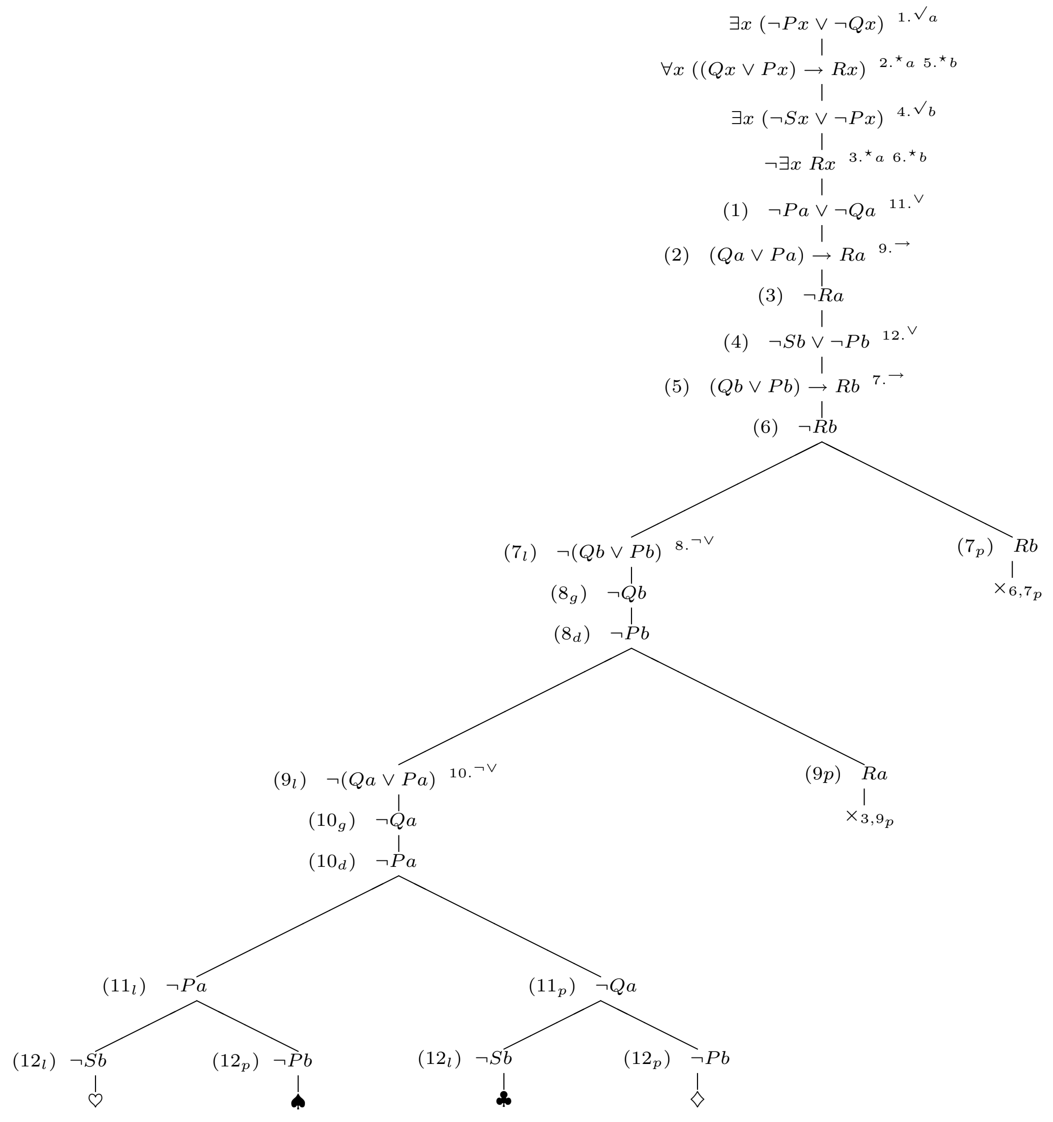
PRZYKŁAD 18.5.5.2.6.: BAJECZKA BARDZO NIEPOPRAWNA POLITYCZNIE

Czasami jeden rzut oka wystarczy, aby zamniemać, że dany tekst jest semantycznie niesprzeczny — pomyśl tylko, ile razy dajesz wiarę np. wiadomościom prasowym lub telewizyjnym (nie mówiąc już o elukubracjach medialnych ekonomistów albo psychologów). Życie wedle wskazań intuicji i mniemań jest interesujące, pełne zaskoczeń, itd. Logika nie przeszkadza w tych przygodach, czasami bywa pomocna w ich urozmaiceniu, a niekiedy nawet ułatwia (umożliwia) przeżycie.

Nie ograniczymy się jedynie do rzucania okiem na poniższy zbiór formuł, ale pokażemy, iż jest on semantycznie niesprzeczny — skonstruujemy interpretacje, w którym wszystkie rozważane formuły są jednocześnie prawdziwe.

$$\exists x\, (\neg Px \vee \neg Qx)$$
$$\forall x\, ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx)$$
$$\exists x\, (\neg Sx \vee \neg Px)$$
$$\neg \exists x\, Rx$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe formuły:



Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych tej tablicy nie można już zastosować żadnych reguł. Zauważmy, że krok $^{12.\vee}$ należało wykonać w dwóch miejscach, a mianowicie w gałęziach zakończonych (przed wykonaniem tego kroku) formułami o numerach (11_l) oraz (11_p). Cztery gałęzie tablicy (oznaczone tu liśćmi: ♣, ◇, ♡ oraz ♠)

są otwarte. Badany zbiór formuł jest więc semantycznie niesprzeczny — istnieją interpretacje, w których wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe. Dla celów tego przykładu zauważmy, że zbierając informacje umieszczone na każdej z gałęzi otwartych powyższego drzewa otrzymujemy przepis, jak skonstruować interpretacje, w których wszystkie formuły z danej gałęzi są prawdziwe (pamiętajmy, że formuły z pnia drzewa należą do każdej z jego gałęzi).

Każda z szukanych interpretacji zawiera denotacje stałych indywiduowych a oraz b. Należą one do dopełnień (względem uniwersum) denotacji predykatów P, Q, R. Ponadto, w interpretacjach wyznaczonech przez gałęzie z liśćmi $\heartsuit$ oraz $\clubsuit$ denotacja stałej b nie należy do denotacji predykatu S. To, czy denotacja stałej a należy do denotacji predykatu S nie ma znaczenia w przypadku każdej z interpretacji wyznaczonej przez gałęzie otwarte drzewa. W przypadku interpretacji wyznaczonych przez gałęzie o liściach $\spadesuit$ oraz $\diamondsuit$ nie ma znaczenia także to, czy denotacja stałej b należy do denotacji predykatu S.

Poniższe tabelki ukazują szukane interpretacje (znak zapytania na przecięciu wiersza i kolumny oznacza, że nie jest istotne, czy postawimy tam znak „+", czy „−", obie możliwości są dopuszczalne, *anything goes*):

$\heartsuit$	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	–

$\spadesuit$	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	?

$\clubsuit$	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	–

$\diamondsuit$	P	Q	R	S
a	–	–	–	?
b	–	–	–	?

Jak Czytelniczki z pewnością pamiętają, prawem KRZ jest formuła $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$; w KRZ obowiązują również prawa przemienności koniunkcji oraz przemienności alternatywy. Zatem pierwsza i trzecia z formuł z rozważanego w tym przykładzie zbioru mogą być zastąpione semantycznie im równoważnymi formułami ze spójnikiem implikacji; jedna z takich zamian ma postać następującą:

$$\begin{gathered} \exists x\ (Px \rightarrow \neg Qx) \\ \forall x\ ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx) \\ \exists x\ (Px \rightarrow \neg Sx) \\ \neg\exists x\ Rx \end{gathered}$$

Także ten zbiór formuł jest, rzecz jasna, semantycznie niesprzeczny. Pierwsza i trzecia z przytoczonych na początku tego przykładu formuł mogą też zostać zastąpione semantycznie im równoważnymi formułami zawierającymi spójnik koniunkcji, na mocy prawa KRZ: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$:

$$\begin{gathered} \exists x\ \neg(Px \wedge Qx) \\ \forall x\ ((Qx \vee Px) \rightarrow Rx) \\ \exists x\ \neg(Px \wedge Sx) \\ \neg\exists x\ Rx \end{gathered}$$

Humanistkom spragnionym lektury czegoś mniej koszernego niż formułki języka KRP proponujemy następujący tekst, bedący (choć zgrzebnym stylistycznie, to jednak nie całkiem ułomnym gramatycznie) jednym z opisów możliwej interpretacji ostatnich czterech powyżej wyliczonych formuł:

Jest ktoś, kto nie jest jednocześnie zdrowy i młody. Każdy, kto jest zdrowy lub młody, jest szczęśliwy. Jest ktoś, kto nie jest jednocześnie zdrowy i mądrzejszy niż przewiduje ustawa. Nie ma szczęśliwych.

Zgodnie z naszymi ustaleniami, bajeczka powyższa opisuje możliwy stan rzeczy. Dla przykładu, sytuacja taka zachodzi w świecie, w którym żyje ktoś, kto nie jest młody, nie jest zdrowy, nie jest szczęśliwy i ma żonę (kochankę) o tych samych trzech własnościach (starą, chorą i nieszczęśliwą). To, czy jedno z nich (denotacja stałej a) jest mądrzejsze niż przewiduje ustawa, nie ma absolutnie żadnego znaczenia; ograniczenia dotyczące w tej mierze drugiego z nich, tj. denotacji stałej b podano w tabelkach $\heartsuit$ oraz $\clubsuit$.

Wszystkim Czytelniczkom życzymy zdrowej, szczęśliwej młodości oraz przypominamy, że nieprzestrzeganie ustaw grozi konsekwencjami.

PRZYKŁAD 18.5.5.2.7.: SCHADENFREUDE

Pokażemy, że następujące dwie formuły tworzą zbiór semantycznie sprzeczny, tj. nie są jednocześnie prawdziwe w żadnej interpretacji:

$$
\begin{array}{ll}
(1^\star) & \forall x \forall y\, xPy \to \exists z\, Qz \\
(2^\star) & \neg\exists x \exists y \exists z\, (xPy \to Qz)
\end{array}
$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy obie powyższe formuły:

$$
\begin{array}{c}
\forall x \forall y\, xPy \to \exists z\, Qz \quad {}^{1.\to} \\
| \\
\neg\exists x \exists y \exists z\, (xPy \to Qz) \quad {}^{4.\star a\ 9.\star c}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|ll}
(1_l) & \neg\forall x \forall y\, xPy \quad {}^{2.\surd a} & (1_p) & \exists z\, Qz \quad {}^{8.\surd c} \\
(2) & \neg\forall y\, aPy \quad {}^{3.\surd b} & (8) & Qc \\
(3) & \neg aPb & (9) & \neg\exists y \exists z\, (cPy \to Qz) \quad {}^{10.\star c} \\
(4) & \neg\exists y \exists z\, (aPy \to Qz) \quad {}^{5.\star b} & (10) & \neg\exists z\, (cPc \to Qz) \quad {}^{11.\star c} \\
(5) & \neg\exists z\, (aPb \to Qz) \quad {}^{6.\star a} & (11) & \neg(cPc \to Qc) \quad {}^{12.\neg\to} \\
(6) & \neg(aPb \to Qa) \quad {}^{7.\neg\to} & (12_g) & cPc \\
(7_g) & aPb & (12_d) & \neg Qc \\
(7_d) & \neg Qa & & \times_{8,12_d} \\
 & \times_{3,7_g} & &
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tablicy zostały zamknięte. Oznacza to, iż nie istnieje interpretacja, w której obie rozważane formuły byłyby jednocześnie prawdziwe. Zbiór z nich złożony jest semantycznie sprzeczny. Zauważmy, że do zamknięcia wszystkich gałęzi tablicy nie było potrzebne wykonanie wszystkich możliwych zastosowań reguły $R(\neg\exists)$: formuły o numerze (4) nie rozwijaliśmy ze względu na stałą a (gdybyśmy to uczynili, to moglibyśmy, równie niepotrzebnie, rozwijać otrzymaną wtedy formułę $\neg\exists z\ (aPa \to Qz)$ zarówno względem a, jak i b) natomiast formuły o numerze (5) nie rozwijaliśmy ze względu na stałą b. I w tym momencie każda Humanistka może z dumą wrzasnąć: ***Jestem sprytniejsza od komputera!!!*** (ponieważ komputer wszystkie te rozwinięcia precyzyjnie i całkiem niepotrzebnie (!) oczywiście by wykonał).

Z powyższego ustalenia wynika, że koniunkcja tych dwóch formuł nie jest prawdziwa w żadnej interpretacji. Innymi słowy, jest ona fałszywa w każdej interpretacji. Stąd, koniunkcja ta jest kontrtautologią KRP.

Usilnie namawiamy Czytelniczki do odrobiny samodzielności. Prosimy mianowicie o sprawdzenie, że każda z tych formuł z osobna ***jest*** prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Wystarczy w tym celu zbudować tablice analityczne dla każdej z tych formuł i przekonać się, że mają one gałęzie otwarte.

Gdyby Czytelniczki rozochociły się tą samodzielnością, to nie ma żadnego zakazu, aby same przekonały się, że również zbiór złożony z ***negacji*** rozważanych formuł ***jest*** semantycznie sprzeczny, natomiast każda z tych zaprzeczonych formuł z osobna ***jest*** prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Ale w przypadku, gdyby nadmiar samodzielności ciążył intelektualnie, to zapraszamy do obejrzenia poniższej tablicy, tj. drzewa, w którego pniu umieszczamy negacje rozważanych formuł; pokażemy, że ta tablica ma wszystkie gałęzie zamknięte, a więc że negacje formuł $(1^{\star})$ oraz $(2^{\star})$ też tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. Oto tablica:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x\forall y\; xPy \rightarrow \exists z\; Qz) \quad {}^{2.\neg\rightarrow} \\
| \\
\neg\neg\exists x\exists y\exists z\; (xPy \rightarrow Qz) \quad {}^{1.\neg\neg} \\
| \\
(1) \quad \exists x\exists y\exists z\; (xPy \rightarrow Qz) \quad {}^{3.\surd a} \\
| \\
(2_g) \quad \forall x\forall y\; xPy \quad {}^{6.\star a} \\
| \\
(2_d) \quad \neg\exists z\; Qz \quad {}^{8.\star c} \\
| \\
(3) \quad \exists y\exists z\; (aPy \rightarrow Qz) \quad {}^{4.\surd b} \\
| \\
(4) \quad \exists z\; (aPb \rightarrow Qz) \quad {}^{5.\surd c} \\
| \\
(5) \quad aPb \rightarrow Qc \quad {}^{9.\rightarrow} \\
| \\
(6) \quad \forall y\; aPy \quad {}^{7.\star b} \\
| \\
(7) \quad aPb \\
| \\
(8) \quad \neg Qc \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(9_l) \quad \neg aPb & (9_p) \quad Qc \\
| & | \\
\times_{7,9_l} & \times_{8,9_p}
\end{array}
\end{array}
$$

Istotnie, wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a więc negacje formuł $(1^{\star})$ oraz $(2^{\star})$ również tworzą zbiór semantycznie sprzeczny. I znowuż, urocza Humanistko, okazałaś się sprytniejsza od komputera, nie rozwijając bez potrzeby wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych (oraz negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych) ze względu na wszystkie stałe! Zanim jednak ***radośnie wrzaśniesz***, sumiennie policz ile pracy zaoszczędziłaś…

Przypuśćmy, że nadamy predykatom P oraz Q następującą interpretację (ze względu na jej brutalność, osoby o dużej wrażliwości mogą opuścić lekturę tego przykładu, przeciętny telewidz może czytać spokojnie dalej):

$x_1 P x_2$ interpretujmy jako x_1 ***ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad*** x_2;

Qx interpretujmy jako x ***doznaje sadystycznego zadowolenia***.

Wtedy pierwsze z rozpatrywanych zdań, tj.:

$$(1^{\star}) \quad \forall x\forall y\; xPy \rightarrow \exists z\; Qz$$

można przy tej interpretacji w miarę poprawnie gramatycznie odczytać; np.:

> *Jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Natomiast zdanie drugie, czyli $(2^{\star})$ jest — jak sądzimy — nieco trudniejsze do jakiegoś poprawnego, niechropawego stylistycznie odczytania, choć może czytanie następujące jest akceptowalne:

> *Nie istnieją tacy (trzej?) osobnicy, że gdy jeden ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad drugim, to ktoś (trzeci?) doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Jeden z kłopotów przy tym czytaniu polega na tym, że w języku naturalnym mówimy tu *więcej*, niż każe nam powiedzieć rozważana formuła KRP, bo w formule tej nie przesądza się, że odnosimy się do trzech obiektów.

Inną jeszcze możliwością odczytania formuły $(2^{\star})$ w rozważanej interpretacji wydaje się być np.:

Nie jest tak, że gdy ktoś nad kimś znęca się ze szczególnym okrucieństwem, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.

Ze względu na komplikacje anaforyczne, także to odczytanie brzmi nieswojo.

Zauważmy jednak, że zdanie

$$(2^{\star})\quad \neg\exists x\exists y\exists z\ (xPy \rightarrow Qz)$$

jest semantycznie równoważne ze zdaniem

$$(3^{\star})\quad \forall x\forall y\forall z\neg(xPy \rightarrow Qz),$$

a to z kolei jest semantycznie równoważne ze zdaniem

$$(4^{\star})\quad \forall x\forall y\forall z\ (xPy \wedge \neg Qz).$$

W pierwszym przypadku semantyczna równoważność jest konsekwencją jednego z praw De Morgana dla kwantyfikatorów:

$$\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x)$$

Drugą równoważność otrzymujemy na mocy znanej tautologii KRZ:

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta).$$

Zatem, można od biedy uznać, że w proponowanej interpretacji inkryminowane zdanie sparafrazować da się (z zachowaniem warunków prawdziwości) np. tak:

Nie dość, że każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to w dodatku nikt nie doznaje sadystycznego zadowolenia.

Czy teraz semantyczna sprzeczność uzyskała Humanistyczną Naoczność? Jeszcze nie?

Można, korzystając z dalszych praw KRP (które uzyskać można także metodą tablic analitycznych), pokazać, że zdanie $(4^{\star})$ (a w konsekwencji także $(2^{\star})$) jest semantycznie równoważne z każdym ze zdań poniższych:

$$(5^{\star})\quad \forall x\forall y\ (xPy \wedge \forall z\ \neg Qz)$$

$$(6^{\star})\quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \forall z\ \neg Qz$$

$$(7^{\star})\quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \neg\exists z\ Qz$$

Jeśli teraz spojrzymy na formuły:

$$(1^{\star})\quad \forall x\forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ Qz$$

$$(7^{\star})\quad \forall x\forall y\ xPy \wedge \neg\exists z\ Qz$$

to nie można nie zauważyć, że powstają one z formuł KRZ postaci $p \rightarrow q$ oraz $p \wedge \neg q$ przez podstawienie za p formuły $\forall x\forall y\ xPy$ a za q formuły $\exists z\ Qz$. Tak więc, w istocie badaliśmy, czy semantycznie sprzeczny jest zbiór formuł KRZ $\{p \rightarrow q, p \wedge \neg q\}$. Zbiór ten jest semantycznie sprzeczny, jako że każda z tych formuł jest semantycznie równoważna negacji drugiej: $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$ oraz $(p \rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$. W szczególności, formuła $(7^{\star})$ jest semantycznie równoważna formule następującej:

$$(8^{\star})\quad \neg(\forall x\forall y\ xPy \rightarrow \exists z\ Qz)$$

Wykonaliśmy więc kawał solidnej (?), żmudnej roboty, której można uniknąć, jeśli zna się już odrobinę logiki. Formuła $(8^{\star})$ jest, zgodnie z uczynioną przed chwilą obserwacją, semantycznie równoważna negacji formuły $(1^{\star})$.

A zatem w przywołanej brutalnej interpretacji formuła $(1^{\star})$ oraz formuła $(8^{\star})$ (semantycznie równoważna formule $(2^{\star})$, jak ustaliliśmy) odczytane mogą być np. tak:

Jest prawdą, że: *jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Nie jest prawdą, że: *jeśli każdy ze szczególnym okrucieństwem znęca się nad każdym, to ktoś doznaje sadystycznego zadowolenia.*

Najwyższy czas zakończyć analizę tego przykładu. Mamy nadzieję, że dostarczyła ona Czytelniczkom stosownego zadowolenia. A jeśli jeszcze nie, to proponujemy opisać światy, w których — przy przywołanej brutalnej interpretacji predykatów P oraz Q — prawdziwe są pojedynczo formuły $(1^{\star})$, $(2^{\star})$ oraz te światy, w których prawdziwe są pojedynczo negacje tych formuł. I wybrać świat dla siebie.

18.5.5.3. Wynikanie logiczne w KRP

Przypominamy, że formuła α ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X, gdy każdy model zbioru X jest też modelem α, tj. gdy α jest prawdziwa w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie elementy zbioru X. Ustalenie zachodzenia wynikania logicznego metodą wprost wymaga więc w ogólności przejrzenia nieskończenie wielu interpretacji, co nie jest oczywiście procedurą efektywną. Zauważmy jednak, że formuła $A\alpha$ ***nie*** wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy w co najmniej jednym modelu dla X formuła α jest fałszywa. Zatem, gdy dla ustalonego X oraz α uda się wykluczyć sytuację polegającą na tym, że w co najmniej jednej interpretacji formuła α jest fałszywa, a wszystkie formuły ze zbioru X są w tejże interpretacji prawdziwe, to potwierdzimy w ten sposób, że α wynika logicznie z X. Jeszcze inaczej mówiąc: jeśli wykluczymy przypadek, że wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg\alpha$ są współprawdziwe, to wykażemy, iż A wynika logicznie z X.

Ustalanie za pomocą metody tablic analitycznych czy dana formuła α wynika logicznie z danego (skończonego) zbioru formuł X polega na:

- założeniu, że wszystkie formuły z X są prawdziwe;
- przypuszczeniu, że formuła $\neg\alpha$ jest prawdziwa;
- zbudowaniu tablicy analitycznej, tj. drzewa, w którego pniu są wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg\alpha$.

Możliwe są następujące sytuacje:

- otrzymana tablica analityczna ma wszystkie gałęzie zamknięte; wtedy formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X;
- otrzymana tablica analityczna zawiera gałęzie otwarte; wtedy formuła α nie wynika logicznie ze zbioru X, a znalezione gałęzie otwarte pozwalają skonstruować takie interpretacje, które są modelami zbioru przesłanek X, a w których formuła α jest fałszywa.

W jeszcze innym sformułowaniu:

- formuła $A\alpha$ ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest ***semantycznie sprzeczny***;
- formuła α ***nie wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg\alpha\}$ jest ***semantycznie niesprzeczny***.

PRZYKŁAD 18.5.5.3.1.: ŚMIESZNI POLITYCY

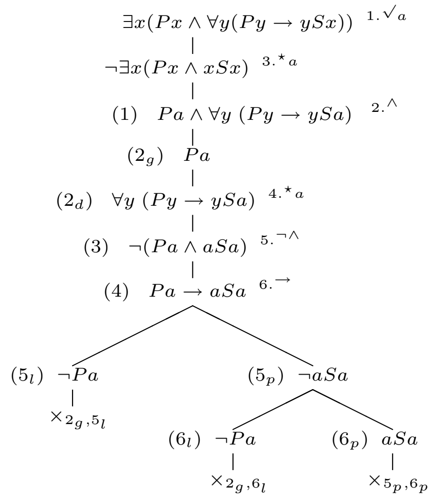
Polityka to sprawa poważna, dla dorosłych chłopców i dziewczynek. Nie zaprzątając sobie głowy tym, czy w podanym niżej wnioskowaniu przesłanka i wniosek są prawdziwe, ustalimy jaki jest związek logiczny między przesłanką i wnioskiem:

Z pewnego polityka śmieją się wszyscy politycy.
Zatem jakiś polityk śmieje się sam z siebie.

Wnioskowanie to przebiega wedle następującej reguły:

$$\frac{\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow ySx))}{\exists x(Px \wedge xSx)}$$

Gdyby reguła ta była niezawodna, to zbudowana wedle reguł sztuki tablica analityczna (w pniu drzewa przesłanka oraz zaprzeczony wniosek) miałaby wszystkie gałęzie zamknięte. Sprawdźmy:



I oto istotnie, wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Rozpatrywana reguła jest więc niezawodna: nie istnieje interpretacja, w której prawdziwa byłaby przesłanka, a wniosek fałszywy. A to oznacza, że wniosek wynika logicznie z przesłanki. Zatem ***każde*** wnioskowanie, przeprowadzone wedle powyższej reguły jest dedukcyjne: jeśli jego przesłanka jest prawdziwa, to i wniosek jest prawdziwy.

Jeśli nie szkoda ci czasu, to możesz spróbować odnieść uzyskany przed chwilą wynik do sytuacji politycznej np. w Rzeczpospolitej Polskiej. Zastanów się: czy aby uzyskać poczucie autoironii trzeba być najpierw wyśmianym przez wszystkich?

PRZYKŁAD 18.5.5.3.2.: SZALENI STUDENCI

Na prowadzonych przez nas zajęciach z logiki matematycznej nigdy dotąd nie doszło do aktów przemocy fizycznej, czego nie można powiedzieć — opierając się na doniesieniach prasowych — o wszystkich placówkach edukacyjnych w Rzeczpospolitej Polskiej. Może bezkonfliktowość naszego procesu dydaktycznego gwarantowana jest tym, że piszący te słowa, którego idolem jest Dawid ben Jesse, zawsze przychodzi na zajęcia z procą (która jest szybsza od siekiery, nawet dzierżonej przez niezrównaną Angelinę)?

Rozważmy wnioskowanie:

Wszyscy siedzący w tej sali to studenci.

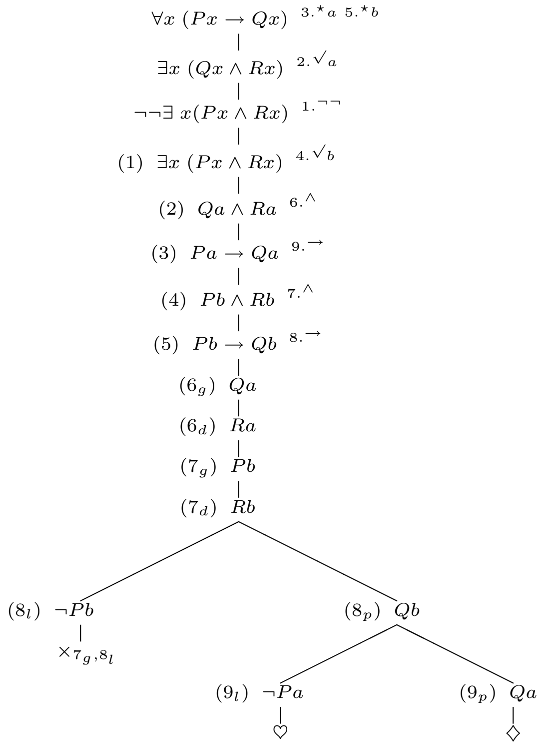
Wśród studentów jest szaleniec.

Stąd wynika, że wśród siedzących w tej sali nie ma szaleńca.

Reguła wnioskowania, wedle której powyższe wnioskowanie jest przeprowadzane, ma postać następującą:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (Px \rightarrow Qx) \\ \exists x\ (Qx \wedge Rx)\end{array}}{\neg\exists x\ (Px \wedge Rx)}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu są przesłanki tej reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku:



Widać, że w tabeli są gałęzie otwarte. Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych, nie można już zastosować żadnych reguł. Gałęzie otwarte odpowiadają interpretacjom, w których wszystkie przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zatem zawodna, a przeprowadzone wedle niej powyższe wnioskowanie nie jest dedukcyjne. Kontrprzykłady, tj. interpretacje, w których prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek podają poniższe tabelki:

♡	P	Q	R
a	–	+	+
b	+	+	+

♢	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	+

Zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją, druga z tych tabelek jest skrótowym zapisem dwóch tabelek: w jednej zamiast znaku zapytania wpisujemy znak plusa, a w drugiej w miejsce znaku zapytania wstawiamy znak minusa. Tak więc, z konstrukcji powyższego drzewa semantycznego można odtworzyć dwa kontrprzykłady na dedukcyjność rozważanego wnioskowania. Czy widzisz, dlaczego nie trzy?

Radzimy uważać na osobnika, który jest desygnatem stałej indywiduowej b. Nie namawiamy od razu do defenestracji, ale zalecamy zachować czujność.

Spróbuj zbudować drzewo semantyczne, w którego pniu będą trzy następujące formuły:

$$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$$
$$\exists x\ (Qx \wedge Rx)$$
$$\neg\exists x\ (Px \wedge Rx)$$

A teraz zastanów się, dlaczego zostałaś o to poproszona. Przecież nie chodziło tylko o bezduszne molestowanie intelektualne, prawda? Zapewniamy, że ani prośba ani pytanie nie są *tendencyjne*. Krótko mówiąc, chcemy zwrócić uwagę na związek między:

- badaniem, czy ze zbioru formuł $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ wynika logicznie formuła β;
- badaniem, czy zbiór formuł $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ jest semantycznie sprzeczny.

Brawo! Na pewno odgadłaś, że odpowiedź twierdząca na pierwsze z powyższych pytań jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy prawdziwa jest odpowiedź twierdząca na drugie z nich: ze zbioru formuł $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ wynika logicznie formuła β ***wtedy i tylko wtedy, gdy*** zbiór formuł $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ jest semantycznie sprzeczny. A zatem, w szczególności: $\exists x\ (Px \wedge Rx)$ wynika logicznie ze zbioru $\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx),\ \exists x\ (Qx \wedge Rx)\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuły:

$$\begin{array}{c} \forall x\ (Px \rightarrow Qx) \\ \exists x\ (Qx \wedge Rx) \\ \neg\exists x\ (Px \wedge Rx) \end{array}$$

tworzą zbiór semantycznie sprzeczny.

PRZYKŁAD 18.5.5.3.3.: KONSEKWENCJE NIEODWZAJEMNIANYCH UCZUĆ

W jednej ze scen słusznie bezoskarowego filmu ***Ostatni walczyk w Międzyzdrojach*** padają, przeplatane szlochem, słowa:

Każdy kogoś lubi.

Niektórzy lubią tylko tych, którzy ich nie lubią.

Zatem ktoś jest lubiany przez niesamoluba.

Uznajmy, że — poszukując formuł języka KRP reprezentujących budowę składniową tych zdań — mamy tu do czynienia z predykatem dwuargumentowym: $x_1 L x_2$ interpretujemy jako x_1 ***lubi*** x_2. Uznajmy także, że pasywizacji w języku naturalnym odpowiada branie konwersu relacji w KRP. Samolub to ktoś, kto lubi siebie, a niesamolub to ktoś, kto nie jest samolubem. Powyższe wnioskowanie, którego zmuszone były wysłuchać nieliczne nadbałtyckie mewy (a do wysłuchania którego nikt nie zmuszał równie nielicznych widzów) przebiega wedle następującej reguły wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y\ xLy \\ \exists x \forall y\ (xLy \rightarrow \neg yLx) \\ \hline \exists x \exists y\ (yLx \wedge \neg yLy) \end{array}$$

Zbadamy, czy reguła ta jest niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek.[16]

Zbudujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu będą przesłanki tej reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku. Wygląda ono tak:

[16]Przykład ten zaczerpnęliśmy z książki: G.N. Georgacarakos, R. Smith *Elementary Formal Logic*, McGraw-Hill, 1979, str. 315–317. Omawiamy go jednak nieco inaczej, niż cytowani Autorzy.

$\forall x \exists y\ xLy$ $\quad {}^{2.\star a}$

$\exists x \forall y\ (xLy \rightarrow \neg yLx)$ $\quad {}^{1.\surd a}$

$\neg \exists x \exists y\ (yLx \wedge \neg yLy)$ $\quad {}^{5.\star b}$

(1) $\forall y (aLy \rightarrow \neg yLa)$ $\quad {}^{4.\star a\ 6.\star b}$

(2) $\exists y\ aLy$ $\quad {}^{3.\surd b}$

(3) aLb

(4) $aLa \rightarrow \neg aLa$ $\quad {}^{11.\rightarrow}$

(5) $\neg \exists y\ (yLb \wedge \neg yLy)$ $\quad {}^{7.\star a}$

(6) $aLb \rightarrow \neg bLa$ $\quad {}^{8.\rightarrow}$

(7) $\neg(aLb \wedge \neg aLa)$ $\quad {}^{9.\neg\wedge}$

- (8_l) $\neg aLb$
  - $\times_{3,8_l}$
- (8_p) $\neg bLa$
  - (9_l) $\neg aLb$
    - $\times_{3,9_l}$
  - (9_p) $\neg\neg aLa$
    - (10_l) $\neg aLa$
      - $\times_{9,10_l}$
    - (10_p) $\neg aLa$
      - $\times_{9,10_p}$

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Wniosek wynika logicznie z przesłanek. W tablicy nie ma żadnych zbędnych (dla zamykania gałęzi) kroków.

Tak więc, dwoje (fikcyjnych!) aktorów (desygnaty stałych indywiduowych a oraz b) wystarczyło do odegrania sceny zamykania wszystkich gałęzi drzewa. . . ***Life's but a walking shadow. Poor player. . .*** itd., jak znakomicie pamiętają Humanistki.

Na koniec, te Czytelniczki, które kochają się wyłącznie bez wzajemności, niech nacieszą się chociaż szczęśliwym losem potencjalnej bohaterki (dedukcyjnego!) wnioskowania, od którego rozpoczęliśmy ten przykład: pokochanej przez jakiegoś niesamoluba. . .

PRZYKŁAD 18.5.5.3.4.: O KONIUNKCJACH ZDROWIA, BOGACTWA I SZCZĘŚCIA.

