Logika Radosna 2

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

KRZ: dowody założeniowe

Plan na dziś

Pierwsza z omawianych operacji konsekwencji w KRZ jest oparta na **metodzie założeniowej**. Omówimy jeden z systemów założeniowych KRZ, wywodzący się z prac Stanisława Jaśkowskiego.

- Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły.
- Reguły pierwotne systemu.
- Konsekwencja założeniowa.
- Przykłady dowodów tez.
- Reguły wtórne.
- Dowody nie wprost.
- Dodatkowe założenia dowodu.
- Sprzeczne zbiory formuł.

Mroki dzieciństwa

W najbardziej mrocznym okresie twojego wciąż jeszcze krótkiego życia, tj. w szkole średniej, kazano ci prawdopodobnie dowodzić twierdzeń. Na czym polegała ta procedura?

Zwykle, miałaś jakieś **założenia**, z których należało **udowodnić** (inaczej: wyprowadzić) pewną **tezę**.

Przeprowadzałaś zatem rozumowanie o postaci:

Jeśli ZAŁOŻENIA, to TEZA.

System założeniowy KRZ stanowi logiczną podstawę dla tego typu uzasadnień.

Pies Logik

Rozważany w poprzednim wykładzie Pies Chryzypa też przeprowadzał dowód, odwołując się do pewnych założeń oraz reguły wnioskowania:

- założenie 1: $\alpha \vee \beta$ (Zwierzyna na pierwszej lub drugiej ścieżce.)
- założenie 2: $\neg\alpha$ (Zwierzyny nie ma na pierwszej ścieżce.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha\vee\beta, \quad \neg\alpha}{\beta}$
- wniosek (teza): β (Zwierzyna na drugiej ścieżce.)

Za chwilę przekonasz się, że dorównujesz Psu Chryzypa w umiejętności logicznego rozumowania.

Ziuta forever

Również Ziuta z poprzedniego wykładu przeprowadzała dowód:

- założenie 1: $\alpha \rightarrow \beta$ (Jeśli była wypłata, to Zygfryd jest pijany.)
- założenie 2: $\neg\beta$ (Zygfryd nie jest pijany.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$
- wniosek (teza): $\neg\alpha$ (Nie było wypłaty.)

Nie uda ci się mi wmówić, iż nie dorównujesz Ziucie w umiejętności logicznego rozumowania.

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Dzisiaj Nasza Pani od Biologii opowiada o Nietoperzach:
Jeśli Nietoperze nie mają piór, to: są Ptakami, o ile fruwają.

Nasza Pani od Biologii wyciąga z kieszeni Nietoperza i stwierdza:
Nietoperze nie mają piór.

Nasza Pani od Biologii zagląda do podręcznika systematyki Zwierząt i stwierdza:
Ale przecież Nietoperze nie są Ptakami.

Nasza Pani od Biologii konkluduje:
Zatem Nietoperze nie fruwają.

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Zdania proste w powyższej argumentacji:

- α: *Nietoperze mają pióra.*
- β: *Nietoperze fruwają.*
- γ: *Nietoperze są Ptakami.*

Struktury składniowe zdań złożonych w powyższej argumentacji:

- $\neg\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
- $\neg\alpha$
- $\neg\gamma$

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\dfrac{\neg\gamma \qquad \dfrac{\neg\alpha \to (\beta \to \gamma) \qquad \neg\alpha}{\beta \to \gamma}}{\neg\beta}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- modus ponens (reguła odrywania, znana z semestru zimowego)
- modus tollens (reguła stosowana przez Ziutę).

Argumentacja Naszej Pani od Biologii była **poprawna** z logicznego punktu widzenia. Skoro otrzymała fałszywy wniosek, to jedna z przesłanek w jej argumentacji była fałszywa. Wiadomo nawet, która. Potrafisz ją wskazać?

Netoperek

„Milicja, Wrocław i ja”

Czy na podstawie uznania następujących stwierdzeń:

- *Jeśli nie udowodniono podejrzanemu popełnienia morderstwa, to: stwierdzono samobójstwo denata lub wykonano sentencję wyroku, o ile udało się zatrzymać podejrzanego.*
- *Podejrzanemu nie udowodniono popełnienia morderstwa.*
- *Nie stwierdzono samobójstwa denata.*
- *Udało się zatrzymać podejrzanego.*

gotowa jesteś uznać stwierdzenie:

- *Wykonano sentencję wyroku*?

