Logika Radosna 2

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

KRZ: dowody założeniowe

Plan na dziś

Pierwsza z omawianych operacji konsekwencji w KRZ jest oparta na **metodzie założeniowej**. Omówimy jeden z systemów założeniowych KRZ, wywodzący się z prac Stanisława Jaśkowskiego.

- Operacja konsekwencji wyznaczona przez reguły.
- Reguły pierwotne systemu.
- Konsekwencja założeniowa.
- Przykłady dowodów tez.
- Reguły wtórne.
- Dowody nie wprost.
- Dodatkowe założenia dowodu.
- Sprzeczne zbiory formuł.

Plan na dziś

W najbardziej mrocznym okresie twojego wciąż jeszcze krótkiego życia, tj. w szkole średniej, kazano ci prawdopodobnie dowodzić twierdzeń. Na czym polegała ta procedura?

Zwykle, miałaś jakieś **założenia**, z których należało **udowodnić** (inaczej: wyprowadzić) pewną **tezę**.

Przeprowadzałaś zatem rozumowanie o postaci:

Jeśli ZAŁOŻENIA, to TEZA.

System założeniowy KRZ stanowi logiczną podstawę dla tego typu uzasadnień.

Plan na dziś

Rozważany w poprzednim wykładzie Pies Chryzypa też przeprowadzał dowód, odwołując się do pewnych założeń oraz reguły wnioskowania:

- założenie 1: $\alpha \vee \beta$ (Zwierzyna na pierwszej lub drugiej ścieżce.)
- założenie 2: $\neg\alpha$ (Zwierzyny nie ma na pierwszej ścieżce.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta}$
- wniosek (teza): β (Zwierzyna na drugiej ścieżce.)

Za chwilę przekonasz się, że dorównujesz Psu Chryzypa w umiejętności logicznego rozumowania.

Plan na dziś

Również Ziuta z poprzedniego wykładu przeprowadzała dowód:

- założenie 1: $\alpha \to \beta$ (Jeśli była wypłata, to Zygfryd jest pijany.)
- założenie 2: $\neg\beta$ (Zygfryd nie jest pijany.)
- reguła wnioskowania: $\frac{\alpha\to\beta, \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$
- wniosek (teza): $\neg\alpha$ (Nie było wypłaty.)

Nie uda ci się mi wmówić, iż nie dorównujesz Ziucie w umiejętności logicznego rozumowania.

Operacja konsekwencji

Operacja konsekwencji to pewna funkcja C, która każdemu zbiorowi formuł X przyporządkowuje pewien zbiór formuł $C(X)$. Myśl o niej tak oto:

- Mam dany jakiś zbiór przesłanek X. Jaki jest ogół wniosków, które mogę wyprowadzić z X, za pomocą pewnych, z góry ustalonych reguł wnioskowania?

Tak, zgadłaś! To właśnie będzie ów zbiór $C(X)$.

Wnioski otrzymujemy z przesłanek stosując ustalone reguły wnioskowania. Operacja konsekwencji będzie zatem wyznaczona przez owe reguły.

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja. **Nie trwóż się!** Okaże się ona o wiele prostsza od ezoterycznych konstrukcji pojęciowych, z którymi obcujesz na innych wykładach.

Operacja konsekwencji

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka KRZ. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w KRZ. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Niech 2^S oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów S. Przez **operację konsekwencji w KRZ wyznaczoną przez $\mathcal{R}$** rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka KRZ:

- $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
- $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\, (P, \alpha) \in R\}$
- $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: **α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$**.

Operacja konsekwencji

Powyższy zapis symboliczny można też wyrazić „ludzką mową":

- $C^0_{\mathcal{R}}(X)$ to po prostu wyjściowy zbiór X
- $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ to zbiór X plus wszystkie bezpośrednie wnioski otrzymane z przesłanek ze zbioru X wedle reguł wnioskowania z zestawu $\mathcal{R}$
- elementami zbioru $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X)$ są elementy $C^k_{\mathcal{R}}(X)$ oraz wszystkie wnioski wszystkich reguł z $\mathcal{R}$, których przesłanki brane są ze zbioru $C^k_{\mathcal{R}}(X)$
- $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest sumą wszystkich otrzymanych w ten sposób wniosków.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ oznacza zatem, że formułę α otrzymujemy z założeń X stosując (być może wielokrotnie) reguły wnioskowania z podanego ich zestawu $\mathcal{R}$.