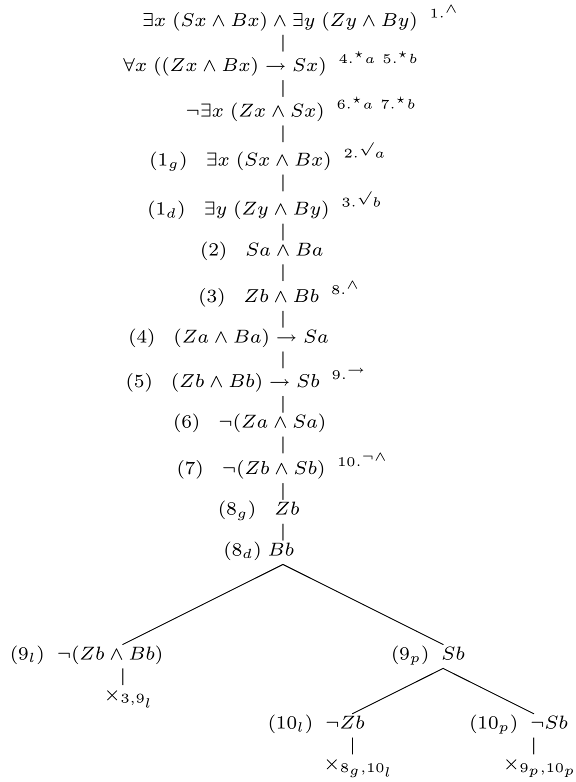
Być zdrowym, bogatym, szczęśliwym! Ma się rozumieć, także młodym (np. mniej niż stulatkiem). I żeby jeszcze kochały nas stworzenia takiej płci, ku której ciągnie nas nasza (zdrowa, bo przecie innej nie ma) orientacja seksualna. . . Dość marzeń, wracajmy do logiki. Rozpatrzmy wnioskowanie:

Co najmniej jeden szczęśliwy jest bogaty, a są i tacy, którzy nie dość, że są zdrowi, to są też bogaci. Zgodzicie się ze mną, że każdy, kto jest zdrowy i bogaty, jest też szczęśliwy. W takim razie musicie przyznać, że są tacy, którzy są jednocześnie zdrowi i szczęśliwi.

Przeprowadzone ono zostało wedle następującej reguły wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\ (Sx \wedge Bx) \wedge \exists y\ (Zy \wedge By) \\ \forall x\ ((Zx \wedge Bx) \rightarrow Sx)\end{array}}{\exists x\ (Zx \wedge Sx)}$$

Beznamiętnie sprawdzimy, czy jest to reguła niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Jeśli ta tablica będzie miała wszystkie gałęzie zamknięte, to wykluczona zostanie sytuacja, aby w jakiejś interpretacji wszystkie przesłanki reguły były prawdziwe, a wniosek reguły fałszywy. Innymi słowy, zamknięcie wszystkich gałęzi drzewa o pniu złożonym z przesłanek reguły oraz zaprzeczenia jej wniosku oznacza, że wniosek wynika logicznie z przesłanek.



Wszystkie gałęzie zostały zamknięte. Reguła jest niezawodna. Wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek. ***Każde*** wnioskowanie zbudowane wedle powyższej reguły jest dedukcyjne.

Zauważmy jeszcze, że — co czasem samo w sobie pochwały godne — stosowaliśmy się (prawie) ściśle do reguł budowania tablic analitycznych. Jednakże nie wszystkie wykonane kroki były niezbędne do zamknięcia wszystkich gałęzi: nie korzystaliśmy z formuł o numerach (2), (4), (6). Nadto, na kształt otrzymanego drzewa wpływ ma kolejność wykonywanych kroków; proszę zauważyć, że krok $^{8.\wedge}$, stosowany do formuły o numerze (3) można wykonać ***po*** wykonaniu kroku $^{10\neg\wedge}$ i wtedy formuły otrzymane w wyniku jego wykonania nie będą należały do pnia drzewa, lecz jedynie do gałęzi, na której znajdują się formuły o numerach (9_p) oraz (10_l) (oczywiście, numeracja kroków i formuł ulega wtedy zmianie). I tak to już jest: zauważenie, które kroki są (były) niezbędne przychodzi często dopiero po zbudowaniu całego drzewa ściśle wedle reguł. Pomijanie zbędnych kroków wymaga bystrości, którą uzyskuje się (rzadko) za darmo od Losu, a zwykle poprzez trening. Zachęcamy Czytelniczki, aby chyżo do owej bystrości zmierzały — niech dobrym początkiem przyszłego mistrzostwa w analizach logicznych będzie np. eleganckie uproszczenie powyższej tablicy tak, aby w jej konstrukcji nie występowały żadne zbędne kroki.

Zauważmy także, że większość owych zbędnych kroków można wyeliminować, jeśli nie będziemy zajmować się formułą o numerze (1_g); krok $^{2.\checkmark a}$ (i wszystkie inne, przezeń „prowokowane", tj. prowadzące do formuł o numerach (2), (4), (6)) jest dla zamknięcia gałęzi tablicy nieistotny. Zmierzamy ku zamykaniu gałęzi właściwie od kroku $^{3.\checkmark b}$, zastosowanego do formuły o numerze (1_d).

Konsekwencją ostatniej z powyższych uwag jest też to, że niezawodną regułą wnioskowania jest również reguła o postaci:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists y\,(Zy \wedge By)\\ \forall x\,((Zx \wedge Bx) \to Sx)\end{array}}{\exists x\,(Zx \wedge Sx)}$$

różniąca się od badanej przed chwilą reguły pominięciem pierwszego członu koniunkcji w pierwszej przesłance.

Pozostawiamy wolnej decyzji Czytelniczek ewentualne refleksje wiążące powyższe uwagi z wnioskowaniem od którego zaczęliśmy analizę w tym przykładzie. W szczególności, zauważmy, że przyjmowanie istnienia szczęściarza bogacza (niechby nazywał się np. John Coolcheek) nie wpływa na dedukcyjność tego wnioskowania. A czy je ***ubogaca***? To już problem pozalogiczny. Jak mawia mądry Orient: ***O nikim nie mów, że jest szczęśliwy, dopóki nie umrze.***

PRZYKŁAD 18.5.5.3.5.: UŚMIECHNIĘTY PARAFIANIN

Humanistki często pytają, czy logika ma jakikolwiek związek z ***Życiem***. Nie jest im na to pytanie łatwo odpowiedzieć, bowiem trzeba by najpierw w miarę precyzyjnie ustalić, co Humanistki przez ***Życie*** rozumieją. Nie filozofujmy więc i pozostańmy przy może nudnawych, ale jednak chyba kształcących intelekt ćwiczeniach logicznych. Rozważmy prostą, niewinną regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(Px \rightarrow Qx)\\ \exists y\,(Ry \wedge Qy)\end{array}}{\forall z\,(Pz \rightarrow Rz)}$$

Czy jest ona niezawodna?

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu są przesłanki oraz zaprzeczony wniosek. Jeśli wszystkie gałęzie tej tablicy będą zamknięte, to wykluczona zostanie możliwość, iż przesłanki są w jakiejś interpretacji prawdziwe, a wniosek w tejże interpretacji fałszywy. Jak pamiętamy, wykluczenie tej możliwości oznacza, że badana reguła wnioskowania jest niezawodna, wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeżeli natomiast tablica zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą, to reguła jest zawodna; z gałęzi otwartych odczytać możemy interpretacje, w których przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Oto tablica:

$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ $^{2.\star a\ 4.\star b}$

$\exists y\,(Ry \wedge Qy)$ $^{1.\surd a}$

$\neg\forall z\,(Pz \rightarrow Rz)$ $^{3.\surd b}$

(1) $Ra \wedge Qa$ $^{5.\wedge}$

(2) $Pa \rightarrow Qa$ $^{8.\rightarrow}$

(3) $\neg(Pb \rightarrow Rb)$ $^{6.\neg\rightarrow}$

(4) $Pb \rightarrow Qb$ $^{7.\rightarrow}$

(5_g) Ra

(5_d) Qa

(6_g) Pb

(6_d) $\neg Rb$

(7_l) $\neg Pb$ $\qquad$ (7_p) Qb

$\times_{6_g,7_l}$ $\qquad$ (8_l) $\neg Pa$ $\qquad$ (8_p) Qa

♣ $\qquad$ ♠

Tablica ma dwie gałęzie otwarte i do żadnej z formuł, na żadnej z tych gałęzi otwartych nie można już zastosować żadnej z reguł. Zatem nie jest wykluczone, że przesłanki reguły są prawdziwe w jakiejś interpretacji, w której wniosek tej reguły jest fałszywy. Oznacza to, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Reguła jest zawodna.

Kontrprzykłady, tj. interpretacje, w których przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

♣	P	Q	R
a	–	+	+
b	+	+	–

♠	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	−

A jaki to ma związek z życiem? — zapytają może Humanistki. No cóż, gdy wsłuchać się uważnie...

> *Drodzy parafianie, nie wierzycie, że zawsze i wszędzie rozpoznam bezbożnika? Otóż — najmilsi moi — każdy, kto uprawia (tfu!!!) seks oralny, ten głupkowato się śmieje. A chodzi tu taki jeden bezbożnik po naszej wsi i śmieje się głupkowato. A więc wynika stąd niezbicie, drogie moje owieczki, że każdy, kto seks oralny uprawia, bezbożnikiem jest. A ty tam, w ostatniej ławce, czemu śmiejesz się głupkowato?*

Czytelniczki nie powinny mieć najmniejszych trudności z przekonaniem się, iż powyższe wnioskowanie przebiega wedle badanej reguły. Nie jest więc ono wnioskowaniem dedukcyjnym. Jeśli chcemy interpretację wyznaczoną przez gałąź otwartą ♣ odnieść do parafii, w której życie biegnie inaczej, niż życzy sobie tego „logika" proboszcza, to należy znaleźć w niej np. pobożną, rozchichotaną parafiankę, utalentowaną w miłości „francuskiej" (denotacja stałej indywiduowej b) oraz np. wesołkowatego bezbożnego parafianina (denotacja stałej indywiduowej a), który nigdy nie znalazł się w zasięgu denotacji predykatu *uprawia seks oralny* (z jakichś swoich osobistych powodów — np. dlatego, że rozmiłowany w nim ksiądz z sąsiedniej parafii czule mu to odradził).

Wesołą parafię odpowiadającą gałęzi otwartej ♠ zechcą Czytelniczki opisać samodzielnie. Jako wskazówka niech służy to, że denotacja stałej indywiduowej b ma tu takie same własności, jak w parafii ♣ (i to właśnie żywot tej parafianki ma moc destrukcyjną wobec argumentacji proboszcza — pozostali parafianie uzyskują całkowitą swobodę w sferze seksualnej, byle trwali w wesołym bezbożnictwie).[17]

Proszę zauważyć, że w powyższej regule wnioskowania wystąpiły trzy różne zmienne związane: x, y oraz z. Jest chyba jasne, że równie dobrze posłużyć się można jedną tylko zmienną związaną, np. x.

Wszystkim Czytelniczkom życzymy, aby ich lica jak najczęściej ozdabiał wesoły uśmiech. ***Logic is fun.***

PRZYKŁAD 18.5.5.3.6.: CHĘTNA ZIUTA

Rozważmy regułę wnioskowania, w której występują jakieś stałe indywiduowe (w tym przypadku dwie: a oraz b):

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\, xPa \rightarrow \exists y\, aPy \\ \forall x\, (bQx \rightarrow xPa)\end{array}}{\forall x\, bQx \rightarrow \exists y\, aPy}$$

Zbadamy, czy jest ona niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeśli w rozważanych formułach występują stałe indywiduowe, to stosujemy najpierw, o ile wśród tych formuł są generalnie skwantyfikowane lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych, reguły $R(\forall)$ lub $R(\neg\exists)$ względem tych stałych. Dopiero w dalszej kolejności — jeśli jest to możliwe (i potrzebne) — wprowadzamy ewentualnie nowe stałe.

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku. Jeśli wszystkie gałęzie tej tablicy zostaną zamknięte, to reguła jest niezawodna: nie może istnieć interpretacja, w której wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy, a więc wniosek wynika logicznie z przesłanek. Gdyby któraś z gałęzi pozostała otwarta, to wniosek nie wynikałby logicznie z przesłanek; z takiej otwartej gałęzi odczytalibyśmy jak zbudować interpretację, w której prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek reguły. Oto tablica:

[17] Mnogie w tym wykładzie przykłady, które ktoś mógłby odczytać jako wyraz dobrodusznej ironii wobec działań perswazyjnych kleru w sferze seksualnej lub fiskalnej mogą być oczywiście zastąpione innymi przykładami, np. dotyczącymi ochrony środowiska lub Regulaminu Musztry. Logika jest aseksualna i aklerykalna. (Nie jestem pewien, jak zareaguje na poprzednie zdanie mój polonista pierwszego kontaktu.) Jedenaste przykazanie brzmiało podobno: *Będziesz czerpał(a) radość z seksu*, ale ten kawałek Tablic się ukruszył. Nie jest naszym zamiarem urażanie czyichkolwiek uczuć, przekonań i nastrojów religijnych. Pomyślcie przy okazji, przed jakimi dylematami stają Ateistki: co mają zrobić, poproszone o odmówienie modlitwy? ODMÓWIĆ I NIE ODMÓWIĆ czy też NIE ODMÓWIĆ I ODMÓWIĆ? Sytuacja Boga też pozazdroszczenia godna nie jest — podobno zniecierpliwiony rzekł niedawno do św. Piotra: *Słuchaj, gdyby przyszli jacyś ateiści, to mów, że* ***Mnie nie ma.***

$$
\begin{array}{c}
\exists x\, xPa \rightarrow \exists y\, aPy \\
| \\
\forall x\, (bQx \rightarrow xPa)^{\ 2.\star a} \\
| \\
\neg(\forall x\, bQx \rightarrow \exists y\, aPy)^{\ 1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\quad \forall x\, bQx^{\ 3.\star a} \\
| \\
(1_d)\quad \neg\exists y\, aPy^{\ 4.\star a} \\
| \\
(2)\quad bQa \rightarrow aPa^{\ 5.\rightarrow} \\
| \\
(3)\quad bQa \\
| \\
(4)\quad \neg aPa
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
(5_l)\quad \neg bQa & (5_p)\quad aPa \\
| & | \\
\times_{3,5_l} & \times_{4,5_p}
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tablicy zostały zamknięte, a więc reguła jest niezawodna, wniosek wynika logicznie z przesłanek. Zauważmy, że do zamknięcia wszystkich gałęzi wystarczyło rozwinięcie formuł generalnie skwantyfikowanych względem tylko stałej a. Nadto, pierwsza przesłanka w ogóle nie musiała być brana pod uwagę w tak planowanym budowaniu tablicy, aby zamknąć wszystkie jej gałęzie. Oznacza to, że wniosek wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej; reguła wnioskowania złożona z przesłanki drugiej oraz wniosku też jest niezawodna.

Wedle powyższej reguły zbudować można zatem nieskończenie wiele dedukcyjnych wnioskowań, lub choćby tylko 666 przykładów takich wnioskowań. My ograniczmy się do jednego:

Jeśli ktoś jest miły dla Ziuty, to i Ziuta jest miła dla kogoś.

Każdy, kto jest przekupiony przez Wacka, jest miły dla Ziuty.

Zatem, jeśli Wacek przekupił wszystkich, to Ziuta jest dla kogoś miła.

Ponieważ wniosek badanej reguły wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej (jak przed chwilą ustaliliśmy), więc również następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Przekupieni przez Wacka są mili dla Ziuty.

Stąd, jeśli Wacek przekupił wszystkich, to Ziuta jest dla kogoś miła.

Uprzejmie proszę zadumać się chwilę nad ***siłą pieniądza*** i jej wpływie na kobiece nastroje oraz zachowania. Jak prawdopodobnie już (boleśnie) się przekonaliście, relacja ***być miłym dla*** jednak ***nie*** jest symetryczna: to, że Adam jest miły dla Chawy, nie implikuje, iż Chawa jest miła dla Adama. A tu przychodzi taki Wacek, przekupuje wszystkich, wszyscy przekupieni czynią umizgi do Ziuty i nagle — ***cud***: nieprzystępna Ziuta staje się dla kogoś miła!

Z rozczuleniem wspominamy wszystkie miłe dla nas Humanistki. Tym bardziej, że nigdy nie mieliśmy niczego, czym moglibyśmy kogokolwiek przekupić.

PRZYKŁAD 18.5.5.3.7.: UWAGA NA KAPUSTĘ

Spójrzmy na niewinnie wyglądającą regułę wnioskowania:

$$
\begin{array}{c}
\forall x \forall y\, (xPy \vee \neg yPy) \\
\exists x \forall y\, xPy \\
\hline
\exists y \exists x\, (xPy \wedge yPx)
\end{array}
$$

Pokażemy, że jest ona niezawodna, a więc, że w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie (tu: obie) przesłanki, prawdziwy jest też wniosek. Zgodnie z regułami sztuki, przekonamy wszelkich niedowiarków o tym w ten sposób, iż wykluczymy możliwość, aby istniała interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Istotnie, tablica analityczna, czyli drzewo, w którego pniu są obie przesłanki oraz zaprzeczony wniosek ma wszystkie gałęzie zamknięte:

$$\forall x \forall y\ (xPy \vee \neg yPy)$$
$$\exists x \forall y\ xPy \quad {}^{1.\checkmark a}$$
$$\neg \exists y \exists x\ (xPy \wedge yPx) \quad {}^{3.\star a}$$
$$(1) \quad \forall y\ aPy \quad {}^{2.\star a}$$
$$(2) \quad aPa$$
$$(3) \quad \neg \exists x\ (xPa \wedge aPx) \quad {}^{4.\star a}$$
$$(4) \quad \neg(aPa \wedge aPa) \quad {}^{5.\neg\wedge}$$
$$(5_l) \quad \neg aPa \qquad\qquad (5_p) \quad \neg aPa$$
$$\times_{2,5_l} \qquad\qquad\qquad \times_{2,5_p}$$

Wszystkie gałęzie zamknięte. Reguła niezawodna. Wniosek wynika logicznie z przesłanek. Zauważmy ponadto, że nie korzystaliśmy z przesłanki pierwszej przy rozbudowywaniu tablicy, a więc wniosek wynika logicznie z samej przesłanki drugiej. Stosowanie reguły $R(\forall)$ w przesłance pierwszej względem wprowadzonej stałej a nie jest oczywiście zabronione, ale jest niepotrzebne dla zamknięcia wszystkich gałęzi. Tak więc, warto zwracać uwagę na to, w jakiej kolejności stosujemy reguły — sprytnie dobrana kolejność pozwala na zaniechanie pewnych kroków, uzyskanie efektów estetycznych (bardziej smukłe drzewo) i zaoszczędzenie czasu, który można wykorzystać na nieprzebranie wiele sposobów, aprobowanych bądź nieaprobowanych przez Watykan.

Z nieskończenie wielu dedukcyjnych wnioskowań zbudowanych wedle powyższej reguły wybierzmy, dla ilustracji, jedno:

Dla dowolnych dwóch obywateli, pierwszy donosi na drugiego lub drugi nie donosi na siebie. Ktoś donosi na wszystkich. Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.

Zauważmy jeszcze, że formuła $\forall x \forall y\ (xPy \vee \neg yPy)$ jest logicznie równoważna formule $\forall x \forall y\ (yPy \rightarrow xPy)$ (może nam ufasz, ale sprawdź też sama!), a „przekład" drugiej z tych formuł na język naturalny bywa (z jakichś względów — psychologicznych, stylistycznych,. . .) odbierany jako „bardziej przyjazny, naturalny" przez Humanistki. Parafrazę pierwszej przesłanki w podanej interpretacji można więc przeczytać np.: *Dla dowolnych dwóch obywateli, pierwszy donosi na drugiego, o ile drugi donosi też na siebie.* Jest także chyba oczywiste, że słowo *obywatel* pełni tu funkcję czysto stylistyczną, ratującą „przekład" z języka KRP na polski.

I ostatnia w analizie tego przykładu wiadomość, pod uwagę socjologom, służbom specjalnym, ale przede wszystkim Humanistkom ufnym w wielokrotnie w tym skrypcie przywoływaną Eufonię Słowa. Skoro, jak ustaliliśmy, wniosek powyższej reguły wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej, tj. reguła:

$$\frac{\exists x \forall y\ xPy}{\exists y \exists x\ (xPy \wedge yPx)}$$

jest niezawodna, to następujące wnioskowanie przeprowadzone wedle tej reguły jest — ***o zgrozo*** — dedukcyjne:

Ktoś donosi na wszystkich.

Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.

Zastanów się nad podłością tego świata: jakże zaraźliwe jest donosicielstwo — wystarczy, aby choć jeden osobnik kapował na kogo popadnie, a już gdzieś tam narasta wzajemna podejrzliwość — donoszą na siebie nawzajem teściowa i synowa, lub Bolek i Lolek, albo Jacek i Agatka, itd.

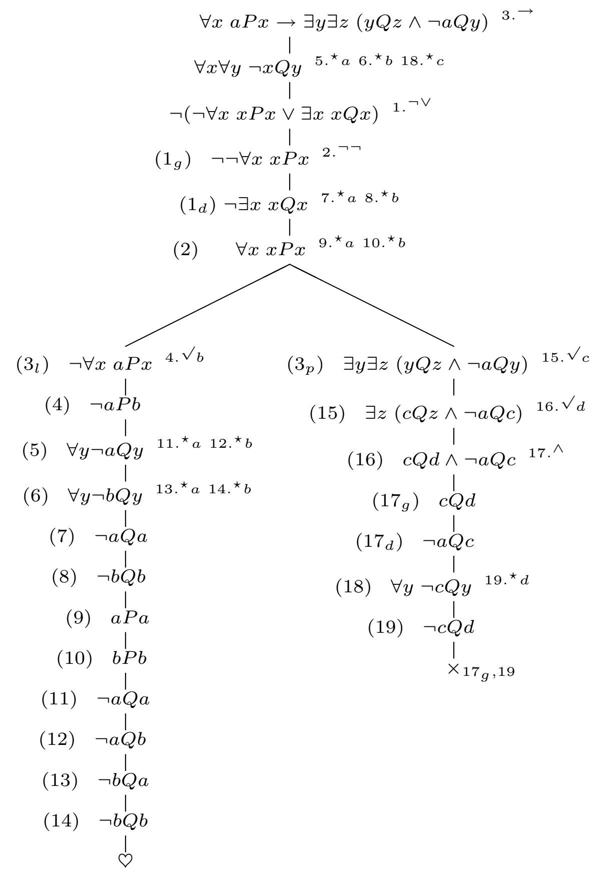
PRZYKŁAD 18.5.5.3.8.: SCHEDA LENINOWSKA

Jest nieskończenie wiele niezawodnych reguł wnioskowania, ale jest też nieskończenie wiele reguł zawodnych. Za chwilę ujrzysz jedną z tych drugich. Nauczeni doświadczeniem dydaktycznym uznajemy za właściwe podkreślenie następującego stwierdzenia: dowolna reguła wnioskowania albo ***jest niezawodna***, albo ***jest zawodna* — nie ma *trzeciej*** możliwości, nie jest tak, że ***czasem wynika, a czasem nie wynika***, jak z brawurą słowa wyprzedzającego myśl mawiają niekiedy Humanistki. Upraszamy oczywiście, aby tego komentarza nie traktować jako nietaktownego.

Przyjrzyjmy się następującej regule wnioskowania, w której występują predykaty dwuargumentowe P oraz Q, a także stała indywiduowa a:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ aPx \rightarrow \exists y \exists z\ (yQz \wedge \neg aQy) \\ \forall x \forall y\ \neg xQy\end{array}}{\neg \forall x\ xPx \vee \exists x\ xQx}$$

A teraz zbudujmy tablicę analityczną, tj. drzewo o pniu złożonym z obu przesłanek reguły oraz jej zaprzeczonego wniosku. Jeśli ta tablica będzie miała gałąź otwartą, to rozważana reguła jest zawodna: z takiej gałęzi otwartej odtworzymy interpretację, w której zarówno przesłanki reguły, jak i zaprzeczenie jej wniosku będą prawdziwe. A w takiej interpretacji przesłanki reguły są prawdziwe, zaś jej wniosek fałszywy, więc istnienie takowej interpretacji świadczy o zawodności reguły.



Tablica zawiera gałąź otwartą (i do żadnej formuły na tej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł), a więc badana reguła wnioskowania jest zawodna, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Informacja zawarta na gałęzi otwartej pozwala na skonstruowanie takiej interpretacji, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Konstrukcja ta polega na podaniu uniwersum oraz denotacji w nim predykatów P oraz Q. Potrzebne uniwersum jest dwuelementowe (złożone z desygnatów stałych indywiduowych a oraz b), relacje będące denotacjami predykatów podane są w poniższych tabelkach. Przypominamy, że znak „+" na przecięciu danego wiersza i danej kolumny oznacza, iż relacja zachodzi między elementem z tego wiersza a elementem z tej kolumny, znak „−", że nie zachodzi. Jeśli informacja, czy relacja zachodzi, czy nie zachodzi między danymi elementami nie znalazła się w rozważanej gałęzi otwartej, to na przecięciu stosownego wiersza i kolumny umieszczamy znak „?" (oznacza to, że może w takim miejscu wystąpić zarówno „+", jak i „−").

P	a	b
a	+	–
b	?	+

Q	a	b
a	–	–
b	–	–

Zauważmy jeszcze, że pracę na prawej gałęzi (formuła o numerze (3_p) i formuły pod nią) udało się zakończyć bardzo sprawnie, zamykając tę gałąź — w szczególności, nie stosowaliśmy reguły $R(\forall)$ względem stałej a, bo nie było takiej potrzeby. Wprowadzenie nowych stałych indywiduowych c i d i wykonanie kroków $^{18^\star c}$ oraz $^{19^\star d}$ pozwoliło na uzyskanie pary formuł wzajem sprzecznych.

Przy następującej ponurej interpretacji predykatów P oraz Q i stałej indywiduowej a:

xPy interpretujemy jako — x ***z troską przejmuje się losem*** y;

xQy interpretujemy jako — x ***ufa*** y;

stała indywiduowa a denotuje ***Józefa Stalina***;[18]

wnioskowaniem (zawodnym!) przeprowadzonym wedle rozważanej reguły jest:

Jeśli Józef Stalin z troską przejmuje się losem wszystkich, to pewnemu obywatelowi, który komuś ufa, towarzysz Stalin nie ufa.

Nikt nikomu nie ufa.

Zatem nie każdy przejmuje się z troską własnym losem lub ktoś ufa samemu sobie.

Prosimy jeszcze zauważyć, że na mocy znanego prawa KRZ wniosek powyższego wnioskowania jest równoważny stwierdzeniu: *Jeśli każdy z troską przejmuje się swoim losem, to ktoś ufa sobie samemu.*

Towarzysz Lenin ponoć mawiał dobrotliwie mniej więcej tak: *Ufać dobrze, kontrolować lepiej.* Nie wiemy, czy myśl tę kończył jakimś ***leninowskim superlatywem***.

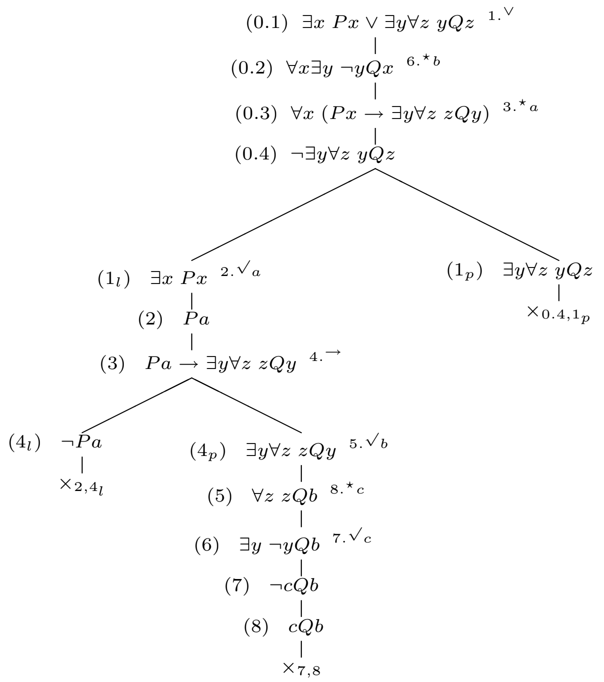
PRZYKŁAD 18.5.5.3.9.: CUDA SIĘ ZDARZAJĄ, LECZ NIE POWTARZAJĄ

Pokażemy, że niezawodna jest następująca reguła:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\ Px \lor \exists y \forall z\ yQz \\ \forall x \exists y\ \neg yQx \\ \forall x\ (Px \to \exists y \forall z\ zQy)\end{array}}{\exists y \forall z\ yQz}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku badanej reguły:

[18] Drogie Czytelniczki mają szczęście żyć w świecie, w którym denotacja tej stałej jest już truchłem. Nie każdy zdążył to o sobie powiedzieć.



Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a to oznacza, że rozpatrywana reguła wnioskowania jest niezawodna. Nie istnieje więc interpretacja, w której prawdziwe byłyby wszystkie przesłanki tej reguły, a fałszywy jej wniosek. Zatem wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek.

Zauważmy, że nie wykonywano mechanicznie wszystkich zalecanych reguł, wybierając te (np. krok $^{7.\surd c}$, w którym wprowadzamy nową stałą indywiduową c), które doprowadziły do jak najszybszego zamknięcia wszystkich gałęzi. Nie ma w przypadku takich „usprawnień” żadnego algorytmu, jest to sprawa pomysłu i sprzyjających okoliczności.

Zwróćmy uwagę jeszcze i na to, iż w poddrzewie o korzeniu (1_l) nie wykorzystywano (z oczywistych powodów!) drugiego członu alternatywy, którą jest przesłanka pierwsza (tj. formuła o numerze (0.1)); ale nie wykorzystywano również zanegowanego wniosku (tj. formuły o numerze (0.4)) rozpatrywanej reguły. Oznacza to, że przesłanki druga (tj. formuła o numerze (0.2)) i trzecia (tj. formuła o numerze (0.3)) wraz z formułą o numerze (1_l) tworzą zbiór ***semantycznie sprzeczny***.

W pewnym sensie, ilustrowanie niezawodnych reguł wnioskowania (lub praw logiki) przykładami użyć języka naturalnego jest czynnością nużąco bezsensowną. Skoro np. wyżej rozważana reguła jest niezawodna, to ***jakkolwiek*** zinterpretujemy występujące w niej predykaty, to o ile przesłanki będą prawdziwe, to i wniosek będzie prawdziwy. Po co więc cokolwiek ilustrować? Z drugiej strony, trening logiczny powinien brać pod uwagę nie tylko (często arcytrudne!) odnajdywanie struktur logicznych w analizowanych wypowiedziach języka naturalnego, ale także (zwykle łatwiejsze) ćwiczenia polegające np. na umiejętności uprzytomnienia sobie, że gotowe formuły oraz reguły mają walor uniwersalności aplikacyjnej — nadto, ***są one dobrem publicznym, ich używanie jest bezpłatne!!!*** Wreszcie, nie możemy przecież zostawić bezbronnych, ufnych w Eufonię Słowa młodych Humanistek całkowicie na pastwę nagich, nieprzybranych kojącymi wtrętami lingwistycznymi, praw logiki. Tak więc, niech np.:

Px będzie interpretowane jako — x ***jest cudem (zdarzeniem cudownym, nadprzyrodzonym)***;

xQy będzie interpretowane jako — ***(zdarzenie)*** x ***jest przyczyną (zdarzenia)*** y (co odczytywać też będziemy jako y ***jest skutkiem*** x).

Wtedy następujące wnioskowanie przeprowadzone jest wedle wyżej zbadanej reguły, a ponieważ jest ona niezawodna, jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

($*$) *Cuda się zdarzają lub istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń. Dla każdego zdarzenia istnieje (co najmniej jedno) zdarzenie, które nie jest jego przyczyną. Dla dowolnego zdarzenia cudownego istnieje zdarzenie, które jest skutkiem wszystkich zdarzeń. Zatem istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń.*

Nie twierdzimy, że istnieje dokładna odpowiedniość między formułami KRP a zdaniami języka naturalnego. ***Mądra Księga*** też tak nie twierdzi. Nie można jednak straszyć Humanistek samymi formułkami: proste znaczeniowo, nieułomne gramatycznie i niezbyt zgrzebne stylistycznie przykłady rozsiane w tekście mają być wyrazem naszej empatii dydaktycznej.

Ponieważ, jak stwierdziliśmy powyżej, formuły:

$$\exists x\ Px$$
$$\forall x \exists y\ \neg y Q x$$
$$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y \forall z\ z Q y)$$

tworzą zbiór semantycznie sprzeczny, więc przy każdej (a zatem także podanej wyżej) interpretacji predykatów P oraz Q otrzymany tekst będzie, jako całość, absurdalny, choćby ***ubogacać*** go najbardziej wykwintnymi stylistycznie ozdobnikami; zainteresowane Czytelniczki mogą wykonać taką pracę stylistyczną nad inkryminowanym tekstem:

Cuda się zdarzają. Dla każdego zdarzenia istnieje zdarzenie, które nie jest jego przyczyną. Dla każdego zdarzenia cudownego istnieje zdarzenie, które jest skutkiem wszystkich zdarzeń.

Teilhard de Chardin nie polubiłby tego przykładu, to pewne.

Zauważmy na koniec, że pierwsza przesłanka omawianej reguły jest semantycznie równoważna, na mocy znanych tautologii KRZ, każdej z następujących implikacji:

$$\neg \exists x\ Px \rightarrow \exists y \forall z\ y Q z$$

$$\neg \exists y \forall z\ y Q z \rightarrow \exists x\ Px$$

Tak więc, pierwsze zdanie (alternatywę) w tekście ($*$) zastąpić można np. każdym ze zdań:

Jeśli nie ma cudów, to wszystkie zdarzenia mają wspólną przyczynę.

Cuda się zdarzają, o ile nie istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń.

Można igrać dalej z tym przykładem, figlując z czasem gramatycznym oraz liczbą gramatyczną, itp. Takie niewinne zabawy mogą pomóc Czytelniczkom w uświadomieniu sobie, w jakim sensie struktury logiczne są NIEZMIENNIKAMI niektórych operacji językowych (np. parafrazowania).

18.6. TA w KRP a własności metalogiczne KRP

Wykorzystamy metodę TA w dowodach kilku twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP.

18.6.1. Prefiksowe postacie normalne i skolemizacja

W KRZ każda formuła jest inferencyjnie równoważna pewnej formule w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN), a także pewnej formule w alternatywnej postaci normalnej (APN). Fakt ten może być wykorzystany w dowodzie twierdzenia o pełności KRZ, ma także inne zastosowania.

W KRP również dysponujemy metodą sprowadzania dowolnej formuły języka tego rachunku do pewnej standardowej postaci normalnej. Pokażemy mianowicie, że dowolna formuła języka KRP jest równoważna (tablicowo) formule, która rozpoczyna się ciągiem kwantyfikatorów, po którym następuje formuła bez kwantyfikatorów. Podobne twierdzenie o równoważności inferencyjnej zachodzi dla aksjomatycznego ujęcia KRP (zob. wykłady 20–21). Nadto, pokażemy, że poprzez wprowadzenie nowych symboli funkcyjnych można wyeliminować wszystkie kwantyfikatory egzystencjalne z owego ciągu.