„Milicja, Wrocław i ja"

Zdania proste w tym tekście:

- α: *Udowodniono podejrzanemu popełnienie morderstwa.*
- β: *Stwierdzono samobójstwo denata.*
- γ: *Udało się zatrzymać podejrzanego.*
- δ: *Wykonano sentencję wyroku.*

Struktury składniowe rozważanych zdań:

- $\neg\alpha \rightarrow (\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta))$
- $\neg\alpha$
- $\neg\beta$
- γ

„Milicja, Wrocław i ja"

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\dfrac{\gamma \qquad \dfrac{\neg\beta \qquad \dfrac{\neg\alpha \qquad \neg\alpha \to (\beta \vee (\gamma \to \delta))}{\beta \vee (\gamma \to \delta)}}{\gamma \to \delta}}{\delta}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- modus ponens (reguła odrywania)
- opuszczania alternatywy
- modus ponens.

Argumentacja jest **poprawna** z logicznego punktu widzenia.

„Milicja, Wrocław i ja"

Operacja konsekwencji

Operacja konsekwencji to pewna funkcja C, która każdemu zbiorowi formuł X przyporządkowuje pewien zbiór formuł $C(X)$. Myśl o niej tak oto:

- Mam dany jakiś zbiór przesłanek X. Jaki jest ogół wniosków, które mogę wyprowadzić z X, za pomocą pewnych, z góry ustalonych reguł wnioskowania?

Tak, zgadłaś! To właśnie będzie ów zbiór $C(X)$.

Wnioski otrzymujemy z przesłanek stosując ustalone reguły wnioskowania. Operacja konsekwencji będzie zatem wyznaczona przez owe reguły.

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja. **Nie trwóż się!** Okaże się ona o wiele prostsza od ezoterycznych konstrukcji pojęciowych, z którymi obcujesz na innych wykładach.

Operacja konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka KRZ. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w KRZ. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Niech 2^S oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów S. Przez **operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez** $\mathcal{R}$ rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\, (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α **jest wyprowadzalna z** X **za pomocą reguł należących do** $\mathcal{R}$.

Operacja konsekwencji

Powyższy zapis symboliczny można też wyrazić „ludzką mową”:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X)$ to po prostu wyjściowy zbiór X
- $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ to zbiór X plus wszystkie bezpośrednie wnioski otrzymane z przesłanek ze zbioru X wedle reguł wnioskowania z zestawu $\mathcal{R}$
- elementami zbioru $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X)$ są elementy $C^k_{\mathcal{R}}(X)$ oraz wszystkie wnioski wszystkich reguł z $\mathcal{R}$, których przesłanki brane są ze zbioru $C^k_{\mathcal{R}}(X)$
- $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest sumą wszystkich otrzymanych w ten sposób wniosków.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oznacza zatem, że formułę α otrzymujemy z założeń X stosując (być może wielokrotnie) reguły wnioskowania z podanego ich zestawu $\mathcal{R}$.

Operacja konsekwencji

Jak zatem „działa" operacja konsekwencji na danym zbiorze przesłanek X? Czyli jak otrzymujemy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$?

Bierzesz dowolną regułę wnioskowania R z zestawu $\mathcal{R}$ i tyle przesłanek ze zbioru X, ilu przesłanek wymaga reguła R. Wtedy zarówno elementy samego X, jak i wszystkie wnioski wszystkich takich reguł R dla dowolnych przesłanek z X tworzą zbiór $C^1_{\mathcal{R}}(X)$, czyli zbiór „bezpośrednich wniosków" z przesłanek znajdujących się w X. Procedurę tę powtarzasz wychodząc teraz od $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ zamiast od X. Dostajesz wszystkie „wnioski co najwyżej drugiego stopnia" z przesłanek znajdujących się w X, czyli zbiór $C^2_{\mathcal{R}}(X)$ (aby do nich „dotrzeć" należy co najwyżej dwukrotnie stosować reguły wnioskowania). I tak dalej.

Suma (po wszystkich n) tych wszystkich „wniosków co najwyżej n-tego stopnia" daje ogół wszystkich wniosków, które można otrzymać z przesłanek X posługując się regułami z zestawu $\mathcal{R}$.

