

Logika Radosna 2

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

KRZ: dowody założeniowe

Plan na dziś

Pierwsza z omawianych operacji konsekwencji w KRZ jest oparta na **metodzie założeniowej**. Omówimy jeden z systemów założeniowych KRZ, wywodzący się z prac **Stanisława Jaśkowskiego**.

- Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły.
- Reguły pierwotne systemu.
- Konsekwencja założeniowa.
- Przykłady dowodów tez.
- Reguły wtórne.
- Dowody nie wprost.
- Dodatkowe założenia dowodu.
- Sprzeczne zbiory formuł.

Mroki dzieciństwa

W najbardziej mrocznym okresie twojego wciąż jeszcze krótkiego życia, tj. w szkole średniej, kazano ci prawdopodobnie **dowodzić twierdzeń**. Na czym polegała ta procedura?

Zwykle, miałaś jakieś **założenia**, z których należało **udowodnić** (inaczej: **wyprowadzić**) pewną **tezę**.

Przeprowadzałaś zatem rozumowanie o postaci:

Jeśli **ZAŁOŻENIA**, to **TEZA**.

System założeniowy KRZ stanowi logiczną podstawę dla tego typu uzasadnień.

Pies Logik

Rozważany w poprzednim wykładzie Pies Chryzypa też przeprowadzał dowód, odwołując się do pewnych założeń oraz reguły wnioskowania:

- założenie 1: $\alpha \vee \beta$ (Zwierzyna na pierwszej lub drugiej ścieżce.)
- założenie 2: $\neg\alpha$ (Zwierzyny nie ma na pierwszej ścieżce.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}$
- wniosek (teza): β (Zwierzyna na drugiej ścieżce.)

Za chwilę przekonasz się, że dorównujesz Psu Chryzypa w umiejętności logicznego rozumowania.

Ziuta forever

Również Ziuta z poprzedniego wykładu przeprowadzała dowód:

- założenie 1: $\alpha \rightarrow \beta$ (Jeśli była wypłata, to Zygfryd jest pijany.)
- założenie 2: $\neg\beta$ (Zygfryd nie jest pijany.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$
- wniosek (teza): $\neg\alpha$ (Nie było wypłaty.)

Nie uda ci się mi wmówić, iż nie dorównujesz Ziucie w umiejętności logicznego rozumowania.

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Dzisiaj Nasza Pani od Biologii opowiada o Nietoperzach:

Jeśli Nietoperze nie mają piór, to: są Ptakami, o ile fruważą.

Nasza Pani od Biologii wyciąga z kieszeni Nietoperza i stwierdza:

Nietoperze nie mają piór.

Nasza Pani od Biologii zagląda do podręcznika systematyki Zwierząt i stwierdza:

Ale przecież Nietoperze nie są Ptakami.

Nasza Pani od Biologii konkluduje:

Zatem Nietoperze nie fruważą.

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Zdania proste w powyższej argumentacji:

- α : *Nietoperze mają pióra.*
- β : *Nietoperze fruwią.*
- γ : *Nietoperze są Ptakami.*

Struktury składniowe zdań złożonych w powyższej argumentacji:

- $\neg\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
- $\neg\alpha$
- $\neg\gamma$

Nasza Pani od Biologii: epizod trzeci

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\frac{\neg\gamma \quad \frac{\neg\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \neg\alpha}{\beta \rightarrow \gamma}}{\neg\beta}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- **modus ponens** (reguła odrywania, znana z semestru zimowego)
- **modus tollens** (reguła stosowana przez Ziutę).

Argumentacja Naszej Pani od Biologii była **poprawna** z logicznego punktu widzenia. Skoro otrzymała fałszywy wniosek, to jedna z przesłanek w jej argumentacji była fałszywa. Wiadomo nawet, która. Potrafisz ją wskazać?

Netoperek



„Milicja, Wrocław i ja”

Czy na podstawie uznania następujących stwierdzeń:

- *Jeśli nie udowodniono podejrzanemu popełnienia morderstwa, to: stwierdzono samobójstwo denata lub wykonano sentencję wyroku, o ile udało się zatrzymać podejrzanego.*
- *Podejrzanemu nie udowodniono popełnienia morderstwa.*
- *Nie stwierdzono samobójstwa denata.*
- *Udało się zatrzymać podejrzanego.*

gotowa jesteś uznać stwierdzenie:

- *Wykonano sentencję wyroku?*

„Milicja, Wrocław i ja”

Zdania proste w tym tekście:

- α : *Udowodniono podejrzanemu popełnienie morderstwa.*
- β : *Stwierdzono samobójstwo denata.*
- γ : *Udało się zatrzymać podejrzanego.*
- δ : *Wykonano sentencję wyroku.*

Struktury składniowe rozważanych zdań:

- $\neg\alpha \rightarrow (\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta))$
- $\neg\alpha$
- $\neg\beta$
- γ

„Milicja, Wrocław i ja”

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\frac{\frac{\frac{\gamma}{\delta} \quad \neg\beta}{\gamma \rightarrow \delta} \quad \frac{\neg\alpha}{\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta)} \quad \neg\alpha \rightarrow (\beta \vee (\gamma \rightarrow \delta))}{\delta}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- modus ponens (reguła odrywania)
- opuszczania alternatywy
- modus ponens.