18.6.1.1. Definicje

DEFINICJA 18.6.1.1. ***Inferencyjna równoważność (tablicowa).***

Mówimy, że formuły A i B języka KRP są ***inferencyjnie równoważne***, gdy drzewo semantyczne formuły $\neg(A \equiv B)$ jest zamknięte.

DEFINICJA 18.6.1.2. ***Równospełnialność.***

Mówimy, że formuły A i B języka KRP są ***równospełnialne***, gdy zbiór $\{A\}$ jest semantycznie niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{B\}$ jest semantycznie niesprzeczny.

DEFINICJA 18.6.1.3. ***Prefiksowe postacie normalne.***

Mówimy, że formuła A języka KRP jest w ***prefiksowej postaci normalnej***, gdy jest ona postaci $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ B$, gdzie B jest formułą bez kwantyfikatorów, a każdy symbol Q_i jest jednym z kwantyfikatorów: $\forall$ lub $\exists$. Jeśli w dodatku B jest w KPN, to mówimy, że A jest w ***koniunkcyjnej prefiksowej postaci normalnej***. Ciąg $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ nazywamy ***prefiksem*** formuły A, a formułę B jej ***matrycą***.

DEFINICJA 18.6.1.4. ***Formuły uniwersalne.***

Przez ***formułę uniwersalną*** rozumiemy każdą formułę w prefiksowej postaci normalnej, w której prefiksie występują jedynie kwantyfikatory generalne.

W następującym Lemacie przywołuje się równoważności, na mocy których możemy przekształcać dowolną formułę języka KRP w odpowiadającą jej (inferencyjnie równoważną) formułę w prefiksowej postaci normalnej. Intuicyjnie mówiąc, Lemat ten daje wskazówki, jak „wyciągać” kwantyfikatory z formuły do jej prefiksu (z zachowaniem inferencyjnej równoważności).

LEMAT 18.6.1.1.

Dla dowolnego ciągu kwantyfikatorów $\overrightarrow{Qx} = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ oraz dowolnych formuł A i B zachodzą następujące równoważności:

- $\overrightarrow{Qx}\neg\forall yA \equiv \overrightarrow{Qx}\exists y\neg A$.
- $\overrightarrow{Qx}\neg\exists yA \equiv \overrightarrow{Qx}\forall y\neg A$.
- $\overrightarrow{Qx}(\forall yA \vee B) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A(z/y) \vee B)$.
- $\overrightarrow{Qx}(A \wedge \forall yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A \wedge B(z/y))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists yA \wedge B) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A(z/y) \wedge B)$.
- $\overrightarrow{Qx}(A \wedge \exists yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A \wedge B(z/y))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\forall yA \vee B) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A(z/y) \vee B)$.
- $\overrightarrow{Qx}(A \vee \forall yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A \vee B(z/y))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists yA \vee B) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A(z/y) \vee B)$.
- $\overrightarrow{Qx}(A \vee \exists yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A \vee B(z/y))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\forall yA \rightarrow B) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A(z/y) \rightarrow B)$.

- $\overrightarrow{Qx}(A \rightarrow \forall yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A \rightarrow B(z/y))$.
- $\overrightarrow{Qx}(\exists yA \rightarrow B) \equiv \overrightarrow{Qx}\forall z(A(z/y) \rightarrow B)$.
- $\overrightarrow{Qx}(A \rightarrow \exists yB) \equiv \overrightarrow{Qx}\exists z(A \vee B(z/y))$.

We wszystkich tych równoważnościach z jest zmienną nie występującą po lewej stronie równoważności.

DOWÓD.

Pozostawiamy czytelnikom jako ćwiczenie pokazanie, że tablice analityczne negacji wszystkich powyższych równoważności są sprzeczne.

Uwaga. Będziemy traktować spójnik równoważności materialnej $\equiv$ jako skrót definicyjny. Inaczej mówiąc, każdą formułę postaci $A \equiv B$ zapisujemy jako $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

TWIERDZENIE 18.6.1.1.

Dla dowolnej formuły A języka KRP istnieje równoważna jej formuła A' w prefiksowej postaci normalnej, o tych samych zmiennych wolnych co A. Każdą taką formułę A' nazywamy ***prefiksową postacią normalną*** formuły A.

DOWÓD. Przez indukcję po budowie formuły A. W krokach indukcyjnych należy skorzystać z lematu 18.6.1.1. Szczegóły pozostawiamy czytelnikom.

LEMAT 18.6.1.2.

Dla dowolnego zdania $A = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists yB$ języka KRP sygnatury σ zdanie

$$A' = \forall x_1 \ldots \forall x_n B(f(\forall x_1, \ldots, x_n))$$

gdzie f jest nowym symbolem funkcyjnym spoza σ, jest równospełnialne z A.

DOWÓD.

Niech $\sigma' = \sigma \cup \{f\}$. Jeśli $\mathfrak{M}'$ jest strukturą sygnatury σ' i $\mathfrak{M}' \models A'$, to dla struktury $\mathfrak{M}$ otrzymanej z $\mathfrak{M}'$ przez opuszczenie interpretacji symbolu f zachodzi $\mathfrak{M} \models A$. Z drugiej strony, jeśli $\mathfrak{M}$ jest strukturą sygnatury σ i $\mathfrak{M} \models A$, to możemy rozszerzyć $\mathfrak{M}$ do struktury $\mathfrak{M}'$ przez zdefiniowanie denotacji $\Delta_{\mathfrak{M}'}(f)$ w taki sposób, aby dla wszystkich $\Delta_{\mathfrak{M}'}(a_1), \ldots, \Delta_{\mathfrak{M}'}(a_n) \in dom(\mathfrak{M}') = dom(\mathfrak{M})$ zachodziło $\mathfrak{M} \models A(f(a_1, \ldots, a_n)/y)$. Wtedy także $\mathfrak{M}' \models A'$.

TWIERDZENIE 18.6.1.2.

Dla dowolnego zdania A języka KRP sygnatury σ istnieje formuła uniwersalna A' w języku KRP sygnatury σ rozszerzonej o nowe symbole funkcyjne taka, że A oraz A' są równospełnialne.

DOWÓD.

Na mocy Twierdzenia 18.6.1.1. wystarczy założyć, że A jest w koniunkcyjnej postaci normalnej. Niech $y_1, \ldots y_n$ będą wszystkimi zmiennymi egzystencjalnie skwantyfikowanymi w A (w porządku ich wystąpienia w prefiksie A). Dla każdego $\leqslant i \leqslant n$ niech $x_1, \ldots, x_{n_i}$ będą wszystkimi zmiennymi generalnie skwantyfikowanymi poprzedzającymi y_i w prefiksie A. Rozszerzamy sygnaturę σ przez dodanie dla każdego $\leqslant i \leqslant n$ nowego n_i symbolu funkcyjnego f_i. Formułę A' otrzymujemy z formuły A przez usunięcie z prefiksu A wszystkich kwantyfikatorów egzystencjalnych oraz zastąpienie wszystkich wystąpień y_i przez $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$. Dla wykazania, że A' jest równospełnialna z A wystarczy n razy zastosować Lemat 6.3.3.

Każdą formułę A' spełniającą tezę powyższego twierdzenia nazywamy ***skolemową postacią normalną*** formuły A.

Na mocy powyższego twierdzenia tworzenie drzew semantycznych dla (negacji) dowolnych formuł języka KRP można sprowadzić do tworzenia drzew semantycznych dla (negacji) formuł uniwersalnych. Zobaczymy w dwóch następnych podrozdziałach, jakie fakt ten ma znaczenie.

18.6.1.2. Przykłady

PRZYKŁAD 18.6.1.2.

Rozważmy dwie formuły:

- (1) $\forall x \exists y P(x,y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x,y)$
- (2) $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$.

Formułę w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie z (1) możemy znaleźć np. w następujący sposób:

- $\forall x \exists y P(x,y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x,y)$
- $\forall u (\exists y P(u,y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x,y))$
- $\forall u \exists v (P(u,v) \vee \neg \exists x \forall y Q(x,y))$
- $\forall u \exists v (P(u,v) \vee \forall x \neg \forall y Q(x,y))$
- $\forall u \exists v (P(u,v) \vee \forall x \exists y \neg Q(x,y))$
- $\forall u \exists v \forall w (P(u,v) \vee \exists y \neg Q(w,y))$
- $\forall u \exists v \forall w \exists z (P(u,v) \vee \neg Q(w,z))$.

Formułę w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie z (2) możemy znaleźć np. w następujący sposób:

- $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$
- $\forall x \forall y \forall w ((P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$
- $\forall x \forall y \forall w \exists z ((P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow Q(x,y,z))$.

Możliwymi postaciami skolemowymi formuł (1) oraz (2) są np.:

- $(1)' \quad \forall u \forall w (P(u, f(u)) \vee \neg Q(w, g(u,w)))$
- $(2)' \quad \forall x \forall y \forall w ((P(x,w) \wedge P(y,w)) \rightarrow Q(x,y,f(x,y,w)))$.

18.6.2. Zwartość

TWIERDZENIE 18.6.2.1. ***Twierdzenie o zwartości.***

Zbiór zdań S języka KRP jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór S jest spełnialny.

DOWÓD.

Dowód implikacji prostej jest natychmiastowy. Dla dowodu implikacji odwrotnej przypuśćmy, że S nie jest spełnialny. Wtedy, na mocy twierdzenia o pełności metody tablic analitycznych w KRP, istnieje dowód tablicowy zdania $\alpha \wedge \neg\alpha$ ze zbioru założeń S. Pokażemy, że pewien skończony podzbiór zbioru S nie jest spełnialny.

Rozważmy systematyczną tablicę analityczną D ze zbioru założeń S i o korzeniu $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Jeśli D jest sprzeczna, to, na mocy twierdzenia 18.4.2., D jest skończona. Gdyby D była nieskończona, to zawierałaby gałąź otwartą. Wtedy, na mocy twierdzenia 18.5.4.1., istniałaby struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models \beta$ dla wszystkich $\beta \in S$, co stoi w sprzeczności z założoną niespełnialnością S. Tablica D jest zatem sprzeczna i skończona. Istnieje zatem skończony podzbiór zbioru S, powiedzmy S_0 złożony ze zdań występujących w D. Zbiór S_0 nie może być spełnialny, ponieważ skoro $S_0 \subseteq S$ oraz $S \models \alpha \wedge \neg\alpha$, to $S_0 \models \alpha \wedge \neg\alpha$. Oczywiście, nie istnieje model dla $\alpha \wedge \neg\alpha$, a więc nie istnieje również model dla S_0.

18.6.3. Twierdzenie Löwenheima-Skolema

TWIERDZENIE 18.6.3.1. ***Twierdzenie Löwenheima-Skolema.***

Jeśli przeliczalny zbiór zdań S języka KRP jest spełnialny (tj. ma model), to S ma model przeliczalny.

DOWÓD.

Rozważmy systematyczną tablicę analityczną D z założeń S i o korzeniu $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla dowolnego wybranego zdania α. Na mocy twierdzenia o trafności metody tablic analitycznych w KRP, D nie może być dowodem tablicowym formuły $\alpha \wedge \neg\alpha$ (gdyż to oznaczałoby, że $\alpha \wedge \neg\alpha$ jest tautologią KRP, co nie jest prawdą). Tablica D nie jest zatem sprzeczna, czyli zawiera gałąź otwartą P. Wtedy struktura $\mathfrak{M}^P$ zdefiniowana w dowodzie twierdzenia 18.5.4.1. jest modelem zbioru S. Ponieważ istnieje przeliczalnie wiele termów bazowych języka KRP, więc $\mathfrak{M}^P$ jest przeliczalnym modelem S.

18.6.4. Twierdzenie Herbranda

Udowodnimy teraz twierdzenie, które wzmacnia twierdzenie 18.5.4.1., w tym sensie, że pozwala przechodzić od niespełnialności zbioru formuł uniwersalnych (lub nawet formuł ze zmiennymi wolnymi) języka KRP do niespełnialności pewnego zbioru formuł KRZ.

TWIERDZENIE 18.6.4.1. ***Twierdzenie Herbranda.***

Niech S będzie zbiorem formuł otwartych języka KRP. Wtedy zachodzi alternatywa:

- (a) S ma model Herbranda;
- (b) S nie jest spełnialny. W szczególności, istnieje skończenie wiele podstawień (termów bazowych za zmienne wolne) formuł z S takich, że koniunkcja formuł otrzymanych w wyniku tych podstawień nie jest spełnialna.

Warunek (b) powyżej jest równoważny warunkowi:

- (c) Istnieje skończenie wiele podstawień (termów bazowych za zmienne wolne) negacji formuł z S takich, że alternatywa formuł otrzymanych w wyniku tych podstawień jest tautologią KRP. Zauważmy, że w tym przypadku możemy tak dobrać zmienne zdaniowe (z języka KRZ), że odpowiednia alternatywa tych zmiennych jest tautologią KRZ.

DOWÓD.

Niech S' będzie zbiorem wszystkich podstawień wszystkich formuł z S, gdzie za poszczególne zmienne formuły $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ podstawiamy dowolne termy bazowe.

Rozważmy systematyczną tablicę analityczną D ze zbioru S i o korzeniu $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla dowolnie wybranego zdania α. Są dwie możliwości:

- (1) Istnieje (być może nieskończona) gałąź otwarta P w D.
- (2) D jest skończona i sprzeczna.

W przypadku (1), na mocy twierdzenia 18.5.4.1. otrzymujemy strukturę $\mathfrak{M}^P$ taką, że elementami jej uniwersum są wszystkie termy bazowe oraz $\mathfrak{M}^P$ jest modelem Herbranda dla S'. Z definicji S' oraz z definicji dowodów tablicowych: $\mathfrak{M}^P \models \beta(t_1, \ldots, t_n)$ dla każdej formuły $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ należącej do S oraz dla wszystkich termów bazowych $t_1, \ldots, t_n$. Tak więc, $\mathfrak{M}^P \models S$.

W przypadku (2), D jest dowodem tablicowym pokazującym, że zbiór $S_0 = \{\beta \in S' : \beta$ występuje w $D\}$ jest tablicowo sprzeczny, czyli, na mocy twierdzenia o pełności metody tablic analitycznych w KRP, nie jest spełnialny. Ponadto, sam zbiór S nie jest wtedy spełnialny: w dowolnym modelu $\mathfrak{M}$ dla S, dla każdej formuły $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ ze zbioru S, wynik $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ ***każdego*** zastąpienia zmiennych wolnych $x_1, \ldots, x_n$ ***dowolnymi*** termami bazowymi $t_1, \ldots, t_n$ powinien spełniać warunek $\mathfrak{M} \models \beta(t_1, \ldots, t_n)$. Ponieważ S_0 nie ma modelu, więc również S nie ma modelu. To kończy dowód twierdzenia.

Zauważmy, że jeśli S nie jest spełnialny (a więc również nie ma modelu Herbranda), to warunek (b) dostarcza kontrprzykładu na spełnialność S. Tak więc, mamy do dyspozycji metodę pozwalającą dla dowolnego zbioru formuł S: albo skonstruować model Herbranda dla S albo podać skończony kontrprzykład, pokazujący, że S nie jest spełnialny.

Zauważmy także, że warunek, iż w twierdzeniu Herbranda rozpatrujemy jedynie formuły otwarte (lub, co na to samo wychodzi, jedynie formuły uniwersalne) jest istotny. Istnieją mianowicie spełnialne zbiory formuł języka KRP, które nie mają modelu Herbranda. Oto prosty przykład. Niech: $S = \{R(a), \exists x \, \neg R(x)\}$. Widać, że S jest spełnialny: wystarczy rozważyć zbiór dwuelementowy, w którym jednemu elementowi przysługuje własność denotowana przez R, a drugiemu własność owa nie przysługuje. Jednak S nie ma modelu Herbranda: uniwersum Herbranda dla S musi zawierać term c, ale nie można pokazać, że w uniwersum tym prawdziwe jest zdanie $\exists x \, \neg R(x)$.

Ważnym wnioskiem z twierdzenia Herbranda jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 18.6.4.2.

Jeśli $\alpha(\overrightarrow{x})$ jest formułą bez kwantyfikatorów w języku KRP z co najmniej jedną stałą indywiduową, to $\exists \overrightarrow{x} \; \alpha(\overrightarrow{x})$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją termy bazowe $\overrightarrow{t_i}$ takie, że alternatywa $\alpha(\overrightarrow{t_1}) \vee \ldots \vee \alpha(\overrightarrow{t_n})$ jest tautologią.

DOWÓD.

Wyrażenie $\overrightarrow{x}$ oznacza ciąg zmiennych wolnych. Podobnie, wyrażenie $\overrightarrow{t}$ oznacza ciąg termów bazowych. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

- $\exists \overrightarrow{x} \; \alpha(\overrightarrow{x})$ jest tautologią.
- $\{\forall \overrightarrow{x} \; \neg\alpha(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny.
- $\{\neg\alpha(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny.

Na mocy twierdzenia Herbranda, $\{\neg\alpha(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończenie wiele (ciągów) termów bazowych $\overrightarrow{t_i}$ takich, że alternatywa $\alpha(\overrightarrow{t_1}) \vee \ldots \vee \alpha(\overrightarrow{t_n})$ jest tautologią.

Twierdzenie powyższe można również wzmocnić do twierdzenia następującego.

TWIERDZENIE 18.6.4.3.

Niech α będzie zdaniem w prefiksowej postaci normalnej (w języku L), a β formułą w prefiksowej postaci normalnej równoważną inferencyjnie (tablicowo) zdaniu $\neg\alpha$ oraz niech $\gamma(\overrightarrow{x})$ będzie otwartą skolemizacją formuły β (w języku L', tworzoną wedle konstrukcji podanej w twierdzeniu 18.6.1.2.). Wtedy α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją termy bazowe $\overrightarrow{t_1}, \ldots, \overrightarrow{t_n}$ języka L' takie, że alternatywa $\neg\gamma(\overrightarrow{t_1}) \vee \ldots \vee \neg\gamma(\overrightarrow{t_n})$ jest tautologią.

DOWÓD.

Na mocy twierdzenia 18.6.4.2., wystarczy pokazać, że α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists \overrightarrow{x} \; \neg\gamma(\overrightarrow{x})$ jest tautologią. Mamy: α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\neg\alpha\}$ nie jest spełnialny. Z twierdzenia Herbranda, $\{\neg\alpha\}$ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\gamma(\overrightarrow{x})\}$ jest spełnialny. Tak więc, α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\gamma(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny. Wreszcie, $\{\gamma(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny (czyli, co na jedno wychodzi, $\{\forall \overrightarrow{x}\ \gamma(\overrightarrow{x})\}$ nie jest spełnialny) wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists \overrightarrow{x}\ \neg\gamma(\overrightarrow{x})$ jest tautologią.

18.6.5. Twierdzenie Churcha

Precyzyjne sformułowanie twierdzenia Churcha wymagałoby wprowadzenia całego szeregu pojęć i twierdzeń związanych z matematyczną reprezentacją pojęcia ***obliczalności***. Na to w niniejszym elementarzu nie możemy sobie pozwolić. W dotychczasowym programie studiów JĘZYKOZNAWSTWA I INFORMACJI NAUKOWEJ przewiduje się (na roku trzecim) osobne konwersatorium FUNKCJE REKURENCYJNE, poświęcone tej problematyce. W planie studiów JĘZYKOZNAWSTWA I NAUK O INFORMACJI przewiduje się, również na roku trzecim, kurs ALGORYTMY I OBLICZANIE, gdzie także planuje się omawianie tej problematyki.

Ograniczymy się w tym miejscu zatem do uwag intuicyjnych. Metoda tablic analitycznych jest jedynie ***półalgorytmem***, tj.:

- Jeśli α ***jest*** tautologią KRP, to isnieje tablicowy dowód α.
- Jeśli α ***nie jest*** tautologią KRP, to (systematyczna) tablica analityczna dla α może zawierać gałąź, którą należy przedłużać w nieskończoność; w konsekwencji, nie można ***w skończonej liczbie kroków*** wykazać z pomocą tablic analitycznych, że dana formuła ***nie jest*** tautologią KRP.

Powyższe ograniczenie nie dotyczy jedynie metody tablic analitycznych. Twierdzenie Churcha stwierdza, że nie istnieje metoda algorytmiczna ustalania, czy dowolna formuła α języka KRP jest, czy też nie jest tautologią tego rachunku.

Nie ma zatem efektywnej metody, tj. wykorzystującej jedynie z góry określone, mechaniczne kroki, która w skończonej liczbie takich kroków pozwoliłaby ***rozstrzygnąć***, dla dowolnej formuły α języka KRP, czy α jest, czy też nie jest tautologią tego rachunku. Rachunek predykatów jest ***nierozstrzygalny***.

Jak dowiemy się z następnych wykładów, istnieją metody syntaktyczne (np. metoda aksjomatyczna) takie, że ogół ***tez*** KRP pokrywa się ze zbiorem wszystkich tautologii KRP. Nie jest to żadna sprzeczność z wypowiedzianym przed chwilą twierdzeniem Churcha. W metodzie aksjomatycznej mówimy, że α jest ***tezą*** KRP, gdy ***istnieje*** dowód α z aksjomatów tego rachunku. I chociaż zbiór aksjomatów jest obliczalny (efektywnie podany), a także reguły wnioskowania są obliczalne, czego konsekwencją jest to, że pojęcie ***dowodu*** również jest obliczalne, to nie istnieje żadna efektywna metoda ograniczenia złożoności (np. długości) dowodu danej tezy. Tak więc, chociaż wiemy, że dla dowolnej formuły α języka KRP, że:

α jest tezą KRP wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRP,

to nie możemy z góry określić długości dowodów tez KRP. I to właśnie kryje się za nierozstrzygalnością KRP. Więcej na ten temat dowiedzą się ci studenci, którzy dobrną do trzeciego roku studiów, od tych wykładowców, którzy momentu tego dożyją. Na razie życzmy, aby obu stronom udało się ten program zrealizować.

18.7. Dodatkowe informacje o TA w KRP

Metodę TA, z uwagi na jej trafność i pełność, wykorzystać można w dowodach innych jeszcze (niż podane w 18.6.1., 18.6.2., 18.6.3. i 18.6.4.) twierdzeń dotyczących KRP. W niniejszym elementarzu nie możemy sobie pozwolić na omawianie tej problematyki. Ograniczymy się skromnie do uwag o metodzie TA dla KRP z identycznością (poniżej) oraz KRP z symbolami funkcyjnymi (w wykładach 24–25).

18.7.1. KRP z identycznością

Jeśli pracujemy w języku KRP z identycznością, to identyczność jest traktowana w metodzie TA jako ***stała logiczna***. Trzeba zatem podać dodatkowe reguły dotyczące tablic atomowych zawierających predykat identyczności.

Ponadto, twierdzenia o trafności oraz o pełności tablic analitycznych dla języka KRP z identycznością wymagają osobnych dowodów.

18.7.1.1. Definicje

Predykat identyczności traktowany jest w omawianej metodzie jako stała logiczna. Do podanych poprzednio reguł opuszczania stałych logicznych dodajemy reguły specyficzne dla predykatu identyczności. Reguły te biorą pod uwagę własności, które — wedle ujęcia leibnizjańskiego — przypisujemy relacji identyczności. Jest mianowicie identyczność relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia. Nadto, przedmioty identyczne są nieodróżnialne, ani przez żadną własność, ani poprzez pozostawanie w zależnościach z innymi przedmiotami.

Zanim powyższe intuicyjne sformułowania podamy w ujęciu precyzyjnym, zauważmy jeszcze, że bez relacji identyczności praktycznie niewyobrażalne jest uprawianie większości dyscyplin matematycznych — współczesne rozumienie pojęcia ***funkcji***, jednego z najistotniejszych pojęć matematycznych, wykorzystuje relację identyczności.

Dla ***predykatu*** identyczności tradycyjnie używanym symbolem jest $=$ i tradycja ta zostanie w niniejszym skrypcie uszanowana. To, że ***relację*** identyczności oznaczamy tym samym symbolem, nie powinno prowadzić do nieporozumień — z kontekstu zawsze będzie jasno wynikać, czy odnosimy się do predykatu (język), czy do relacji (odniesienie przedmiotowe języka, interpretacje). Tak więc, identyczność termów t_1 oraz t_2 zapisywać będziemy formułą: $t_1 = t_2$. Formułę $\neg t_1 = t_2$ będziemy (także zgodnie z tradycją), zapisywać też czasem w postaci $t_1 \neq t_2$. W podanych niżej przykładach termami będą jedynie zmienne i stałe indywiduowe (nie będziemy zatem rozważać termów złożonych, działanie metody tablic analitycznych uwzględniające termy złożone omówione zostanie w dalszych wykładach).

O predykacie identyczności zakłada się następujące aksjomaty:

- $\forall x\; x = x$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\; (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\; (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(y_1, \ldots, y_n)$.

dla wszystkich n-argumentowych symboli funkcyjnych f oraz wszystkich predykatów n-argumentowych, dla wszystkich n.

Zwrotność predykatu identyczności wyraża warunek (1). Własności: symetryczności oraz przechodniości predykatu identyczności, czyli:

- $\forall x \forall y\; (x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\; (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

są konsekwencją powyższych aksjomatów.

Trzeba teraz rozszerzyć definicję tablic atomowych oraz tablic analitycznych.

DEFINICJA 18.7.1.1.1. ***Tablice atomowe w języku KRP z identycznością.***

Tablicami atomowymi są, oprócz wymienionych w definicji 18.3.1.1, również wszystkie drzewa postaci:

α $\mid$ $t_1 = t_2$ $\mid$ $\alpha(t_2//t_1)$	α $\mid$ $t_2 = t_1$ $\mid$ $\alpha(t_2//t_1)$

gdzie α jest dowolnym zdaniem języka KRP z identycznością, a t_1 oraz t_2 dowolnymi termami bazowymi tego języka, oraz gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie ***pewnych*** wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

DEFINICJA 18.7.1.1.2. ***Tablice analityczne w języku KRP z identycznością.***

Definicja ***tablic analitycznych*** jest taka sama, jak definicja 18.3.1.1., przy czym tablice atomowe są teraz oczywiście rozumiane w sensie definicji 18.7.1.1.1.

DEFINICJA 18.7.1.1.2. ***Tablice sprzeczne.***

- Gałąź P tablicy analitycznej D jest ***sprzeczna***, jeśli:
  - α oraz $\neg\alpha$ występują w P, dla pewnego zdania α, ***lub***
  - $\neg(t = t)$ występuje w P, dla pewnego termu t.
- Tablica D jest ***sprzeczna***, jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.

Wszystkie pozostałe definicje z części 18.3.1. (tablice systematyczne, tablice zakończone, dowody tablicowe, itd.) przenoszą się automatycznie na przypadek języka KRP z identycznością.

Pamiętamy, że dla celów praktycznych wygodne było sformułowanie reguł przedłużania gałęzi w konstrukcji tablicy analitycznej. Reguły dotyczące predykatu identyczności w metodzie tablic analitycznych można sprowadzić np. do następujących dwóch:[19]

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, α zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź tablicy zawierającą formuły α oraz $t_1 = t_2$ przedłużamy dodając formułę $\alpha(t_2//t_1)$:

  $$R_{12}(=) \qquad \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ t_1 = t_2 \\ | \\ \alpha(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, α zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź drzewa zawierającą formuły α oraz $t_2 = t_1$ przedłużamy dodając formułę $\alpha(t_2//t_1)$:

  $$R_{21}(=) \qquad \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ t_2 = t_1 \\ | \\ \alpha(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

Umowa notacyjna. Zastosowanie reguły $R_{ij}(=)$ w kroku $^{n.}$ do formuły o numerze (m) z wykorzystaniem identyczności termów t_1 oraz t_2 wyrażonej w formule o numerze (k) zaznaczać będziemy umieszczonym z prawej strony formuły o numerze (m) komentarzem: $^{n.^{k,t_2//t_1}}$.

W najprostszym przypadku (gdy język nie zawiera symboli funkcyjnych) owo zastępowanie termów polega na zastępowaniu wystąpień jednej stałej indywiduowej wystąpieniami innej stałej indywiduowej.

[19] Poszczególne podręczniki stosują różne sformułowania reguł dla predykatu identyczności w tej metodzie (a w konsekwencji, także różne sformułowania warunków zamykania gałęzi w tablicach analitycznych).

18.7.1.2. Twierdzenie o pełności metody tablic analitycznych w języku KRP z identycznością

Chociaż nie możemy zagwarantować środkami czysto syntaktycznymi, że interpretacją predykatu identyczności jest relacja identyczności, to możemy mimo to zagwarantować, że metoda tablic analitycznych w języku KRP z identycznością jest trafna i pełna.

DEFINICJA 18.7.1.2.1. ***Model ilorazowy.***

Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą otrzymaną w twierdzeniu 18.5.4.1. (pomijamy indeks odnoszący się do gałęzi, gdyż nie jest on tu istotny), dla systematycznej tablicy analitycznej D ze zbioru założeń S. Przypominamy, że elementami uniwersum $\mathfrak{M}$ są termy bazowe.

Definiujemy relację $\cong$ w uniwersum modelu $\mathfrak{M}$:

$$t_1 \cong t_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models t_1 = t_2.$$

Wtedy $\cong$ jest relacją równoważności w uniwersum modelu $\mathfrak{M}$. Niech $[t]$ oznacza klasę równoważności termu t względem tej relacji. Budujemy ***model ilorazowy*** $\mathfrak{M}/_{\cong}$ w sposób następujący:

- uniwersum modelu $\mathfrak{M}/_{\cong}$ to rodzina wszystkich klas równoważności relacji $\cong$.
- $f^{\mathfrak{M}/_{\cong}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n)]$, dla każdego symbolu funkcyjnego f.
- $\mathfrak{M}/_{\cong} \models R([t_1], \ldots, [t_n])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$, dla każdego predykatu (różnego od predykatu identyczności).

W standardowy sposób pokazuje się, że jest to poprawna definicja, tj., że nie zależy ona od wyboru reprezentantów z poszczególnych klas równoważności $\cong$.

Dalej, pokazuje się przez indukcję (tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 18.5.4.1.), że model $\mathfrak{M}/_{\cong}$ spełnia tezę twierdzenia 18.5.4.1. Najważniejsze jest dla nas to, że interpretacja predykatu identyczności w modelu $\mathfrak{M}/_{\cong}$ jest relacją identyczności (a nie jakąkolwiek inną relacją równoważności spełniającą aksjomaty identyczności). Otrzymujemy więc następujące twierdzenie, będące odpowiednikiem twierdzenia 18.5.4.1.

TWIERDZENIE 18.7.1.2.1. ***Pełność metody tablic analitycznych w KRP z identycznością.***

Dla dowolnego zbioru zdań S zawierającego aksjomaty identyczności zachodzi alternatywa:

- S jest tablicowo sprzeczny.
- Istnieje model dla S, w którym predykat identyczności interpretowany jest jako relacja identyczności.

Twierdzenie o ***trafności metody tablic analitycznych w KRP z identycznością*** oczywiście również zachodzi.

18.7.1.3. Przykłady

Przejdźmy do prezentacji przykładów ilustrujących działanie metody tablic analitycznych w KRP z predykatem identyczności. Będą one dotyczyły takich samych zagadnień, jak poprzednio: semantycznej niesprzeczności, ustalania tautologiczności oraz wynikania logicznego.

PRZYKŁAD 18.7.1.3.1: OPATRZNOŚĆ BOŻA A SKARB PAŃSTWA

Spójrzmy na regułę wnioskowania, w której występują predykaty dwuargumentowe P i Q oraz stałe indywiduowe a, b i c:

$$\begin{array}{c} \forall x \; (aPx \rightarrow b = x) \\ aQc \\ b \neq c \\ \hline \neg aPc \end{array}$$

Pokażemy, że jest to reguła niezawodna, tj. że wniosek wynika logicznie z przesłanek. W tym celu wykluczyć musimy możliwość, aby przesłanki reguły były w jakiejś interpretacji prawdziwe, a jej wniosek w tejże interpretacji fałszywy. A takie wykluczenie, jak pamiętamy, sprowadza się do pokazania, że przesłanki reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku nie są jednocześnie prawdziwe w żadnej interpretacji.

Stosowna tablica analityczna, tj. drzewo w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku ma postać następującą:

$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ \forall x\,(aPx \rightarrow b = x)\ ^{2.\star c} \\
| \\
(0.2)\ aQc \\
| \\
(0.3)\ b \neq c \\
| \\
(0.4)\ \neg\neg aPc\ ^{1.\neg\neg} \\
| \\
(1)\ \ aPc \\
| \\
(2)\ \ aPc \rightarrow b = c\ ^{3.\rightarrow} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(3_l)\ \neg aPc & (3_p)\ b = c \\
| & | \\
\times_{1,3_l} & \times_{0.3,3_p}
\end{array}
\end{array}
$$

Wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte, a więc wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek. Zauważmy ponadto, że:

- do zamknięcia wszystkich gałęzi drzewa wystarczyło rozwinąć pierwszą przesłankę reguły jedynie względem stałej indywiduowej c; stosowanie $R(\forall)$ względem a oraz b jest w tym celu zbyteczne;
- przesłanka druga nie była wykorzystywana dla zamknięcia gałęzi drzewa; zatem wniosek reguły wynika logicznie z samych tylko przesłanek: pierwszej i trzeciej;
- gałąź prawą zamykamy wykorzystując fakt, że znajduje się na niej formuła o numerze (3_p) oraz trzecia z formuł umieszczona w pniu drzewa (które są wzajem sprzeczne);
- nie wykorzystywaliśmy reguł odnoszących się do predykatu identyczności (nie było takiej potrzeby); niniejszy przykład miał służyć jedynie oswajaniu się z identycznością;
- wykonanie kroku $^{1.\neg\neg}$ jest redundantne (dla zamykania gałęzi drzewa) — formuły o numerach (0.4) oraz (3_l) są wzajemnie sprzeczne.

Czy z niezawodności powyższej reguły ktokolwiek mógłby mieć jakikolwiek pożytek? Oczywiście. Pamiętajmy jednak, że ***pożytek*** jest pojęciem pozalogicznym i to, co pożyteczne dla jednych, może być (i często bywa) nie całkiem pożyteczne dla innych (wspomnijmy np. plagi egipskie lub znane z przypowieści eksperymenty hydroinżynieryjne z wodami Morza Czerwonego). A teraz, jak zwykle, coś dla Humanistek: jedna z (nieskończenie wielu!) możliwych interpretacji rozważanych predykatów i stałych. Niech np.:

xPy będzie interpretowane jako x *jest odpowiedzialny przed* y;

xQy będzie interpretowane jako x *jest na utrzymaniu* y;

stałe indywiduowe a, b oraz c denotują, odpowiednio, *Pana Prezydenta RP*, *Boga* (np. Boga wszystkich chrześcijan) oraz *Skarb Państwa* (Rzeczpospolitej Polskiej).