Reguły pierwotne

Pracujemy w języku KRZ omówionym w semestrze zimowym.
Konsekwencja założeniowa oparta jest jedynie na regułach.

Można na różne sposoby dobierać **reguły pierwotne**.

- (RO) **Reguła odrywania**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji. W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DK) **Reguła dołączania koniunkcji**. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) **Reguła opuszczania koniunkcji**. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DA) **Reguła dołączania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

- (OA) **Reguła opuszczania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu można dołączyć pozostały człon tej alternatywy.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\beta}{\alpha}.$$

Reguły pierwotne

- (DR) **Reguła dołączania równoważności**. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) **Reguła opuszczania równoważności**. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie powyższe reguły są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później. Podobnie dla reguł dotyczących negacji.
- **Uwaga 3.** Twoim zalecanym zbiorem zadań z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz, gdzie używa się dokładnie tego samego zestawu reguł pierwotnych.

Reguły pierwotne

Oznaczmy przez *jas* zbiór powyższych reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest nieskończonym zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

Potem pokażemy, że możemy używać bardzo wielu dalszych reguł, które wyprowadzone są z powyższych reguł pierwotnych i noszą nazwę reguł **wtórnych** (albo: **wyprowadzalnych**).

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja operacji konsekwencji założeniowej. Po trzykroć powtarzam: **Nie lękaj się! Nie lękaj się! Nie lękaj się!** Praca z dowodami założeniowymi będzie bardzo łatwa, polubisz ją. Definicja tylko z pozoru wygląda strasznie. Wytłumaczę ją w sposób przystępny za chwilę.

Konsekwencja założeniowa

Określamy zbiór T_{jas} **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeniowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.
- $\alpha \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_i \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n \in T^k_{jas}$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.

$\alpha \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\alpha \in T^m_{jas}$.

Konsekwencja założeniowa

Jeśli $\alpha \in T^m_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą stopnia** m systemu założeniowego KRZ. Jeśli α jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to α jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\alpha \in T_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

Notacja. Aby pokazać, że $\alpha \in T_{jas}$, gdzie α jest identyczna z $(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \gamma) \ldots))$ budujemy dowód założeniowy, w którym $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ są założeniami i który zostaje uznany za zakończony, gdy $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$, tj. gdy otrzymamy formułę γ stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru *jas*. Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie.

Uwaga. W dowodach tez stopnia n można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia m, dla $m \leqslant n$.

Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację $\vdash_{jas}$ **konsekwencji założeniowej**.

Niech $X = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a α formułą języka KRZ. Zachodzi $X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Tak więc, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy α w oparciu o założenia $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ oraz reguły ze zbioru *jas*.

O co chodzi?

Dowody założeniowe są naprawdę proste. Masz jakieś założenia: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Jeśli z tych założeń, używając podanych wcześniej reguł, można otrzymać formułę α, to uznajemy, że udowodniona została implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Także na odwrót, aby dowieść, że implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots))$$

jest tezą systemu założeniowego, musisz formułę α wyprowadzić z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ przy użyciu podanych wcześniej reguł.

Odcinanie Ogonów

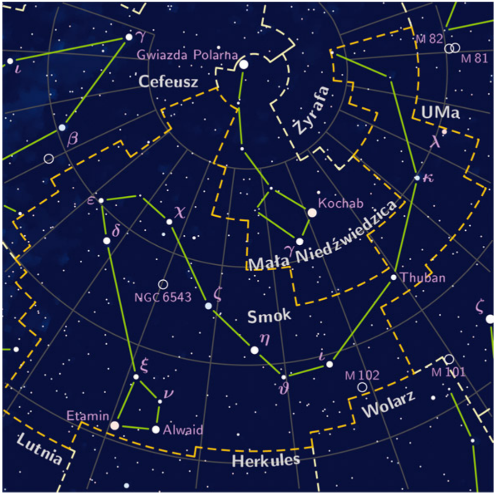
Gdy zatem masz udowodnić implikację:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)),$$

to traktujesz ją jak **Wielki Ogon**: aby znaleźć założenia dowodowe, szukasz implikacji głównej. Jej poprzednik (tu: β_1) będzie pierwszym założeniem. Patrzysz teraz, czy jej następnik też jest implikacją. Jeśli tak, to jej poprzednik (tu: β_2) będzie drugim założeniem. I tak dalej. W końcu dojdziesz do takiego **Małego Ogonka**, który już implikacją nie jest. I to właśnie jest formuła (tu: α), którą należy otrzymać z założeń, stosując reguły ze zbioru *jas*.