Argumentacja jest **poprawna** z logicznego punktu widzenia.

„Milicja, Wrocław i ja”



Operacja konsekwencji

Operacja konsekwencji to pewna funkcja C , która każdemu zbiorowi formuł X przyporządkowuje pewien zbiór formuł $C(X)$. Myśl o niej tak oto:

- Mam dany jakiś zbiór przesłanek X . Jaki jest ogół wniosków, które mogę wyprowadzić z X , za pomocą pewnych, z góry ustalonych reguł wnioskowania?

Tak, zgadłaś! To właśnie będzie ów zbiór $C(X)$.

Wnioski otrzymujemy z przesłanek stosując ustalone reguły wnioskowania. Operacja konsekwencji będzie zatem wyznaczona przez owe reguły.

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja. **Nie trwóż się!** Okaze się ona o wiele prostsza od ezoterycznych konstrukcji pojęciowych, z którymi obczujesz na innych wykładach.

Operacja konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka KRZ. Niech \mathcal{R} będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w KRZ. Niech \mathcal{N} oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Niech 2^S oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów S . Przez **operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez \mathcal{R}** rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \rightarrow 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

- $C_{\mathcal{R}}^0(X) = X$
- $C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X) = C_{\mathcal{R}}^k(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C_{\mathcal{R}}^k(X)) (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup \{C_{\mathcal{R}}^k(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: **α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do \mathcal{R} .**

Operacja konsekwencji

Powyższy zapis symboliczny można też wyrazić „ludzką mową”:

- $C_{\mathcal{R}}^0(X)$ to po prostu wyjściowy zbiór X
- $C_{\mathcal{R}}^1(X)$ to zbiór X plus wszystkie bezpośrednie wnioski otrzymane z przesłanek ze zbioru X wedle reguł wnioskowania z zestawu \mathcal{R}
- elementami zbioru $C_{\mathcal{R}}^{k+1}(X)$ są elementy $C_{\mathcal{R}}^k(X)$ oraz wszystkie wnioski wszystkich reguł z \mathcal{R} , których przesłanki brane są ze zbioru $C_{\mathcal{R}}^k(X)$
- $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest sumą wszystkich otrzymanych w ten sposób wniosków.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oznacza zatem, że formułę α otrzymujemy z założeń X stosując (być może wielokrotnie) reguły wnioskowania z podanego ich zestawu \mathcal{R} .

Operacja konsekwencji

Jak zatem „działa” operacja konsekwencji na danym zbiorze przesłanek X ? Czyli jak otrzymujemy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$?

Bierzesz dowolną regułę wnioskowania R z zestawu \mathcal{R} i tyle przesłanek ze zbioru X , ilu przesłanek wymaga reguła R . Wtedy zarówno elementy samego X , jak i wszystkie wnioski wszystkich takich reguł R dla dowolnych przesłanek z X tworzą zbiór $C_{\mathcal{R}}^1(X)$, czyli zbiór „bezpośrednich wniosków” z przesłanek znajdujących się w X . Procedurę tę powtarzasz wychodząc teraz od $C_{\mathcal{R}}^1(X)$ zamiast od X . Dostajesz wszystkie „wnioski co najwyżej drugiego stopnia” z przesłanek znajdujących się w X , czyli zbiór $C_{\mathcal{R}}^2(X)$ (aby do nich „dotrzeć” należy co najwyżej dwukrotnie stosować reguły wnioskowania). I tak dalej.

Suma (po wszystkich n) tych wszystkich „wniosków co najwyżej n -tego stopnia” daje ogół wszystkich wniosków, które można otrzymać z przesłanek X posługując się regułami z zestawu \mathcal{R} .

Reguły pierwotne

Pracujemy w języku KRZ omówionym w semestrze zimowym.
Konsekwencja **założeniowa** oparta jest jedynie na **regułach**.

Można na różne sposoby dobierać **reguły pierwotne**.