Wtedy przeprowadzone wedle powyższej reguły następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Pan Prezydent jest odpowiedzialny jedynie przed Bogiem.

Pan Prezydent pozostaje na utrzymaniu Skarbu Państwa.

Skarb Państwa z Bogiem tożsamy nie jest.

A zatem Pan Prezydent przed Skarbem Państwa nie jest odpowiedzialny.

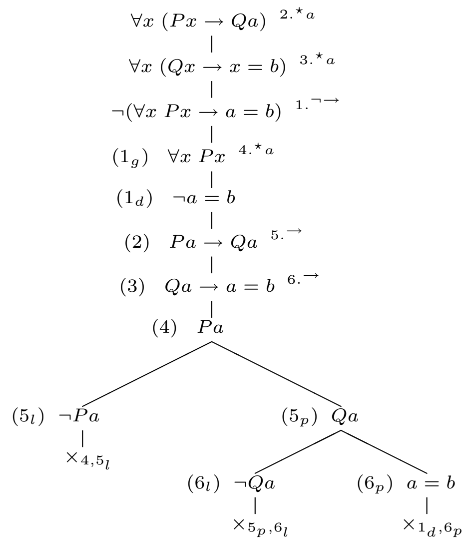
Zaniepokojonych podatników spróbujmy pocieszyć (czyżby?): ponieważ druga przesłanka nie była wykorzystywana w zamykaniu gałęzi drzewa, więc można ją zastąpić np. formułą aQb, a wynikanie logiczne i tak będzie zachodzić. (Choć w rozważanej dla Humanistek interpretacji zmieni się sponsor Pana Prezydenta.) Można ją też, z tym samym skutkiem, opuścić. I tak chyba będzie najlepiej; ***gdy chodzi o odpowiedzialność Pana Prezydenta przed Bogiem, pieniądze nie grają żadnej roli***.

PRZYKŁAD 18.7.1.3.2: MAŁA MASOCHI-HUMANISTKA

Pokażemy, że również poniższa reguła wnioskowania jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(Px \rightarrow Qa)\\ \forall x\,(Qx \rightarrow x = b)\end{array}}{\forall x\, Px \rightarrow a = b}$$

Także w tym przypadku nie potrzeba stosować reguł dotyczących predykatu identyczności; jest to więc dalszy ciąg ostrożnego oswajania się z identycznością. Oto stosowna tablica analityczna:



Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, więc badana reguła jest niezawodna, wniosek wynika logicznie z przesłanek.

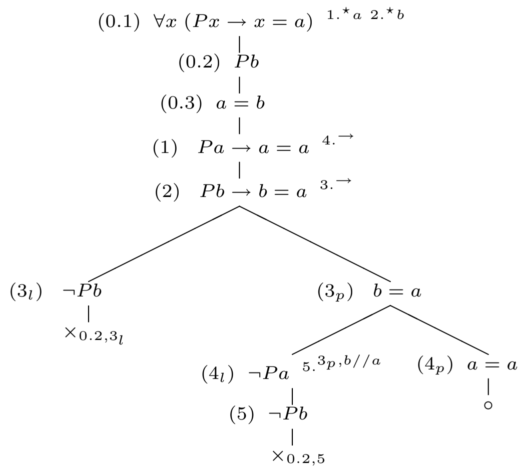
Te z naszych Czytelniczek, które są Masochi-Humanistkami, uprzejmie zapraszamy do cierpliwego przeszukania jak największej liczby możliwych interpretacji predykatów i stałych występujących w powyższej regule. W przypadku, gdyby komuś udało się znaleźć interpretację, w której przesłanki reguły będą prawdziwe, a jej wniosek fałszywy, zwracamy pieniądze za zakupienie tego skryptu.

PRZYKŁAD 18.7.1.3.3.: SZPIEGOWSKIE PSEUDONIMY

Pokażemy, że następujące formuły tworzą zbiór semantycznie niesprzeczny:

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Px \rightarrow x = a)\\ Pb\\ a = b\end{array}$$

Przypuszczamy zatem, że podane wyżej formuły są prawdziwe w co najmniej jednej interpretacji. Przypuszczenie to zostanie potwierdzone, o ile tablica analityczna, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy te formuły będzie miało co najmniej jedną gałąź otwartą. Budujemy tablicę:



Tablica ma jedną gałąź otwartą i do żadnej z formuł na tej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł. Zatem rozpatrywany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny. Interpretacjami, w których wszystkie rozważane formuły są prawdziwe są te interpretacje, w których stałe indywiduowe a oraz b denotują ten sam obiekt, należący ponadto do denotacji predykatu P. Co więcej, denotacja predykatu P ma najwyżej jeden element.

Reguła związana z predykatem identyczności została tu zastosowana w kroku 5 do formuły o numerze (4_l); wykorzystano mianowicie identyczność wyrażoną w formule atomowej o numerze (3_p) dokonując podstawienia stałej indywiduowej b za stałą indywiduową a.

Zachęcamy Czytelniczki do ubrania w elegancką szatę słowną interpretacji predykatu P oraz stałych indywiduowych a i b tak, aby rozważane trzy formuły były prawdziwe. Może np. coś o szpiegach, ukrywających się pod zabawnymi pseudonimami? Powiedzmy, szpieg o ps. ***Wazelin***, pełniący jednocześnie jedną z najwyższych, jednoosobowo obsadzanych funkcji państwowych, a więc będący także denotacją stosownej innej stałej...

PRZYKŁAD 18.7.1.3.4.: TO, CO TYGRYSY LUBIĄ NAJBARDZIEJ

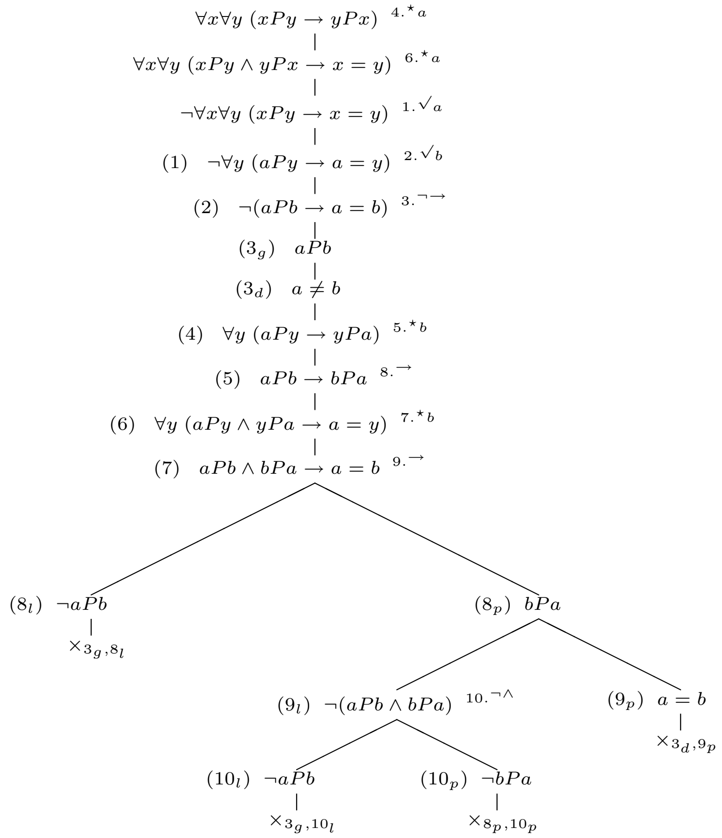
Jest cała grupa niezmiernie sympatycznych zadań dotyczących własności relacji dwuargumentowych, które to zadania znakomicie nadaja się na urozmaicenie każdego sprawdzianu, kolokwium zaliczeniowego bądź nawet egzaminu końcowego z logiki. Mają one jedną z podanych niżej postaci, z niewyczerpanej listy możliwości:

- Czy każda relacja mająca własność Φ jest zawarta w każdej relacji mającej własność Ψ?
- Czy każda relacja mająca własność Φ jest zawarta w pewnej relacji mającej własność Ψ?
- Czy każda relacja mająca własność Φ jest rozłączna z każdą relacją mającą własność Ψ?
- Czy każda relacja mająca własność Φ jest rozłączna z pewną relacją mającą własność Ψ?
- Czy każda relacja mająca własność Φ ma też własność Ψ?
- Czy każda relacja nie mająca własności Φ ma własność Ψ?
- itp.

gdzie Φ oraz Ψ są jakimiś ze zwykle rozważanych własności relacji, typu: zwrotność, symetryczność, asymetryczność, spójność, antysymetryczność, przechodniość, itd. lub połączeniami tych własności (np. częściowe lub liniowe porządki, równoważności, podobieństwa lub opozycje, relacje serialne, itp.). Czyż trzeba dodawać, że są to ulubione zestawy egzaminacyjne? Tu ograniczmy się do rozwiązania jednego takiego zagadnienia. Ponieważ rozpatrujemy właśnie rachunek predykatów z identycznością, więc zwrócimy uwagę na te własności relacji, w których sformułowaniu predykat ten występuje. Jedną z takich własności jest np. antysymetryczność. Pokażemy, że każda relacja, która jest jednocześnie symetryczna oraz antysymetryczna jest zawarta w relacji identyczności. W tym celu wystarczy pokazać, że następująca reguła wnioskowania jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\forall y\ (xPy \rightarrow yPx)\\ \forall x\forall y\ (xPy \wedge yPx \rightarrow x = y)\end{array}}{\forall x\forall y\ (xPy \rightarrow x = y)}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku badanej reguły:



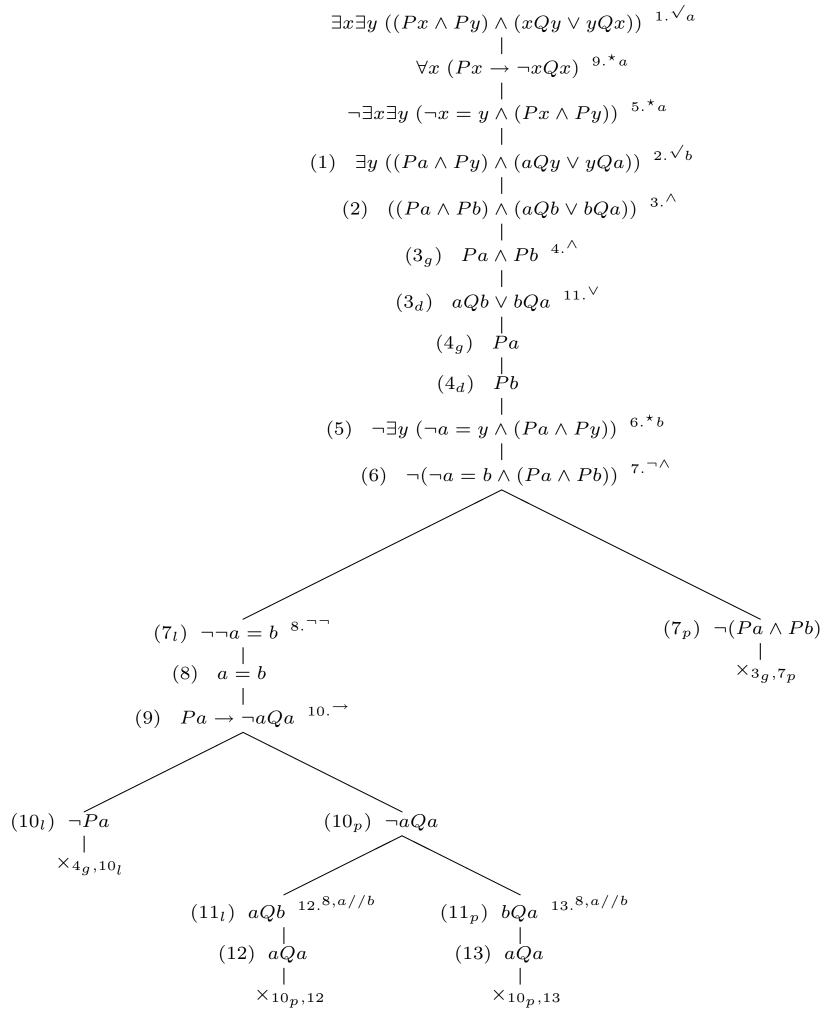
Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a więc pokazano, co miało zostać pokazane. Zauważmy, że nie było potrzeby stosowania reguł specyficznych dla predykatu identyczności. Ćwiczenie: które z możliwych do wykonania kroków zostały pominięte?

PRZYKŁAD 18.7.1.3.5.: WSPOMÓŻ GREENPEACE

Pokażemy, że następująca reguła wnioskowania jest niezawodna:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\exists y\ ((Px \wedge Py) \wedge (xQy \vee yQx))\\ \forall x\ (Px \rightarrow \neg xQx)\end{array}}{\exists x\exists y\ (\neg x = y \wedge (Px \wedge Py))}$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku:



Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a więc wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek. Nie istnieje interpretacja, w której wszystkie przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek fałszywy — badana reguła wnioskowania jest niezawodna.

Reguły dotyczące predykatu identyczności były tu stosowane w krokach 12 oraz 13. Warto może zauważyć, że nie wszystkie możliwe użycia reguł opuszczania stałych logicznych zostały użyte — niech ćwiczeniem dla Czytelniczek będzie wskazanie, jakie mianowicie kroki (jako zbędne w procesie zamykania gałęzi tablicy) zostały pominięte.

Co „mówi" wniosek tej reguły? Stwierdza mianowicie, że istnieją ***co najmniej*** dwa indywidua mające własność wyznaczoną przez predykat P. Predykat identyczności umożliwia zdefiniowanie całego szeregu ***kwantyfikatorów numerycznych***, stwierdzających np. istnienie: dokładnie jednego, co najwyżej trzech, co najmniej siedmiu, itp. obiektów. „Zwykły" kwantyfikator egzystencjalny wyraża, zgodnie z przyjętą konwencją semantyczną, istnienie *co najmniej jednego* obiektu.

Przykład powyższy zaczerpnięto z książki Hodgesa *Logic*, Penguin Books, 1991, str. 235. W oryginale chodziło o ustalenie, czy następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

> *Not all the chimpanzees are trying equally hard. No chimpanzee is trying harder than himself.* Therefore *there are at least two chimpanzees.*

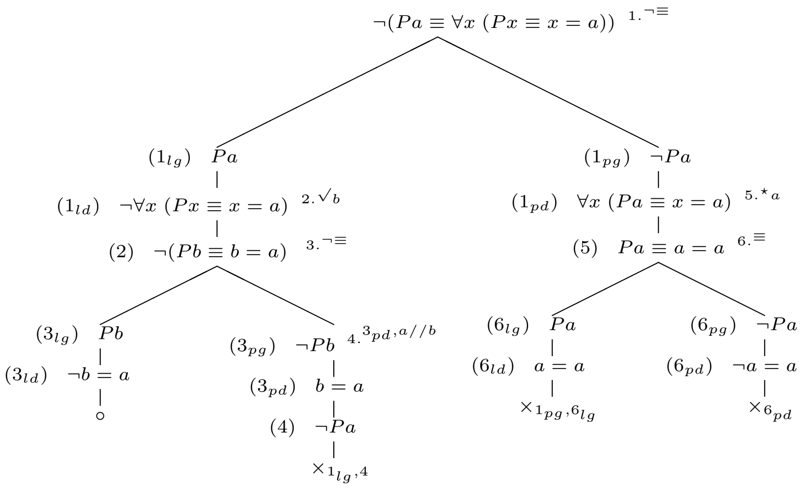
Jak łatwo się domyślić, mowa tu o interpretacji, w której Px jest interpretowane jako x *is a chimpanzee*, zaś xQy jest interpretowane jako x *is trying harder than* y. Biedne zwierzaki. Czytelniczki zechcą (jeśli napadnie je taka chętka) zinterpretować występujące w powyższej regule predykaty P oraz Q jeszcze jakoś inaczej, np. po Ludzku, Humanistycznie. Co powiecie np. o interpretacji: Px — x ***rzewnie wspomina swoje członkostwo w szeregach Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej***, xQy — x ***jest bardziej pobożny od*** y?

PRZYKŁAD 18.7.1.3.6.: LUSTERECZKO, POWIEDZ...

Pokażemy, że następująca formuła nie jest tautologią rachunku predykatów z identycznością:

$$Pa \equiv \forall x\ (Px \equiv x = a)$$

Budujemy tablicę analityczną dla negacji tej formuły:



Tablica ma jedną gałąź otwartą i do żadnej formuły na tej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł. Zatem formuła umieszczona w jej korzeniu jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Stąd, rozważana na początku tego przykładu formuła jest w tejże interpretacji fałszywa, a więc jako fałszywa w co najmniej jednej interpretacji nie jest tautologią rachunku predykatów z identycznością. Zauważmy, że gałąź zawierającą formułę o numerze (6_{pd}) zamknięto na mocy przyjętej w tym podrozdziale konwencji. Nadto, reguła dotycząca predykatu identyczności zastosowana została w kroku $^{4.3_{pd},a//b}$. Zwracamy uwagę, że krok ten wykonujemy na otrzymanej w kroku $^{3.\neg\equiv}$ formule!

Z budowy tego drzewa widać, że implikacja:

$$\forall x\ (Px \equiv x = a) \rightarrow Pa$$

jest tautologią, natomiast implikacja:

$$Pa \rightarrow \forall x\ (Px \equiv x = a)$$

tautologią nie jest. Pytanie skierowane do tych z naszych wiernych Czytelniczek, które czytają teraz tekst ze skupieniem, nie fantazjując na tematy gromko przez Watykan potępiane, ani nie pozostają w półśnie: **dlaczego?** Raptownie obudzonym w tej chwili Czytelniczkom przypominamy, że wskazówką do odpowiedzi na to pytanie jest fakt, że równoważność dwóch zdań jest semantycznie równoważna implikacji prostej i odwrotnej tych zdań.

Przeprosinami za pobudkę dla Humanistek sennych i rozmarzonych niech będzie następująca, *ad hoc* wymyślona interpretacja predykatu P oraz stałej indywiduowej a:

Px interpretujemy jako x ***jest warta grzechu***;

stała indywiduowa a denotuje... no tak, jest tu pewien problem natury estetycznej; ale niech będzie — z gustami się nie dyskutuje — niech a denotuje ***Miss Podkarpacia 2000***.

W tej interpretacji implikacja:

$$Pa \rightarrow \forall x\ (Px \equiv x = a)$$

odczytana może być np. tak:

Jeśli Miss Podkarpacia 2000 jest warta grzechu, to dokładnie tylko ona jest warta grzechu.

Służymy ***licznymi*** przykładami ukazującymi, iż następnik tej implikacji jest fałszywy, choć jej poprzednik pozostaje (!) prawdziwy.[20] Wierzymy zresztą, że każda z naszych uroczych Czytelniczek, od Tatr do Bałtyku i od (niedawnej) ***Freundschaftsgrenze*** na Odrze do granic wschodnich chwilowo zjednoczonej Europy, sama gotowa jest, z pomocą zwykłego lustereczka, przekonać się o powyższym.

18.7.2. KRP z symbolami funkcyjnymi

Dokładniejsze omówienie działania metody TA dla KRP z symbolami funkcyjnymi odkładamy na nieco później. Zajmiemy się tym mianowicie dopiero po wprowadzeniu pojęcia ***unifikacji***, co nastąpi w wykładzie poświęconym konsekwencji ***rezolucyjnej*** w KRP. Poniżej podajemy jedynie kilka prostych przykładów, w których nie trzeba odwoływać się do pojęcia unifikacji. Niektóre dowody zapisywane będą nie w postaci drzew, ale w postaci tabel, zawierających ponumerowane wiersze dowodu oraz stosowne komentarze dowodowe.

PRZYKŁAD 18.7.2.1.

Niech f będzie funkcją z X w Y, niech $A \subseteq Y$, $B \subseteq Y$ oraz $A \subseteq B$. Wtedy:

$$f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B].$$

Przypominamy (wiadomości ze szkoły lub z kursu WSTĘP DO MATEMATYKI dla studentek pierwszego roku JiNoI), że stosujemy następujące oznaczenia.
Jeśli $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, to:

$$f[A] = \{y \in Y : \exists x \in A\ f(x) = y\}$$

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : \exists y \in B\ f(x) = y\}.$$

Zbiór $f[A]$ nazywamy *obrazem* zbioru A względem funkcji f, a $f^{-1}[B]$ *przeciwobrazem* zbioru B względem funkcji f.
Mamy zatem pokazać, że jeśli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $A \subseteq B \subseteq Y$, to $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$.
Dla dowodu tej implikacji metodą tablic analitycznych należy:

- zapisać wszystkie założenia; w tym przypadku będą to formuły stwierdzające, że:
  - f jest funkcją z X w Y;
  - A jest zawarty w Y;
  - B jest zawarty w Y;
  - A jest zawarty w B;
- zapisać zaprzeczenie tezy, tj. formułę:
  $\neg\forall x(\exists y\ (y \in A \wedge y = f(x)) \rightarrow \exists y\ (y \in B \wedge y = f(x)))$
- zbudować tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczono wszystkie wymienione wyżej formuły.

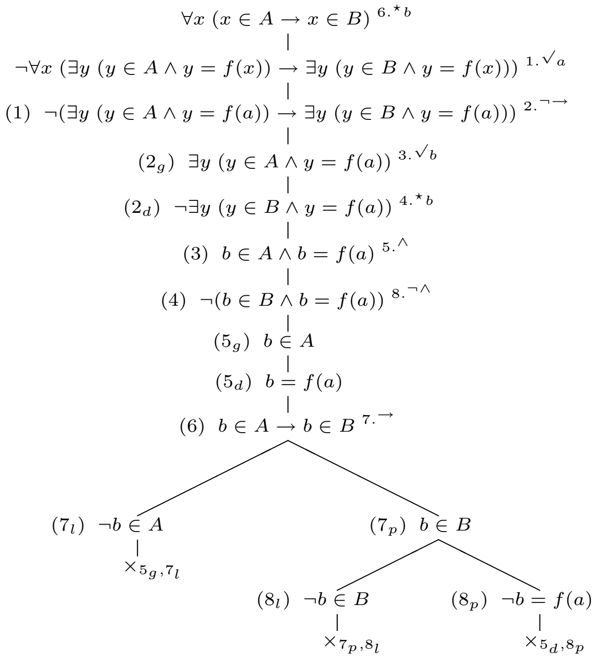
Jeśli tablica analityczna, tj. drzewo zbudowane z powyższych formuł (umieszczonych w jego pniu) będzie zamknięte, to teza zostanie udowodniona.
Tak się akurat składa, że do zakończenia rozważanego dowodu (czyli do zamknięcia wszystkich gałęzi rozważanej tablicy) wystarczy uwzględnienie jedynie dwóch z wymienionych wyżej formuł, a mianowicie:

[20]Powtórzmy, *modulo* gusta. Być może, w wydaniach tego skryptu za, powiedzmy, 15 lub 115 lat palonych na grobie piszącego te słowa życzliwy wydawca uaktualni wybór denotacji dla tej stałej. Moich prochów to już nie ucieszy, ale nic-to. Ciekawym problemem pozalogicznym jest, czy kogokolwiek wtedy będzie się jeszcze uczyć logiki. Czyje będzie Podkarpacie nie jest — dla mnie — tak ciekawe. Daję wiarę Księdzu Profesorowi Józefowi Tischnerowi, który w jednym ze swych felietonów pisze: *A Bartek Koszarek z Bukowiny, co na Gęsiej Syi był i sytkiego wysłuchoł, jakimsi takim wirem porwany, wstoł na nogi, przeciągnón sie, coby kościska wyprościć, i zawnioskowoł: „Świat jest boski, a dziewczęta nase." I poseł dołu na Małe Ciche.*

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\neg\forall x(\exists y\,(y \in A \wedge y = f(x)) \rightarrow \exists y\,(y \in B \wedge y = f(x))).$$

Oto stosowna tablica analityczna:



Zauważmy, że do zamknięcia wszystkich gałęzi tej tablicy nie tylko nie były potrzebne informacje, że f jest funkcją, ale także reguły dotyczące predykatu identyczności.

PRZYKŁAD 18.7.2.2.

Niech (w jakimś uniwersum złożonym ze zbiorów) dane będą:

- dwuargumentowa funkcja $\triangle$,
- dwuargumentowa relacja $\prec$.

Wartość funkcji $\triangle$ dla argumentów x oraz y oznaczać będziemy przez $x \triangle y$.
Załóżmy, że $\triangle$ i $\prec$ spełniają warunki:

- (a) $\forall x\forall y\,(\forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x \prec y)$
- (b) $\forall x\forall y\forall z\,((x \in y \triangle z \rightarrow (x \in y \wedge x \in z))$.

Pokażemy, że wtedy:

$$(c) \quad \forall x\forall y\,((x = x \triangle y) \rightarrow x \prec y).$$

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy warunki (1) i (2) oraz zaprzeczenie warunku (3):

$$\forall x\forall y\ (\forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x \prec y)\ ^{3.\star a}$$

$$\forall x\forall y\forall z\ (x \in y \vartriangle z \rightarrow (x \in y \wedge x \in z))\ ^{9.\star c}$$

$$\neg\forall x\forall y\ ((x = x \vartriangle y) \rightarrow x \prec y)\ ^{1.\surd a}$$

$$(1)\ \ \neg\forall y\ ((a = a \vartriangle y) \rightarrow a \prec y)\ ^{2.\surd b}$$

$$(2)\ \ \neg((a = a \vartriangle b) \rightarrow a \prec b)\ ^{5.\neg\rightarrow}$$

$$(3)\ \ \forall y\ (\forall z\ (z \in a \rightarrow z \in y) \rightarrow a \prec y)\ ^{4.\star b}$$

$$(4)\ \ \forall z\ (z \in a \rightarrow z \in b) \rightarrow a \prec b\ ^{6.\rightarrow}$$

$$(5_g)\ \ a = a \vartriangle b$$

$$(5_d)\ \ \neg a \prec b$$

$$(6_l)\ \ \neg\forall z\ (z \in a \rightarrow z \in b)\ ^{7.\surd c} \qquad\qquad (6_p)\ \ a \prec b$$

$$(7)\ \ \neg(c \in a \rightarrow c \in b)\ ^{8.\neg\rightarrow} \qquad\qquad \times_{5_d, 6_p}$$

$$(8_g)\ \ c \in a\ ^{13.5_g\, a\vartriangle b//a}$$

$$(8_d)\ \ \neg c \in b$$

$$(9)\ \ \forall y\forall z\ (c \in y \vartriangle z \rightarrow (c \in y \wedge c \in z))\ ^{10.\star a}$$

$$(10)\ \ \forall z\ (c \in a \vartriangle z \rightarrow (c \in a \wedge c \in z))\ ^{11.\star b}$$

$$(11)\ \ c \in a \vartriangle b \rightarrow (c \in a \wedge c \in b)\ ^{12.\rightarrow}$$

$$(12_l)\ \ \neg c \in a \vartriangle b \qquad\qquad (12_p)\ \ c \in a \wedge c \in b\ ^{14.\wedge}$$

$$(13)\ \ c \in a \vartriangle b \qquad\qquad (14_g)\ \ c \in a$$

$$\times_{12_l, 13} \qquad\qquad (14_d)\ \ c \in b$$

$$\times_{8_d, 14_d}$$

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a więc udowodniliśmy, że (c) wynika logicznie z (a) oraz (b).

PRZYKŁAD 18.7.2.3.

Udowodnimy, że dla dowolnych funkcji f, g oraz h:

$$(\maltese)\quad \forall x\forall y\ ((x = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow (h(f(x)) = h(g(y)))).$$

Oczywiście, milcząco zakładamy tu, że dziedziny i przeciwdziedziny rozważanych funkcji są dobrze określone.

Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego korzeniu umieszczamy zaprzeczenie warunku (✠). Założenia, iż f, g oraz h są funkcjami będą wykorzystywane w regułach identyczności (podstawiania termów).

$$
\begin{array}{c}
\neg\forall x\forall y\ ((x = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow h(f(x)) = h(g(y)))\ ^{1.\surd a} \\
| \\
(1)\ \ \neg\forall y\ ((a = y \wedge f(y) = g(y)) \rightarrow h(f(a)) = h(g(y)))\ ^{2.\surd b} \\
| \\
(2)\ \ \neg((a = b \wedge f(b) = g(b)) \rightarrow h(f(a)) = h(g(b)))\ ^{3.\neg\rightarrow} \\
| \\
(3_g)\ \ a = b \wedge f(b) = g(b)\ ^{4.\wedge} \\
| \\
(3_d)\ \ \neg h(f(a)) = h(g(b))\ ^{5.4_g a//b} \\
| \\
(4_g)\ \ a = b \\
| \\
(4_d)\ \ f(b) = g(b)\ ^{6.4_g a//b} \\
| \\
(5)\ \ \neg h(f(a)) = h(g(a))\ ^{7.6 f(a)//g(a)} \\
| \\
(6)\ \ f(a) = g(a) \\
| \\
(7)\ \ \neg h(f(a)) = h(f(a)) \\
| \\
\times_7
\end{array}
$$

Otrzymujemy drzewo zamknięte, a zatem udowodniliśmy warunek (✠).

PRZYKŁAD 18.7.2.4.: TABLICZKI DODAWANIA I MNOŻENIA.

Dodawania i mnożenia liczb naturalnych uczysz się w wieku kilku lat. Chociaż, gdy się chwilę zastanowisz, to być może dopadnie cię refleksja: skąd właściwie wiesz, jaki jest wynik wykonywania tych operacji (tj. dodawania i mnożenia) na liczbach naturalnych? Prawdopodobnie, nauczono cię tabliczek dodawania i mnożenia podobnie jak naucza się wierszyków, „na pamięć”. Stosowano przy tym różne heurystyki; np. rysunki jabłuszek, kotków, monet, itp. No i teraz umiesz dodawać i mnożyć. Czyżby jednak ta ***wiedza*** miała uzasadnienie wyłącznie w owych dogmatycznych rysunkach? To temat na zajęcia z filozofii matematyki lub, ogólniej, z filozofii nauki. Te zajęcia dotyczą tylko elementarza logicznego, a więc nie znajdziesz w nich wyczerpującej odpowiedzi na tego typu pytania metafizyczne. Ograniczymy się do stwierdzenia, że arytmetykę można zbudować na bazie aksjomatycznej, jako teorię pierwszego rzędu (a więc teorię w języku KRP, z predykatem identyczności oraz symbolami funkcyjnymi).

Tabliczki dodawania i mnożenia zbudować można w ARYTMETYCE ROBINSONA. Jest to system aksjomatyczny w języku KRP z identycznością oraz następującymi symbolami funkcyjnymi:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: ***następnik*** t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***suma*** t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***iloczyn*** t_1 i t_2.

Nadto, w języku Arytmetyki Robinsona używamy stałej indywiduowej $\bigcirc$. Jest to symbol, który czytamy: ***zero***.

AKSJOMATY.

Aksjomaty dotyczące jedynie predykatu identyczności:

$$\forall x\ (x = x)$$

$$\forall x\forall y\ (x = y \rightarrow y = x)$$

$$\forall x\forall y\forall z\ ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z).$$

Uwaga. Ta grupa aksjomatów występuje we wszystkich teoriach, w których używamy predykatu identyczności. Należy pamiętać, że zawsze z nich korzystamy. Nadto, warto też pamiętać, że ani te aksjomaty, ani inne, w których występuje symbol $=$ identyczności nie gwarantują, że denotacja tego symbolu jest „prawdziwą” równością $=$. Dla pełnej poprawności, powinniśmy używać innego symbolu dla ***predykatu*** identyczności w języku przedmiotowym (np.:

$\doteq$), a innego dla ***relacji*** identyczności $=$. Nie robimy tego, ufając, iż Czytelniczki są już oswojone z różnicą między językiem przedmiotowym i metajęzykiem i że życzliwie, ze zrozumieniem tolerują tego typu drobne świństewka notacyjne.

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$:

$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \oplus(x, z) = \oplus(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \oplus(z, x) = \oplus(z, y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \otimes(x, z) = \otimes(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \otimes(z, x) = \otimes(z, y))$.

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$

A_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$

A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$

A_4: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

A_5: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$

A_6: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

A_7: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$.

Modelem zamierzonym dla tych aksjomatów jest struktura, której uniwersum jest zbiór wszystkich[21] liczb naturalnych, a denotacjami poszczególnych terminów pozalogicznych są:

- symbolu $\bigcirc$ — liczba zero;
- symbolu σ — operacja następnika;
- symbolu $\oplus$ — operacja dodawania;
- symbolu $\otimes$ — operacja mnożenia.

Co „mówią" poszczególne aksjomaty (o owej interpretacji zamierzonej)? Oto możliwe odczyty ***Humanistyczne***:

A_1: Różne liczby naturalne mają różne następniki.

A_2: Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.

A_3: Każda liczba różna od zera jest następnikiem jakiejś liczby.

A_4: Wynik dodania zera do dowolnej liczby jest tą liczbą.

A_5: Suma: pierwszej liczby oraz następnika drugiej równa jest następnikowi sumy liczb: pierwszej oraz drugiej.

A_6: Wynik przemnożenia dowolnej liczby przez zero jest zerem.

[21] I tylko! Jak jednak wiadomo, nasze zamierzenia mogą okazać się zbyt śmiałe. Tak jest zarówno w tym przypadku, jak i w przypadku Arytmetyki Peana (zobacz niżej).

A_7: Iloczyn: pierwszej liczby oraz następnika drugiej równy jest sumie: iloczynu liczb pierwszej i drugiej oraz pierwszej liczby.

Jeśli aksjomaty te wydają ci się oczywiste, to witaj we Wspólnocie Intelektualnej Ludzkości! Nie są chyba znani osobnicy, którym zdania te wydawałyby się fałszywe, przy podanej powyżej interpretacji zamierzonej. Powstaje naturalnie pytanie: czy z tych aksjomatów ***wynikają***[22] DOKŁADNIE WSZYSTKIE prawdy arytmetyczne? Odpowiedzi na to, wydawałoby się proste, pytanie dostarczają ważne twierdzenia metalogiczne (o których usłyszysz na roku III, na wykładzie dotyczącym *Funkcji Rekurencyjnych*). Odpowiedź jest negatywna; chociaż każde zdanie wyprowadzalne z aksjomatów jest prawdziwe w zamierzonej interpretacji, to jednak nie wszystkie zdania prawdziwe w tej interpretacji są wyprowadzalne z aksjomatów. Ma to też związek z ***nierozstrzygalnością*** KRP.