Operacja konsekwencji

Jak zatem „działa" operacja konsekwencji na danym zbiorze przesłanek X? Czyli jak otrzymujemy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$?

Bierzesz dowolną regułę wnioskowania R z zestawu $\mathcal{R}$ i tyle przesłanek ze zbioru X, ilu przesłanek wymaga reguła R. Wtedy zarówno elementy samego X, jak i wszystkie wnioski wszystkich takich reguł R dla dowolnych przesłanek z X tworzą zbiór $C^1_{\mathcal{R}}(X)$, czyli zbiór „bezpośrednich wniosków" z przesłanek znajdujących się w X. Procedurę tę powtarzasz wychodząc teraz od $C^1_{\mathcal{R}}(X)$ zamiast od X. Dostajesz wszystkie „wnioski co najwyżej drugiego stopnia" z przesłanek znajdujących się w X, czyli zbiór $C^2_{\mathcal{R}}(X)$ (aby do nich „dotrzeć" należy co najwyżej dwukrotnie stosować reguły wnioskowania). I tak dalej.

Suma (po wszystkich n) tych wszystkich „wniosków co najwyżej n-tego stopnia" daje ogół wszystkich wniosków, które można otrzymać z przesłanek X posługując się regułami z zestawu $\mathcal{R}$.

Reguły pierwotne

Pracujemy w języku KRZ omówionym w semestrze zimowym.
Konsekwencja założeniowa oparta jest jedynie na regułach.

Można na różne sposoby dobierać **reguły pierwotne**.

- (RO) **Reguła odrywania**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji. W zapisie symbolicznym:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \ \ \alpha}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DK) **Reguła dołączania koniunkcji**. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha, \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}.$$

- (OK) **Reguła opuszczania koniunkcji**. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}.$$

Reguły pierwotne

- (DA) **Reguła dołączania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

- (DP) **Reguła opuszczania alternatywy**. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu można dołączyć pozostały człon tej alternatywy.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg\beta}{\alpha}.$$

Reguły pierwotne

- (DR) **Reguła dołączania równoważności**. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

- (OR) **Reguła opuszczania równoważności**. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Reguły pierwotne

- **Uwaga 1.** Zauważ, że w podanych wyżej regułach nie ma ani słowa o **prawdzie**. Wykonaj jednak **ćwiczenie**: sprawdź, że wszystkie powyższe reguły są niezawodne.
- **Uwaga 2.** Zauważ, że reguły są dwóch rodzajów: dotyczą wprowadzania lub opuszczania stałych logicznych. W szczególności, (RO) jest regułą opuszczania implikacji. Dualna do niej reguła wprowadzania implikacji zostanie omówiona później. Podobnie dla reguł dotyczących negacji.
- **Uwaga 3.** Twoim zalecanym zbiorem zadań z logiki są *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz, gdzie używa się dokładnie tego samego zestawu reguł pierwotnych.

Reguły pierwotne

Oznaczmy przez *jas* zbiór powyższych reguł. Każda reguła ze zbioru *jas* jest nieskończonym zbiorem sekwentów, o budowie składniowej podanej w symbolicznym zapisie tej reguły.

Potem pokażemy, że możemy używać bardzo wielu dalszych reguł, które wyprowadzone są z powyższych reguł pierwotnych i noszą nazwę reguł **wtórnych** (albo: **wyprowadzalnych**).

Uwaga. Teraz będzie ścisła definicja operacji konsekwencji założeniowej. Po trzykroć powtarzam: **Nie lękaj się! Nie lękaj się! Nie lękaj się!** Praca z dowodami założeniowymi będzie bardzo łatwa, polubisz ją. Definicja tylko z pozoru wygląda strasznie. Wytłumaczę ją w sposób przystępny za chwilę.

Konsekwencja założeniowa

Określamy zbiór T_{jas} **tez** systemu dedukcji naturalnej (systemu założeniowego) KRZ opartego na regułach *jas*:

- $\alpha \in T^0_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geqslant 0$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.
- $\alpha \in T^{k+1}_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $n \geqslant 0$, $i < n$ oraz formuły $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że:
  - α jest identyczna z $(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_i \rightarrow \gamma) \ldots))$
  - $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \ldots, \beta_n \in T^k_{jas}$
  - $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$.

$\alpha \in T_{jas}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje m taka, że $\alpha \in T^m_{jas}$.