- (RO) **Reguła odrywania**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.
W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DK) **Reguła dołączania koniunkcji**. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) **Reguła opuszczania koniunkcji**. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DA) **Reguła dołączania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

- (OA) **Reguła opuszczania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu można dołączyć pozostały człon tej alternatywy.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \quad \frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha}$$

Reguły pierwotne

- (DR) **Reguła dołączania równoważności**. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) **Reguła opuszczania równoważności**. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie powyższe reguły są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później. Podobnie dla reguł dotyczących negacji.
- **Uwaga 3.** Twoim zalecanym zbiorem zadań z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz, gdzie używa się dokładnie tego samego zestawu reguł pierwotnych.

Reguły pierwotne

Oznaczmy przez *jas* zbiór powyższych reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest **nieskończonym** zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

Potem pokażemy, że możemy używać bardzo wielu dalszych reguł, które wyprowadzone są z powyższych reguł pierwotnych i noszą nazwę reguł **wtórnych** (albo: **wyprowadzalnych**).

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja operacji konsekwencji założeniowej. Po trzykroć powtarzam: **Nie lękaj się! Nie lękaj się! Nie lękaj się!** Praca z dowodami założeniowymi będzie bardzo łatwa, polubisz ją. Definicja tylko z pozoru wygląda strasznie. Wytłumaczę ją w sposób przystępny za chwilę.

Konsekwencja założeniowa

Określamy zbiór T_{jas} **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeniowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T_{jas}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geq 0$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma$ takie, że:
 - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$
 - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$.
- $\alpha \in T_{jas}^{k+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $n \geq 0$, $i < n$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ takie, że:
 - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_i \rightarrow \gamma) \dots))$
 - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \dots, \beta_n \in T_{jas}^k$
 - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$.

$\alpha \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\alpha \in T_{jas}^m$.

Konsekwencja założeniowa

Jeśli $\alpha \in T_{jas}^m$, to mówimy, że α jest **tezą stopnia m** systemu założeniowego KRZ. Jeśli α jest tezą stopnia m i $m \leq n$, to α jest też oczywiście tezą stopnia n . Jeśli $\alpha \in T_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

Notacja. Aby pokazać, że $\alpha \in T_{jas}$, gdzie α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \gamma) \dots))$ budujemy **dowód założeniowy**, w którym $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ są **założeniami** i który zostaje uznany za **zakończony**, gdy $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\})$, tj. gdy otrzymamy formułę γ stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru jas . Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie.

Uwaga. W dowodach tez stopnia n można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia m , dla $m \leq n$.

Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację \vdash_{jas} **konsekwencji założeniowej**.

Niech $X = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a α formułą języka KRZ. Zachodzi $X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \alpha) \dots)).$$

Tak więc, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy α w oparciu o założenia $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ oraz reguły ze zbioru *jas*.

O co chodzi?

Dowody założeniowe są naprawdę proste. Masz jakieś założenia: $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. Jeśli z tych założeń, używając podanych wcześniej reguł, można otrzymać formułę α , to uznajemy, że udowodniona została implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \alpha) \dots)).$$

Także na odwrót, aby dowieść, że implikacja:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \alpha) \dots))$$

jest tezą systemu założeniowego, musisz formułę α wyprowadzić z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ przy użyciu podanych wcześniej reguł.

Odcinanie Ogonów

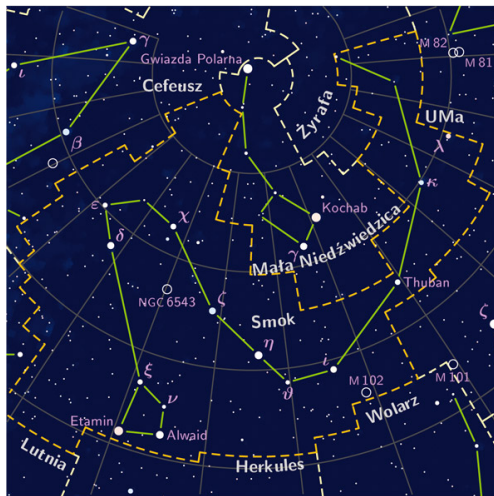
Gdy zatem masz udowodnić implikację:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \dots (\beta_n \rightarrow \alpha) \dots)),$$

to traktujesz ją jak **Wielki Ogon**: aby znaleźć założenia dowodowe, szukasz **implikacji głównej**. Jej poprzednik (tu: β_1) będzie pierwszym założeniem. Patrzysz teraz, czy jej następnik też jest implikacją. Jeśli tak, to jej poprzednik (tu: β_2) będzie drugim założeniem. I tak dalej. W końcu dojdiesz do takiego **Małego Ogonka**, który już implikacją nie jest. I to właśnie jest formuła (tu: α), którą należy otrzymać z założeń, stosując reguły ze zbioru *jas*.