Pierwsze trzy z powyższych aksjomatów mają gwarantować, że uniwersum interpretacji zamierzonej jest poprawnie utworzoną kolejką: na początku jest zero, potem następnik zera (czyli jedynka), potem następnik następnika zera (czyli następnik jedynki, a więc dwójka), i tak dalej. Za każdą liczbą naturalną jest dokładnie jedna liczba większa od niej o jeden, a od każdej liczby naturalnej jest tylko ***skończenie***[23] wiele „kroków wstecz", do zera.

Aksjomaty A_4 oraz A_5 charakteryzują dodawanie, natomiast A_6 oraz A_7 ustalają własności mnożenia. Nie obawiaj się: w charakterystykach tych ***nie*** popełnia się błędnego koła, są to poprawne charakterystyki tych operacji.

Pokażemy teraz, jak uzyskiwać dowody prostych prawd arytmetycznych przy użyciu metody tablic analitycznych.

Oto dowód, iż $\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$, czyli że ***dwa i dwa jest cztery***:

1.	$\forall x \oplus (x, \bigcirc) = x$	aksjomat A_4
2.	$\forall x \forall y \oplus (x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$	aksjomat A_5
3.	$\neg(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc)))))$	założenie dowodu nie wprost
4.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc) = \sigma(\sigma(\bigcirc))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_4
5.	$\forall y \oplus (\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), y))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_5
6.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\bigcirc$ w 5.
7.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\bigcirc)$ w 5.
8.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	6. i 7., reguły dla identyczności
9.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$	4. i 8., reguły dla identyczności
10.	$\times_{3,9}$	SPRZECZNOŚĆ: $3, 9$.

W Arytmetyce Robinsona łatwo dowodzi się wszelakich *konkretnych* faktów arytmetycznych, np.: $\bigcirc \neq \sigma(\bigcirc)$, $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$, itp. Natomiast nie są w niej dowodliwe liczne zdania generalnie skwantyfikowane, jak np. $\forall x\ (x \neq \sigma(x))$. Przykładowe dowody zdań tego drugiego rodzaju podamy za chwilę, omawiając aksjomatykę Arytmetyki Peana.

Pokażmy jeszcze jeden dowód w Arytmetyce Robinsona: udowodnimy mianowicie, że z aksjomatów A_1 oraz A_2 wynika logicznie nierówność $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$, tj. iż jeden jest różne od dwa. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy A_1 oraz A_2, a także $\neg\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$.

$$\begin{array}{c}
(0.1)\ \ \forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))\ ^{2.\star\bigcirc} \\
| \\
(0.2)\ \ \forall x\ \bigcirc \neq \sigma(x)\ ^{1.\star\bigcirc} \\
| \\
(0.3)\ \ \neg\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc)) \\
| \\
(1)\ \ \bigcirc \neq \sigma(\bigcirc) \\
| \\
(2)\ \ \forall y\ (\bigcirc \neq y \rightarrow \sigma(\bigcirc) \neq \sigma(y))\ ^{3.\star\sigma(\bigcirc)} \\
| \\
(3)\ \ \bigcirc \neq \sigma(\bigcirc) \rightarrow \sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))\ ^{4.\rightarrow} \\
\begin{array}{cc}
(4_l)\ \ \neg\bigcirc \neq \sigma(\bigcirc) & (4_p)\ \ \sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc)) \\
| & | \\
\times_{1,4_l} & \times_{0.3,4_p}
\end{array}
\end{array}$$

[22] Przy interpretacji symbolu $=$ jako relacji identyczności.

[23] Uwaga: pojęcia *skończoności* nie można wyrazić w języku pierwszego rzędu; ten intuicyjny komentarz czyniony jest w metajęzyku.

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Wykluczyliśmy zatem możliwość, by A_1 oraz A_2 były prawdziwe i jednocześnie nierówność $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$ była fałszywa. Tak więc, $\sigma(\bigcirc) \neq \sigma(\sigma(\bigcirc))$ wynika logicznie z A_1 oraz A_2.

Rozszerzymy teraz system arytmetyki Robinsona poprzez dodanie do jego aksjomatów ***schematu*** aksjomatów, zwanego ***zasadą indukcji***. Otrzymany w ten sposób system nazywa się ARYTMETYKĄ PEANA.

Stałe pozalogiczne Arytmetyki Peana są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona:

σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: *następnik* t;

$\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *suma* t_1 i t_2;

$\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *iloczyn* t_1 i t_2;

$\bigcirc$ — stała indywiduowa; symbol $\bigcirc$ czytamy: *zero*.

AKSJOMATYKA ARYTMETYKI PEANA:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$ są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona.

Aksjomaty specyficzne Arytmetyki Peana:

P_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$

P_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$

P_3: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

P_4: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$

P_5: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

P_6: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$

P_7: $(A(\bigcirc) \wedge \forall x\ (A(x) \rightarrow A(\sigma(x)))) \rightarrow \forall x\ A(x)$
(dla dowolnej formuły A, o jednej zmiennej wolnej, języka Arytmetyki Peana).

P_7 nie jest jednym aksjomatem, lecz schematem (przeliczalnie wielu) aksjomatów. P_7 nazywamy *zasadą indukcji*.

Pokażemy, jak z zasady indukcji wywieść jeden z aksjomatów arytmetyki Robinsona, a mianowicie aksjomat:

$$A_3: \quad \forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y))).$$

Niech $F(x)$ będzie formułą $x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y))$.
Schemat indukcji zastosowany do formuły $F(x)$ ma postać:

$$(F(\bigcirc) \wedge \forall x\ (F(x) \rightarrow F(\sigma(x))) \rightarrow) \forall x\ F(x).$$

Aby wykazać, że A_3 wynika logicznie z aksjomatu indukcji wystarczy wykluczyć, że jednocześnie:

- aksjomat indukcji (dla formuły $F(x)$) jest prawdziwy;
- aksjomat A_3 jest fałszywy.

Trzeba więc pokazać, że tablica analityczna, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy aksjomat indukcji oraz zaprzeczenie aksjomatu A_3 ma wszystkie gałęzie zamknięte.

Budujemy drzewo:

$(0.1)\ F(\bigcirc) \wedge \forall x\ (F(x) \to F(\sigma(x))) \to \forall x\ F(x)\ ^{1.\to}$

$(0.2)\ \neg\forall x\ F(x)$

- $(1_l)\ \neg(F(\bigcirc) \wedge \forall x\ (F(x) \to F(\sigma(x))))\ ^{2.\neg\wedge}$
  - $(2_l)\ \neg F(\bigcirc)\ ^{3.\neg\to}$
    - $(3_g)\ \bigcirc \neq \bigcirc$
    - $(3_d)\ \neg\exists y\ \bigcirc = \sigma(y)$
    - $\times_{3_g}$
  - $(2_p)\ \neg\forall x\ (F(x) \to F(\sigma(x)))\ ^{4.\surd a}$
    - $(4)\ \neg(F(a) \to F(\sigma(a)))\ ^{5.\neg\to}$
    - $(5_g)\ F(a)$
    - $(5_d)\ \neg F(\sigma(a))\ ^{6.\neg\to}$
    - $(6_g)\ \sigma(a) \neq \bigcirc$
    - $(6_d)\ \neg\exists y\ \sigma(a) = \sigma(y)\ ^{7.\star a}$
    - $(7)\ \sigma(a) \neq \sigma(a)$
    - $\times_7$
- $(1_p)\ \forall x\ F(x)$
  - $\times_{0.2,1_p}$

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte. Tak więc, pokazaliśmy, że A_3 wynika logicznie z aksjomatu indukcji.

Rozważmy następującą regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} A(\bigcirc) \\ \neg\forall x\ A(x) \end{array}}{\exists x\ (A(x) \wedge \neg A(\sigma(x)))}$$

gdzie $A(x)$ jest dowolną formułą języka Arytmetyki Peana z jedną zmienną wolną. Nazwiemy ją ***regułą indukcji matematycznej*** (w skrócie: RIM).

Jeśli do aksjomatów P_1–P_6 dołączyć regułę RIM, to można udowodnić — co samo w sobie nie jest zaskakujące — zasadę indukcji P_7. W tym celu wystarczy dowieść, że z przesłanek $A(\bigcirc)$ oraz $\forall x\ (A(x) \to A(\sigma(x)))$ wynika logicznie wniosek $\forall x\ A(x)$, dla dowolnej formuły $A(x)$ języka Arytmetyki Peana z jedną zmienną wolną. Budujemy więc tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy powyższe przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$(0.1)\ A(\bigcirc)\ ^{1.RIM}$

$(0.2)\ \forall x\ (A(x) \to A(\sigma(x)))\ ^{3.\star a}$

$(0.3)\ \neg\forall x\ A(x)\ ^{1.RIM}$

$(1)\ \exists x\ (A(x) \wedge \neg A(\sigma(x)))\ ^{2.\surd a}$

$(2)\ A(a) \wedge \neg A(\sigma(a))\ ^{4.\wedge}$

$(3)\ A(a) \to A(\sigma(a))\ ^{5.\to}$

$(4_g)\ A(a)$

$(4_d)\ \neg A(\sigma(a))$

- $(5_l)\ \neg A(a)$
  - $\times_{4_g,5_l}$
- $(5_p)\ A(\sigma(a))$
  - $\times_{4_d,5_p}$

Formuła o numerze (1) jest tu wnioskiem z przesłanek o numerach (0.1) oraz (0.3) wedle reguły RIM.

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a zatem udowodniliśmy, że zasada indukcji P_7 może zostać wyprowadzona z reguły indukcji RIM.

Rozważmy jeszcze jedno zastosowanie reguły indukcji RIM. Jak już wspomniano, w Arytmetyce Robinsona nie można udowodnić, że $\forall x\ x \neq \sigma(x)$. Pokażemy, że zdanie to można udowodnić z aksjomatów A_1 oraz A_2 Arytmetyki Robinsona oraz reguły RIM. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy A_1, A_2 oraz $\neg\forall x\ x \neq \sigma(x)$. Formułą $A(y)$, która wystąpi w przesłankach reguły RIM jest formuła $\forall x\ (y \neq \sigma(x))$.

$$\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))\ ^{3.\star a}$$

$$\forall x\ \bigcirc \neq \sigma(x)\ ^{1.RIM}$$

$$\neg\forall x\ x \neq \sigma(x)\ ^{1.RIM}$$

$$(1)\ \ \exists x\ (x \neq \sigma(x) \wedge \neg(\sigma(x) \neq \sigma(\sigma(x))))\ ^{2.\surd a}$$

$$(2)\ \ a \neq \sigma(a) \wedge \neg(\sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a)))\ ^{5.\wedge}$$

$$(3)\ \ \forall y\ (a \neq y \rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(y))\ ^{4.\star \sigma(a)}$$

$$(4)\ \ a \neq \sigma(a) \rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))\ ^{6.\rightarrow}$$

$$(5_g)\ \ a \neq \sigma(a)$$

$$(5_d)\ \ \neg\sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))$$

$$(6_l)\ \ \neg a \neq \sigma(a) \qquad\qquad (6_p)\ \ \sigma(a) \neq \sigma(\sigma(a))$$

$$\times_{5_g,6_l} \qquad\qquad\qquad \times_{5_d,6_p}$$

Wszystkie gałęzie tablicy są zamknięte, a zatem z A_1 oraz A_2 wynika logicznie wniosek $\forall x\ x \neq \sigma(x)$.

PRZYKŁAD 18.7.2.5.: GRUPY.

Lubisz tańczyć, prawda? Przypuśćmy więc, że stajesz na parkiecie (nieważne: trzeźwa, czy nie), wykonujesz ulubiony taniec i wracasz do baru. Czy jesteś pewna, że nadal jesteś tą samą osobą? Ponieważ abstrahujemy od twojego zespołu przekonań (osądów, emocji, itp.), więc zadamy nieco inne pytanie: czy jesteś pewna, że do baru wróciło to samo ciało, ten sam, za przeproszeniem, obiekt fizyczny? Zakładamy dodatkowo, że w trakcie tańca nie uległaś rozerwaniu (czyli, że wracasz do baru w jednym kawałku), nie rozciągnęłaś się ani nie skurczyłaś oraz że nie uczyniono w tobie żadnych dodatkowych otworów.[24]

Pytanie nasze sprowadza się do tego, czy ruchy podczas tańca pozostawią taką, za przeproszeniem, bryłę, jaką jesteś, niezmienioną. Jeszcze jedno założenie, które być może wyda ci się nietrafne, ale które w istocie jest niewinne: zakładamy, że w tańcu jesteś bryłą sztywną.[25]

Zgodzisz się, że przy tych założeniach taniec sprowadza się do ***przesunięć*** oraz ***obrotów*** brył sztywnych. A stąd już niewielki (taneczny) krok w kierunku TEORII GRUP.

* * *

Aksjomaty teorii grup można sformułować w różnych językach, tzn. można na różne sposoby dobrać zestaw stałych pozalogicznych. Podamy trzy takie możliwości.

TEORIA GRUP: PIERWSZA AKSJOMATYKA.

Język teorii grup jest w tym przypadku językiem KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie.

[24] Ani nie zatkano już istniejących. Upraszam, aby tych założeń nie traktować jako obscenicznych: to są zwykłe warunki natury topologicznej.

[25] Niewinność tego założenia polega na tym, że nawet jeśli w tańcu dziko podrygujesz i wykręcasz się na wszelakie sposoby, to jednak pozostajesz ***sumą*** brył sztywnych.

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symbolu $\boxdot$, czyli formuły:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x, z) = \boxdot(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z, x) = \boxdot(z, y))$.

Aksjomaty specyficzne teorii grup:

G_1^1: $\forall x \forall y\ (\boxdot(x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z))$

G_2^1: $\forall x \forall y \exists z\ (\boxdot(x, z) = y)$

G_3^1: $\forall x \forall y \exists z\ (\boxdot(z, x) = y)$.

Warunek *przemienności* działania $\boxdot$, tj.:

$$(A) \quad \forall x \forall y\ (\boxdot(x, y) = \boxdot(y, x))$$

nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup. Te układy postaci $\langle G, \boxdot_G \rangle$, dla których G jest dowolnym zbiorem, a $\boxdot_G$ działaniem w zbiorze G takim, że zachodzą aksjomaty teorii grup oraz warunek (A) nazywamy ***grupami przemiennymi*** (albo *abelowymi*).

Jako ćwiczenie proponujemy próbę wykazania, że istotnie warunek (A) nie wynika logicznie z aksjomatów teorii grup. Wskazówka: budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy aksjomaty G_1^1, G_1^2, G_1^3 oraz negację warunku (A). Gdyby ta tablica okazała się zamkniętea, to (A) byłoby logiczną konsekwencją G_1^1, G_1^2 oraz G_1^3.

TEORIA GRUP: DRUGA AKSJOMATYKA.

W tym przypadku używany język to język KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie;
- jedną stałą indywiduową ε nazywającą element *neutralny* (względem działania) w grupie.

AKSJOMATY TEORII GRUP W TYM JĘZYKU:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxdot$ oraz ε są takie same, jak w poprzednim przypadku:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x, z) = \boxdot(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z, x) = \boxdot(z, y))$.

Aksjomaty specyficzne:

G_1^2: $\forall x \forall y\ \boxdot (x, \boxdot(y, z)) = \boxdot(\boxdot(x, y), z)$

G_2^2: $\forall x\ (\boxdot(x, \varepsilon) = x)$

G_3^2: $\forall x\ (\boxdot(\varepsilon, x) = x)$

G_4^2: $\forall x \exists y\ (\boxdot(x, y) = \varepsilon)$

G_5^2: $\forall x \exists y\ (\boxdot(y, x) = \varepsilon)$.

Dowód jedyności elementu neutralnego, tj. zdania:

$$(G_6^2) \quad \forall z(\forall x\ (\boxdot(x,z) = x \wedge \boxdot(z,x) = x) \rightarrow \varepsilon = z).$$

1.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^2
2.	$\forall x\ (\boxdot(\varepsilon,x) = x)$	aksjomat G_3^2
3.	$\neg\forall z(\forall x\ (\boxdot(x,z) = x \wedge \boxdot(z,x) = x) \rightarrow \varepsilon = z)$	negacja G_6^2 (założenie dowodu nie wprost)
4.	$\neg(\forall x\ (\boxdot(x,a) = x \wedge \boxdot(a,x) = x) \rightarrow \varepsilon = a)$	$R(\neg\forall)$, 3
5_g. 5_d.	$\forall x\ (\boxdot(x,a) = x \wedge \boxdot(a,x) = x)$ $\neg\varepsilon = a$	$R(\neg \rightarrow)$, 4
6.	$\boxdot(a,\varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 1
7.	$\boxdot(\varepsilon,a) = a$	$R(\forall)$ dla a, 2
8.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon \wedge \boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 5_g
9_g. 9_d.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon$ $\boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(\wedge)$, 8
10.	$\varepsilon = a$	$R(=)$, 9_g, 7
11.	$\times_{5_d,10}$	SPRZECZNOŚĆ: 5_d, 10.

TEORIA GRUP: TRZECIA AKSJOMATYKA.

W tym przypadku używany język to język KRP z identycznością oraz:

- jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\boxdot$, nazywającym *działanie* w grupie;
- jedną stałą indywiduową ε nazywającą element *neutralny* (względem działania) w grupie;
- jednym jednoargumentowym symbolem funkcyjnym $\circledcirc$ nazywającym element *odwrotny* (względem swojego argumentu).

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxdot$, $\circledcirc$ oraz ε:

$\forall x\forall y\forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(x,z) = \boxdot(y,z))$

$\forall x\forall y\forall z\ (x = y \rightarrow \boxdot(z,x) = \boxdot(z,y))$

$\forall x\forall y\ (x = y \rightarrow \circledcirc(x) = \circledcirc(y))$.

Aksjomaty specyficzne:

G_1^3: $\forall x\forall y\forall z\ (\boxdot(x,\boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(x,y),z))$

G_2^3: $\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$

G_3^3: $\forall x\ (\boxdot(x,\circledcirc(x)) = \varepsilon)$.

Dowód prawa skracania, tj. zdania:

$$(G_4^3) \quad \forall x\forall y\forall z\ (\boxdot(x,z) = \boxdot(y,z) \rightarrow x = y).$$

1.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(x,y),z))$	aksjomat G_1^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
3.	$\forall x\ (\boxdot(x,\circledcirc(x)) = \varepsilon)$	aksjomat G_3^3
4.	$\neg\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x,z) = \boxdot(y,z) \rightarrow x = y)$	negacja G_4^3 (założenie dowodu nie wprost)
5.	$\neg\forall y \forall z\ (\boxdot(a_1,z) = \boxdot(y,z) \rightarrow a_1 = y)$	$R(\neg\forall)$ dla a_1, 4
6.	$\neg\forall z\ (\boxdot(a_1,z) = \boxdot(a_2,z) \rightarrow a_1 = a_2)$	$R(\neg\forall)$ dla a_2, 5
7.	$\neg(\boxdot(a_1,a_3) = \boxdot(a_2,a_3) \rightarrow a_1 = a_2)$	$R(\neg\forall)$ dla a_3, 6
8_g. 8_d.	$\boxdot(a_1,a_3) = \boxdot(a_2,a_3)$ $a_1 \neq a_2$	$R(\neg \rightarrow)$, 7
9.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a_1, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(a_1,y),z))$	$R(\forall)$ dla a_1, 1
10.	$\forall z\ \boxdot\ (a_1, \boxdot(a_3,z)) = \boxdot(\boxdot(a_1,a_3),z)$	$R(\forall)$ dla a_3, 9
11.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3,\circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_1,a_3),\circledcirc(a_3))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a_3)$, 10
12.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3,\circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_2,a_3),\circledcirc(a_3))$	$R(=)$ 11, 8_g
13.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a_2, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(a_2,y),z))$	$R(\forall)$ dla a_2, 1
14.	$\forall z\ (\boxdot(a_2, \boxdot(a_3,z)) = \boxdot(\boxdot(a_2,a_3),z)$	$R(\forall))$ dla a_3, 13
15.	$\boxdot(a_2, \boxdot(a_3,\circledcirc(a_3))) = \boxdot(\boxdot(a_2,a_3),\circledcirc(a_3))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a_3)$, 14
16.	$\boxdot(a_3,\circledcirc(a_3)) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla a_3, 3
17.	$\boxdot(a_1, \boxdot(a_3,\circledcirc(a_3))) = \boxdot(a_2, \boxdot(a_3,\circledcirc(a_3)))$	$R(=)$, 12, 15
18.	$\boxdot(a_1,\varepsilon) = \boxdot(a_2,\varepsilon)$	$R(=)$, 16,17
19.	$\boxdot(a_2,\varepsilon) = a_2$	$R(\forall)$ dla a_2, 2
20.	$\boxdot(a_3,\varepsilon) = a_3$	$R(\forall)$ dla a_3, 2
21.	$a_1 = \boxdot(a_2,\varepsilon)$	$R(=)$, 19, 18
22.	$a_1 = a_2$	$R(=)$, 20, 21
23.	$\times_{8_d,22}$	SPRZECZNOŚĆ: $8_d, 22$.

Dowód zdania:

$$(G_5^3)\quad \forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,x)).$$

1.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(x,y),z))$	aksjomat G_1^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
3.	$\forall x\ (\boxdot(x,\circledcirc(x)) = \varepsilon)$	aksjomat G_3^3
4.	$\forall x \forall y \forall z\ (\boxdot(x,z) = \boxdot(y,z) \rightarrow x = y)$	twierdzenie G_4^3
5.	$\neg\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,x))$	negacja G_5^3 (założenie dowodu nie wprost)
6.	$\boxdot(a,\varepsilon) \neq \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(\forall)$ dla a, 5
7.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(\varepsilon, \boxdot(y,z)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,y),z))$	$R(\forall)$ dla ε, 1
8.	$\forall z\ (\boxdot(\varepsilon, \boxdot(a,z)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),z))$	$R(\forall)$ dla a, 7
9.	$\boxdot(\varepsilon, \boxdot(a,\circledcirc(a))) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a))$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a)$, 8
10.	$\boxdot(a,\circledcirc(a)) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla a, 3
11.	$\boxdot(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 2
12.	$\boxdot(\varepsilon,\varepsilon) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a))$	$R(=)$, 9, 10
13.	$\varepsilon = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a))$	$R(=)$, 11, 12
14.	$\boxdot(a,\circledcirc(a)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a))$	$R(=)$, 10, 13
15.	$\forall y \forall z\ (\boxdot(a,z) = \boxdot(y,z) \rightarrow a = y$	$R(\forall))$ dla a, 4
16.	$\forall z\ (\boxdot(a,z) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),z) \rightarrow a = \boxdot(\varepsilon,a))$	$R(\forall)$ dla $\boxdot(\varepsilon,a)$, 15
17.	$\boxdot(a,\circledcirc(a)) = \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a)) \rightarrow a = \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(\forall)$ dla $\circledcirc(a)$, 16
18_l.	$\boxdot(a,\circledcirc(a)) \neq \boxdot(\boxdot(\varepsilon,a),\circledcirc(a))$	$R(\rightarrow)$, 17
18_l.1.	$\times_{14,18_l}$	SPRZECZNOŚĆ: $14, 18_l$.
18_p.	$a = \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(\rightarrow)$, 17
18_p.1.	$\boxdot(a,\varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 2
18_p.2.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(=)$, 18_p., 18_p.1.
18_p.3.	$\times_{6,18_p.2.}$	SPRZECZNOŚĆ: $6, 18_p.2.$

Dowód zdania:

$$(G_6^3) \quad \forall y \forall x\ (\boxdot(x,y) = x \rightarrow y = \varepsilon).$$

1.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = x)$	aksjomat G_2^3
2.	$\forall x\ (\boxdot(x,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,x))$	twierdzenie G_5^3
3.	$\neg\forall y\forall x\ (\boxdot(x,y) = x \rightarrow y = \varepsilon)$	negacja G_6^3 (założenie dowodu nie wprost)
4.	$\neg\forall x\ (\boxdot(x,a) = x \rightarrow a = \varepsilon)$	$R(\forall)$ dla a, 3
5_g. 5_d.	$\forall x\ \boxdot\ (x,a) = x$ $a \neq \varepsilon$	$R(\neg \rightarrow)$, 4
6.	$\boxdot(\varepsilon,a) = \varepsilon$	$R(\forall)$ dla ε, 5_g
7.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \boxdot(\varepsilon,a)$	$R(\forall)$ dla a, 2
8.	$\boxdot(a,\varepsilon) = \varepsilon$	$R(=)$, 6,7
9.	$\boxdot(a,\varepsilon) = a$	$R(\forall)$ dla a, 1
10.	$a = \varepsilon$	$R(=)$, 8,9
11.	$\times_{5_d,10}$	SPRZECZNOŚĆ: $5_d, 10$.

Przykłady grup.

- Zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania oraz zerem jako elementem neutralnym tworzy grupę.
- Zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera z działaniem mnożenia oraz jedynką jako elementem neutralnym tworzy grupę.
- Zbiór wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań danego zbioru na siebie tworzy grupę. Działaniem jest tu złożenie funkcji, a elementem neutralnym funkcja identycznościowa.

PRZYKŁAD 18.7.2.6.: ALGEBRY BOOLE'A.

Znajdowanie analogii między różnymi twierdzeniami to szczególna umiejętność.[26] Możesz posiąść tę umiejętność, nawet na (stosunkowo niskim) poziomie elementarza logicznego. Z pewnością zauważyłaś, że jest odpowiedniość między pewnymi prawami KRZ a niektórymi prawami rachunku zbiorów.

Podobnie jak w przypadku teorii grup, również dla teorii algebr Boole'a podać można różne (równoważne) aksjomatyki. Ograniczymy się do dwóch aksjomatyk oraz jednej definicji algebr Boole'a (przez częściowe porządki).

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: PIERWSZA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającą *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającą *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającą *dopełnienie* (swojego argumentu);

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x,z) = \boxplus(y,z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x,z) = \boxtimes(y,z))$

[26] Jeszcze ciekawsza jest umiejętność znajdowania analogii między różnymi analogiami, jak twierdzą matematycy.

$\forall x\forall y\forall z\ (x = y \to \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$

$\forall x\forall y\forall z\ (x = y \to \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$

$\forall x\forall y\ (x = y \to \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B^1_1: $\forall x\forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B^1_2: $\forall x\forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

B^1_3: $\forall x\forall y\forall z\ (\boxplus(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxplus(x, y), z))$

B^1_4: $\forall x\forall y\forall z\ (\boxtimes(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxtimes(x, y), z))$

B^1_5: $\forall x\forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, y), y) = y)$

B^1_6: $\forall x\forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, y), y) = y)$

B^1_7: $\forall x\forall y\forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$

B^1_8: $\forall x\forall y\forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$

B^1_9: $\forall x\forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y)$

B^1_{10}: $\forall x\forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y)$.

Prostymi konsekwencjami tych aksjomatów są np.:

- $\forall x\ (\boxplus(x, x) = x)$
- $\forall x\ (\boxtimes(x, x) = x)$
- $\forall x\forall y\ ((\boxplus(x, y) = \boxplus(x, \boxminus(x)) \wedge \boxtimes(x, y) = \boxtimes(x, \boxtimes(x))) \to y = \boxminus(x))$.

Niech ich wyprowadzenia będą ćwiczeniem dla czytelniczek. Jako wskazówkę podajemy ciąg równości dla pierwszych dwóch rozważanych wyżej przypadków:

$$x = \boxplus(x, \boxtimes(x, y)) = \boxtimes(\boxplus(x, x), \boxplus(x, y)) = \boxplus(\boxtimes(x, \boxplus(x, y)), \boxtimes(x, \boxplus(x, y))) = \boxplus(x, x)$$

$$x = \boxtimes(x, \boxplus(x, y)) = \boxplus(\boxtimes(x, x), \boxtimes(x, y)) = \boxtimes(\boxplus(x, \boxtimes(x, y)), \boxplus(x, \boxtimes(x, y))) = \boxtimes(x, x).$$

TEORIA ALGEBR BOOLE'A: DRUGA AKSJOMATYKA.

Język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającą *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającą *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającą *dopełnienie* (swojego argumentu);
- stałą indywiduową $\triangledown$, nazywającą *jedynkę* (element największy) algebry;
- stałą indywiduową $\vartriangle$, nazywającą *zero* (element najmniejszy) algebry.

AKSJOMATY:

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$

$\forall x \forall y\ (x = y \to \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Uwaga. Naprawdę potrzebne są tylko dwa pierwsze z tych aksjomatów. Pozostałe można wyprowadzić z innych aksjomatów teorii algebr Boole'a.

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

B_2^1: $\forall x\ (\boxplus(x, \vartriangle) = x)$

B_2^2: $\forall x\ (\boxtimes(x, \triangledown) = x)$

B_2^3: $\forall x\ (\boxplus(x, \boxminus(x)) = \triangledown)$

B_2^4: $\forall x\ (\boxtimes(x, \boxminus(x)) = \vartriangle)$

B_2^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$

B_2^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$

B_2^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$

B_2^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$.

DEFINICJA ALGEBR BOOLE'A PRZEZ CZĘŚCIOWE PORZĄDKI.

Niech U będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym częściowo przez relację $\prec$. Przypominamy, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

- element $a \in A$ nazywamy *elementem maksymalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:
  $\forall x\ ((x \in a \wedge x \prec a) \to x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem minimalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja:
  $\forall x\ ((x \in a \wedge a \prec x) \to x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem największym* w A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem najmniejszym* w A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *kresem dolnym* zbioru A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *najmniejszym kresem górnym* zbioru A, jeśli a jest elementem najmniejszym zbioru wszystkich kresów górnych zbioru A;
- element $a \in U$ jest *największym kresem dolnym* zbioru A, jeśli a jest elementem największym zbioru wszystkich kresów dolnych zbioru A.

Mówimy, że $\langle U, \prec \rangle$ jest ***kratą***, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in U$ istnieją: najmniejszy kres górny oraz największy kres dolny zbioru $\{x, y\}$. Ponieważ elementy te są wyznaczone jednoznacznie, więc możemy przyjąć oznaczenia:

- $\boxtimes(x, y)$ — dla największego kresu dolnego zbioru $\{x, y\}$;
- $\boxplus(x, y)$ — dla najmniejszego kresu górnego zbioru $\{x, y\}$.

Krata $\langle U, \prec \rangle$ jest ***dystrybutywna***, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in U$ zachodzą warunki:

- $\forall x \forall y \forall z \ \boxplus (x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z))$
- $\forall x \forall y \forall z \ \boxtimes (x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z))$.

Kratę dystrybutywną $\langle U, \prec \rangle$ nazywamy ***algebrą Boole'a***, jeśli dla dowolnego elementu $x \in U$ istnieje jego *dopełnienie*, tj. element $\boxminus(x)$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y \ \boxplus (\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y$
- $\forall x \forall y \ \boxtimes (\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y$.

Z każdego z podanych wyżej układów aksjomatów dla teorii algebr Boole'a można wywieść wszystkie warunki charakteryzujące algebry Boole'a jako określone przed chwilą struktury uporządkowane, a także na odwrót: z charakterystyki porządkowej algebr Boole'a można wyprowadzić każdą z omawianych wcześniej aksjomatyk.

Uwaga. Rozważany wyżej przykład 18.7.2.2. można traktować jako dotyczący algebr Boole'a, rozumianych w zdefiniowany wyżej sposób. Czy widzisz, dlaczego?

Uwaga o standardowej notacji. Dla operacji w algebrach Boole'a używa się zwykle standardowych oznaczeń:

- $\cup$ — dla kresu górnego (także: $\vee$);
- $\cap$ — dla kresu dolnego (także: $\wedge$);
- $-$ — dla operacji dopełnienia.

Powyżej celowo nie używaliśmy standardowej notacji. Niech będzie prostym ćwiczeniem dla Czytelniczek zapisanie podanych aksjomatyk teorii algebr Boole'a w notacjach standardowych. Wykonanie tego ćwiczenia nagrodzone zostanie iluminacją: stwierdzisz, że przecież gdzieś już to widziałaś!

Przykłady algebr Boole'a.

- Wszystkie ***podzbiory dowolnego zbioru*** U wraz z operacjami teoriomnogościowymi: sumy (kres górny), iloczynu (kres dolny), dopełnienia (do U), zbiorem U jako jedynką oraz zbiorem pustym $\emptyset$ jako zerem tworzą algebrę Boole'a.
- **Algebra wartości logicznych.** Tabliczki prawdziwościowe funktorów odpowiadających spójnikom zdaniowym pokazują, że w zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ można wprowadzić strukturę algebry Boole'a. Zerem tej algebry jest 0, jej jedynką jest 1. Kres dolny odpowiada koniunkcji, kres górny alternatywie (nierozłącznej), a operacja dopełnienia odpowiada negacji.
- **Algebra zdarzeń.** Przestrzeń zdarzeń jest algebrą Boole'a. Jest to, rzecz jasna, szczególny przypadek pierwszego z rozważanych przykładów. Zdarzenia są zbiorami (zdarzeń elementarnych), a koniunkcji i alternatywie zdarzeń odpowiadają operacje teoriomnogościowe na zbiorach zdarzeń elementarnych; zdarzeniu przeciwnemu do danego zdarzenia odpowiada dopełnienie teoriomnogościowe tego zdarzenia.

- **Kraty pojęć.** Ten przykład wykorzystuje kilka pojęć algebraicznych, których tu nie objaśniamy. Jest on przeznaczony dla tych czytelniczek, które są już trochę oswojone z algebrą, lub też takich, które — zżerane zdrową ambicją — zechcą odnaleźć owe pojęcia w jakimś podręczniku. Dodajmy, że algebry z tego przykładu mają ciekawe zastosowania, także lingwistyczne — np. w opisie zależności semantycznych w leksykonie.

Kontekstem nazwiemy dowolny układ postaci (G, M, I), gdzie G (ogół rozważanych obiektów) i M (ogół rozważanych cech) są zbiorami, a I relacją o dziedzinie G oraz przeciwdziedzinie M. Wyrażenie gIm czytajmy: obiekt g ma cechę m. Można czynić dalsze założenia o tego typu układach; w tym miejscu przywoływanie ich jest nieistotne. Zdefiniujmy dwa operatory na rodzinach zbiorów obiektów i cech:

$\rhd(A) = \{m \in M \ : \ (\forall g) \ [g \in A \to gIm]\}$

$\lhd(B) = \{g \in G \ : \ (\forall m) \ [m \in B \to gIm]\}$

Para $(\rhd, \lhd)$ jest odpowiedniością Galois. Dla dowolnego kontekstu (G, M, I) nazwiemy ***pojęciem formalnym*** tego kontekstu każdą parę (A, B) taką, że:

$A \subseteq G, \ B \subseteq M, \ \rhd(A) = B, \ \lhd(B) = A.$

Ekstensją pojęcia formalnego (A, B) jest A, jego ***intensją*** jest B. Rodzinę wszystkich pojęć formalnych kontekstu (G, M, I) oznaczmy przez $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Rodzina ta jest częściowo uporządkowana przez relację $\prec$:

$(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 \subseteq A_2$.[27]

Podstawowe dla rozważanej problematyki twierdzenie wysłowić można następująco (zob. Bernhard Ganter, Rudolf Wille *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999, str. 20; upraszczam nieco notację; wszystkie potrzebne do zrozumienia twierdzenia pojęcia znaleźć można w dowolnym solidnym podręczniku teorii krat; stosujemy też standardowe niedomówienia algebraiczne):

Twierdzenie.