Pierwszym etapem pracy jest zatem ćwiartowanie Wielkiego Ogona, a etapem drugim jest dotarcie do Małego Ogonka.

Wielki Ogon



Gwiazda Polarna
Cefeusz
Żyrafa
M 82
M 81
UMa
Kochab
Mała Niedźwiedzica
Thuban
NGC 6543
Smok
M 102
M 101
Wolarz
Etamin
Alwaid
Lutnia
Herkules

Prawo komutacji

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ (prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha$ można otrzymać γ, używając reguł ze zbioru *jas*.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	założenie
4.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
5.	γ	RO: 4,2.

Zauważ, że ten dowód **planujesz**: masz otrzymać γ, patrzysz więc, w jakim założeniu γ występuje i co trzeba zrobić, aby do γ „dotrzeć”, używając reguł ze zbioru *jas* oraz pozostałych założeń i kroków dowodowych.

Prawo eksportacji

$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$, α, β można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 2,3
5.	γ	RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie proste: najpierw określasz **cel**, a potem szukasz **drogi** do niego. Przy tym, ową drogę wyznaczasz **od celu wstecz**, do założeń.

Prawo importacji

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \wedge \beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	α	OK: 2
4.	β	OK: 2
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Zastosowanie wcześniej udowodnionych tez

$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ prawo eksportacji i importacji

1.	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	prawo eksportacji
2.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$	prawo importacji
3.	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	DR: 1,2.

To prosty przykład wykorzystania tez już udowodnionych w dowodach dalszych tez.

Zastosowanie reguły DA

$((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2
4.	γ	RO: 1,2.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły DA dołączania alternatywy.

Zastosowanie reguły OA

$(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$, α oraz $\neg\beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	założenie
4.	$\beta \vee \gamma$	RO: 1,2
5.	γ	OA: 4,3.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły OA opuszczania alternatywy.

Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\beta \to \gamma$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 1,3
5.	γ	RO: 2,3.

Prawo Fregego

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, $\alpha \to \beta$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \to \beta$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 2,3
5.	$\beta \to \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Reguły wtórne

Reguła R jest **regułą wyprowadzalną** (**wtórną**) systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli R jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż tezą systemu założeniowego jest implikacja o postaci $\Psi \rightarrow \Phi$, to reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest regułą wtórną.

Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad\qquad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$ i $\beta \rightarrow \gamma$ można otrzymać $\alpha \rightarrow \gamma$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo sylogizmu hipotetycznego
4.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Fregego

$$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \qquad\qquad \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ oraz $\alpha \to \beta$ można otrzymać $\alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \to \beta$	założenie
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	prawo Fregego
4.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO: 4,2.

Reguła wewnętrznego poprzedzania

Aby pokazać, że reguła:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \rightarrow \gamma$:

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo komutacji
4.	$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Dunsa Scotusa

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1
4.	β	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ nazywamy regułą **Dunsa Scotusa** (RDS).

Prawo Dunsa Scotusa

$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	β	RDS: 1,2.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest wyprowadzalna, to wiemy także, że implikacja $\Psi \to \Phi$ jest tezą systemu założeniowego.

Trafność

Konsekwencja założeniowa jest **trafna**, tzn.:

- Jeśli α jest tezą systemu założeniowego, to α jest tautologią KRZ.
- Jeśli $X \vdash_{jas} \alpha$, to $X \models_{krz} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Pełność

Konsekwencja założeniowa jest **pełna**, tzn.:

- Jeśli α jest tautologią KRZ, to α jest tezą systemu założeniowego.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha$ (czyli α wynika logicznie z X), to $X \vdash_{jas} \alpha$.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Trafność i Pełność: zastosowania

Fakt, że konsekwencja założeniowa jest trafna i pełna może być wykorzystany np. w ustalaniu:

- czy dana formuła jest tautologią KRZ
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru przesłanek
- czy dane wnioskowanie jest dedukcyjne
- czy dane zdanie jest prawdą logiczną.

Zwróć uwagę, że rozstrzyganie tych problemów dokonywane jest w języku przedmiotowym, a nie w metajęzyku.

Dowody nie wprost

Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

Twierdzenie powyższe pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym **dowodów nie wprost**: aby pokazać, że α ma dowód z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ wystarczy pokazać, że z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \neg\alpha\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.
Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły α z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ dopisujemy do założeń $\neg\alpha$, czyli **założenie dowodu nie wprost** (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł **wzajem sprzecznych**. Gdy to się powiedzie, α jest konsekwencją $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ jest następujący:

1.	$\neg\neg\alpha$	założenie
2.	$\neg\alpha$	z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **opuszczania negacji** ON:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

1.	α	założenie
2.	$\neg\neg\neg\alpha$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha$	ON: 2.

Z tez $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę: $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **dołączania negacji** DN:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ prawo transpozycji prostej

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	prawo podwójnej negacji
5.	α	RO: 3,4
6.	β	RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

Dowody nie wprost: przykłady

$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{jas} \neg\alpha$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

Aby pokazać, że reguła poprzedzania $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ jest regułą wtórną, dowodzimy najpierw, że tezą systemu założeniowego jest prawo poprzedzania $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. W tym celu wystarczy pokazać, że z założeń α, β oraz $\neg\alpha$ otrzymujemy sprzeczność (dowód niżej, po lewej):

1.	α	założenie	1.	α	założenie
2.	β	założenie	2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	prawo poprzedzania
3.	$\neg\alpha$	z.d.n.	3.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Dowód, że $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ jest regułą wtórną polega na pokazaniu, że z założenia α możemy otrzymać $\beta \rightarrow \alpha$: dowód wyżej, po prawej.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Czy jest prawdą logiczną:
Pogonowski oślepnie, jeśli wydłubiemy mu oczy i utniemy uszy wtedy i tylko wtedy, gdy nie utniemy mu uszu, o ile nie oślepnie, choć wydłubiemy mu oczy.

Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przypisujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Wydłubiemy Pogonowskiemu oczy.
- q — Utniemy Pogonowskiemu uszy.
- r — Pogonowski oślepnie.

Budujemy schemat zdaniowy dla rozważanego zdania:
$((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$.
Aby metodą założeniową dowieść równoważności $\alpha \equiv \beta$, wystarczy dowieść implikacji prostej $\alpha \rightarrow \beta$ i odwrotnej $\beta \rightarrow \alpha$.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$.

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	założenie
2.	$p \wedge \neg r$	założenie
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg\neg q \rightarrow q$	prawo podwójnej negacji (udowodniliśmy wcześniej)
5.	q	RO: 4,3
6.	p	OK: 2
7.	$\neg r$	OK: 2
8.	$p \wedge q$	DK: 6,5
9.	r	RO: 1,8
10.	Sprzeczność:	7,9.

Otrzymaliśmy sprzeczność w dowodzie nie wprost, a zatem rozważana implikacja jest tezą.

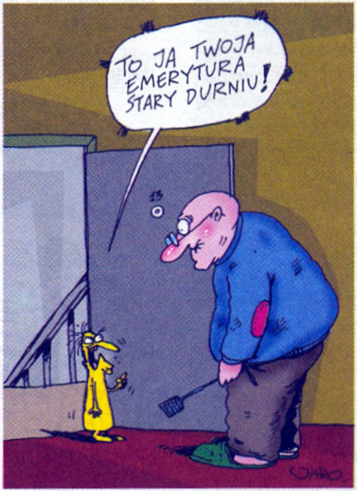
Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge \neg r) \to \neg q) \to ((p \wedge q) \to r)$.

1.	$(p \wedge \neg r) \to \neg q$	założenie
2.	$p \wedge q$	założenie
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	p	OK: 2
5.	$p \wedge \neg r$	DK: 4,3
6.	$\neg q$	RO: 1,5
7.	q	OK: 2
8.	Sprzeczność:	6,7.

Udowodniliśmy implikację prostą oraz odwrotną, a zatem $((p \wedge q) \to r) \equiv ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$ jest tezą (na mocy DR). Jest więc tautologią. Rozważane zdanie jest prawdą logiczną.

Na co czeka Pogonowski?



Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. dodatkowych założeń dowodu. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie α.
- Jeśli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β, to do dowodu wolno włączyć formułę $\alpha \rightarrow \beta$.
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie α ma numer n.1., a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od n.1. do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Prawomocność tego postępowania wynika z definicji dowodów założeniowych. Każdy dowód z dodatkowymi założeniami można zastąpić dowodem bez nich.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$((\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)) \to ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta))$

1.	$(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
1.3.	$\gamma \wedge \delta$	RO: 1,1.2.
1.4.	γ	OK: 1.3.
2.	$\alpha \to \gamma$	1.1.$\Rightarrow$1.4.
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
2.3.	$\gamma \wedge \delta$	RO: 1,2.2.
2.4.	δ	OK: 2.3.
3.	$\beta \to \delta$	2.1.$\Rightarrow$2.4.
4.	$(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \delta)$	DK: 2,3.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

Udowodnimy najpierw tezę pomocniczą $(*)$:

$(*)$ $(\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4
6.	$\beta \vee \delta$	DA: 5.

W wierszach 2 i 6 mamy parę formuł wzajem sprzecznych, a więc dowód nie wprost tezy $(*)$ został zakończony.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \delta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg(\alpha \vee \gamma)))$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$	teza $(*)$
7.	$\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha$	RO: 6,1
8.	$\neg\alpha$	RO: 7,3
9.	γ	OA: 5,8
10.	δ	RO: 2,9
11.	$\beta \vee \delta$	DA: 10.

Dowód powyższy można zastąpić dowodem z dodatkowymi założeniami, bez wykorzystania tezy $(*)$:

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 1,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
6.	$\alpha \to (\beta \vee \delta)$	1.1.⇒1.4.
7.	$\neg\alpha$	MT: 6,3
8.	γ	OA: 5,7
9.	δ	RO: 2,8
10.	$\beta \vee \delta$	DA: 9.

W kroku 7 korzystamy z wtórnej reguły *modus tollendo tollens* MT: $\frac{\alpha \to \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$.

Prawo negowania alternatywy

$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	1.1.$\Rightarrow$1.2.
3.	$\neg\alpha$	MT: 2,1
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
4.	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	2.1.$\Rightarrow$2.2.
5.	$\neg\beta$	MT: 4,1
5.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK: 3,5.

Prawo negowania alternatywy

$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$.

1.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \vee \beta$	ON: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	OA: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania alternatywy $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA: $\frac{\neg(\alpha\vee\beta)}{\neg\alpha\wedge\neg\beta}$.

Prawo negowania koniunkcji

$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	ON: 5
8.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 6,7.

Prawo negowania koniunkcji

$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \wedge \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 3
5.	β	OK: 3
6.	$\neg\neg\alpha$	DN: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania koniunkcji $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK: $\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta}$.

Prawa De Morgana

Prawa negowania koniunkcji i negowania alternatywy nazywane są też prawami **De Morgana**.

Zauważmy, że reguły NA oraz NK są „symetryczne”, w tym sensie, że wyprowadzalne są także reguły:

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \qquad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}.$$

Każda teza równoważnościowa założeniowego systemu KRZ pozwala na wprowadzenie reguły wtórnej „symetrycznej” we wspomnianym wyżej sensie.

Tezy, które nie są implikacjami. Uwaga: ważne!!!

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ prawo niesprzeczności

1.	$\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	ON: 1
3.	α	OK: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 2.

Uwaga !!! W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, które nie są implikacjami (a więc gdy nie można poczynić żadnych założeń), **zaczynamy dowód od założenia nie wprost**.

Prawo wyłączonego środka

$\alpha \vee \neg\alpha$ prawo wyłączonego środka

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$	NA: 1
3.	$\neg\alpha$	OK: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 2.

Z.d.n. pozwoliło uzyskać sprzeczność, a zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost, formuła $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą.

Prawo negowania implikacji

$\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)$.

1.	$\neg(\alpha \to \beta)$	założenie
2.	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$	NK: 2
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\neg\neg\alpha$	DN: 1.1.
1.3.	$\neg\neg\beta$	OA: 3,1.2.
1.4.	β	ON: 1.3.
4.	$\alpha \to \beta$	1.1.$\Rightarrow$1.4.

Prawo negowania implikacji

$(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$.

1.	$\alpha \wedge \neg\beta$	
2.	$\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \rightarrow \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	RO: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie jedno z praw negowania implikacji: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	RO: 1,6.

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha$	OA: 1,3.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie równoważność: $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$, pozwalającą zastępować implikację przez alternatywę i negację (oraz na odwrót).

Nasza Pani od Biologii i Biedronki

Nasza Pani od Biologii rozmyśla o Biedronkach:
Biedronki są kolorowe, jeśli: są w paski, o ile są widoczne gołym okiem.
Biedronki ani nie są kolorowe, ani nie zmieniają barwy.
Biedronki są w paski, o ile są widoczne gołym okiem, lub: Biedronki są w kropki.
Jeśli Biedronki są w kropki, to są kolorowe lub są w paski.
Czy z powyższego wynika logicznie, że Biedronki są w paski?

Zdania proste:

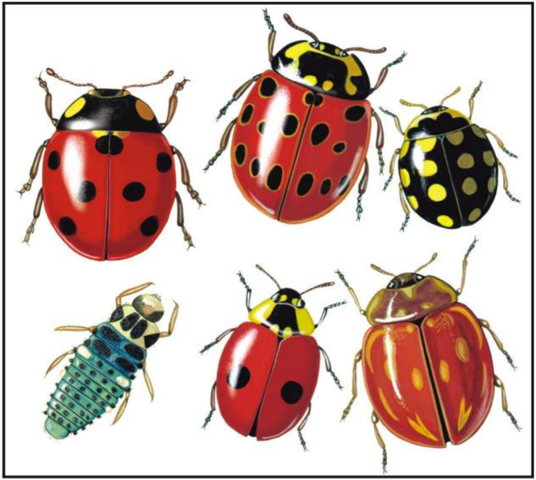
- α — Biedronki są widoczne gołym okiem.
- β — Biedronki są w paski.
- γ — Biedronki są kolorowe.
- δ — Biedronki zmieniają barwę.
- ϑ — Biedronki są w kropki.

Nasza Pani od Biologii i Biedronki

$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta, \vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta$.

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\gamma \wedge \neg\delta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta$	założenie
4.	$\vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 2
6.	$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	MT: 1,5
7.	ϑ	OA: 3,6
8.	$\gamma \vee \beta$	RO: 4,7
9.	β	OA: 8,5.

Nasza Pani od Biologii i Biedronki



Nasza Pani od Biologii i Wiewiórki

Nasza Pani od Biologii rozmyśla, dlaczego Wiewiórki są rude:
Jeśli: Wiewiórki są owadożerne, o ile są drapieżnikami, to Wiewiórki jedzą Mrówki.
Jeśli Wiewiórki jedzą Mrówki lub jedzą igliwie, to są rude.
Wiewiórki jedzą igliwie lub są drapieżnikami.
Ale przecież Wiewiórki nie jedzą igliwia.
Zatem Wiewiórki są rude.

Zdania proste:

- α — Wiewiórki są drapieżnikami.
- β — Wiewiórki są owadożerne.
- γ — Wiewiórki jedzą Mrówki.
- δ — Wiewiórki jedzą igliwie.
- ϑ — Wiewiórki są rude.

Nasza Pani od Biologii i Wiewiórki

$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \vartheta$.

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\delta$	założenie
3.	$(\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta$	założenie
4.	$\delta \vee \alpha$	założenie
5.	α	OA: 4,2
6.	$\alpha \vee \beta$	DA: 5
7.	γ	RO: 1,6
8.	$\gamma \vee \delta$	DA: 7
9.	ϑ	RO: 3,8.

Nasza Pani od Biologii i Wiewiórki

Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, twierdzi się, że Bóg stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.

- α — Bóg jest doskonały.
- β — Bóg jest miłosierny.
- γ — Bóg stworzył Świat.
- δ — W Świecie jest Zło.

Teodycea i kule w płocie

$\{\alpha \to \beta, (\alpha \wedge \gamma) \to \neg\delta, \gamma, \delta\} \vdash_{jas} \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$(\alpha \wedge \gamma) \to \neg\delta$	założenie
3.	δ	założenie
4.	γ	założenie
5.	$\neg\neg\delta$	DN: 3
6.	$\neg(\alpha \wedge \gamma)$	MT: 2,5
7.	$\neg\alpha \vee \neg\gamma$	NK: 6
8.	$\neg\neg\gamma$	DN: 4
9.	$\neg\alpha$	OA: 7,8
10.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	DA: 9.

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

The Eastern Wall

Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) **sprzeczny**, jeśli istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{jas} \alpha$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\alpha$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**.

Twierdzenie o zwartości.
Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś skończonego podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 1

Pokażemy, że $\{\alpha \vee \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta, \neg(\delta \wedge \neg\gamma), \delta \wedge \neg\alpha\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

1.	$\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \beta$	założenie
3.	$\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$	założenie
4.	$\delta \wedge \neg\alpha$	założenie
5.	δ	OK: 4
6.	$\neg\alpha$	OK: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,7
9.	$\delta \wedge \neg\gamma$	DK: 5,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Dygresja: ekonomia telewizyjna.

Zwróćmy uwagę, że wykazaliśmy przed chwilą dedukcyjną sprzeczność telewizyjnej „analizy ekonomicznej" (z poprzedniego wykładu):

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

- α — Jest kapitalizm.
- β — Jest bezrobocie.
- γ — Jest recesja.
- δ — Jest bieda.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 2

Pokażemy, że $\{\neg\gamma \wedge \beta,\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta)),\ \alpha,\ \vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$ jest sprzeczny.

1.	$\neg\gamma \wedge \beta$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta))$	założenie
3.	α	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 1
6.	β	OK: 1
7.	$\beta \rightarrow \gamma$	OK: 4
8.	γ	RO: 10,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 5 i 8. Zauważ, że nie korzystaliśmy ani z przesłanki 2, ani z przesłanki 3. Tak więc, zbiór przesłanek $\{\neg\gamma \wedge \beta, \vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$ też jest sprzeczny.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 3

$\{\alpha \rightarrow \beta, \ \ \beta \rightarrow \neg\gamma, \ \ \delta \rightarrow \gamma, \ \ \alpha \wedge \delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	δ	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	RO: 2,7
9.	γ	RO: 3,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 8 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 4

$\{\alpha \rightarrow \beta, \;\; \gamma \rightarrow \delta, \;\; \neg\beta \vee \gamma, \;\; \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \delta$	założenie
3.	$\neg\beta \vee \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \neg\delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	$\neg\delta$	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,6
9.	$\neg\beta$	OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 5

Oto dwa dowody, że $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \ \beta \rightarrow \neg\gamma, \ \delta \rightarrow \beta, \ \delta, \ \alpha \vee \gamma\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \beta$	założenie
4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\gamma$	RO: 2,6
8.	α	OA: 5,7
9.	$\neg\beta$	RO: 1,8.

1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \beta$	założenie
4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\neg\beta$	DN: 6
8.	$\neg\alpha$	MT: 1,7
9.	γ	OA: 5,8
10.	$\neg\gamma$	RO: 2,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9 (lewy dowód) lub w 9 i 10 (prawy dowód).

Nasza Pani od Biologii i Pterodaktyle

Nasza Pani od Biologii robi notatki do następnej lekcji, wykorzystując różne źródła:
Pterodaktyle fruwały lub: miały pióra, ale nie miały ogona.
Pterodaktyle miały ogony lub nie miały piór.
Pterodaktyle nie fruwały.
„Oj, coś tu jest niedobrze" — myśli Nasza Pani od Biologii. Czy ma rację?

Zdania proste:

- α — Pterodaktyle fruwały.
- β — Pterodaktyle miały ogony.
- γ — Pterodaktyle miały pióra.

Nasza Pani od Biologii i Pterodaktyle

$\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \;\; \beta \vee \neg\gamma, \;\; \neg\alpha\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta)$	założenie
2.	$\beta \vee \neg\gamma$	założenie
3.	$\neg\alpha$	założenie
4.	$\gamma \wedge \neg\beta$	OA: 1,3
5.	$\neg\beta$	OK: 4
6.	γ	OK: 4
7.	$\neg\gamma$	OA: 2,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

Nasza Pani od Biologii i Pterodaktyle

Nasza Pani od Biologii i Pterodaktyle

Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

Koniec

Zadanie domowe. Rozwiąż zadania 34–57 ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Przypomnę: do zdania egzaminu niezbędna jest umiejętność rozwiązywania zadań. Wybór należy do ciebie.

Na kolejnych wykładach omówimy operację konsekwencji wyznaczoną przez **tablice analityczne** dla KRZ.