Pierwszym etapem pracy jest zatem ćwiartowanie Wielkiego Ogonu, a etapem drugim jest dotarcie do Małego Ogonka.

Wielki Ogon



Prawo komutacji

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

(prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, β , α można otrzymać γ , używając reguł ze zbioru *jas*.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ założenie
2. β założenie
3. α założenie
4. $\beta \rightarrow \gamma$ RO: 1,3
5. γ RO: 4,2.

Zauważ, że ten dowód **planujesz**: masz otrzymać γ , patrzysz więc, w jakim założeniu γ występuje i co trzeba zrobić, aby do γ „dotrzeć”, używając reguł ze zbioru *jas* oraz pozostałych założeń i kroków dowodowych.

Prawo eksportacji

$$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$, α , β można otrzymać γ .

1. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ założenie
2. α założenie
3. β założenie
4. $\alpha \wedge \beta$ DK: 2,3
5. γ RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie proste: najpierw określasz **cel**, a potem szukasz **drogi** do niego. Przy tym, ową drogę wyznaczasz **od celu wstecz**, do założeń.

Prawo importacji

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \wedge \beta$ można otrzymać γ .

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\alpha \wedge \beta$ | założenie |
| 3. | α | OK: 2 |
| 4. | β | OK: 2 |
| 5. | $\beta \rightarrow \gamma$ | RO: 1,3 |
| 6. | γ | RO: 5,4. |

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Zastosowanie wcześniej udowodnionych tez

$$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

prawo eksportacji i importacji

1. $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ prawo importacji
3. $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ DR: 1,2.

To prosty przykład wykorzystania tez już udowodnionych w dowodach dalszych tez.

Zastosowanie reguły DA

$$((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ oraz α można otrzymać γ .

1. $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ założenie
2. α założenie
3. $\alpha \vee \beta$ DA: 2
4. γ RO: 1,2.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły DA dołączania alternatywy.

Zastosowanie reguły OA

$$(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$, α oraz $\neg\beta$ można otrzymać γ .

1. $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$ założenie
2. α założenie
3. $\neg\beta$ założenie
4. $\beta \vee \gamma$ RO: 1,2
5. γ OA: 4,3.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły OA opuszczania alternatywy.

Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \gamma$ oraz α można otrzymać γ .

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\beta \rightarrow \gamma$ założenie
3. α założenie
4. β RO: 1,3
5. γ RO: 2,3.

Prawo Fregego

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \rightarrow \beta$ oraz α można otrzymać γ .

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 3. | α | założenie |
| 4. | β | RO: 2,3 |
| 5. | $\beta \rightarrow \gamma$ | RO: 1,3 |
| 6. | γ | RO: 5,4. |

Reguły wtórne

Reguła R jest **regułą wyprowadzalną (wtórną)** systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli R jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż tezą systemu założeniowego jest implikacja o postaci $\Psi \rightarrow \Phi$, to reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest regułą wtórną.

Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$ i $\beta \rightarrow \gamma$ można otrzymać $\alpha \rightarrow \gamma$.

- | | | |
|----|---|--------------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\beta \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo sylogizmu hipotetycznego |
| 4. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | RO: 3,1 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | RO: 4,2. |

Reguła Fregego

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ oraz $\alpha \rightarrow \beta$ można otrzymać $\alpha \rightarrow \gamma$.

- | | | |
|----|--|---------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo Fregego |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | RO: 3,1 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | RO: 4,2. |

Reguła wewnętrznego poprzedzania

Aby pokazać, że reguła:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \rightarrow \gamma$:

- | | | |
|----|---|-----------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 2. | β | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | prawo komutacji |
| 4. | $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | RO: 3,1 |
| 5. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | RO: 4,2. |

Reguła Dunsza Scotusa

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$

1. α założenie
2. $\neg\alpha$ założenie
3. $\alpha \vee \beta$ DA: 1
4. β OA: 3,2.

Regułę $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ nazywamy regułą **Dunsza Scotusa** (RDS).

Prawo Duns Scotusa

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

1. α założenie
2. $\neg\alpha$ założenie
3. β RDS: 1,2.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest wyprowadzalna, to wiemy także, że implikacja $\Psi \rightarrow \Phi$ jest tezą systemu założeniowego.

Trafność

Konsekwencja założeniowa jest **trafna**, tzn.:

- Jeśli α jest tezą systemu założeniowego, to α jest tautologią KRZ.
- Jeśli $X \vdash_{jas} \alpha$, to $X \models_{krz} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X .

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Pełność

Konsekwencja założeniowa jest **pełna**, tzn.:

- Jeśli α jest tautologią KRZ, to α jest tezą systemu założeniowego.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha$ (czyli α wynika logicznie z X), to $X \vdash_{jas} \alpha$.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Trafność i Pełność: zastosowania

Fakt, że konsekwencja założeniowa jest trafna i pełna może być wykorzystany np. w ustalaniu:

- czy dana formuła jest tautologią KRZ
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru przesłanek
- czy dane wnioskowanie jest dedukcyjne
- czy dane zdanie jest prawdą logiczną.

Zwróć uwagę, że rozstrzygnięcie tych problemów dokonywane jest w języku przedmiotowym, a nie w metajęzyku.

Dowody nie wprost

Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

Twierdzenie powyższe pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym **dowodów nie wprost**: aby pokazać, że α ma dowód z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ wystarczy pokazać, że z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \neg\alpha\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.

Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły α z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ dopisujemy do założeń $\neg\alpha$, czyli **założenie dowodu nie wprost** (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł **wzajem sprzecznych**. Gdy to się powiedzie, α jest konsekwencją $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ jest następujący:

1. $\neg\neg\alpha$ założenie
2. $\neg\alpha$ z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **opuszczania negacji** ON:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$$

1. α założenie
2. $\neg\neg\alpha$ z.d.n.
3. $\neg\alpha$ ON: 2.

Z tez $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę:
 $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **dołączania negacji** DN:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$$

prawo transpozycji prostej

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\neg\beta$ założenie
3. $\neg\neg\alpha$ z.d.n.
4. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ prawo podwójnej negacji
5. α RO: 3,4
6. β RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

Dowody nie wprost: przykłady

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{jas} \neg\alpha$$

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\neg\beta$ założenie
3. $\neg\neg\alpha$ z.d.n.
4. α ON: 3
5. β RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

Aby pokazać, że reguła **poprzedzania** $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ jest regułą wtórną, dowodzimy najpierw, że tezą systemu założeniowego jest prawo poprzedzania $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. W tym celu wystarczy pokazać, że z założeń α , β oraz $\neg\alpha$ otrzymujemy sprzeczność (dowód niżej, po lewej):

1.	α	założenie	1.	α	założenie
2.	β	założenie	2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	prawo poprzedzania
3.	$\neg\alpha$	z.d.n.	3.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Dowód, że $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ jest regułą wtórną polega na pokazaniu, że z założenia α możemy otrzymać $\beta \rightarrow \alpha$: dowód wyżej, po prawej.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Czy jest prawdą logiczną:

Pogonowski oślepnie, jeśli wydłubiemy mu oczy i utniemy uszy wtedy i tylko wtedy, gdy nie utniemy mu uszu, o ile nie oślepnie, choć wydłubiemy mu oczy.

Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przypisujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Wydłubiemy Pogonowskiemu oczy.
- q — Utniemy Pogonowskiemu uszy.
- r — Pogonowski oślepnie.

Budujemy schemat zdaniowy dla rozważanego zdania:

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q).$$

Aby metodą założeniową dowieść równoważności $\alpha \equiv \beta$, wystarczy dowieść implikacji prostej $\alpha \rightarrow \beta$ i odwrotnej $\beta \rightarrow \alpha$.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$.

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ założenie
2. $p \wedge \neg r$ założenie
3. $\neg \neg q$ z.d.n.
4. $\neg \neg q \rightarrow q$ prawo podwójnej negacji (udowodniliśmy wcześniej)
5. q RO: 4,3
6. p OK: 2
7. $\neg r$ OK: 2
8. $p \wedge q$ DK: 6,5
9. r RO: 1,8
10. Sprzeczność: 7,9.

Otrzymaliśmy sprzeczność w dowodzie nie wprost, a zatem rozważana implikacja jest tezą.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

1. $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$ założenie
2. $p \wedge q$ założenie
3. $\neg r$ z.d.n.
4. p OK: 2
5. $p \wedge \neg r$ DK: 4,3
6. $\neg q$ RO: 1,5
7. q OK: 2
8. Sprzeczność: 6,7.

Udowodniliśmy implikację prostą oraz odwrotną, a zatem $((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$ jest tezą (na mocy DR). Jest więc tautologią. Rozważane zdanie jest prawdą logiczną.

Na co czeka Pogonowski?



Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. **dodatkowych założeń dowodu**. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie **dodatkowe założenie** α .
- Jeśli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β , to do dowodu wolno włączyć formułę $\alpha \rightarrow \beta$.
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać **poza tym wyprowadzeniem**. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie α ma numer $n.1.$, a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od $n.1.$ do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Prawomocność tego postępowania wynika z definicji dowodów założeniowych. Każdy dowód z dodatkowymi założeniami można zastąpić dowodem bez nich.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$$((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \delta))$$

- | | | |
|------|--|-------------------------|
| 1. | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$ | założenie |
| 1.1. | α | założenie dodatkowe |
| 1.2. | $\alpha \vee \beta$ | DA: 1.1. |
| 1.3. | $\gamma \wedge \delta$ | RO: 1,1.2. |
| 1.4. | γ | OK: 1.3. |
| 2. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | 1.1. \Rightarrow 1.4. |
| 2.1. | β | założenie dodatkowe |
| 2.2. | $\alpha \vee \beta$ | DA: 2.1. |
| 2.3. | $\gamma \wedge \delta$ | RO: 1,2.2. |
| 2.4. | δ | OK: 2.3. |
| 3. | $\beta \rightarrow \delta$ | 2.1. \Rightarrow 2.4. |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$ | DK: 2,3. |

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

Udowodnimy najpierw tezę pomocniczą (*):

$$(*) \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha)$$

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\neg(\beta \vee \delta)$ założenie
3. $\neg\neg\alpha$ z.d.n.
4. α ON: 3
5. β RO: 1,4
6. $\beta \vee \delta$ DA: 5.

W wierszach 2 i 6 mamy parę formuł wzajem sprzecznych, a więc dowód nie wprost tezy (*) został zakończony.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \gamma)))$$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
6.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha)$	teza (*)
7.	$\neg(\beta \vee \delta) \rightarrow \neg\alpha$	RO: 6,1
8.	$\neg\alpha$	RO: 7,3
9.	γ	OA: 5,8
10.	δ	RO: 2,9
11.	$\beta \vee \delta$	DA: 10.

Dowód powyższy można zastąpić dowodem z dodatkowymi założeniami, bez wykorzystania tezy (*):

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

- | | | |
|------|--|-------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\gamma \rightarrow \delta$ | założenie |
| 3. | $\neg(\beta \vee \delta)$ | założenie |
| 4. | $\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$ | z.d.n. |
| 5. | $\alpha \vee \gamma$ | ON: 4 |
| 1.1. | α | założenie dodatkowe |
| 1.2. | β | RO: 1,1.1. |
| 1.3. | $\beta \vee \delta$ | DA: 1.2. |
| 6. | $\alpha \rightarrow (\beta \vee \delta)$ | 1.1. \Rightarrow 1.4. |
| 7. | $\neg\alpha$ | MT: 6,3 |
| 8. | γ | OA: 5,7 |
| 9. | δ | RO: 2,8 |
| 10. | $\beta \vee \delta$ | DA: 9. |

W kroku 7 korzystamy z wtórnej reguły *modus tollendo tollens* MT: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$.

Prawo negowania alternatywy

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta.$$

- | | | |
|------|--|-------------------------|
| 1. | $\neg(\alpha \vee \beta)$ | założenie |
| 1.1. | α | założenie dodatkowe |
| 1.2. | $\alpha \vee \beta$ | DA: 1.1. |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ | 1.1. \Rightarrow 1.2. |
| 3. | $\neg\alpha$ | MT: 2,1 |
| 2.1. | β | założenie dodatkowe |
| 2.2. | $\alpha \vee \beta$ | DA: 2.1. |
| 4. | $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ | 2.1. \Rightarrow 2.2. |
| 5. | $\neg\beta$ | MT: 4,1 |
| 5. | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | DK: 3,5. |

Prawo negowania alternatywy

$$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta).$$

- | | | |
|----|-------------------------------|-----------|
| 1. | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | założenie |
| 2. | $\neg\neg(\alpha \vee \beta)$ | z.d.n. |
| 3. | $\alpha \vee \beta$ | ON: 2 |
| 4. | $\neg\alpha$ | OK: 1 |
| 5. | $\neg\beta$ | OK: 1 |
| 6. | β | OA: 3,4. |

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania alternatywy $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA: $\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$.

Prawo negowania koniunkcji

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

- | | | |
|----|---------------------------------------|-----------|
| 1. | $\neg(\alpha \wedge \beta)$ | założenie |
| 2. | $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ | z.d.n. |
| 3. | $\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$ | NA: 2 |
| 4. | $\neg\neg\alpha$ | OK: 3 |
| 5. | $\neg\neg\beta$ | OK: 3 |
| 6. | α | ON: 4 |
| 7. | β | ON: 5 |
| 8. | $\alpha \wedge \beta$ | DK: 6,7. |

Prawo negowania koniunkcji

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta).$$

- | | | |
|----|---------------------------------|-----------|
| 1. | $\neg\alpha \vee \neg\beta$ | założenie |
| 2. | $\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$ | z.d.n. |
| 3. | $\alpha \wedge \beta$ | ON: 2 |
| 4. | α | OK: 3 |
| 5. | β | OK: 3 |
| 6. | $\neg\neg\alpha$ | DN: 4 |
| 7. | $\neg\beta$ | OA: 1,6. |

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania koniunkcji $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK: $\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$.

Prawa De Morgana

Prawa negowania koniunkcji i negowania alternatywy nazywane są też prawami **De Morgana**.

Zauważmy, że reguły NA oraz NK są „symetryczne”, w tym sensie, że wyprowadzalne są także reguły:

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \quad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

Każda teza równoważnościowa założeniowego systemu KRZ pozwala na wprowadzenie reguły wtórnej „symetrycznej” we wspomnianym wyżej sensie.

Tezy, które nie są implikacjami. Uwaga: ważne!!!

 $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

prawo niesprzeczności

1. $\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ z.d.n.
2. $\alpha \wedge \neg\alpha$ ON: 1
3. α OK: 2
4. $\neg\alpha$ OK: 2.

Uwaga !!! W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, które nie są implikacjami (a więc gdy nie można poczynić żadnych założeń), **zaczynamy dowód od założenia nie wprost.**

Prawo wyłączzonego środka

 $\alpha \vee \neg\alpha$

prawo wyłączzonego środka

1. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ z.d.n.
2. $\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$ NA: 1
3. $\neg\alpha$ OK: 2
4. $\neg\neg\alpha$ OK: 2.

Z.d.n. pozwoliło uzyskać sprzeczność, a zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost, formuła $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą.

Prawo negowania implikacji

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta).$$

- | | | |
|------|----------------------------------|-------------------------|
| 1. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | założenie |
| 2. | $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ | z.d.n. |
| 3. | $\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$ | NK: 2 |
| 1.1. | α | założenie dodatkowe |
| 1.2. | $\neg\neg\alpha$ | DN: 1.1. |
| 1.3. | $\neg\neg\beta$ | OA: 3,1.2. |
| 1.4. | β | ON: 1.3. |
| 4. | $\alpha \rightarrow \beta$ | 1.1. \Rightarrow 1.4. |

Prawo negowania implikacji

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta).$$

1. $\alpha \wedge \neg\beta$
2. $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ z.d.n.
3. $\alpha \rightarrow \beta$ ON: 2
4. α OK: 1
5. $\neg\beta$ OK: 1
6. β RO: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie jedno z praw negowania implikacji: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \beta).$$

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\neg(\neg\alpha \vee \beta)$ | z.d.n. |
| 3. | $\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta$ | NA: 2 |
| 4. | $\neg\neg\alpha$ | OK: 3 |
| 5. | $\neg\beta$ | OK: 3 |
| 6. | α | ON: 4 |
| 7. | β | RO: 1,6. |

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$$(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta).$$

1. $\neg\alpha \vee \beta$ założenie
2. α założenie
3. $\neg\beta$ z.d.n.
4. $\neg\alpha$ OA: 1,3.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie równoważność:
 $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$, pozwalającą zastępować implikację przez alternatywę i negację (oraz na odwrót).

Przykład reguły wyprowadzalnej

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta, \vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta.$$

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 2. | $\neg\gamma \wedge \neg\delta$ | założenie |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \vee \vartheta$ | założenie |
| 4. | $\vartheta \rightarrow (\gamma \vee \beta)$ | założenie |
| 5. | $\neg\gamma$ | OK: 2 |
| 6. | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | MT: 1,5 |
| 7. | ϑ | OA: 3,6 |
| 8. | $\gamma \vee \beta$ | RO: 4,7 |
| 9. | β | OA: 8,5. |

Przykład innej reguły wyprowadzalnej

$$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \vartheta.$$

1. $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ założenie
2. $\neg\delta$ założenie
3. $(\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta$ założenie
4. $\delta \vee \alpha$ założenie
5. α OA: 4,2
6. $\alpha \vee \beta$ DA: 5
7. γ RO: 1,6
8. $\gamma \vee \delta$ DA: 7
9. ϑ RO: 3,8.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, twierdzi się, że Bóg stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.

- α — Bóg jest doskonały.
- β — Bóg jest miłosierny.
- γ — Bóg stworzył Świat.
- δ — W Świecie jest Zło.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

$$\{\alpha \rightarrow \beta, (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta, \gamma, \delta\} \vdash_{jas} \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

- | | | |
|-----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta$ | założenie |
| 3. | δ | założenie |
| 4. | γ | założenie |
| 5. | $\neg\neg\delta$ | DN: 3 |
| 6. | $\neg(\alpha \wedge \gamma)$ | MT: 2,5 |
| 7. | $\neg\alpha \vee \neg\gamma$ | NK: 6 |
| 8. | $\neg\neg\gamma$ | DN: 4 |
| 9. | $\neg\alpha$ | OA: 7,8 |
| 10. | $\neg\alpha \vee \neg\beta$ | DA: 9. |

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

The Eastern Wall



Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) **sprzeczny**, jeśli istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{jas} \alpha$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\alpha$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**.

Twierdzenie o zwartości.

Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś **skończonego** podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 1

Pokażemy, że $\{\alpha \vee \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta, \neg(\delta \wedge \neg\gamma), \delta \wedge \neg\alpha\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

- | | | |
|----|----------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \vee \neg\beta$ | założenie |
| 2. | $\gamma \rightarrow \beta$ | założenie |
| 3. | $\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$ | założenie |
| 4. | $\delta \wedge \neg\alpha$ | założenie |
| 5. | δ | OK: 4 |
| 6. | $\neg\alpha$ | OK: 4 |
| 7. | $\neg\beta$ | OA: 1,6 |
| 8. | $\neg\gamma$ | MT: 2,7 |
| 9. | $\delta \wedge \neg\gamma$ | DK: 5,8. |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Dygresja: ekonomia telewizyjna.

Zwróćmy uwagę, że wykazaliśmy przed chwilą dedukcyjną sprzeczność telewizyjnej „analizy ekonomicznej” (z poprzedniego wykładu):

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

- α — Jest kapitalizm.
- β — Jest bezrobocie.
- γ — Jest recesja.
- δ — Jest bieda.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 2

Pokażemy, że $\{\neg\gamma \wedge \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta)), \alpha, \vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$ jest sprzeczny.

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\neg\gamma \wedge \beta$ | założenie |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\delta))$ | założenie |
| 3. | α | założenie |
| 4. | $\vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$ | założenie |
| 5. | $\neg\gamma$ | OK: 1 |
| 6. | β | OK: 1 |
| 7. | $\beta \rightarrow \gamma$ | OK: 4 |
| 8. | γ | RO: 10,6. |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 5 i 8. Zauważ, że nie korzystaliśmy ani z przesłanki 2, ani z przesłanki 3. Tak więc, zbiór przesłanek $\{\neg\gamma \wedge \beta, \vartheta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$ też jest sprzeczny.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 3

$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \gamma, \alpha \wedge \delta\}$ jest sprzeczny:

- | | | |
|----|--------------------------------|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | założenie |
| 2. | $\beta \rightarrow \neg\gamma$ | założenie |
| 3. | $\delta \rightarrow \gamma$ | założenie |
| 4. | $\alpha \wedge \delta$ | założenie |
| 5. | α | OK: 4 |
| 6. | δ | OK: 4 |
| 7. | β | RO: 1,5 |
| 8. | $\neg\gamma$ | RO: 2,7 |
| 9. | γ | RO: 3,6. |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 8 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 4

$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest sprzeczny:

1. $\alpha \rightarrow \beta$ założenie
2. $\gamma \rightarrow \delta$ założenie
3. $\neg\beta \vee \gamma$ założenie
4. $\alpha \wedge \neg\delta$ założenie
5. α OK: 4
6. $\neg\delta$ OK: 4
7. β RO: 1,5
8. $\neg\gamma$ MT: 2,6
9. $\neg\beta$ OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 5

Oto dwa dowody, że $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta \rightarrow \neg\gamma, \delta \rightarrow \beta, \delta, \alpha \vee \gamma\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie	1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie	2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \beta$	założenie	3.	$\delta \rightarrow \beta$	założenie
4.	δ	założenie	4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie	5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4	6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\gamma$	RO: 2,6	7.	$\neg\neg\beta$	DN: 6
8.	α	OA: 5,7	8.	$\neg\alpha$	MT: 1,7
9.	$\neg\beta$	RO: 1,8.	9.	γ	OA: 5,8
			10.	$\neg\gamma$	RO: 2,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9 (lewy dowód) lub w 9 i 10 (prawy dowód).

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 6

$\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \beta \vee \neg\gamma, \neg\alpha\}$ jest sprzeczny:

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta)$ | założenie |
| 2. | $\beta \vee \neg\gamma$ | założenie |
| 3. | $\neg\alpha$ | założenie |
| 4. | $\gamma \wedge \neg\beta$ | OA: 1,3 |
| 5. | $\neg\beta$ | OK: 4 |
| 6. | γ | OK: 4 |
| 7. | $\neg\gamma$ | OA: 2,5. |

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*. Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic*. McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K., Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

Koniec

Zadanie domowe. Rozwiąż zadania 34–57 ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Przypomnę: do zdania egzaminu niezbędna jest umiejętność rozwiązywania zadań. Wybór należy do ciebie.

Na kolejnych wykładach omówimy operację konsekwencji wyznaczoną przez **tablice analityczne** dla KRZ.