Krata pojęć $\mathfrak{B}(G, M, I)$ jest kratą zupełną, w której kresy zdefiniowane są równościami:

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = (\bigcap_{t \in T} A_t, \rhd(\lhd(\bigcup_{t \in T} B_t)))$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = (\lhd(\rhd(\bigcup_{t \in T} A_t)), \bigcap_{t \in T} B_t).$$

Krata zupełna $\boldsymbol{V}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania $\gamma : G \to V$ oraz $\mu : M \to V$ takie, że $\gamma(G)$ jest supremum-gęsty w $\boldsymbol{V}$, $\mu(M)$ jest infimum-gęsty w $\boldsymbol{V}$ oraz gIm jest równoważne z $\gamma g \leqslant \mu m$ dla wszystkich $g \in G$ i wszystkich $m \in M$. W szczególności, $\boldsymbol{V} \cong \mathfrak{B}(V, V, \leqslant)$. Mamy tu oczywiście: $\boldsymbol{V} = (V, \leqslant)$.

Więcej przykładów podamy w jednym z następnych wykładów (dotyczącym konsekwencji rezolucyjnej i jej związkom z metodą tablic analitycznych).

19. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

Uwaga. Niektóre z zamieszczonych niżej drzew są dość skomplikowane i ledwo mieszczą się na kartce. Z tego względu formuły w nich występujące nie zawsze są „estetycznie" podpisane pod krawędziami drzew.

19.1. Tautologie KRP

19.1.1. Pokaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\forall x \ A \lor \forall x \ B \to \forall x \ (A \lor B)$
- (b) $\forall x \ (A \equiv B) \to \forall x \ (A \to B) \land \forall x \ (B \to A)$.

[27] Co jest równoważne temu, że $B_2 \subseteq B_1$.

19.1.2. Czy są tautologiami, czy kontrtautologiami KRP?

- (a) $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z)) \to \forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y))$
- (b) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x(\exists y(P(y) \land R(x,y)) \to \exists y(Q(y) \land R(x,y)))$
- (c) $\exists x(\exists y P(x,y) \to Q(x)) \equiv \exists x \exists y(P(x,y) \to Q(x))$.

19.2. Semantyczna niesprzeczność w KRP

19.2.1. Czy jest zbiorem semantycznie sprzecznym?

- (a) $\{P(a), \neg Q(a), \forall x(P(x) \to (R(x) \lor S(x))), \neg S(a), \forall x((R(x) \land T(x)) \to Q(x)), \neg\exists x(R(x) \land \neg T(x))\}$
- (b) $\{\exists x(\exists y P(y) \equiv \exists y Q(x,y)), \forall x(Q(a,x) \equiv P(x))\}$
- (c) $\{\exists x \exists y(R(x,y) \land \neg S(x,y)), \forall x(P(x) \to \forall y R(x,y)), \exists x P(x)\}$
- (d) $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x \exists y(R(y) \land S(y,x)), \forall x((R(x) \land Q(x)) \to T(x)), \forall x \forall y((T(y) \land S(y,x)) \to T(x)),$ $\neg\forall x \forall y((\neg P(y) \to \neg S(x,y)) \to T(x))\}$.

19.3. Wynikanie logiczne w KRP

19.3.1. Czy jest niezawodną regułą wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x\ ((P(x) \lor Q(x)) \to (R(x) \land S(x))) \\ \forall x\ ((R(x) \lor S(x)) \to (P(x) \land Q(x))) \\ \hline \forall x\ (P(x) \leftrightarrow R(x)) \end{array}$$

Oprócz rozwiązania metodą drzew semantycznych, spróbuj rozważyć, co z powyższej reguły da się wywnioskować o stosunkach między zakresami nazw ogólnych (czyli predykatów jednoargumentowych).

19.3.2. Które z podanych reguł wnioskowania są niezawodne? W przypadkach reguł zawodnych podaj co najmniej jedną interpretację, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

- (a)

$$\begin{array}{c} \exists x \exists y(((P(x) \land P(y)) \land x \neq y) \land (Q(x) \land Q(y))) \\ \forall x(Q(x) \to \neg R(x)) \\ \exists x(P(x) \land R(x)) \\ \hline \exists x((P(x) \land R(x)) \land \forall y(y \neq x \to (P(y) \to \neg R(y)))) \end{array}$$

- (b)

$$\begin{array}{c} \exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \\ \forall x(R(x) \to Q(x)) \\ \exists x(P(x) \land Q(x)) \\ \hline \forall x(R(x) \to P(x)) \end{array}$$

- (c)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(S(x) \to (Q(x) \wedge R(x)) \\ \exists x(S(x) \wedge Q(x)) \\ \exists x(S(x) \wedge \neg R(x))\end{array}}{\forall x(P(x) \to S(x))}$$

- (d)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x)) \\ \forall x((R(x) \vee S(x)) \to T(x)) \\ \forall x(T(x) \to (K(x) \wedge L(x))) \\ \exists x(P(x) \wedge (\neg K(x) \wedge \neg N(x)))\end{array}}{\exists x(Q(x) \wedge (M(x) \wedge \neg K(x)))}$$

- (e)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(P(x) \to \forall y(Q(x,y) \to R(y))) \\ \forall x(S(x) \to \forall y(T(y) \to Q(x,y)))\end{array}}{\exists x(S(x) \wedge P(x)) \to \forall y(T(y) \to R(y))}$$

- (f)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x((P(x) \wedge \neg Q(x)) \to \exists y(R(x,y) \wedge S(y))) \\ \exists x((T(x) \wedge P(x)) \wedge \forall y(R(x,y) \to T(y))) \\ \forall x(T(x) \to \neg Q(x))\end{array}}{\exists x(T(x) \wedge S(x))}$$

- (g)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \exists y(P(x,y) \to P(x,x)) \\ \forall x(Q(x) \to (\exists z(P(x,z) \to \exists y P(y,x)))) \\ \forall x \neg P(x,x)\end{array}}{\forall x(Q(x) \to \neg \exists z P(x,z))}$$

- (h)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \exists y P(x,y) \\ \exists z \forall x(\exists y P(x,y) \to P(x,z))\end{array}}{\exists z \forall x P(x,z)}$$

19.4. KRP z identycznością

19.4.1. Czy są tautologiami KRP z identycznością?

- (a) $P(a) \equiv \forall x(x = a \to P(x))$.
- (b) $\exists x(((P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y)) \to x = y) \to \forall x P(x))$.

19.4.2. Ustal, czy podane reguły wnioskowania są niezawodne. W przypadkach reguł zawodnych podaj co najmniej jedną interpretację, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

- (a)

$$\frac{\begin{array}{c}P(a)\\ \exists x\forall y(x=y)\end{array}}{\exists x\forall y(P(y)\equiv x=y)}$$

- (b)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(x=a\to P(x))\\ a\neq b\end{array}}{\neg P(b)}$$

19.5. KRP z symbolami funkcyjnymi

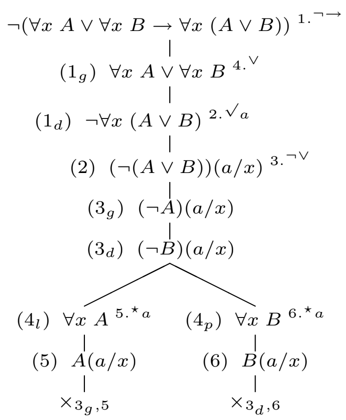
19.5.1. Udowodnij, że są twierdzeniami Arytmetyki Robinsona:

- (a) $\oplus(\bigcirc,\sigma(\bigcirc))=\sigma(\bigcirc)$
- (b) $\otimes(\bigcirc,\sigma(\bigcirc))=\sigma(\bigcirc)$.

Odpowiedzi

19.1. Tautologie KRP

19.1.1.
(a) $\forall x\ A\vee\forall x\ B\to\forall x\ (A\vee B)$.



(b) $\forall x\ (A\equiv B)\to\forall x\ (A\to B)\wedge\forall x\ (B\to A)$.

$$\neg(\forall x\ (A \equiv B) \to \forall x\ (A \to B) \wedge \forall x\ (B \to A))\ ^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\ \ \forall x\ (A \equiv B)\ ^{5.\star a\ \ 5.\star b}$$

$$(1_d)\ \ \neg(\forall x\ (A \to B) \wedge \forall x\ (B \to A))\ ^{2.\neg\wedge}$$

$$(2_l)\ \ \neg\forall x\ (A \to B)\ ^{3.\surd a} \qquad\qquad (2_p)\ \ \neg\forall x\ (B \to A)\ ^{7.\surd b}$$

$$(3)\ \ (\neg(A \to B))(a/x)\ ^{4.\neg\to} \qquad\qquad (7)\ \ (\neg(B \to A))(b/x)\ ^{8.\neg\to}$$

$$(4_g)\ \ A(a/x) \qquad\qquad (8_g)\ \ B(b/x)$$

$$(4_d)\ \ (\neg B)(a/x) \qquad\qquad (8_d)\ \ (\neg A)(b/x)$$

$$(5)\ \ (A \equiv B)(a/x)\ ^{6.\wedge} \qquad\qquad (9)\ \ (A \equiv B)(b/x)\ ^{10.\equiv}$$

$$(6_{lg})\ \ A(a/x) \quad (6_{pg})\ \ (\neg A)(a/x) \qquad (10_{lg})\ \ A(b/x) \quad (10_{pg})\ \ (\neg A)(b/x)$$

$$(6_{ld})\ \ B(a/x) \quad (6_{pd})\ \ (\neg B)(a/x) \qquad (10_{ld})\ \ B(b/x) \quad (10_{pd})\ \ (\neg B)(b/x)$$

$$\times_{4_d, 6_{ld}} \qquad \times_{4_g, 6_{pg}} \qquad \times_{8_d, 10_{lg}} \qquad \times_{8_g, 10_{pd}}$$

19.1.2.

(a) $\forall x(\exists y P(x,y) \to \forall z P(x,z)) \to \forall y \forall z(P(y,z) \to P(z,y))$

Wprowadźmy oznaczenia:

- A dla formuły $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z))$
- B dla formuły $\forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y))$.

Badana równoważność jest semantycznie równoważna koniunkcji $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Ponieważ tablica analityczna zanegowanej powyższej równoważności jest dość złożona (jak na możliwości tej kartki), więc zbadamy nieco prostsze „tablice cząstkowe" (drzewa). Formuła $(A \to B) \wedge (B \to A)$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tablica analityczna jej negacji ma wszystkie gałęzie zamknięte. To z kolei zachodzi, gdy zarówno tablica analityczna formuły $\neg(A \to B)$, jak i tablica analityczna formuły $\neg(B \to A)$ jest zamknięta. Jeśli choć jedna z tych tablic ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to badana równoważność nie jest tautologią. Jeszcze inaczej, odwołując się bezpośrednio do reguły $R(\neg \equiv)$: badana równoważność $A \equiv B$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tablice analityczne formuł $A \wedge \neg B$ oraz $B \wedge \neg A$ są obie zamknięte.

1.Badamy, czy formuła $A \equiv B$ jest tautologią.

Tablica analityczna formuły $\neg(A \to B)$:

$$\neg(\forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z)) \to \forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y)))\ ^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\ \ \forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z))\ ^{4.\star a\ \ 5.\star b}$$

$$(1_d)\ \ \neg(\forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y)))\ ^{2.\checkmark a}$$

$$(2)\ \ \neg\forall z\ (P(a,z) \to P(z,a))\ ^{3.\checkmark b}$$

$$(3)\ \ \neg(P(a,b) \to P(b,a))\ ^{6.\neg\to}$$

$$(4)\ \ \exists y\ P(a,y) \to \forall z\ P(a,z)\ ^{7.\to}$$

$$(5)\ \ \exists y\ P(b,y) \to \forall z\ P(b,z)\ ^{9.\to}$$

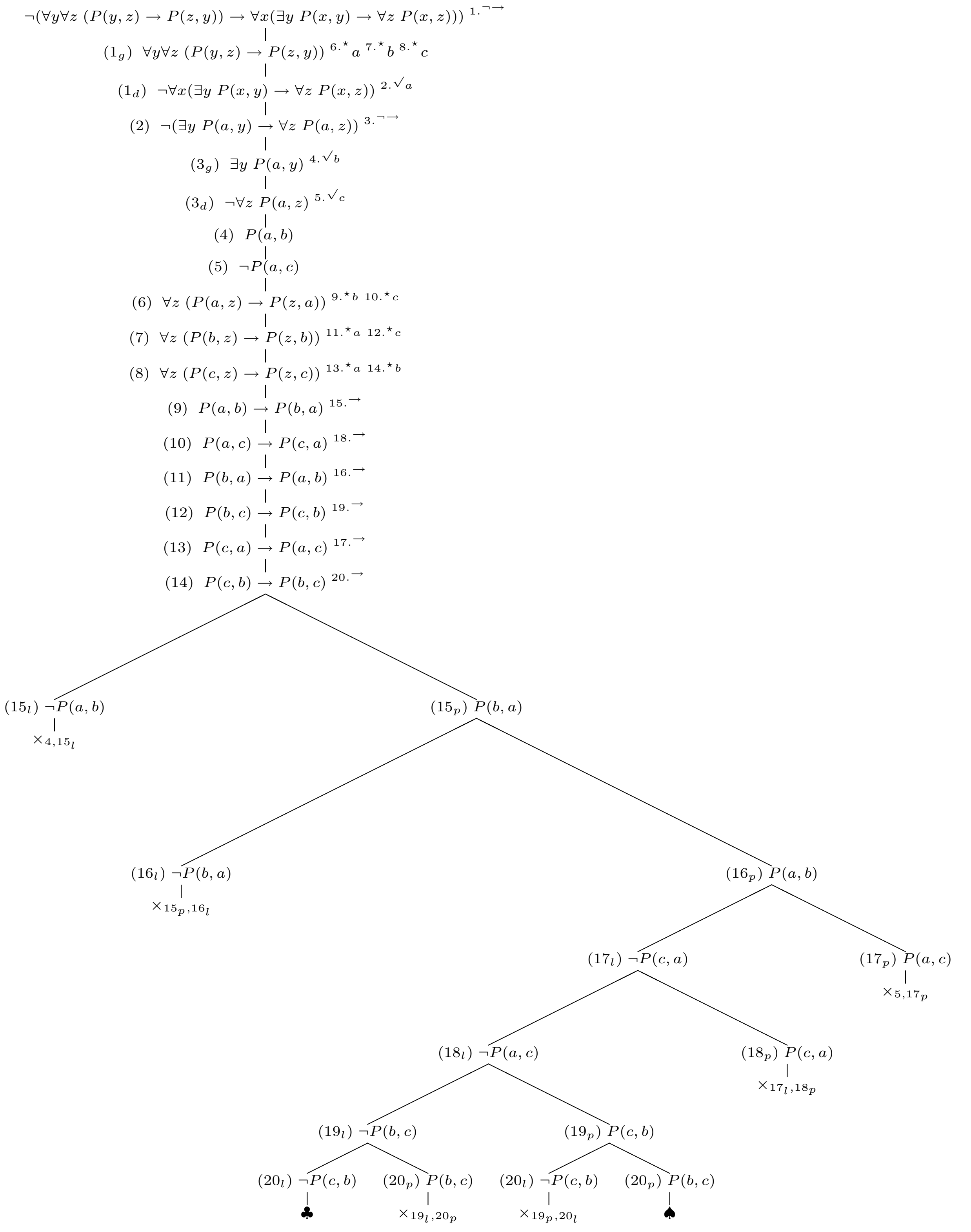
$$(6_g)\ \ P(a,b)$$

$$(6_d)\ \ \neg P(b,a)$$

- $(7_l)\ \ \neg\exists y\ P(a,y)\ ^{8.\star b}$
  - $(8)\ \ \neg P(a,b)$
  - $\times_{6_g,8}$
- $(7_p)\ \ \forall z\ P(a,z)$
  - $(9_l)\ \ \neg\exists y\ P(b,y)\ ^{10.\star a\ \ 12.\star b}$
    - $(10)\ \ \neg P(b,a)$
    - $(12)\ \ \neg P(b,b)$
    - $\clubsuit$
  - $(9_p)\ \ \forall z\ P(b,z)\ ^{11.\star a}$
    - $(11)\ \ P(b,a)$
    - $\times_{6_d,11}$

Ta tablica analityczna ma gałąź otwartą. Implikacja $A \to B$ nie jest więc tautologią. Równoznacznie: formuła $A \wedge \neg B$ nie jest tautologią.

Tablica analityczna formuły $\neg(B \to A)$:



Uwaga. Nie wykonano wszystkich możliwych kroków. Zauważmy, że implikacje: $P(a,a) \to P(a,a)$, $P(b,b) \to P(b,b)$ oraz $P(c,c) \to P(c,c)$ nie mogą posłużyć do zamknięcia tablicy.

Ta tablica analityczna ma gałąź otwartą. Formuła $B \to A$ nie jest więc tautologią. Równoznacznie: formuła $B \wedge \neg A$ nie jest tautologią.

W konsekwencji, równoważność $A \equiv B$ nie jest tautologią.

2. Badamy, czy formuła $A \equiv B$ jest kontrtautologią.

Tablica analityczna formuły $A \to B$:

$$\forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z)) \to \forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y))\ ^{1.\to}$$

Lewa gałąź:

(1_l) $\neg\forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z))\ ^{2.\surd a}$

(2) $\neg(\exists y\ P(a,y) \to \forall z\ P(a,z))\ ^{3.\neg\to}$

(3_g) $\exists y\ P(a,y)\ ^{4.\surd b}$

(3_d) $\forall z\ P(a,z)\ ^{5.\star a\ 6.\star b}$

(4) $P(a,b)$

(5) $P(a,a)$

(6) $P(a,b)$

$\spadesuit$

Prawa gałąź:

(1_p) $\forall y\forall z\ (P(y,z) \to P(z,y))\ ^{7.\surd c}$

(7) $\forall z\ (P(c,z) \to P(z,c))\ ^{8.\star c}$

(8) $P(c,c) \to P(c,c)\ ^{9.\to}$

(9_l) $\neg P(c,c)$ — $\diamondsuit$ $\quad$ (9_p) $P(c,c)$ — $\heartsuit$

[Tutaj c jest dowolną stałą z rozważanego języka KRP.]

Tablica analityczna formuły $B \to A$:

$$\forall y \forall z\ (P(y,z) \to P(z,y)) \to \forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z))\ ^{1.\to}$$

Lewa gałąź:

(1_l) $\neg\forall y\forall z\ (P(y,z) \to P(z,y))\ ^{2.\surd a}$

(2) $\neg\forall z\ (P(a,z) \to P(z,a))\ ^{3.\surd b}$

(3) $\neg(P(a,z) \to P(z,a))\ ^{4.\neg\to}$

(4_g) $P(a,b)$

(4_d) $\neg P(b,a)$

$\spadesuit$

Prawa gałąź:

(1_p) $\forall x(\exists y\ P(x,y) \to \forall z\ P(x,z))\ ^{5.\surd c}$

(5) $\exists y\ P(c,y) \to \forall z\ P(c,z)\ ^{6.\to}$

(6_l) $\neg\exists y\ P(c,y)\ ^{7.\star c}$ — (7) $\neg P(c,c)$ — $\diamondsuit$ $\quad$ (6_p) $\forall z\ P(c,z)\ ^{8.\star c}$ — (8) $P(c,c)$ — $\heartsuit$

[Tutaj c jest dowolną stałą z rozważanego języka KRP.]

Ponieważ zarówno tablica analityczna $A \to B$, jak i tablica analityczna $B \to A$ mają (akurat wszystkie) gałęzie otwarte, więc każda z tych implikacji jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. W konsekwencji, żadna z tych implikacji nie jest kontrtautologią.

Odpowiedź. Badana formuła $A \equiv B$ nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią. Jeśli chodzi o badane implikacje, to:

- Implikacja $A \to B$ nie jest tautologią.
- Implikacja $B \to A$ nie jest tautologią.
- Żadna z tych implikacji nie jest kontrtautologią.

(b) $\forall x\ (P(x) \to Q(x)) \to \forall x(\exists y\ (P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists y\ (Q(y) \wedge R(x,y)))$.

1. Badamy, czy formuła jest tautologią:

$$\neg(\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \to \forall x(\exists y\,(P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y))))\ ^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\ \ \forall x\,(P(x) \to Q(x))\ ^{3.\star a\ 6.\star b}$$

$$(1_d)\ \ \neg\forall x(\exists y\,(P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y)))\ ^{2.\checkmark a}$$

$$(2)\ \ \neg(\exists y\,(P(y) \wedge R(a,y)) \to \exists y\,(Q(y) \wedge R(a,y)))\ ^{4.\neg\to}$$

$$(3)\ \ P(a) \to Q(a)\ ^{13.\to}$$

$$(4_g)\ \ \exists y\,(P(y) \wedge R(a,y))\ ^{5.\checkmark b}$$

$$(4_d)\ \ \neg\exists y\,(Q(y) \wedge R(a,y))\ ^{7.\star a\ 8.\star b}$$

$$(5)\ \ P(b) \wedge R(a,b)\ ^{9.\wedge}$$

$$(6)\ \ P(b) \to Q(b)\ ^{12.\to}$$

$$(7)\ \ Q(a) \wedge R(a,a)\ ^{10.\wedge}$$

$$(8)\ \ Q(b) \wedge R(a,b)\ ^{11.\wedge}$$

$$(9_g)\ \ P(b)$$

$$(9_d)\ \ R(a,b)$$

$$(10_g)\ \ Q(a)$$

$$(10_d)\ \ R(a,a)$$

$$(11_g)\ \ Q(b)$$

$$(11_d)\ \ R(a,b)$$

$$(12_l)\ \ \neg P(b) \qquad\qquad (12_p)\ \ Q(b)$$

$$\times_{9_g,12_l} \qquad\qquad (13_l)\ \ \neg P(a) \qquad (13_p)\ \ Q(a)$$

$$\spadesuit \qquad\qquad \clubsuit$$

Tablica ma gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest tautologią. Oto interpretacje, w których jest ona fałszywa:

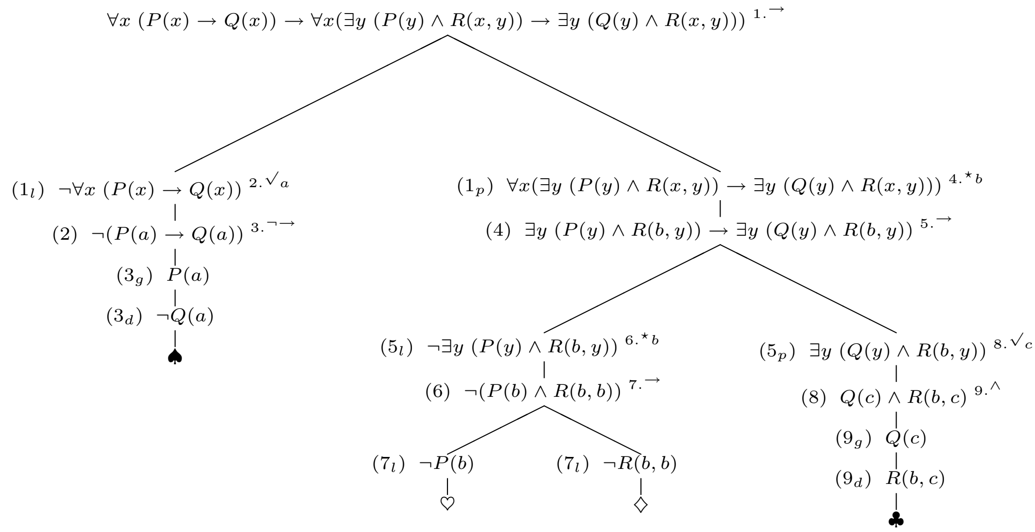
$\spadesuit$	P	Q
a	$-$	+
b	+	+

$R_\spadesuit$	a	b
a	+	+
b	?	?

$\clubsuit$	P	Q
a	?	+
b	+	+

$R_\clubsuit$	a	b
a	+	+
b	?	?

2. Badamy, czy formuła jest kontrtautologią:



Tablica ma gałęzie otwarte. Stała b jest tu dowolną stałą rozważanego języka KRP. Badana formuła nie jest kontrtautologią. Oto interpretacje, w których jest ona fałszywa:

$\spadesuit$	P	Q
a	+	?

$R_\spadesuit = ?$

$\heartsuit$	P	Q
b	$-$	?

$R_\heartsuit = ?$

$R_\heartsuit$	b
b	$-$

$P_\diamondsuit = ?$, $Q_\diamondsuit = ?$

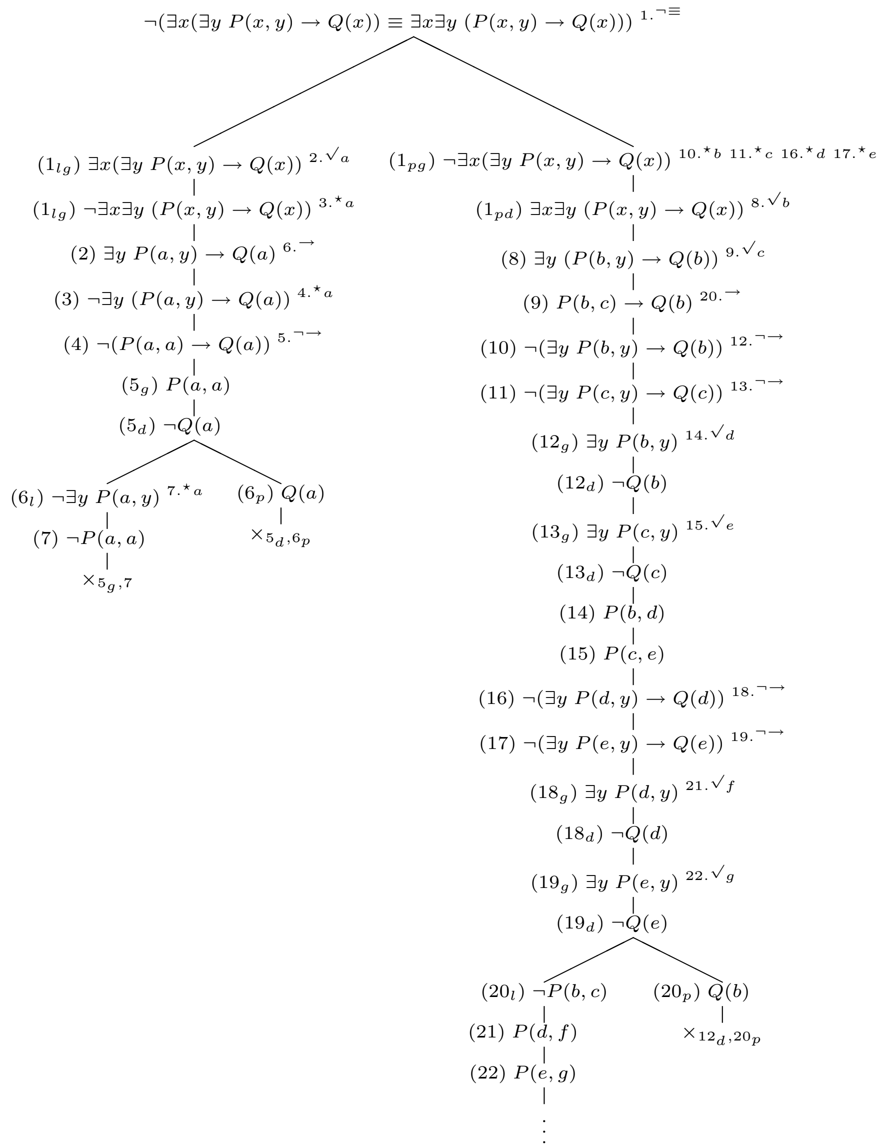
$\clubsuit$	P	Q
b	?	?
c	?	+

$R_\clubsuit$	b	c
b	?	+
c	?	?

Odpowiedź. Badana formuła nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią KRP. Zwróćmy uwagę, że znaleziono ***skończone*** interpretacje, w których jest ona prawdziwa oraz ***skończone*** interpretacje, w których jest ona fałszywa.

(c) $\exists x(\exists y\ P(x, y) \to Q(x)) \equiv \exists x \exists y\ (P(x, y) \to Q(x))$.

Badamy, czy formuła jest tautologią:



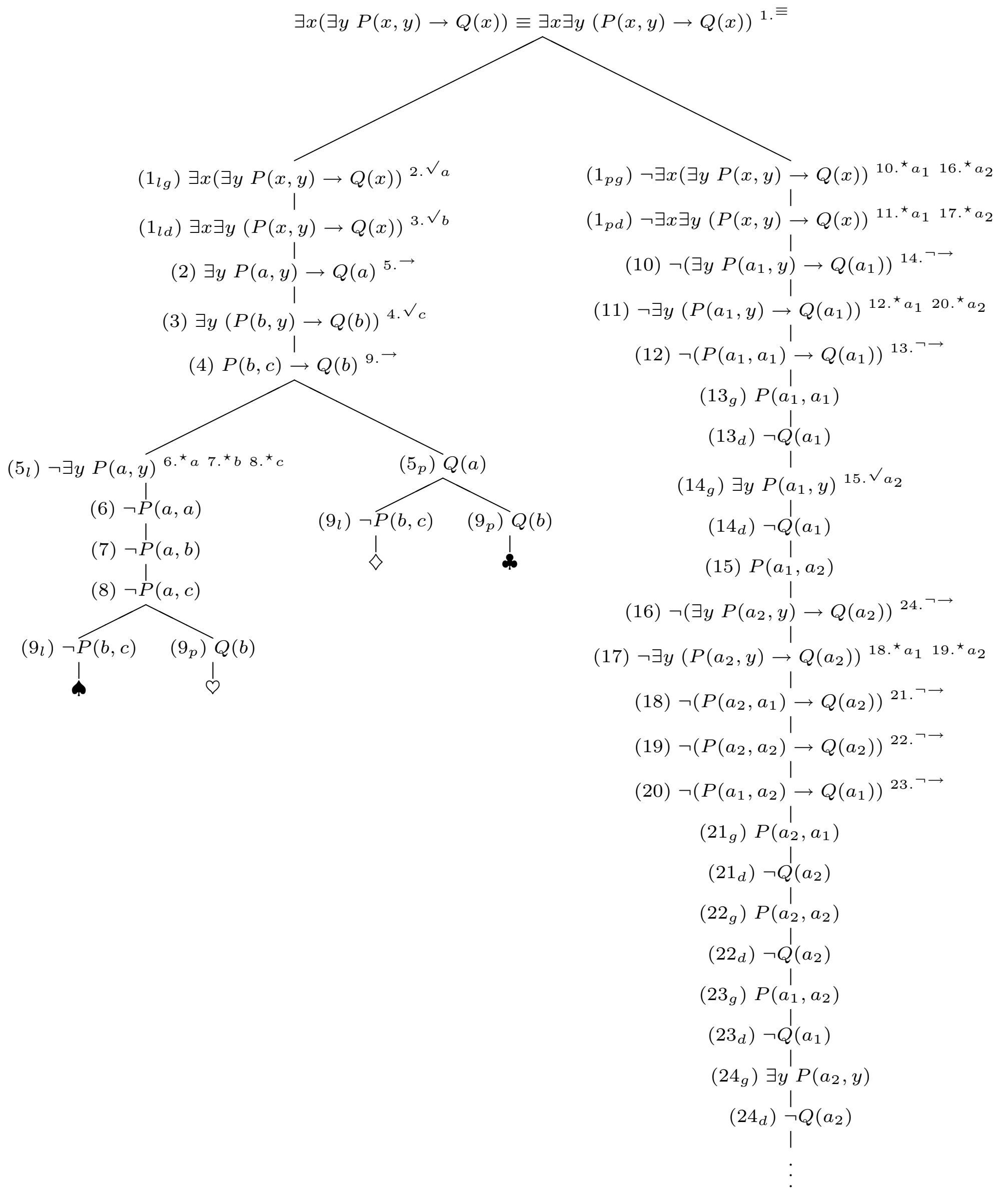
Tablica ma nieskończoną gałąź otwartą. Badana formuła nie jest tautologią KRP. Zauważmy, że krok 20 można było wykonać wcześniej, już po kroku 12 (ze względów typograficznych postąpiliśmy inaczej). Interpretacja nieskończona, w której badana formuła jest fałszywa, ma postać następującą:

	b	c	d	e	f	g	$\cdots$
Q	–	–	–	–	–	–	$\cdots$

$$\begin{array}{ccccccc} b & \rightarrow & d & \rightarrow & f & \rightarrow & \cdots \\ \\ c & \rightarrow & e & \rightarrow & g & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Strzałka wskazuje między którymi elementami zachodzi denotacja predykatu P. Ponadto, nie zachodzi $P(b,c)$.

Badamy, czy formuła jest kontrtautologią:



Tablica ma gałęzie otwarte: cztery skończone oraz jedną nieskończoną. Stała a_1 jest tu dowolną stałą z rozważanego języka KRP. Badana formuła nie jest kontrtautologią KRP.

Oto interpretacje, w których badana formuła jest prawdziwa:

$\heartsuit$	Q
a	?
b	+
c	?

$\diamondsuit$	Q
a	+
b	+
c	?

$\clubsuit$	Q
a	+
b	+
c	?

Nadto, mamy $Q_{\spadesuit} = ?$.

$P_{\spadesuit}$	a	b	c
a	–	–	–
b	?	?	–
c	?	?	?

$P_{\heartsuit}$	a	b	c
a	–	–	–
b	?	?	?
c	?	?	?