Konsekwencja założeniowa

Jeśli $\alpha \in T^m_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą stopnia** m systemu założeniowego KRZ. Jeśli α jest tezą stopnia m i $m \leqslant n$, to α jest też oczywiście tezą stopnia n. Jeśli $\alpha \in T_{jas}$, to mówimy, że α jest **tezą** systemu założeniowego KRZ.

Notacja. Aby pokazać, że $\alpha \in T_{jas}$, gdzie α jest identyczna z $(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \gamma) \ldots))$ budujemy dowód założeniowy, w którym $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ są założeniami i który zostaje uznany za zakończony, gdy $\gamma \in C_{jas}(\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\})$, tj. gdy otrzymamy formułę γ stosując (do założeń i pośrednich kroków dowodowych) reguły ze zbioru *jas*. Numerujemy poszczególne wiersze dowodu i opatrujemy je komentarzem wskazującym na ich uzasadnienie.

Uwaga. W dowodach tez stopnia n można wykorzystywać wszystkie tezy stopnia m, dla $m \leqslant n$.

Konsekwencja założeniowa

Zdefiniujemy relację $\vdash_{jas}$ **konsekwencji założeniowej**.

Niech $X = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a α formułą języka KRZ. Zachodzi $X \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow \ldots (\beta_n \rightarrow \alpha) \ldots)).$$

Tak więc, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy α w oparciu o założenia $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ oraz reguły ze zbioru *jas*.

O co chodzi?

Dowody założeniowe są naprawdę proste. Masz jakieś założenia: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Jeśli z tych założeń, używając podanych wcześniej reguł, można otrzymać formułę α, to uznajemy, że udowodniona została implikacja:

$$(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \alpha) \ldots)).$$

Także na odwrót, aby dowieść, że implikacja:

$$(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \alpha) \ldots))$$

jest tezą systemu założeniowego, musisz formułę α wyprowadzić z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ przy użyciu podanych wcześniej reguł.

Odcinanie Ogonów

Gdy zatem masz udowodnić implikację:

$$(\beta_1 \to (\beta_2 \to \ldots (\beta_n \to \alpha) \ldots)),$$

to traktujesz ją jak **Wielki Ogon**: aby znaleźć założenia dowodowe, szukasz implikacji głównej. Jej poprzednik (tu: β_1) będzie pierwszym założeniem. Patrzysz teraz, czy jej następnik też jest implikacją. Jeśli tak, to jej poprzednik (tu: β_2) będzie drugim założeniem. I tak dalej. W końcu dojdziesz do takiego **Małego Ogonka**, który już implikacją nie jest. I to właśnie jest formuła (tu: α), którą należy otrzymać z założeń, stosując reguły ze zbioru *jas*.

Pierwszym etapem pracy jest zatem ćwiartowanie Wielkiego Ogona, a etapem drugim jest dotarcie do Małego Ogonka.

Prawo komutacji

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ (prawo komutacji)

Należy dowieść, że z założeń $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha$ można otrzymać γ, używając reguł ze zbioru *jas*.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	α	założenie
4.	$\beta \to \gamma$	RO: 1,3
5.	γ	RO: 4,2.

Zauważ, że ten dowód **planujesz**: masz otrzymać γ, patrzysz więc, w jakim założeniu γ występuje i co trzeba zrobić, aby do γ „dotrzeć", używając reguł ze zbioru *jas* oraz pozostałych założeń i kroków dowodowych.

Prawo eksportacji

$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$, α, β można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	β	założenie
4.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 2,3
5.	γ	RO: 1,4.

Zauważ, że **planowanie** dowodu jest w tej metodzie proste: najpierw określasz **cel**, a potem szukasz **drogi** do niego. Przy tym, ową drogę wyznaczasz **od celu wstecz**, do założeń.

Prawo importacji

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ prawo importacji

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \wedge \beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \wedge \beta$	założenie
3.	α	OK: 2
4.	β	OK: 2
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Zwróć uwagę na różne możliwości kolejności wykonania poszczególnych kroków dowodu.

Zastosowanie wcześniej udowodnionych tez

$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ prawo eksportacji i importacji

1.	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	prawo eksportacji
2.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$	prawo importacji
3.	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	DR: 1,2.

To prosty przykład wykorzystania tez już udowodnionych w dowodach dalszych tez.

Zastosowanie reguły DA

$((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

Trzeba pokazać, że z założeń $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2
4.	γ	RO: 1,2.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły DA dołączania alternatywy.

Zastosowanie reguły OA

$(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to (\alpha \to (\neg\beta \to \gamma))$

Trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \to (\beta \vee \gamma)$, α oraz $\neg\beta$ można otrzymać γ.

1.	$\alpha \to (\beta \vee \gamma)$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	założenie
4.	$\beta \vee \gamma$	RO: 1,2
5.	γ	OA: 4,3.

Ten przykład pokazuje zastosowanie reguły OA opuszczania alternatywy.

Prawo sylogizmu hipotetycznego

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo sylogizmu hipotetycznego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \gamma$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \gamma$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 1,3
5.	γ	RO: 2,3.

Prawo Fregego

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ prawo Fregego

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, $\alpha \rightarrow \beta$ oraz α można otrzymać γ.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	α	założenie
4.	β	RO: 2,3
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	RO: 1,3
6.	γ	RO: 5,4.

Reguły wtórne

Reguła R jest **regułą wyprowadzalną** (**wtórną**) systemu założeniowego KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ mamy:

$$\alpha \in C_{jas}(X).$$

Jeśli R jest regułą wtórną systemu założeniowego KRZ, to można jej używać w dowodach dalszych tez tego systemu oraz w dowodach wyprowadzalności kolejnych reguł wtórnych.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż tezą systemu założeniowego jest implikacja o postaci $\Psi \to \Phi$, to reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest regułą wtórną.

Reguła sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad\qquad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow \beta$ i $\beta \rightarrow \gamma$ można otrzymać $\alpha \rightarrow \gamma$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo sylogizmu hipotetycznego
4.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Fregego

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

Trzeba pokazać, że z założeń: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ oraz $\alpha \rightarrow \beta$ można otrzymać $\alpha \rightarrow \gamma$.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo Fregego
4.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Reguła wewnętrznego poprzedzania

Aby pokazać, że reguła:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

wewnętrznego poprzedzania (RWP) jest wyprowadzalna w systemie założeniowym KRZ, trzeba pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ i β otrzymać można $\alpha \rightarrow \gamma$:

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	założenie
2.	β	założenie
3.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo komutacji
4.	$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	RO: 3,1
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	RO: 4,2.

Reguła Dunsa Scotusa

Pokażemy, że wyprowadzalna jest reguła:

$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1
4.	β	OA: 3,2.

Regułę $\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$ nazywamy regułą **Dunsa Scotusa** (RDS).

Prawo Dunsa Scotusa

$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$

1.	α	założenie
2.	$\neg\alpha$	założenie
3.	β	RDS: 1,2.

Zauważmy, że jeśli pokazaliśmy, iż reguła:

$$\frac{\Psi}{\Phi}$$

jest wyprowadzalna, to wiemy także, że implikacja $\Psi \rightarrow \Phi$ jest tezą systemu założeniowego.

Trafność

Konsekwencja założeniowa jest **trafna**, tzn.:

- Jeśli α jest tezą systemu założeniowego, to α jest tautologią KRZ.
- Jeśli $X \vdash_{jas} \alpha$, to $X \models_{krz} \alpha$, czyli α wynika logicznie z X.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Pełność

Konsekwencja założeniowa jest **pełna**, tzn.:

- Jeśli α jest tautologią KRZ, to α jest tezą systemu założeniowego.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha$ (czyli α wynika logicznie z X), to $X \vdash_{jas} \alpha$.

Powyższe implikacje są **metatwierdzeniami**. Ich dowody pomijamy. Jeśli jesteś Nieufna i Zainteresowana, to znajdziesz je np. w wykładach **Logiki Matematycznej** zamieszczonych na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM.

Trafność i Pełność: zastosowania

Fakt, że konsekwencja założeniowa jest trafna i pełna może być wykorzystany np. w ustalaniu:

- czy dana formuła jest tautologią KRZ
- czy dana formuła wynika logicznie z podanego zbioru przesłanek
- czy dane wnioskowanie jest dedukcyjne
- czy dane zdanie jest prawdą logiczną.

Zwróć uwagę, że rozstrzyganie tych problemów dokonywane jest w języku przedmiotowym, a nie w metajęzyku.

Dowody nie wprost

Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost.

Jeśli $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{jas} \{\gamma, \neg\gamma\}$, to $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \vdash_{jas} \alpha$.

Twierdzenie powyższe pozwala zatem na stosowanie w systemie założeniowym **dowodów nie wprost**: aby pokazać, że α ma dowód z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ wystarczy pokazać, że z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \neg\alpha\}$ można wyprowadzić w systemie założeniowym KRZ parę formuł wzajem sprzecznych.
Nadto, z twierdzenia tego możemy korzystać również przy dowodzeniu wyprowadzalności reguł wtórnych systemu założeniowego KRZ.

Dowody nie wprost: przykłady

W dowodzie nie wprost formuły α z założeń $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ dopisujemy do założeń $\neg\alpha$, czyli **założenie dowodu nie wprost** (w skrócie: z.d.n.) i staramy się wyprowadzić z tych założeń parę formuł **wzajem sprzecznych**. Gdy to się powiedzie, α jest konsekwencją $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w systemie założeniowym KRZ.

Dla przykładu, dowód nie wprost formuły $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ jest następujący:

1.	$\neg\neg\alpha$	założenie
2.	$\neg\alpha$	z.d.n.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **opuszczania negacji** ON:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

1.	α	założenie
2.	$\neg\neg\neg\alpha$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha$	ON: 2.

Z tez $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ otrzymujemy, na mocy reguły DR tezę: $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.

Na mocy powyższego, możemy w dalszych dowodach stosować wtórną regułę **dołączania negacji** DN:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ prawo transpozycji prostej

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	prawo podwójnej negacji
5.	α	RO: 3,4
6.	β	RO: 1,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 2 i 6.

Dowody nie wprost: przykłady

$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash_{jas} \neg\alpha$

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg\beta$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4.

Pokazaliśmy więc, że regułą wtórną jest reguła *modus tollendo tollens* MT:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}.$$

Dowody nie wprost: przykłady

Aby pokazać, że reguła poprzedzania $\frac{\alpha}{\beta\rightarrow\alpha}$ jest regułą wtórną, dowodzimy najpierw, że tezą systemu założeniowego jest prawo poprzedzania $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. W tym celu wystarczy pokazać, że z założeń α, β oraz $\neg\alpha$ otrzymujemy sprzeczność (dowód niżej, po lewej):

1.	α	założenie	1.	α	założenie
2.	β	założenie	2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	prawo poprzedzania
3.	$\neg\alpha$	z.d.n.	3.	$\beta \rightarrow \alpha$	RO: 2,1.

Dowód, że $\frac{\alpha}{\beta\rightarrow\alpha}$ jest regułą wtórną polega na pokazaniu, że z założenia α możemy otrzymać $\beta \rightarrow \alpha$: dowód wyżej, po prawej.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Czy jest prawdą logiczną:
Pogonowski oślepnie, jeśli wydłubiemy mu oczy i utniemy uszy wtedy i tylko wtedy, gdy nie utniemy mu uszu, o ile nie oślepnie, choć wydłubiemy mu oczy.

Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i przypisujemy im zmienne zdaniowe:

- p — Wydłubiemy Pogonowskiemu oczy.
- q — Utniemy Pogonowskiemu uszy.
- r — Pogonowski oślepnie.

Budujemy schemat zdaniowy dla rozważanego zdania:
$((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$.
Aby metodą założeniową dowieść równoważności $\alpha \equiv \beta$, wystarczy dowieść implikacji prostej $\alpha \rightarrow \beta$ i odwrotnej $\beta \rightarrow \alpha$.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$.

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	założenie
2.	$p \wedge \neg r$	założenie
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg\neg q \rightarrow q$	prawo podwójnej negacji (udowodniliśmy wcześniej)
5.	q	RO: 4,3
6.	p	OK: 2
7.	$\neg r$	OK: 2
8.	$p \wedge q$	DK: 6,5
9.	r	RO: 1,8
10.	Sprzeczność:	7,9.

Otrzymaliśmy sprzeczność w dowodzie nie wprost, a zatem rozważana implikacja jest tezą.

Prawda logiczna o Pogonowskim

Dowód implikacji $((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

1.	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$	założenie
2.	$p \wedge q$	założenie
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	p	OK: 2
5.	$p \wedge \neg r$	DK: 4,3
6.	$\neg q$	RO: 1,5
7.	q	OK: 2
8.	Sprzeczność:	6,7.

Udowodniliśmy implikację prostą oraz odwrotną, a zatem $((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$ jest tezą (na mocy DR). Jest więc tautologią. Rozważane zdanie jest prawdą logiczną.

Dodatkowe założenia dowodu

Kolejna wielce użyteczna technika dowodowa w systemie założeniowym KRZ polega na korzystaniu z tzw. dodatkowych założeń dowodu. Jest to procedura następująca:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie α.
- Jeśli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β, to do dowodu wolno włączyć formułę $\alpha \rightarrow \beta$.
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem. Zwykle stosuje się stosowną numerację: jeśli dodatkowe założenie α ma numer $n.1.$, a wyprowadzona z niego formuła ma numer $n.m.$, to z kroków o numerach od $n.1.$ do $n.m.$ **nie** korzystamy w dowodzie głównym.

Prawomocność tego postępowania wynika z definicji dowodów założeniowych. Każdy dowód z dodatkowymi założeniami można zastąpić dowodem bez nich.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 1

$((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \delta))$

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
1.3.	$\gamma \wedge \delta$	RO: 1,1.2.
1.4.	γ	OK: 1.3.
2.	$\alpha \rightarrow \gamma$	1.1.⇒1.4.
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
2.3.	$\gamma \wedge \delta$	RO: 1,2.2.
2.4.	δ	OK: 2.3.
3.	$\beta \rightarrow \delta$	2.1.⇒2.4.
4.	$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$	DK: 2,3.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

Udowodnimy najpierw tezę pomocniczą $(*)$:

$(*)$ $(\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
3.	$\neg\neg\alpha$	z.d.n.
4.	α	ON: 3
5.	β	RO: 1,4
6.	$\beta \vee \delta$	DA: 5.

W wierszach 2 i 6 mamy parę formuł wzajem sprzecznych, a więc dowód nie wprost tezy $(*)$ został zakończony.

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \delta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg(\alpha \vee \gamma)))$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha)$	teza $(*)$
7.	$\neg(\beta \vee \delta) \to \neg\alpha$	RO: 6,1
8.	$\neg\alpha$	RO: 7,3
9.	γ	OA: 5,8
10.	δ	RO: 2,9
11.	$\beta \vee \delta$	DA: 10.

Dowód powyższy można zastąpić dowodem z dodatkowymi założeniami, bez wykorzystania tezy $(*)$:

Dodatkowe założenia dowodu: przykład 2

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg(\beta \vee \delta)$	założenie
4.	$\neg\neg(\alpha \vee \gamma)$	z.d.n.
5.	$\alpha \vee \gamma$	ON: 4
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	β	RO: 1,1.1.
1.3.	$\beta \vee \delta$	DA: 1.2.
6.	$\alpha \to (\beta \vee \delta)$	1.1.⇒1.4.
7.	$\neg\alpha$	MT: 6,3
8.	γ	OA: 5,7
9.	δ	RO: 2,8
10.	$\beta \vee \delta$	DA: 9.

W kroku 7 korzystamy z wtórnej reguły *modus tollendo tollens* MT: $\frac{\alpha\to\beta,\neg\beta}{\neg\alpha}$.

Prawo negowania alternatywy

$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	założenie
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 1.1.
2.	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	1.1.$\Rightarrow$1.2.
3.	$\neg\alpha$	MT: 2,1
2.1.	β	założenie dodatkowe
2.2.	$\alpha \vee \beta$	DA: 2.1.
4.	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	2.1.$\Rightarrow$2.2.
5.	$\neg\beta$	MT: 4,1
5.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK: 3,5.

Prawo negowania alternatywy

$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$.

1.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \vee \beta$	ON: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	OA: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania alternatywy $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania alternatywy NA: $\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$.

Prawo negowania koniunkcji

$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	ON: 5
8.	$\alpha \wedge \beta$	DK: 6,7.

Prawo negowania koniunkcji

$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\neg\neg(\alpha \wedge \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \wedge \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 3
5.	β	OK: 3
6.	$\neg\neg\alpha$	DN: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6.

Dwie udowodnione przed chwilą tezy implikacyjne dają łącznie prawo negowania koniunkcji $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. Regułą wtórną jest zatem reguła negowania koniunkcji NK: $\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta}$.

Prawa De Morgana

Prawa negowania koniunkcji i negowania alternatywy nazywane są też prawami **De Morgana**.

Zauważmy, że reguły NA oraz NK są „symetryczne”, w tym sensie, że wyprowadzalne są także reguły:

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)} \qquad \frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}.$$

Każda teza równoważnościowa założeniowego systemu KRZ pozwala na wprowadzenie reguły wtórnej „symetrycznej” we wspomnianym wyżej sensie.

Tezy, które nie są implikacjami. Uwaga: ważne!!!

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ prawo niesprzeczności

1.	$\neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\alpha \wedge \neg\alpha$	ON: 1
3.	α	OK: 2
4.	$\neg\alpha$	OK: 2.

Uwaga !!! W przypadkach poszukiwania dowodów formuł, które nie są implikacjami (a więc gdy nie można poczynić żadnych założeń), **zaczynamy dowód od założenia nie wprost**.

Prawo wyłączonego środka

$\alpha \vee \neg\alpha$ prawo wyłączonego środka

1.	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	z.d.n.
2.	$\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha$	NA: 1
3.	$\neg\alpha$	OK: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 2.

Z.d.n. pozwoliło uzyskać sprzeczność, a zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji Nie Wprost, formuła $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą.

Prawo negowania implikacji

$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$.

1.	$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	założenie
2.	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$	NK: 2
1.1.	α	założenie dodatkowe
1.2.	$\neg\neg\alpha$	DN: 1.1.
1.3.	$\neg\neg\beta$	OA: 3,1.2.
1.4.	β	ON: 1.3.
4.	$\alpha \rightarrow \beta$	1.1.$\Rightarrow$1.4.

Prawo negowania implikacji

$(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$.

1.	$\alpha \wedge \neg\beta$	
2.	$\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	z.d.n.
3.	$\alpha \rightarrow \beta$	ON: 2
4.	α	OK: 1
5.	$\neg\beta$	OK: 1
6.	β	RO: 3,4.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie jedno z praw negowania implikacji: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \beta)$	z.d.n.
3.	$\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta$	NA: 2
4.	$\neg\neg\alpha$	OK: 3
5.	$\neg\beta$	OK: 3
6.	α	ON: 4
7.	β	RO: 1,6.

Wyrażanie implikacji przez alternatywę i negację

$(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	$\neg\beta$	z.d.n.
4.	$\neg\alpha$	OA: 1,3.

Dwie udowodnione przed chwilą implikacje dają łącznie równoważność: $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$, pozwalającą zastępować implikację przez alternatywę i negację (oraz na odwrót).

Przykład reguły wyprowadzalnej

$\{(\alpha \to \beta) \to \gamma, \neg\gamma \wedge \neg\delta, (\alpha \to \beta) \vee \vartheta, \vartheta \to (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta$.

1.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\neg\gamma \wedge \neg\delta$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \vee \vartheta$	założenie
4.	$\vartheta \to (\gamma \vee \beta)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 2
6.	$\neg(\alpha \to \beta)$	MT: 1,5
7.	ϑ	OA: 3,6
8.	$\gamma \vee \beta$	RO: 4,7
9.	β	OA: 8,5.

Przykład innej reguły wyprowadzalnej

$\{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma, \neg\delta, (\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta, \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \vartheta$.

1.	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$	założenie
2.	$\neg\delta$	założenie
3.	$(\gamma \vee \delta) \rightarrow \vartheta$	założenie
4.	$\delta \vee \alpha$	założenie
5.	α	OA: 4,2
6.	$\alpha \vee \beta$	DA: 5
7.	γ	RO: 1,6
8.	$\gamma \vee \delta$	DA: 7
9.	ϑ	RO: 3,8.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

Pokażemy, że następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, twierdzi się, że Bóg stworzył Świat. Zatem Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.

- α — Bóg jest doskonały.
- β — Bóg jest miłosierny.
- γ — Bóg stworzył Świat.
- δ — W Świecie jest Zło.

Dygresja: Teodycea i kule w płocie

$\{\alpha \rightarrow \beta, (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta, \gamma, \delta\} \vdash_{jas} \neg\alpha \vee \neg\beta$.

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \neg\delta$	założenie
3.	δ	założenie
4.	γ	założenie
5.	$\neg\neg\delta$	DN: 3
6.	$\neg(\alpha \wedge \gamma)$	MT: 2,5
7.	$\neg\alpha \vee \neg\gamma$	NK: 6
8.	$\neg\neg\gamma$	DN: 4
9.	$\neg\alpha$	OA: 7,8
10.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	DA: 9.

Zauważmy, że w dowodzie nie korzystano z pierwszego założenia.

Sprzeczne zbiory formuł

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) **sprzeczny**, jeśli istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{jas} \alpha$ oraz $X \vdash_{jas} \neg\alpha$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**.

Twierdzenie o zwartości.
Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie syntaktycznej sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś skończonego podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajem sprzecznych.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 1

Pokażemy, że $\{\alpha \vee \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta, \neg(\delta \wedge \neg\gamma), \delta \wedge \neg\alpha\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

1.	$\alpha \vee \neg\beta$	założenie
2.	$\gamma \rightarrow \beta$	założenie
3.	$\neg(\delta \wedge \neg\gamma)$	założenie
4.	$\delta \wedge \neg\alpha$	założenie
5.	δ	OK: 4
6.	$\neg\alpha$	OK: 4
7.	$\neg\beta$	OA: 1,6
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,7
9.	$\delta \wedge \neg\gamma$	DK: 5,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 3 i 9.

Dygresja: ekonomia telewizyjna.

Zwróćmy uwagę, że wykazaliśmy przed chwilą dedukcyjną sprzeczność telewizyjnej „analizy ekonomicznej" (z poprzedniego wykładu):

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

- α — Jest kapitalizm.
- β — Jest bezrobocie.
- γ — Jest recesja.
- δ — Jest bieda.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 2

Pokażemy, że $\{\neg\gamma \wedge \beta,\ \alpha \to (\beta \to (\gamma \vee \neg\delta)),\ \alpha,\ \vartheta \wedge (\beta \to \gamma)\}$ jest sprzeczny.

1.	$\neg\gamma \wedge \beta$	założenie
2.	$\alpha \to (\beta \to (\gamma \vee \neg\delta))$	założenie
3.	α	założenie
4.	$\vartheta \wedge (\beta \to \gamma)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 1
6.	β	OK: 1
7.	$\beta \to (\gamma \vee \neg\delta)$	RO: 2,3
8.	$\gamma \vee \neg\delta$	RO: 7,6
9.	$\neg\delta$	OA: 8,5
10.	$\beta \to \gamma$	OK: 4
11.	γ	RO: 10,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 5 i 11.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 3

$\{\alpha \rightarrow \beta,\ \ \beta \rightarrow \neg\gamma,\ \ \delta \rightarrow \gamma,\ \ \alpha \wedge \delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	δ	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	RO: 2,7
9.	γ	RO: 3,6.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 8 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 4

$\{\alpha \to \beta,\ \ \gamma \to \delta,\ \ \neg\beta \vee \gamma,\ \ \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg\beta \vee \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \neg\delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	$\neg\delta$	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,6
9.	$\neg\beta$	OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 5

$\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \ \beta \rightarrow \neg\gamma, \ \delta \rightarrow \beta, \ \delta, \ \alpha \vee \gamma\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \rightarrow \beta$	założenie
4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\gamma$	RO: 2,6
8.	α	OA: 5,7
9.	$\neg\beta$	RO: 1,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9.

Sprzeczne zbiory formuł: przykład 6

$\{\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta), \;\; \beta \vee \neg\gamma, \;\; \neg\alpha\}$ jest sprzeczny:

1.	$\alpha \vee (\gamma \wedge \neg\beta)$	założenie
2.	$\beta \vee \neg\gamma$	założenie
3.	$\neg\alpha$	założenie
4.	$\gamma \wedge \neg\beta$	OA: 1,3
5.	$\neg\beta$	OK: 4
6.	γ	OK: 4
7.	$\neg\gamma$	OA: 2,5.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 7.

Wykorzystywana literatura

- Borkowski, L. 1991. *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe KUL, Lublin.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary formal logic.* McGraw-Hill Book Company.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Białystok.
- Słupecki, J., Borkowski, L. 1962. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Słupecki, J., Hałkowska, K, Piróg-Rzepecka, K. 1999. *Logika matematyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Surma, S. 1967. Twierdzenia o dedukcji niewprost. *Studia Logica* **XX**, 151–166.

Koniec

Zadanie domowe. Rozwiąż zadania 34–57 ze zbioru *Ćwiczenia z logiki* autorstwa Pani Profesor Barbary Stanosz.

Przypomnę: do zdania egzaminu niezbędna jest umiejętność rozwiązywania zadań. Wybór należy do ciebie.

Na kolejnych wykładach omówimy operację konsekwencji wyznaczoną przez **tablice analityczne** dla KRZ.