$P_{\diamondsuit}$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

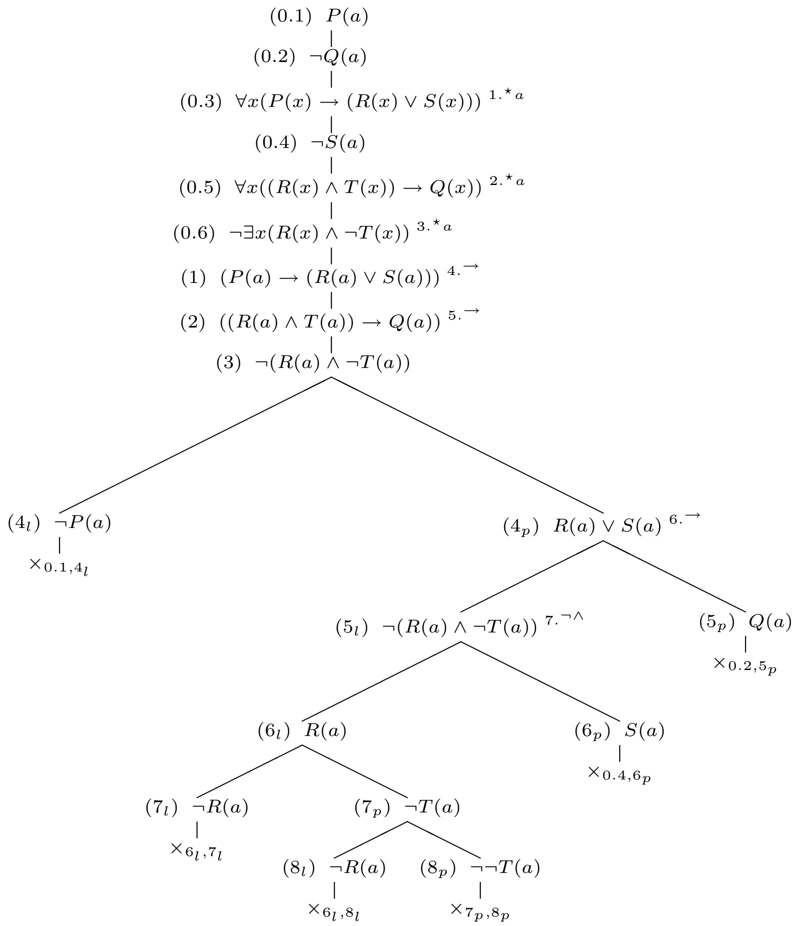
Nadto, mamy $P_{\clubsuit} = ?$.

W interpretacji wyznaczonej przez gałąź nieskończoną denotacja predykatu Q jest zbiorem pustym, a denotacja predykatu P jest równa zbiorowi $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \times \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Czy potrafisz to uzasadnić?

Odpowiedź. Badana formuła nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią KRP.

III.9.3. Semantyczna niesprzeczność w KRP

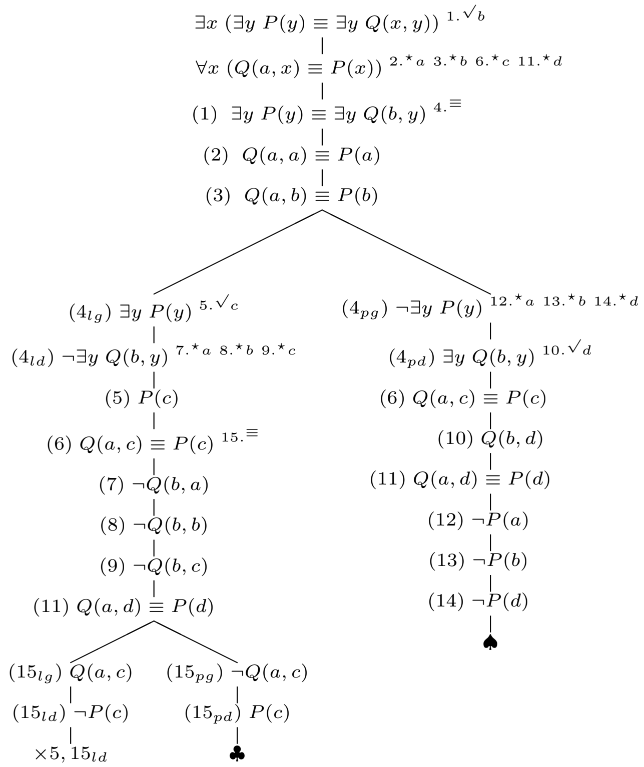
19.3.1.(a) $\{P(a), \neg Q(a), \forall x(P(x) \to (R(x) \vee S(x))), \neg S(a), \forall x((R(x) \wedge T(x)) \to Q(x)), \neg\exists x(R(x) \wedge \neg T(x))\}$.



Tablica zamknięta. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

19.3.1.(b) $\{\exists x(\exists y P(y) \equiv \exists y Q(x, y)), \forall x(Q(a, x) \equiv P(x))\}$.

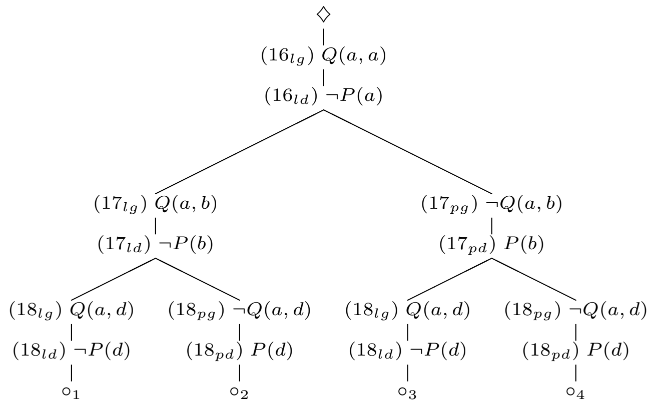
Tablica otrzymana w tym przypadku jest dość skomplikowanea (jak na możliwości druku na tej kartce). Zostanie przedstawiona w kilku częściach. Nadto, wskażemy na pewne kłopoty, dotyczące używanej przez nas notacji.



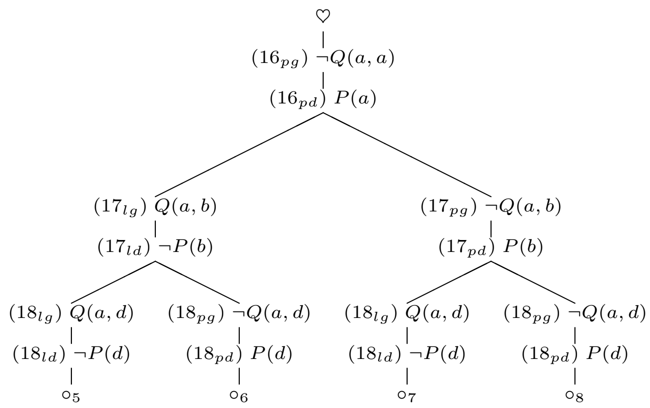
W miejsce liścia ♣ należy teraz wkleić drzewo powstające przez trzykrotne zastosowanie reguły $R(\equiv)$ do formuł:

- (2) $Q(a,a) \equiv P(a)$ $^{16.\equiv}$
- (3) $Q(a,b) \equiv P(b)$ $^{17.\equiv}$
- (11) $Q(a,d) \equiv P(d)$ $^{18.\equiv}$

Już uważne spojrzenie na powyższe formuły pozwala stwierdzić, że ***wszystkie*** gałęzie tego drzewa będą otwarte. Dla niedowiarków (niedowidzów?) narysujemy stosowne drzewo. Będzie ono sklejeniem drzewa:



oraz drzewa:

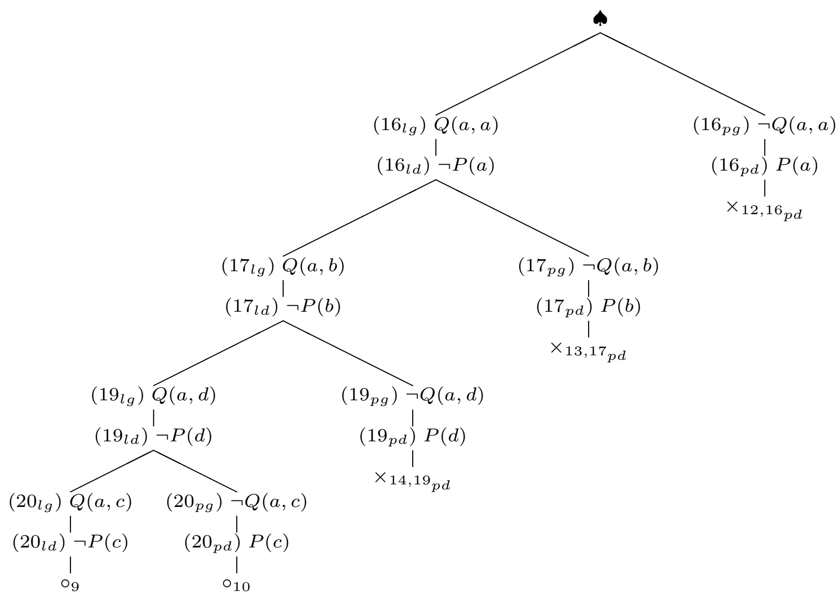


(***sklejenie*** oznacza tu, że masz przykleić liść ♢ do liścia ♣ oraz liść ♡ także do liścia ♣; dostaniesz tablicę o korzeniu ♣ oraz ośmiu liściach).

Natomiast w miejsce liścia ♠ należy wkleić drzewo powstające przez czterokrotne zastosowanie reguły $R(\equiv)$ do formuł:

- (2) $Q(a,a) \equiv P(a)$ $^{16.\equiv}$
- (3) $Q(a,b) \equiv P(b)$ $^{17.\equiv}$
- (11) $Q(a,d) \equiv P(d)$ $^{19.\equiv}$
- (6) $Q(a,c) \equiv P(c)$ $^{20.\equiv}$

W tym przypadku niektóre z gałęzi zostaną zamknięte, ale pozostaną dwie gałęzie otwarte:



Cała tablica ma gałęzie otwarte, a więc rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny. Oto interpretacje, w których obie formuły z tego zbioru są prawdziwe:

$\circ_1$	P
a	–
b	–
c	+
d	–

Q	a	b	c	d
a	+	+	–	+
b	–	–	–	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_2$	P
a	−
b	−
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	+	+	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_3$	P
a	−
b	+
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	+	−	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_4$	P
a	−
b	+
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	+	−	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_5$	P
a	+
b	−
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	−	+	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_6$	P
a	+
b	−
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	−	+	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_7$	P
a	+
b	+
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	−	−	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_8$	P
a	+
b	+
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	−	−	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_9$	P
a	−
b	−
c	−
d	−

Q	a	b	c	d
a	+	+	+	+
b	?	?	?	+
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_{10}$	P
a	−
b	−
c	+
d	−

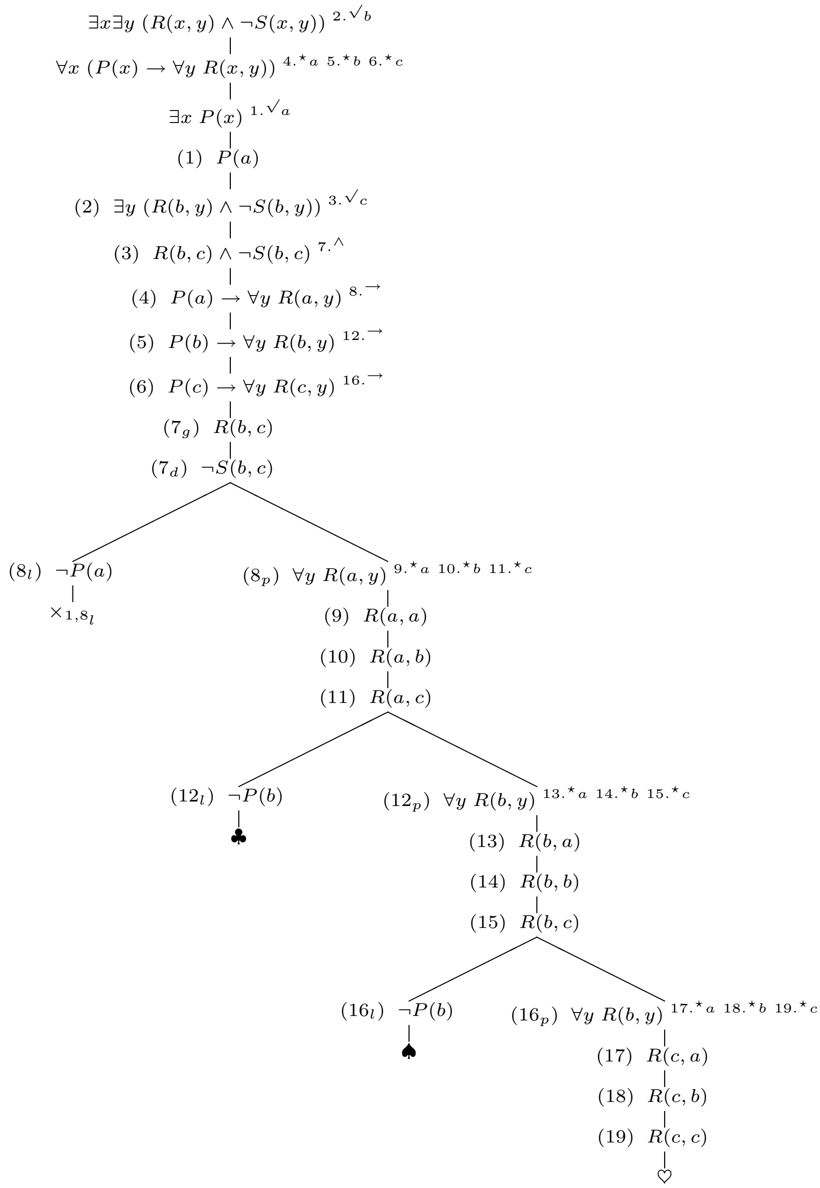
Q	a	b	c	d
a	+	+	−	+
b	?	?	?	+
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

Powyższy przykład wymaga jeszcze komentarza dotyczącego numeracji formuł w budowanym drzewie. Zauważmy, że:

- Zgodnie z przyjętymi zasadami, każdy krok wykonany na jakiejś formule daje w wyniku pewną formułę ***każdej otwartej w danym momencie*** gałęzi drzewa. Tak więc, rezultaty kroków: $2.^{\star}a$, $3.^{\star}b$, $6.^{\star}c$ oraz $11.^{\star}d$ pojawiły się w każdej otwartej gałęzi pierwszego z powyższych drzew. Zwróćmy uwagę, że zarówno krok $6.^{\star}c$, jak i krok $11.^{\star}d$ dały w wyniku formuły na ***różnych gałęziach***.
- Podobnie było z krokami: $16.^{\equiv}$ oraz $17.^{\equiv}$. Ich rezultaty widoczne są na trzech pozostałych drzewach.
- Krok $18.^{\equiv}$ otrzymuje inny numer niż krok $19.^{\equiv}$, ponieważ każdy z nich jest wykonywany na ***innej*** gałęzi drzewa. Nie jest przy tym istotne, że kroki te wykonywane są na „takiej samej” formule.

Tak więc, używana przez nas notacja nie prowadzi (jak dotąd) do błędów logicznych. Stwarza jednak czasami pewne utrudnienia.

(c) $\{\exists x\exists y(R(x,y) \wedge \neg S(x,y)), \forall x(P(x) \rightarrow \forall y R(x,y)), \exists x P(x)\}$.



Tablica ma gałęzie otwarte, a więc rozpatrywany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny. Oto interpretacje, w których wszystkie te formuły są prawdziwe:

♣	P
a	+
b	–
c	?

$R_♣$	a	b	c
a	+	+	+
b	?	?	+
c	?	?	?

$S_♣$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

♠	P
a	+
b	?
c	–

$R_♠$	a	b	c
a	+	+	+
b	?	?	+
c	?	?	?

$S_♠$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

♡	P
a	+
b	?
c	?

$R_♡$	a	b	c
a	+	+	+
b	+	+	+
c	+	+	+

$S_♡$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

(d) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy wszystkie formuły:

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\ ^{4.\star a\ 5.\star b}$$
$$\forall x \exists y\ (R(y) \wedge S(y,x))\ ^{6.\star a\ 7.\star b}$$
$$\forall x\ ((R(x) \wedge Q(x)) \rightarrow T(x))\ ^{8.\star a\ 9.\star b}$$
$$\forall x \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,x)) \rightarrow T(x))\ ^{10.\star a\ 11.\star b}$$
$$\neg(\forall x \forall y\ ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(x,y)) \rightarrow T(x)))\ ^{1.\surd a}$$
$$(1)\ \ \neg\forall y\ ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(a,y)) \rightarrow T(a))\ ^{2.\surd b}$$
$$(2)\ \ \neg((\neg P(b) \rightarrow \neg S(a,b)) \rightarrow T(a))\ ^{3.\neg\rightarrow}$$
$$(3_g)\ \ \neg P(b) \rightarrow \neg S(a,b)$$
$$(3_d)\ \ \neg T(a)$$
$$(4)\ \ P(a) \rightarrow Q(a)$$
$$(5)\ \ P(b) \rightarrow Q(b)$$
$$(6)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,a))$$
$$(7)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,b))$$
$$(8)\ \ (R(a) \wedge Q(a)) \rightarrow T(a)$$
$$(9)\ \ (R(b) \wedge Q(b)) \rightarrow T(b)$$
$$(10)\ \ \forall y\ ((T(a) \wedge S(y,a)) \rightarrow T(a))\ ^{12.\star a\ 13.\star b}$$
$$(11)\ \ \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,b)) \rightarrow T(b))\ ^{14.\star a\ 15.\star b}$$
$$(12)\ \ (T(a) \wedge S(a,a)) \rightarrow T(a)$$
$$(13)\ \ (T(a) \wedge S(b,a)) \rightarrow T(a)$$
$$(14)\ \ (T(y) \wedge S(a,b)) \rightarrow T(b)$$
$$(15)\ \ (T(y) \wedge S(b,b)) \rightarrow T(b)$$
$$\vdots$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki dotyczące formuł skwantyfikowanych oraz stałych a i b. Jest widoczne, że druga formuła zmusza do wprowadzania coraz to nowych stałych indywiduowych (tak, jak ma to miejsce w formułach (6) oraz (7) powyżej). W konsekwencji, tablica jest nieskończona. Zbiór jest semantycznie niesprzeczny. Informacje dotyczące interpretacji, w której wszystkie rozważane formuły są prawdziwe, znajdują się na nieskończonej gałęzi tablicy.

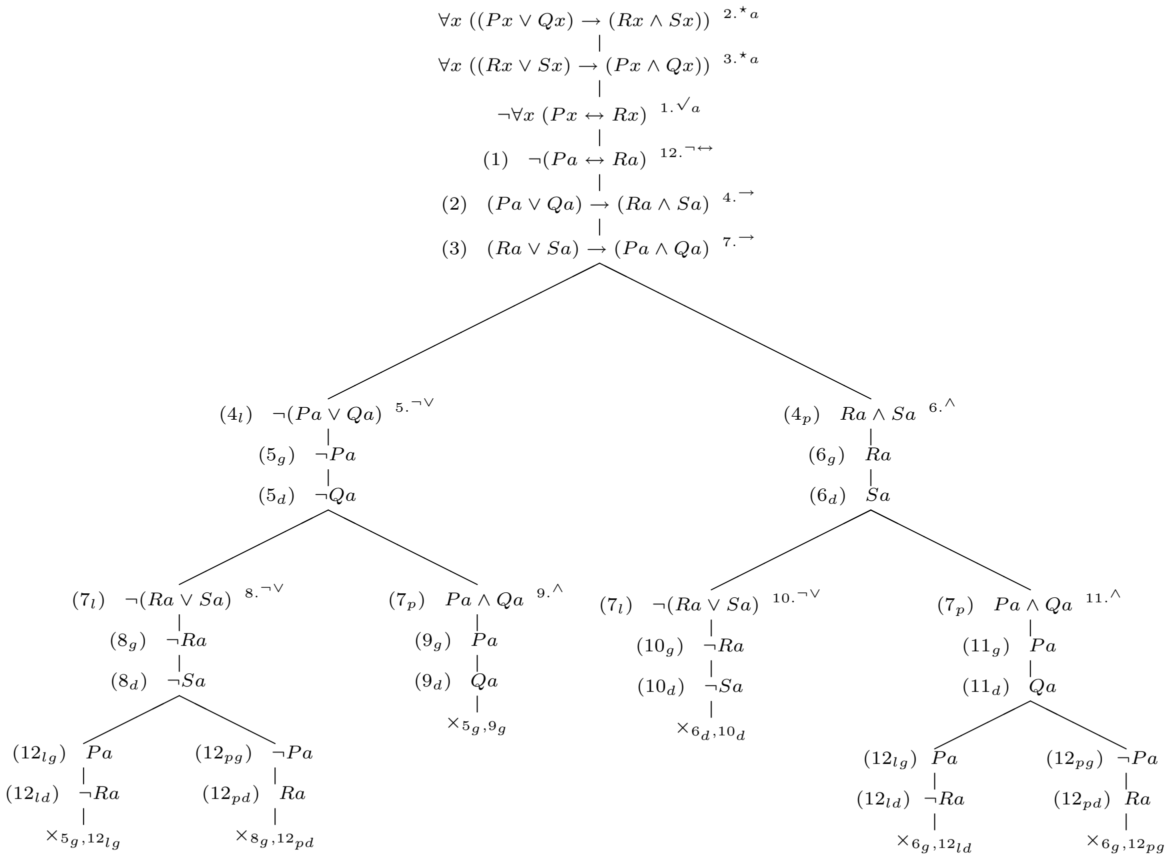
III.9.4. Wynikanie logiczne w KRP

9.4.1.

Jest to przykład sytuacji, gdy pewne formuły rozkładane są za pomocą przyjętych reguł ***w kilku*** gałęziach budowanej tablicy. Spójrzmy na rozważaną, samą w sobie interesującą (?), regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,((Px \lor Qx) \to (Rx \land Sx))\\ \forall x\,((Rx \lor Sx) \to (Px \land Qx))\end{array}}{\forall x\,(Px \leftrightarrow Rx)}$$

Pokażemy, że jest ona niezawodna, tj. że wniosek wynika logicznie z przesłanek, czyli że nie istnieje interpretacja, w której wszystkie przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek fałszywy. Musimy więc pokazać, że wykluczona jest sytuacja, gdy wszystkie przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku są prawdziwe. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu znajdują się właśnie wszystkie przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Uwaga: powyższe drzewo nie jest narysowane w sposób estetyczny. Poprawienie estetyki powoduje wystawanie rysunku poza kartkę.

Pokazaliśmy to, co zamierzaliśmy pokazać: że rozważana reguła jest niezawodna; wniosek wynika logicznie z przesłanek. Nadto, zwróćmy uwagę, że kroki 7 oraz 12 wykonywane były na formułach należących do pnia drzewa. W konsekwencji, należało stosować tę samą numerację dla formuł otrzymanych w wyniku poczynienia tych kroków, we wszystkich gałęziach drzewa, na których pojawiały się stosowne formuły. Inaczej rzecz się miała z krokami:

- $8.^{\neg\to}$ i $10.^{\neg\to}$
- $9.^{\wedge}$ i $11.^{\wedge}$.

Krok $8.^{\neg\rightarrow}$, chociaż stosowany do takiej samej formuły, jak krok $10.^{\neg\rightarrow}$ (a mianowicie do formuły $\neg(Ra \vee Sa)$), był jednak czyniony na ***innej*** gałęzi drzewa niż krok $10.^{\neg\rightarrow}$! W konsekwencji, kroki te otrzymywały inne numery. Podobnie rzecz się miała z krokami $9.^{\wedge}$ i $11.^{\wedge}$. Oba stosowane były do takiej samej formuły (a mianowicie do $Pa \wedge Qa$), lecz na ***różnych*** gałęziach drzewa.

Jeśli komuś potrzebne jest — jak, powiedzmy, Watykanowi ekumenizm — wypełnienie ludzką, Humanistyczną treścią powyższych schludnych, estetycznych formułek, to może zinterpretować predykaty P, Q, R, S np. jako, odpowiednio: ***Polak, katolik, tolerancyjny, patriota*** i zadumać się nad otrzymanym (dedukcyjnym!) wnioskowaniem.

Uwaga na marginesie, dla Czytelniczek, które obcowały już z rachunkiem zbiorów. W rozważanej regule wnioskowania wystąpiły wyłącznie predykaty jednoargumentowe. Tak więc reguła ta „mówi" coś o stosunkach między zakresami nazw — a zatem dotyczy także zależności między zbiorami. Czytelniczki oswojone z algebrą zbiorów łatwo zauważą, że reguła powyższa przyjmuje w notacji odnoszącej się do rachunku zbiorów postać następującą:

$$\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \\ \hline P = R \end{array}$$

(P, Q, R, S są tu zmiennymi nazwowymi (odnoszącymi się do zbiorów), $\subseteq$ denotuje relację inkluzji (zawierania), a $=$ jest predykatem identyczności). Kusi, aby narysować stosowne diagramy Venna pozwalające rozstrzygać, czy zachodzi w tym wypadku wynikanie logiczne, prawda? Ale cóż, są cztery zmienne, diagram byłby więc może nieco zagmatwany (16 obszarów!). Nadto, kusi niepotrzebnie, bo skoro już ustaliliśmy, iż wynikanie logiczne zachodzi, to odwołać tego nie można,[28] a potwierdzać — szkoda czasu. *Roma locuta, causa finita*, jak zwykło się mawiać na zakończenie każdej (wykrytej) afery w kręgach hierarchii katolickiej.[29] Skoro już jednak wdepnęliśmy na teren rachunku zbiorów, to spróbujmy odnieść stąd jakieś korzyści. Jeśli pamiętamy, że przekrój dowolnych dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie (w szczególności: $R \cap S \subseteq R \cup S$) i połączymy tę informację z przesłankami rozważanej reguły, to otrzymamy następujące trzy formuły:

$$\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cap S \subseteq R \cup S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \end{array}$$

Jeśli nie umknęła z naszej pamięci wiedza, iż relacja inkluzji jest przechodnia, to przytomnie wyprowadzimy z powyższych formuł wniosek: $P \cup Q \subseteq P \cap Q$. Ponieważ, jak już wspomnieliśmy, przekrój dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie (tj. w tym przypadku $P \cap Q \subseteq P \cup Q$), więc z zachodzenia tych dwóch inkluzji wynika, na mocy zasady ekstensjonalności, iż $P = Q$ (jeśli każdy element zbioru P jest elementem zbioru Q oraz każdy element zbioru Q jest elementem zbioru P, to zbiory te mają dokładnie te same elementy, a więc na mocy zasady ekstensjonalności, są identyczne).

Bystre Czytelniczki[30] zauważą z pewnością pewne symetrie składniowe w formułach rozważanej reguły.[31] Bez trudu dokonają więc odkrycia, że także reguła wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x\ ((Px \vee Qx) \rightarrow (Rx \wedge Sx)) \\ \forall x\ ((Rx \vee Sx) \rightarrow (Px \wedge Qx)) \\ \hline \forall x\ (Qx \leftrightarrow Sx) \end{array}$$

jest niezawodna. Czytelniczki nieufne mogą narysować stosowne tablicę analityczną i sprawdzić, że wszystkie gałęzie tej tablicy (tj. drzewa, w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczony wniosek) są zamknięte. Trochę żmudna to pokuta, ale zawsze lepsza niż żadna. Czytelniczki wahające się[32] między zaufaniem do bystrości

[28]Z wynikaniem logicznym rzecz się ma tak samo jak z prowadzeniem się: *raz ladacznica, zawsze ladacznica.*

[29]Przesadziliśmy. *Najlepiej koi sumienie pasterzy naszych milczenie.* W dodatku, ta głupia rymowanka jest zamierzona, podobnie jak pułapka wieloznaczności, nie wspominając o koszmarnych asocjacjach medialnych.

[30]Pustosłowny komplement. Zakładamy przyjaźnie, że wszystkie nasze Czytelniczki są bystre.

[31]Nie zgadzamy się z porzekadłem, iż *symetria to estetyka idioty.*

[32]*Panie doktorze, cierpię na chroniczny brak zdecydowania. Ale pewna tego nie jestem. . .*

własnych skojarzeń a (pochwały godną!) nieufnością wobec własnych intuicji mogą dokonać jednoczesnej zamiany: P na S (i S na P) oraz Q na R (i R na Q) w regule od której rozpoczęliśmy ten przykład i skorzystać z praw przemienności koniunkcji i alternatywy oraz z faktu, że predykat identyczności denotuje relację symetryczną, a na koniec zmienić kolejność przesłanek; w efekcie otrzymają właśnie powyżej wypisaną regułę.[33] W symbolice rachunku zbiorów reguła ta przyjmie postać:

$$\frac{\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \end{array}}{Q = S}$$

Wierzymy, że Czytelniczki, idąc tym tropem (i pamiętając o przechodniości inkluzji oraz o fakcie, że iloczyn dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie) dokonają też odkrycia, iż z przesłanek reguły wypisanej bezpośrednio powyżej wynika, że $R = S$. Do wniosku tego dojść można również innymi szlakami, np.: ustaliliśmy, że z przesłanek badanej na początku reguły wynika $P = Q$ oraz $Q = S$; stąd i z przechodniości identyczności mamy $P = S$, a to ostatnie łącznie z ustalonym już $P = R$, symetrycznością i przechodniością identyczności daje $R = S$. Jest już zatem widoczne, że z przesłanek badanej na początku reguły (i z własności identyczności) wynika identyczność zakresowa wszystkich czterech występujących w tej regule predykatów. *Koniec uwagi na marginesie.*

I tak oto udało się zgrabnie połączyć polski patriotyzm z katolicką tolerancją! Poprawia to samopoczucie, jeśli nie nam osobiście, to może chociaż Watykanowi.

9.4.2.

(a) Pracę nad tym przykładem podzielimy na kilka etapów.

(a).1. Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

[33]Czytelniczki *metabystre* z pewnością rozmyślają w tym momencie lektury nad prawomocnością tych operacji. Całkiem słusznie.

$$(0.1)\ \exists x \exists y\ (((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y) \wedge (Q(x) \wedge Q(y)))\ ^{1.\checkmark a}$$

$$(0.2)\ \forall x\ (Q(x) \rightarrow \neg R(x))\ ^{4.\star a\ 5.\star b\ 6.\star c}$$

$$(0.3)\ \exists x\ (P(x) \wedge R(x))\ ^{3.\checkmark c}$$

$$(0.4)\ \neg(\exists x\ ((P(x) \wedge R(x)) \wedge \forall y\ (y \neq x \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))))\ ^{7.\star a\ 7.\star b\ 9.\star c}$$

$$(1)\ \exists y\ (((P(a) \wedge P(y)) \wedge a \neq y) \wedge (Q(a) \wedge Q(y)))\ ^{2.\checkmark b}$$

$$(2)\ ((P(a) \wedge P(b)) \wedge a \neq b) \wedge (Q(a) \wedge Q(b))\ ^{10.\wedge}$$

$$(3)\ P(c) \wedge R(c)\ ^{14.\wedge}$$

$$(4)\ Q(a) \rightarrow \neg R(a)$$

$$(5)\ Q(b) \rightarrow \neg R(b)$$

$$(6)\ Q(c) \rightarrow \neg R(c)$$

$$(7)\ \neg((P(a) \wedge R(a)) \wedge \forall y\ (y \neq a \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y))))$$

$$(8)\ \neg((P(b) \wedge R(b)) \wedge \forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y))))$$

$$(9)\ \neg((P(c) \wedge R(c)) \wedge \forall y\ (y \neq c \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y))))$$

$$(10_g)\ (P(a) \wedge P(b)) \wedge a \neq b\ ^{11.\wedge}$$

$$(10_d)\ Q(a) \wedge Q(b)\ ^{13.\wedge}$$

$$(11_g)\ P(a) \wedge P(b)\ ^{12.\wedge}$$

$$(11_d)\ a \neq b$$

$$(12_g)\ P(a)$$

$$(12_d)\ P(b)$$

$$(13_g)\ Q(a)$$

$$(13_d)\ Q(b)$$

$$(14_g)\ P(c)$$

$$(14_d)\ R(c)$$

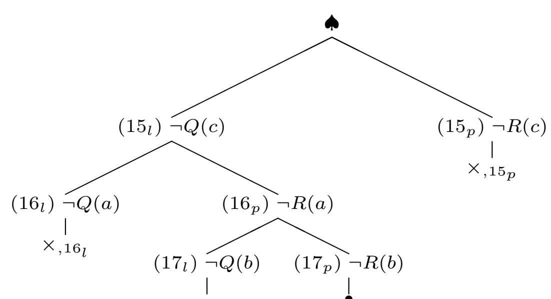
$$\spadesuit$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki nie powodujące rozgałęzień dla stałych a, b oraz c. Informacje zawarte w powyższej gałęzi otwartej (zakończonej liściem $\spadesuit$) zbieramy w poniższej tabeli:

$\spadesuit$	P	Q	R
a	+	+	?
b	+	+	?
c	+	?	+

Nadto, mamy: $a \neq b$.

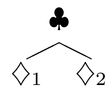
(a).2. Teraz zastosujemy regułę $R(\rightarrow)$ do formuł (6), (4) oraz (5) (w tej kolejności):

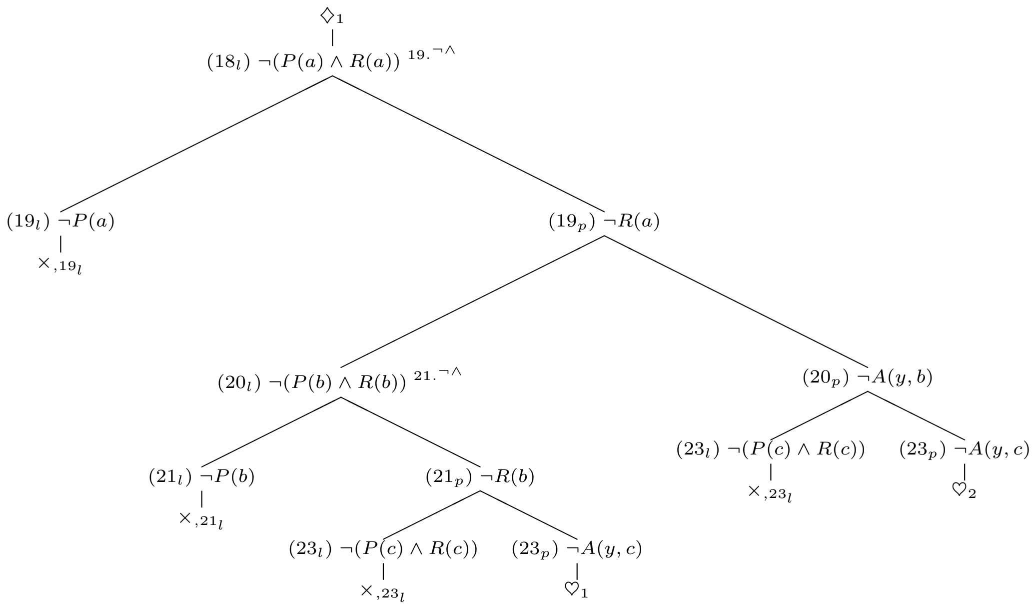


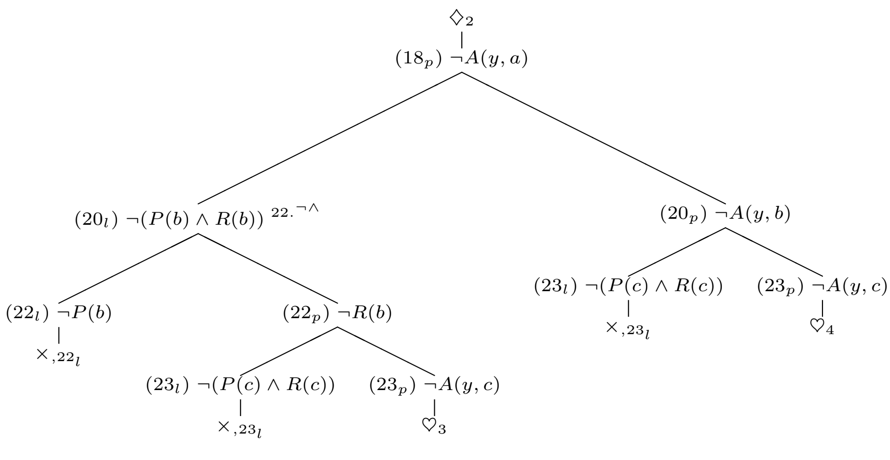
Informacje zawarte w powyższej gałęzi otwartej (zakończonej liściem ♣) zbieramy w poniższej tabeli:

♣	P	Q	R
a	+	+	−
b	+	+	−
c	+	−	+

(a).3. Teraz zastosujemy regułę $R(\rightarrow)$ do formuł (7), (8) oraz (9) (w tej kolejności). Przyjmiemy też oznaczenie $A(y, \alpha)$ dla formuły: $\forall y\ (y \neq \alpha \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))$. Ze względów typograficznych podzielimy też drzewo o korzeniu ♣ na dwa drzewa, o korzeniach $\diamondsuit_1$ oraz $\diamondsuit_2$.







Gałęzie otwarte tego drzewa (bez uwzględnienia na razie formuł $A(y, \alpha)$) nie dostarczają żadnej nowej informacji dotyczącej a, b oraz c, która nie byłaby już zawarta w tabeli ♣. Pozostała do uwzględnienia jedynie formuła $A(y, \alpha)$ dla przypadków:

- $A(y,c)$
- $A(y,c) \wedge A(y,b)$
- $A(y,a) \wedge A(y,c)$
- $A(y,a) \wedge (A(y,b) \wedge A(y,c))$

$$
\begin{array}{c}
\heartsuit_1 \\
| \\
(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq c \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{24.\surd d_1} \\
| \\
(24)\ \neg(d_1 \neq c \rightarrow (P(d_1) \rightarrow \neg R(d_1)))\ ^{25.\neg\rightarrow} \\
| \\
(25_g)\ d_1 \neq c \\
| \\
(25_d)\ \neg(P(d_1) \rightarrow \neg R(d_1))\ ^{26.\neg\rightarrow} \\
| \\
(26_g)\ P(d_1) \\
| \\
(26_d)\ \neg\neg R(d_1) \\
| \\
\vdots_1
\end{array}
$$

Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałej d_1. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y,\alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

$$
\begin{array}{c}
\heartsuit_2 \\
| \\
(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq c \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{28.\surd d_2} \\
| \\
(28)\ \neg(d_2 \neq c \rightarrow (P(d_2) \rightarrow \neg R(d_2)))\ ^{29.\neg\rightarrow} \\
| \\
(29_g)\ d_2 \neq c \\
| \\
(29_d)\ \neg(P(d_2) \rightarrow \neg R(d_2))\ ^{30.\neg\rightarrow} \\
| \\
(30_g)\ P(d_2) \\
| \\
(30_d)\ \neg\neg R(d_2) \\
| \\
(20_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{31.\surd d_3} \\
| \\
(31)\ \neg(d_3 \neq b \rightarrow (P(d_3) \rightarrow \neg R(d_3)))\ ^{32.\neg\rightarrow} \\
| \\
(32_g)\ d_3 \neq b \\
| \\
(32_d)\ \neg(P(d_3) \rightarrow \neg R(d_3))\ ^{33.\neg\rightarrow} \\
| \\
(33_g)\ P(d_3) \\
| \\
(33_d)\ \neg\neg R(d_3) \\
| \\
\vdots_2
\end{array}
$$

Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_2 oraz d_3. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y,\alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_2 \neq c$ oraz $d_3 \neq b$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_1 a d_2 oraz d_3.

$$\heartsuit_3$$

$$(18_p)\ \neg\forall y\ (y \neq a \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{34.\sqrt{d_4}}$$

$$(34)\ \neg(d_4 \neq a \rightarrow (P(d_4) \rightarrow \neg R(d_4)))\ ^{35.\neg\rightarrow}$$

$$(35_g)\ d_2 \neq a$$

$$(35_d)\ \neg(P(d_4) \rightarrow \neg R(d_4))\ ^{36.\neg\rightarrow}$$

$$(36_g)\ P(d_4)$$

$$(36_d)\ \neg\neg R(d_4)$$

$$(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{37.\sqrt{d_5}}$$

$$(37)\ \neg(d_5 \neq c \rightarrow (P(d_5) \rightarrow \neg R(d_5)))\ ^{38.\neg\rightarrow}$$

$$(38_g)\ d_5 \neq c$$

$$(38_d)\ \neg(P(d_5) \rightarrow \neg R(d_5))\ ^{39.\neg\rightarrow}$$

$$(39_g)\ P(d_5)$$

$$(39_d)\ \neg\neg R(d_5)$$

$$\vdots_3$$

Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_4 oraz d_5. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y,\alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_4 \neq a$ oraz $d_5 \neq c$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_1 a d_4 oraz d_5, a także między d_2 i d_3 a d_4 a d_5.

$$\heartsuit_4$$

$$(18_p)\ \neg\forall y\ (y \neq a \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{40.\sqrt{d_6}}$$

$$(40)\ \neg(d_4 \neq a \rightarrow (P(d_6) \rightarrow \neg R(d_6)))\ ^{41.\neg\rightarrow}$$

$$(41_g)\ d_6 \neq a$$

$$(41_d)\ \neg(P(d_6) \rightarrow \neg R(d_6))\ ^{42.\neg\rightarrow}$$

$$(42_g)\ P(d_6)$$

$$(42_d)\ \neg\neg R(d_6)$$

$$(20_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{43.\sqrt{d_7}}$$

$$(43)\ \neg(d_7 \neq b \rightarrow (P(d_7) \rightarrow \neg R(d_7)))\ ^{44.\neg\rightarrow}$$

$$(44_g)\ d_7 \neq b$$

$$(44_d)\ \neg(P(d_7) \rightarrow \neg R(d_7))\ ^{45.\neg\rightarrow}$$

$$(45_g)\ P(d_7)$$

$$(45_d)\ \neg\neg R(d_7)$$

$$(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{46.\sqrt{d_8}}$$

$$(46)\ \neg(d_8 \neq c \rightarrow (P(d_8) \rightarrow \neg R(d_8)))\ ^{47.\neg\rightarrow}$$

$$(47_g)\ d_8 \neq c$$

$$(47_d)\ \neg(P(d_8) \rightarrow \neg R(d_8))\ ^{48.\neg\rightarrow}$$

$$(48_g)\ P(d_8)$$

$$(48_d)\ \neg\neg R(d_8)$$

$$\vdots_4$$

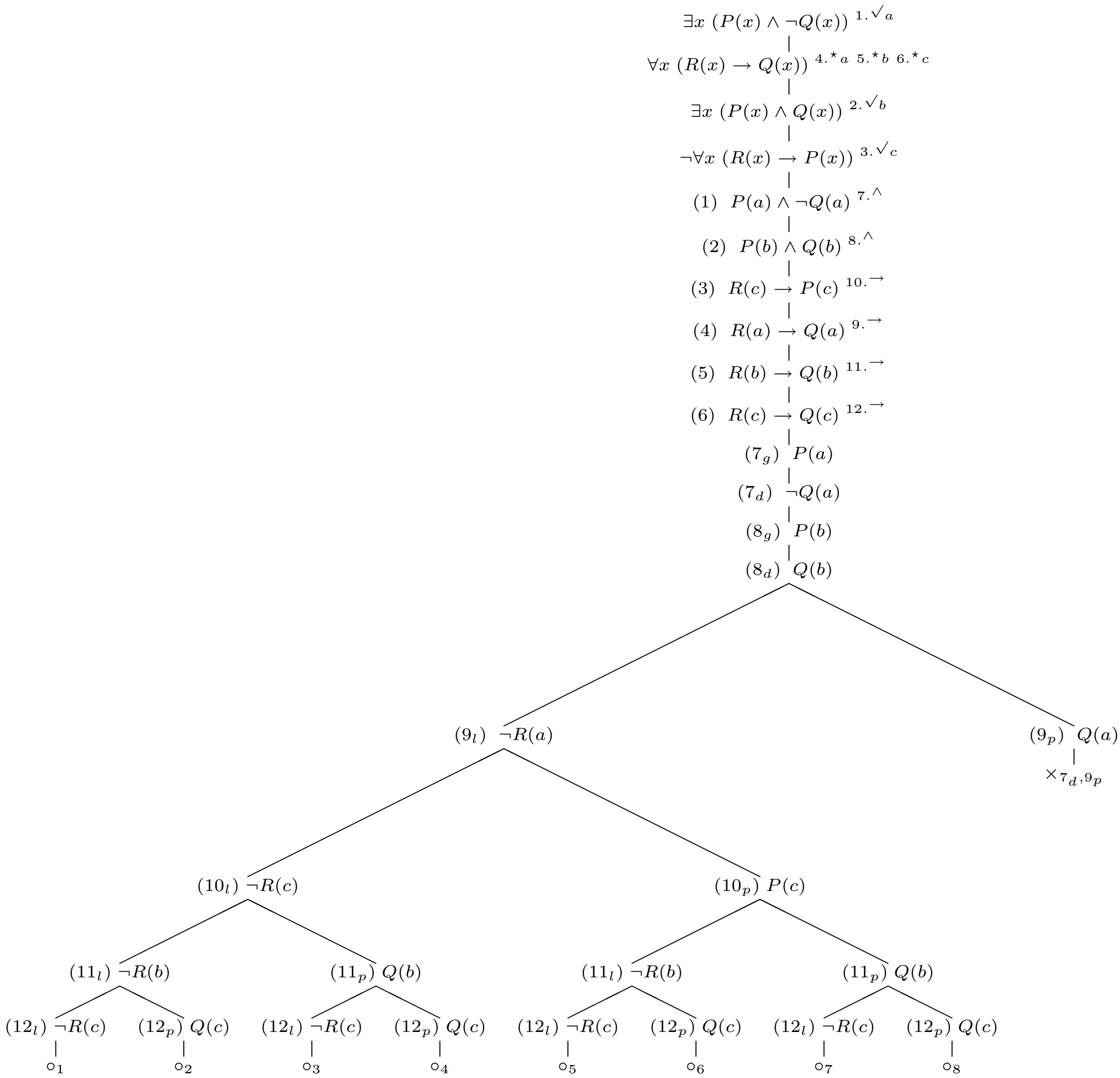
Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_7 oraz d_8. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y, \alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_6 \neq a$, $d_7 \neq b$ oraz $d_8 \neq c$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_7 i d_8 a:

- d_1
- d_2 i d_3
- d_4 i d_5.

(a).4. Widać więc, że rozważana tablica jest nieskończona. Reguła zawodna.

(b) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Tablica ma gałęzie otwarte. Reguła zawodna. Przykłady interpretacji, w których prawdziwe są przesłanki oraz fałszywy wniosek:

$\circ_1$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	?	?	−

$\circ_2$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	?	+	−

$\circ_3$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	?	?	−

$\circ_4$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	?	+	−

$\circ_5$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	+	?	−

$\circ_6$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	+	+	?

$\circ_7$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	+	?	−

$\circ_8$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	+	+	?

(c) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$\forall x\ (S(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))\ ^{4.\star a\ 5.\star b\ 6.\star c}$

$\exists x\ (S(x) \wedge Q(x))\ ^{1.\checkmark a}$

$\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))\ ^{2.\checkmark b}$

$\neg(\forall x\ (P(x) \wedge S(x)))\ ^{3.\checkmark c}$

(1) $S(a) \wedge Q(a)\ ^{7.\wedge}$

(2) $S(b) \wedge \neg P(b)\ ^{8.\wedge}$

(3) $P(c) \wedge S(c)\ ^{9.\wedge}$

(4) $S(a) \to (Q(a) \wedge R(a))\ ^{10.\to}$

(5) $S(b) \to (Q(b) \wedge R(b))\ ^{11.\to}$

(6) $S(c) \to (Q(c) \wedge R(c))\ ^{12.\to}$

(7_g) $S(a)$

(7_d) $Q(a)$

(8_g) $S(b)$

(8_d) $\neg P(b)$

(9_g) $P(c)$

(9_d) $S(c)$

(10_l) $\neg S(a)$ — $\times_{7_g, 10_l}$ | (10_p) $Q(a) \wedge R(a)\ ^{13.\wedge}$

(11_l) $\neg S(b)$ — $\times_{8_g, 11_l}$ | (11_p) $Q(b) \wedge R(b)\ ^{14.\wedge}$

(12_l) $\neg S(c)$ — $\times_{9_d, 12_l}$ | (12_p) $Q(c) \wedge R(c)\ ^{15.\wedge}$

(13_g) $Q(a)$

(13_d) $R(a)$

(14_g) $Q(b)$

(14_d) $R(b)$

(15_g) $Q(c)$

(15_d) $R(c)$

♠

Tablica ma gałąź otwartą. Reguła zawodna. Oto interpretacja, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

♠	P	Q	R	S
a	?	+	+	+
b	–	+	+	+
c	+	+	+	+

(d) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$\forall x\ ((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))\ ^{2.\star a}$$
$$\forall x\ ((R(x) \vee S(x)) \to T(x))\ ^{3.\star a}$$
$$\forall x\ (T(x) \to (K(x) \wedge L(x)))\ ^{4.\star a}$$
$$\exists x\ (P(x) \wedge (\neg K(x) \wedge \neg N(x)))\ ^{1.\surd a}$$
$$\neg(\exists x\ (Q(x) \wedge (M(x) \wedge \neg K(x))))\ ^{5.\star a}$$
$$(1)\ \ P(a) \wedge (\neg K(a) \wedge \neg N(a))\ ^{6.\wedge}$$
$$(2)\ \ (P(a) \vee Q(a)) \to R(a)\ ^{10.\to}$$
$$(3)\ \ (R(a) \vee S(a)) \to T(a)\ ^{12.\to}$$
$$(4)\ \ T(a) \to (K(a) \wedge L(a))\ ^{14.\to}$$
$$(5)\ \ Q(a) \wedge (M(a) \wedge \neg K(a))\ ^{8.\wedge}$$
$$(6_g)\ \ P(a)$$
$$(6_d)\ \ \neg K(a) \wedge \neg N(a)\ ^{7.\wedge}$$
$$(7_g)\ \ \neg K(a)$$
$$(7_d)\ \ \neg N(a)$$
$$(8_g)\ \ Q(a)$$
$$(8_d)\ \ M(a) \wedge \neg K(a)$$
$$(9_g)\ \ M(a)$$
$$(9_d)\ \ \neg K(a)$$

- $(10_l)\ \ \neg(P(a) \vee Q(a))\ ^{11.\neg\vee}$
  - $(11_g)\ \ \neg P(a)$
  - $(11_d)\ \ \neg Q(a)$
  - $\times_{8_g, 11_d}$
- $(10_p)\ \ R(a)$
  - $(12_l)\ \ \neg(R(a) \vee S(a))\ ^{13.\neg\vee}$
    - $(13_g)\ \ \neg R(a)$
    - $(13_d)\ \ \neg S(a)$
    - $\times_{10_p, 13_g}$
  - $(12_p)\ \ T(a)$
    - $(14_l)\ \ \neg T(a)$
      - $\times_{12_p, 14_l}$
    - $(14_p)\ \ K(a) \wedge L(a)\ ^{15.\wedge}$
      - $(15_g)\ \ K(a)$
      - $(15_d)\ \ L(a)$
      - $\times_{9_d, 15_g}$

Drzewo zamknięte. Reguła niezawodna.

(e) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$\forall x(P(x) \to \forall y\ (Q(x,y) \to R(y)))\ ^{4.\star a}$$

$$\forall x(S(x) \to \forall y\ (T(y) \to Q(x,y)))\ ^{5.\star a}$$

$$\neg(\exists x\ (S(x) \wedge P(x)) \to \forall y\ (T(y) \to R(y)))\ ^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\ \ \exists x\ (S(x) \wedge P(x))\ ^{2.\checkmark a}$$

$$(1_d)\ \ \neg\forall y\ (T(y) \to R(y))\ ^{3.\checkmark b}$$

$$(2)\ \ S(a) \wedge P(a)\ ^{6.\wedge}$$

$$(3)\ \ \neg(T(b) \to R(b))\ ^{7.\neg\to}$$

$$(4)\ \ P(a) \to \forall y\ (Q(a,y) \to R(y))\ ^{8.\to}$$

$$(5)\ \ S(a) \to \forall y\ (T(y) \to Q(a,y))\ ^{9.\to}$$

$$(6_g)\ \ S(a)$$

$$(6_d)\ \ P(a)$$

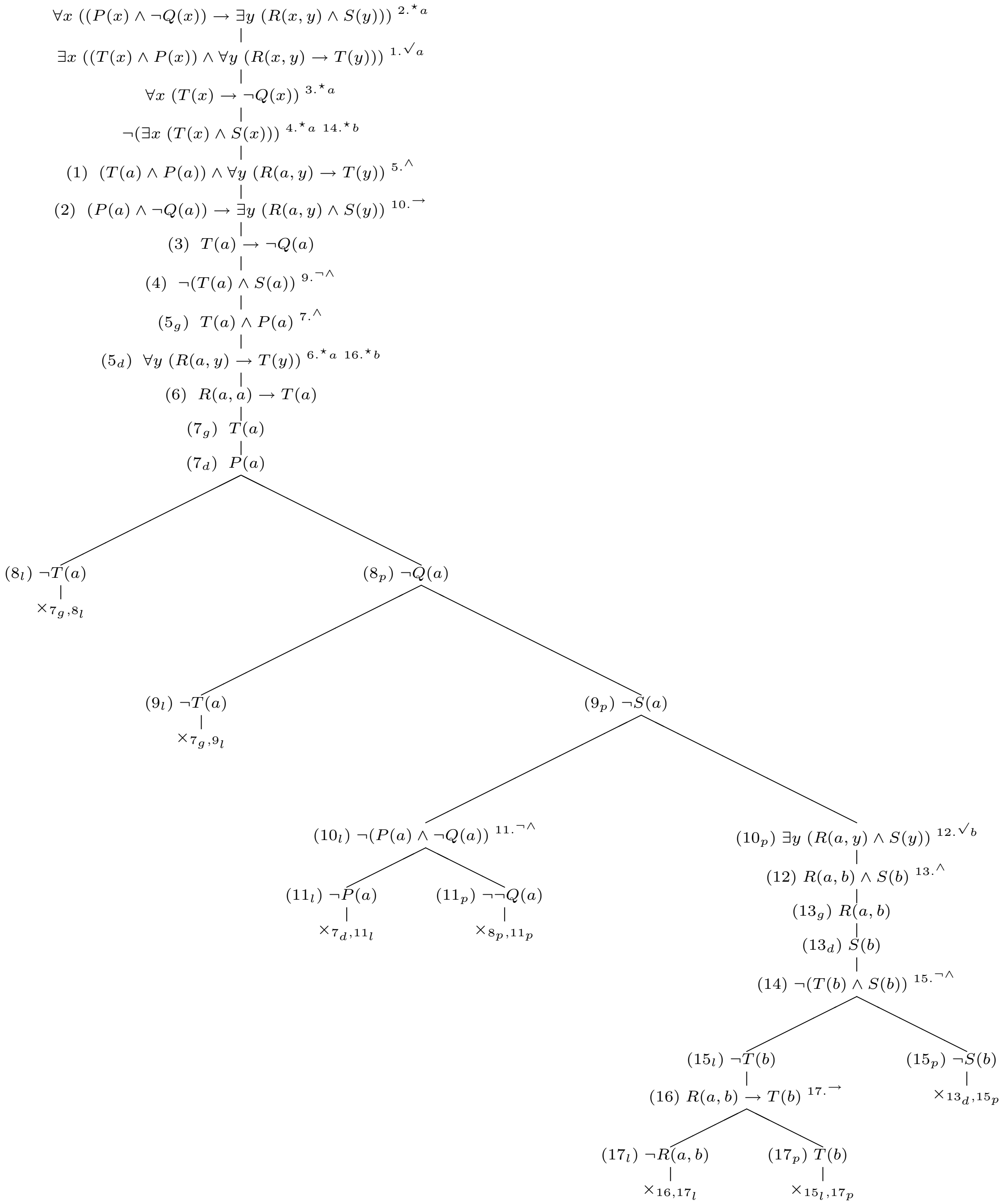
$$(7_g)\ \ T(b)$$

$$(7_d)\ \ \neg R(b)$$

- $(8_l)\ \ \neg P(a)$
  - $\times_{6_d, 8_l}$
- $(8_p)\ \ \forall y\ (Q(a,y) \to R(y))\ ^{10.\star b}$
  - $(9_l)\ \ \neg S(a)$
    - $\times_{6_g, 9_l}$
  - $(9_p)\ \ \forall y\ (T(y) \to Q(a,y))\ ^{11.\star b}$
    - $(10)\ \ Q(a,b) \to R(b)\ ^{12.\to}$
    - $(11)\ \ T(b) \to Q(a,b)\ ^{13.\to}$
      - $(12_l)\ \ \neg Q(a,b)$
        - $(13_l)\ \ \neg T(b)$
          - $\times_{7_g, 13_l}$
        - $(13_p)\ \ Q(a,b)$
          - $\times_{12_l, 13_p}$
      - $(12_p)\ \ R(b)$
        - $\times_{7_d, 12_p}$

Tablica zamknięta. Niezawodna reguła wnioskowania. Zauważmy, że dla zamknięcia wszystkich gałęzi nie było potrzebne zastosowanie wszystkich użyć reguły $R(\forall)$.

(f) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Tablica zamknięta. Reguła niezawodna.

(g) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$\forall x \exists y\ (P(x,y) \to P(x,x))\ ^{10.\star a}$$

$$\forall x\ (Q(x) \to (\exists z\ P(x,z) \to \exists y\ P(y,x)))\ ^{3.\star a}$$

$$\forall x\ \neg P(x,x)\ ^{2.\checkmark a}$$

$$\neg(\forall x\ (Q(x) \to \neg \exists z\ P(x,z)))\ ^{1.\checkmark a}$$

$$(1)\ \neg(Q(a) \to \neg \exists z\ P(a,z))\ ^{4.\neg\to}$$

$$(2)\ \neg P(a,a)$$

$$(3)\ Q(x) \to (\exists z\ P(a,z) \to \exists y\ P(y,a))\ ^{.\to}$$

$$(4_g)\ Q(a)$$

$$(4_d)\ \neg\neg \exists z\ P(a,z)\ ^{5.\neg\neg}$$

$$(5)\ \exists z\ P(a,z)\ ^{6.\checkmark b}$$

$$(6)\ P(a,b)$$

- $(7_l)\ \neg Q(a)$
  - $\times_{4_g,7_l}$
- $(7_p)\ \exists z\ P(a,z) \to \exists y\ P(y,a)\ ^{8.\to}$
  - $(8_l)\ \neg \exists z\ P(a,z)$
    - $\times_{5,8_l}$
  - $(8_p)\ \exists y\ P(y,a)\ ^{9.\checkmark c}$
    - $(9)\ P(c,a)$
    - $(10)\ \exists y\ (P(a,y) \to P(a,a))\ ^{11.\checkmark d}$
    - $(11)\ P(a,d) \to P(a,a)\ ^{12.\to}$
      - $(12_l)\ \neg P(a,d)$
        - $\vdots$
      - $(12_p)\ P(a,a)$
        - $\times_{2,12_p}$

Tablica jest nieskończona. Zauważmy, że z pierwszych dwóch przesłanek otrzymujemy ciągle nowe zdania egzystencjalne, nakazujące wprowadzanie nowych stałych indywiduowych. Reguła jest zawodna.

(h) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$\forall x \exists y\ P(x,y)^{\ 2.\star a_1\ \ 8.\star a_2\ \ 9.\star a_3}$$
$$\exists z \forall x(\exists y\ P(x,y) \to P(x,z))^{\ 1.\surd a_1}$$
$$\neg \exists z \forall x\ P(x,z)^{\ 5.\star a_1\ \ 10.\star a_2\ \ 11.\star a_3}$$
$$(1)\ \ \forall x(\exists y\ P(x,y) \to P(x,a_1))^{\ 3.\star a_1}$$
$$(2)\ \ \exists y\ P(a_1,y)^{\ 6.\surd a_2}$$
$$(3)\ \ \exists y\ P(a_1,y) \to P(a_1,a_1)^{\ 4.\to}$$

$$\begin{array}{cc}
(4_l)\ \ \neg\exists y\ P(a_1,y) & (4_p)\ \ P(a_1,y) \\
\times_{2,4_l} & (5)\ \ \neg\forall x\ P(x,a_1)^{\ 7.\surd a_3} \\
 & (6)\ \ P(a_1,a_2) \\
 & (7)\ \ \neg P(a_3,a_1) \\
 & (8)\ \ \exists y\ P(a_2,y)^{\ 12.\surd a_4} \\
 & (9)\ \ \exists y\ P(a_3,y)^{\ 13.\surd a_5} \\
 & (10)\ \ \neg\forall x\ P(x,a_2)^{\ 14.\surd a_6} \\
 & (11)\ \ \neg\forall x\ P(x,a_3)^{\ 15.\surd a_7} \\
 & (12)\ \ P(a_2,a_4) \\
 & (13)\ \ P(a_3,a_5) \\
 & (14)\ \ \neg P(a_6,a_2) \\
 & (15)\ \ \neg P(a_7,a_2) \\
 & \vdots
\end{array}$$

Widać, że ta tablica ma gałąź nieskończoną. Stosowanie reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ do formuł w pniu drzewa generuje stale nowe zdania egzystencjalne, które z kolei (na mocy reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$ każą wprowadzić kolejne nowe stałe indywiduowe.

Tak więc, badana reguła jest zawodna. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelniczkom próbę scharakteryzowania modelu, w którym prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek badanej reguły.

III.9.5. KRP z identycznością

9.5.1.

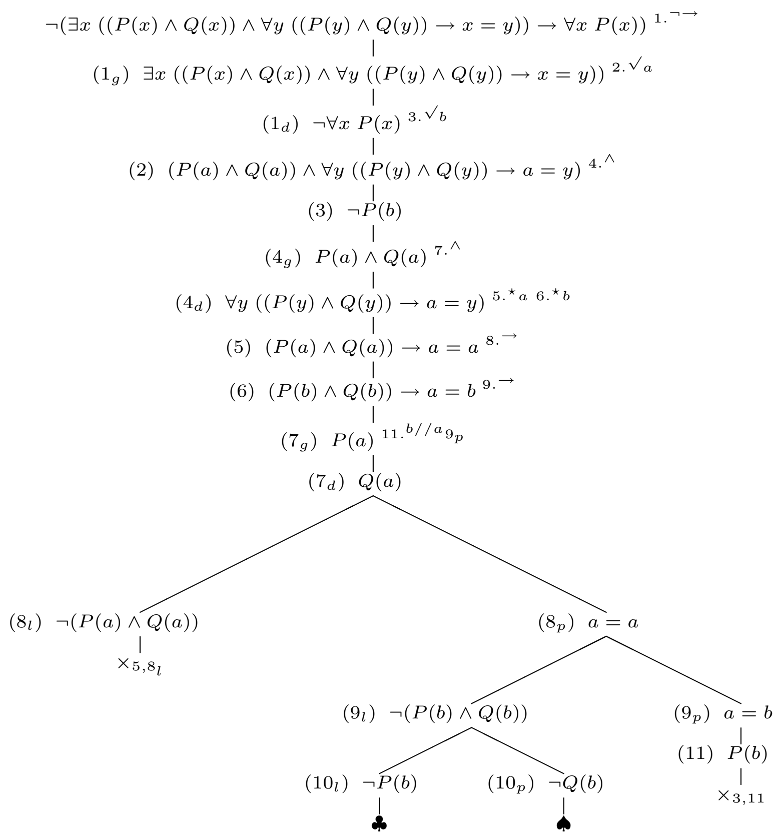
(a) $P(a) \equiv \forall x\ (x = a \to P(x))$.

$$\neg(P(a) \equiv \forall x\ (x = a \to P(x)))^{\ 1.\neg\equiv}$$

$$\begin{array}{cc}
(1_{lg})\ \ P(a) & (1_{pg})\ \ \neg P(a) \\
(1_{ld})\ \ \neg\forall x\ (x = a \to P(x))^{\ 2.\surd b} & (1_{pd})\ \ \forall x\ (x = a \to P(x))^{\ 5.\star a} \\
(2)\ \ \neg(b = a \to P(b))^{\ 3.\neg\to} & (5)\ \ x = a \to P(x)^{\ 6.\to} \\
(3_g)\ \ b = a & (6_l)\ \ \neg a = a \qquad (6_p)\ \ P(a) \\
(3_d)\ \ \neg P(b)^{\ 4.a//b\, 3_g} & \times_{6_l} \qquad\qquad \times_{1_{pg},6_p} \\
(4)\ \ \neg P(a) & \\
\times_{1_{lg},4} &
\end{array}$$

Tablica zamknięta. Badana formuła jest tautologią KRP z identycznością.

(b) $\exists x\ ((P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall y\ ((P(y) \wedge Q(y)) \to x = y)) \to \forall x\ P(x)$.



Tablica ma gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest tautologią. Oto przykłady interpretacji, w których zaprzeczenie badanej formuły jest prawdziwe:

♣	P	Q
a	+	+
b	–	?

♠	P	Q
a	+	+
b	–	–

9.5.2.

(a) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ \ P(a) \\
| \\
(0.2)\ \ \exists x \forall y\ (x = y)\ ^{1.\surd b} \\
| \\
(0.3)\ \ \neg\exists x \forall y\ (P(y) \equiv x = y)\ ^{3.\star a} \\
| \\
(1)\ \ \forall y\ (b = y)\ ^{2.\star a\ \ 5.\star c} \\
| \\
(2)\ \ b = a \\
| \\
(3)\ \ \neg\forall y\ (P(y) \equiv a = y)\ ^{4.\surd c} \\
| \\
(4)\ \ \neg(P(c) \equiv a = c)\ ^{7.\neg\equiv} \\
| \\
(5)\ \ b = c\ ^{6.a//b\, 2} \\
| \\
(6)\ \ a = c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
(7_{lg})\ \ P(c) & (7_{pg})\ \ \neg P(c)\ ^{8.a//c\, 7_{pd}} \\
| & | \\
(7_{ld})\ \ \neg a = c & (7_{pd})\ \ a = c \\
| & | \\
\times_{6,7_{ld}} & (8)\ \ \neg P(a) \\
 & | \\
 & \times_{0.1,8}
\end{array}
$$

Tablica zamknięta. Reguła niezawodna. Zauważmy, że gdyby ***nie*** zastosować reguły dotyczącej identyczności, to otrzymalibyśmy drzewo ***nieskończone***. Ćwiczenie dodatkowe: zastąp znak identyczności $=$ przez predykat dwuargumentowy Q i zbuduj początkowy fragment tablicy nieskończonej.

(b) Budujemy tablicę analityczną, tj. drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ \ \forall x\ (x = a \rightarrow P(x))\ ^{1.\star a\ \ 2.\star b} \\
| \\
(0.2)\ \ a \neq b \\
| \\
(0.3)\ \ \neg P(b) \\
| \\
(1)\ \ a = a \rightarrow P(a)\ ^{3.\rightarrow} \\
| \\
(2)\ \ b = a \rightarrow P(b)\ ^{4.\rightarrow}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
(3_l)\ \ \neg a = a & & (3_p)\ \ P(a) \\
| & & \\
\times_{3_l} & (4_l)\ \ \neg b = a & (4_p)\ \ P(b) \\
 & | & | \\
 & \spadesuit & \times_{0.3,4_p}
\end{array}
$$

Tablica ma gałąź otwartą. Reguła zawodna. Interpretacja, w której prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek:

♠	P
a	+
b	–

=	a	b
a	+	–
b	–	+

19.6. KRP z symbolami funkcyjnymi

19.6.1. Przypomnijmy aksjomaty specyficzne Arytmetyki Robinsona:

A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$

A_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$

A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$

A_4: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

A_5: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$

A_6: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

A_7: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$.

Dowody punktów (a) i (b) przedstawiamy poniżej.
(a) $\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$	aksjomat A_5
0.3.	$\neg(\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc))$	z.d.n.
1.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\oplus(\bigcirc, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, y)))$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, \bigcirc)))$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\times_{0.3.,4}$	SPRZECZNOŚĆ.

(b) $\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$	aksjomat A_6
0.3.	$\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$	aksjomat A_7
0.4.	$\neg(\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc))$	z.d.n.
1.	$\otimes(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\otimes(\bigcirc, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, y), \bigcirc))$	0.3., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, \bigcirc), \bigcirc)$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\bigcirc, \bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
6.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$	4,5, $R(=)$
7.	$\times_{0.4.,6}$	SPRZECZNOŚĆ.

Wykorzystywana literatura

Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Handbook of Automated Reasoning. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Marciszewski, W. 2004–2005. *Logika 2004/2005.* Teksty wykładów zamieszczone na stronie:
www.calculemus.org/lect/logika04-05/index.html

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications.* Graduate Texts in Computer Science, Springer.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Olszewski, A. Wykład z logiki dla studentów pierwszego roku.
http://www.cyf-kr.edu.pl/∼atolszad/dydaktyka.php

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Trzęsicki, K. 1994. *Elementy logiki dla humanistów.* Warszawa.

Wiśniewski, A. Logika I.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_1/

Wiśniewski, A. Logika II.

http://www.staff.amu.edu.pl/∼p_lup/aw_pliki/logika_2/

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl