MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 7: STRUKTURY TOPOLOGICZNE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Topologia jest stosunkowo młodą dyscypliną matematyczną. Wyrosła z uogólnień rozważań *geometrycznych*, uwzględniających potrzeby *analizy matematycznej*. Bada ona – ogólnie rozumiane – *przestrzenie*, w których stosownie określone są takie pojęcia, jak np.: *otoczenie*, *bliskość*, *odległość*, *spójność*, *zwartość*, *punkt skupienia*, *zbieżność* i wiele innych. Bada również własności takich przestrzeni, które są *zachowywane* przez przekształcenia na nich określone. Ustala zatem, m.in., jakie przekształcenia zachowują *bliskość*, *kształt*, *położenie*, itd.

Ze względu na usługowy charakter tego kursu oraz jego ograniczone ramy czasowe nie możemy opowiedzieć dokładniej o badaniach topologicznych, choć jesteśmy przekonani, że pojęcia topologii (ogólnej, algebraicznej, różniczkowej) z pewnością znajdą owocne zastosowania w naukach kognitywnych. W niniejszym wykładzie skupimy uwagę na pewnych szczególnych przestrzeniach topologicznych, a mianowicie przestrzeniach *metrycznych* (tj. takich, w których określić można pojęcie *odległości*) oraz *zupełnych* (tj. takich przestrzeniach, które – mówiąc na razie intuicyjnie – wraz z każdym ciągiem elementów przestrzeni, które są „coraz bliższe sobie" zawierają też „punkt graniczny" tego ciągu). Za wzorcowy przykład takich przestrzeni służyć będą produkty kartezjańskie $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 1$), a więc m.in. prosta liczbowa $\mathbb{R}$, płaszczyzna kartezjańska $\mathbb{R}^2$ i przestrzeń trójwymiarowa $\mathbb{R}^3$.

Na poprzednim wykładzie podano dwie definicje (Dedekinda i Cantora) zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, rozumianego jako zbiór uporządkowany w sposób ciągły, z określonymi w nim operacjami arytmetycznymi, a więc wyposażonego również w pewną strukturę algebraiczną. Obecnie rozważymy kolejną strukturę w tym zbiorze, a mianowicie strukturę topologiczną, związaną z wymienionymi na początku pojęciami. Dla ich dobrego rozumienia niezbędne jest wcześniejsze oswojenie się z *ciągami* liczb rzeczywistych.

1 Liczby rzeczywiste

Na poprzednim wykładzie podano dwa sposoby *konstrukcji* liczb rzeczywistych (metodą Dedekinda i metodą Cantora). Możliwe jest również inne podejście, a mianowicie scharakteryzowanie tych liczb metodą *aksjomatyczną*.

W podejściu tym charakteryzujemy uporządkowaną strukturę algebraiczną

$$(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$$

poprzez następujące aksjomaty:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ jest *ciałem*, czyli spełnione są następujące warunki:
   - (a) $\mathbb{R}$ ma co najmniej dwa elementy
   - (b) działanie $+$ (dodawanie) jest łączne i przemienne
   - (c) działanie $\cdot$ (mnożenie) jest łączne i przemienne
   - (d) mnożenie jest rozdzielne względem dodawania
   - (e) 0 jest elementem neutralnym dodawania
   - (f) 1 jest elementem neutralnym mnożenia
2. $\leqslant$ jest porządkiem liniowym zbioru $\mathbb{R}$, który jest *zgodny* z działaniami arytmetycznymi w $\mathbb{R}$, czyli takim, że:
   - (a) jeśli $x \geqslant y$, to $x + z \geqslant y + z$
   - (b) jeśli $x > 0$ oraz $y > 0$, to $x \cdot y > 0$.
3. Porządek $\leqslant$ jest *ciągły*, czyli każdy ograniczony z góry (równoważnie: ograniczony z dołu) podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny (odpowiednio: kres dolny).

Powyższe aksjomaty nie gwarantują jeszcze, że istnieje taka struktura. Można jednak wykazać, że obie *konstrukcje* liczb rzeczywistych – Dedekinda oraz Cantora – spełniają powyższe aksjomaty.

W pliku zawierającym szczegółowe omówienie planu wykładów (umieszczonym na stronie wykładów) wspomnieliśmy o *liczbach rzeczywistych Hoborskiego*, które odpowiadają temu wyobrażeniu o liczbach rzeczywistych, które popularyzowane jest przez szkołę. Również tak określone liczby rzeczywiste spełniają powyższe aksjomaty.

Ostatni z wymienionych wyżej aksjomatów nazywany jest *aksjomatem ciągłości* (Dedekinda).

UWAGI.

1. Można udowodnić, że istnieje – z dokładnością do izomorfizmu – jedna struktura, spełniająca powyższe aksjomaty. Tak więc, różne konstrukcje liczb rzeczywistych ukazują ich różne *aspekty*.

2. Dla liczb rzeczywistych zachodzi *aksjomat Archimedesa*: jeśli $x > 0$ oraz $x < y$, to istnieje liczba naturalna n taka, że suma $x + x + \ldots + x$ (x występuje n razy w tej sumie) spełnia warunek: $y < n \cdot x$. Własność ta wyklucza istnienie w zbiorze $\mathbb{R}$ wielkości *nieskończenie małych*.

3. Inną (od powyższej) aksjomatykę dla liczb rzeczywistych podał w 1936 roku Alfred Tarski. Udowodnił on również pewne ważne fakty *metamatematyczne* dotyczące tej struktury.

4. Być może ci ze słuchaczy, którzy są zwolennikami Jednego i Jedynie Słusznego Poglądu na Wszystko poczuli się zniecierpliwieni faktem, że oto na kilka sposobów konstruujemy liczby rzeczywiste, a w dodatku jeszcze podajemy ich charakterystykę aksjomatyczną. To niepotrzebna niecierpliwość. Wykazanie, że różne sposoby charakterystyki jakiegoś obiektu prowadzą do tego samego wyniku jest niezwykle ważne pod względem poznawczym.

5. Należy też pamiętać, że każda liczba rzeczywista jest w istocie obiektem *infinitarnym*: do jej określenia potrzeba *nieskończenie* wielu liczb wymiernych, w każdej z rozważanych konstrukcji. We wszystkich praktycznych zastosowaniach (obliczeniach) wykorzystujemy jedynie skończone *przybliżenia* liczb rzeczywistych.

6. Ile jest liczb rzeczywistych? Podaliśmy wcześniej argumentację za tym, że nie jest ich *tyle samo* co liczb naturalnych (ani też *tyle samo* co liczb wymiernych). Jak nieskończoność zbioru liczb rzeczywistych ma się do nieskończoności zbioru liczb naturalnych? To niezwykle ważne pytanie otrzymało zaskakującą odpowiedź: *nie wiadomo*. Dokładniej, problem usytuowania liczby elementów zbioru wszystkich liczb rzeczywistych na skali nieskończonych liczb kardynalnych (zob. wykład 5) nie daje się rozstrzygnąć na gruncie obecnie przyjmowanych aksjomatów teorii mnogości (którą dość powszechnie uważa się za podstawę całej matematyki). Hipoteza, że moc kontinuum (liczba elementów zbioru wszystkich liczb rzeczywistych) jest *następną* mocą nieskończoną, po mocy zbioru wszystkich liczb naturalnych („najmniejszej” nieskończoności) jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości i nazywa się *hipotezą kontinuum*.

7. Do poszczególnych liczb rzeczywistych mamy, by tak rzec, różny *dostęp poznawczy*. „Najłatwiejsze” są liczby wymierne (a więc w szczególności liczby

naturalne i całkowite). Nieco bardziej skomplikowane są liczby *algebraiczne* (pierwiastki wielomianów): obejmują one oczywiście liczby wymierne, ale także – stosunkowo „proste” liczby niewymierne. O wiele bardziej „tajemnicze” są liczby *przestępne*, czyli te liczby rzeczywiste, które nie są algebraiczne. Bada się też inne aspekty owej dostępności – np. *liczby obliczalne*.

8. Słuchacze zechcą trzymać w pamięci fakt, że *liczby* (w szczególności: liczby rzeczywiste) to nie to samo, co ich *reprezentacje* (w ustalonej bazie). Notacje: dziesiętna, dwójkowa, szesnastkowa, itp. to właśnie jedynie *sposoby reprezentacji* liczb. To, że dana liczba ma w jednej reprezentacji postać dość regularną, a w innej postać wyglądającą na chaotyczną, całkowicie *losową* jest niezwykle ciekawym problemem badawczym. Warto o tym przypominać tym wszystkim, którzy łatwowiernie polegają na wróżeniu z liczb, znajdowaniu „tajemniczych” regularności np. w świętych księgach, których teksty poddaje się stosownemu kodowaniu (zawsze przecież dokonywanemu w wybranej bazie). Ewentualnie poważnie zainteresowani tą problematyką słuchacze zechcą samodzielnie poszukać informacji o liczbach *normalnych*. Natomiast ci ze słuchaczy, którzy znajdują upodobanie w *magii liczb* mogą samodzielnie poszukać informacji o *numerologii*, *kabale*, *gematrii*, *notarikonie*, *temurze*, itp.

2 Ciągi rzeczywiste

Ciągi rzeczywiste (ciągi o wyrazach, będących liczbami rzeczywistymi) to funkcje ze zbioru $\mathbb{N}_+$ w zbiór $\mathbb{R}$. Wyrazy ciągu rzeczywistego mogą być tworzone wedle jakiegoś ogólnego prawidła, ale mogą też nie wykazywać żadnej dostrzeganej przez umysł prawidłowości. Czasem wygodnie jest numerować wyrazy ciągu poczynając od 0, a nie od 1.

Słuchacze znają ze szkoły dwa rodzaje ciągów, w których występują pewne regularności: arytmetyczny i geometryczny, na wykładzie czwartym poznaliśmy też ciąg harmoniczny oraz ciąg Fibonacciego.

1. *Ciąg arytmetyczny*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a$ oraz $a_n = a_{n-1} + d$ dla $n \geqslant 2$. Ogólny wzór na n-ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = a + (n-1) \cdot d$

2. *Ciąg geometryczny*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a \cdot x$ oraz $a_n = a_{n-1} \cdot x$. Ogólny wzór na n-ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = a \cdot x^n$

3. *Ciąg harmoniczny*. $a_n = \frac{1}{n}$.

4. *Ciąg Fibonacciego*. Określony warunkami rekurencyjnymi: $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

5. *Ciąg liczb pierwszych*. Wszystkie liczby pierwsze możemy ustawić w ciąg. Nie podajemy ogólnego wzoru na n-ty wyraz tego ciągu, choć znane są niektóre występujące w nim regularności.

Przypomnijmy podane w wykładzie czwartym pojęcia: ciągu ograniczonego oraz ciągu monotonicznego.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje liczba naturalna M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $|a_n| \leqslant M$.

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ nazywamy:

1. *rosnącym*, gdy $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$

2. *malejącym*, gdy $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

3. *niemalejącym*, gdy $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$

4. *nierosnącym*, gdy $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$

Ciągi, spełniające któryś z powyższych warunków nazywamy *monotonicznymi*. Te, które spełniają któryś z pierwszych dwóch powyższych warunków nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

Z wykładu czwartego wiemy też, że ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący oraz ograniczony, czego dowodzimy wykorzystując wzór dwumianowy

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

oraz nierówność $n! \geqslant 2^{n-1}$ (którą z kolei uzasadniamy rozumowaniem przez indukcję matematyczną).

Zasadę indukcji matematycznej możemy wykorzystać także w dowodzie bardzo użytecznej *nierównościci Bernoulliego*, która ustala, że dla $d \geqslant -1$ mamy: $(1 + d)^n \geqslant 1 + n \cdot d$. Widać bowiem, że nierówność ta zachodzi dla pierwszej liczby z rozważanego zakresu, czyli dla 1. Przypuśćmy, że zachodzi dla liczby k (założenie indukcyjne):

$$(1 + d)^k \geqslant 1 + k \cdot d.$$

Trzeba pokazać, że zachodzi też dla liczby $k + 1$. Mamy:

$$(1 + d)^{k+1} = (1 + d)^k \cdot (1 + d) \geqslant (1 + k \cdot d) \cdot (1 + d) \geqslant 1 + (k + 1) \cdot d.$$

Wykazaliśmy zatem, że rozważana nierówność zachodzi także dla $k+1$. Na mocy zasady indukcji matematycznej, rozważana nierówność zachodzi dla każdej dodatniej liczby naturalnej.

Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego udowodnienia (również posługując się zasadą indukcji matematycznej) zachodzącej dla dowolnej $d>0$ nierówności:

$$(1+d)^n \geqslant 1 + n\cdot d + \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot d^2.$$

Jeśli (a_n) jest ciągiem rzeczywistym, a (k_i) dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{k_i}) nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n). Dla przykładu, jeśli (a_n) jest ciągiem rzeczywistym, to (a_{2n+1}) jest jego podciągiem.

2.1 Ciągi zbieżne

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny* do liczby $g\in\mathbb{R}$, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon>0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej $n>N$ zachodzi nierówność:

$$|a_n-g|<\varepsilon.$$

Jeśli (a_n) jest zbieżny do g, to liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n). Mówimy też w takim przypadku, że ciąg (a_n) *dąży* do g i stosujemy zapis: $a_n\to g$ przy $n\to\infty$ lub zapis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*. Tak więc, rozbieżne są te ciągi, które nie są zbieżne do żadnej granicy.
UWAGI.

1. Po raz pierwszy napotkaliśmy pojęcie, które określane jest nie tylko poprzez własności algebraiczne (arytmetyczne) i porządkowe, ale także przez formalny odpowiednik *bliskości*, a więc pojęcie topologiczne.

2. Zbieżność ciągu (a_n) do liczby g, jego granicy, oznacza zatem, że w dowolnie małym *otoczeniu* liczby g znajdują się wszystkie, oprócz ewentualnie skończonej ich liczby, wyrazy tego ciągu. Otoczenie liczby jest tu rozumiane jako przedział otwarty, do którego ta liczba należy.

3. Mawia się też, że ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby g, gdy *prawie wszystkie* jego wyrazy znajdują się w dowolnie małym *otoczeniu* liczby g. Należy jednak pamiętać, że termin *prawie wszystkie* ma w tym kontekście ściśle ustalone znaczenie: *prawie wszystkie* oznacza *wszystkie, oprócz skończonej ich liczby*.

4. Należy pamiętać, że wyrażenie *ciąg dąży do granicy* jest tylko *sposobem mówienia*. Znaczenie tego wyrażenia podaje przytoczona wyżej definicja. Występują w niej jedynie terminy arytmetyczne i porządkowe. Wszelkie skojarzenia z *ruchem* mają w tym kontekście jedynie walor intuicyjny.

5. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to istnieje N taka, że $|a_n - g| < 1$ dla wszystkich $n > N$. Z tego oraz z faktu, że $|a_n| - |g| \leqslant |a_n - g|$ wynika, że dla wszystkich $n > N$ mamy: $|a_n| < |g| + 1$. Jeśli weźmiemy teraz $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |g| + 1\}$, to otrzymujemy: $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich $n > N$.

PRZYKŁADY.

1. Każdy ciąg stały $a_n = a$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba a.

2. Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 1. Istotnie, jakkolwiek małą weźmiemy liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$, to wszystkie wyrazy tego ciągu o wskaźnikach n takich, że $n > \frac{1}{\varepsilon}$ znajdą się w przedziale otwartym $(1 - varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

3. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 0.

4. Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny. Zauważmy, że jest to ciąg ograniczony. Mamy bowiem: $a_{2k} = 1$ oraz $a_{2k-1} = -1$, dla wszystkich $k \geqslant 1$.

5. Ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny. Zauważmy, że nie jest to ciąg ograniczony.

6. Ciąg $a_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 1. Dowód tego faktu znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronie 31.

7. Ciąg $a_n = \sqrt[n]{n}$ jest zbieżny. Jego granicą jest liczba 1. Dowód tego faktu znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004, na stronie 31.

Udowodnimy, dla przykładu, że ciąg geometryczny $a_n = x^n$ jest zbieżny do 0 dla $|x| < 1$, jest zbieżny do 1 dla $x = 1$ oraz jest rozbieżny dla wszystkich pozostałych x, czyli dla $|x| > 1$ lub $x = -1$. Rozpatrzymy trzy przypadki:

1. Załóżmy, że $|x| < 1$. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba $d > 0$ taka, że $|x| = \frac{1}{1+d}$. Na mocy udowodnionej przed chwilą nierówności Bernoulliego mamy:
$$|a_n| = |x|^n = \frac{1}{(1+d)^n} < \frac{1}{1 + n \cdot d}.$$

Ponieważ ułamek $\frac{1}{1+n\cdot d}$ zmniejsza się wraz ze wzrostem n, więc dla dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że $\frac{1}{1+n\cdot d} < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n > N$. Tak więc, w tym przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Jeśli $x = 1$, to ciąg a_n jest stały, jeśli jednak $x = -1$, to ciąg a_n jest rozbieżny, gdyż wszystkie jego wyrazy o wskaźnikach parzystych równe są 1, a wszystkie wyrazy o wskaźnikach nieparzystych równe są -1.

3. Wreszcie, gdy $|x| > 1$, to $x = 1+d$ dla pewnej $d > 0$. Znowu wykorzystamy nierówność Bernoulliego:

$$|a_n| = (1+d)^n \geqslant 1 + n \cdot d,$$

a to oznacza, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony, a więc nie jest zbieżny.

Ze względu na usługowy charakter tego kursu nie możemy poświęcić zbyt wiele miejsca na bardziej szczegółowe omówienie własności ciągów liczb rzeczywistych. Wyliczymy zatem tylko niektóre z nich, zachęcając zainteresowanych słuchaczy do zadumy nad nimi oraz próby zmierzenia się z wykazaniem, że podane fakty istotnie mają miejsce.
WYBRANE WŁASNOŚCI.

1. W ciągu zbieżnym można pominąć, dołączyć lub zmienić *skończoną* liczbę jego wyrazów, a pozostanie on zbieżny do tej samej granicy.

2. Jeśli dokonamy dowolnej permutacji indeksów wyrazów ciągu zbieżnego, to taki ciąg o przestawionych wyrazach pozostaje zbieżny do tej samej granicy.

3. Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

4. Jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne oraz dla pewnej m zachodzi $a_n \leqslant b_n$ dla wszystkich $n > m$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

5. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH. Jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne do tej samej granicy g oraz istnieje m taka, że $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ dla wszystkich $n > m$, to ciąg (c_n) także jest zbieżny do g.

6. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Przy tym, jeśli (a_n) jest niemalejący, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n a_n$, natomiast gdy (a_n) jest nierosnący, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_n a_n$. Jeśli bowiem (a_n) jest niemalejący i ograniczony, to istnieje kres górny zbioru jego wyrazów: $s = \sup\limits_n a_n$. Chcemy pokazać, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy s.

(a) Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu górnego wynika (na mocy nietrudnego rachunku: zob. np. Musielak, Musielak 2004, strona 15), że istnieje liczba naturalna N taka, iż $s < a_N + \varepsilon$.

(b) Natomiast dla każdej $n > N$ mamy $a_n \geqslant a_N$, a zatem $s < a_n + \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$.

(c) Mamy więc: $a_n > s - \varepsilon$ dla $n > N$.

(d) Ponieważ $a_n \leqslant s$ dla wszystkich n, więc oczywiście także $a_n < s + \varepsilon$.

(e) Łącznie daje to: $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$ dla $n > N$, czyli $|a_n - s| < \varepsilon$. To oznacza, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy s.

Podobnie pokazujemy, że nierosnący ciąg ograniczony jest zbieżny.

7. Ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest, jak już wiemy, rosnący i ograniczony. Jest zatem zbieżny. Jego granicę oznaczamy symbolem e:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n.$$

Jest to jedna z najważniejszych stałych matematycznych. Liczba $e \approx 2,71828\ldots$ jest liczbą *przestępną*.

TWIERDZENIE ASCOLIEGO. *Niech $[a_n, b_n]$ będzie zstępującym ciągiem przedziałów domkniętych liczb rzeczywistych (czyli $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}_+$). Niech ponadto $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Wtedy istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $x \in \mathbb{R}$ taka, że $x \in [a_n, b_n]$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$.*

Inaczej mówiąc, część wspólna (iloczyn) zstępującego ciągu przedziałów domkniętych w zbiorze liczb rzeczywistych o długościach tych przedziałów dążących do 0, zawiera dokładnie jeden element. Istotną rolę w dowodzie tego twierdzenia odgrywa własność ciągłości porządku zbioru liczb rzeczywistych.

DOWÓD. Najpierw zauważmy, że ciąg (a_n) jest niemalejący oraz ograniczony z góry przez każdy z wyrazów ciągu (b_n). Podobnie, ciąg (b_n) jest nierosnący oraz ograniczony z dołu przez każdy z wyrazów ciągu (a_n). Tak więc, oba te ciągi są zbieżne, a ponadto: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n a_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_n b_n$. Mamy dalej:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, czyli $\sup\limits_n a_n \leqslant \inf\limits_n b_n$.

2. Dla każdej m zachodzi nierówność:

$$0 \leqslant \inf_n b_n - \sup_n a_n \leqslant b_m - a_m.$$

3. Z założenia, $\lim_{m\to\infty}(b_m - a_m) = 0$.
4. Na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy zatem $\sup_n a_n = \inf_n b_n$. Niech x oznacza tę właśnie wartość obu rozważanych kresów.
5. $x \in [a_n, b_n]$ dla wszystkich n, czyli x jest punktem wspólnym wszystkich rozważanych przedziałów.
6. Gdyby istniał punkt $y \neq x$ taki, że $y \in [a_n, b_n]$ dla wszystkich n, to mielibyśmy $a_n \leqslant y$ oraz $y \leqslant b_n$ dla wszystkich n.
7. Na mocy pierwszej z tych nierówności otrzymujemy: $x = \sup_n a_n \leqslant y$.
8. Na mocy drugiej z tych nierówności otrzymujemy: $y \leqslant \inf_n b_n = x$.
9. Z tego wynika oczywiście, że $y = x$, a więc x jest jedynym punktem wspólnym wszystkich przedziałów $[a_n, b_n]$.

Na ciągach zbieżnych wykonywać możemy działania arytmetyczne, przy czym granice ciągów otrzymanych w wyniku tych działań wyznaczone są przez granice ciągów, na których działania wykonujemy, np. (przy założeniu, że istnieją granice po prawej stronie równości, istnieją też granice po jej lewej stronie):

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$ dla dowolnej $c \in \mathbb{R}$.

W przypadku operacji dzielenia trzeba oczywiście przyjąć dodatkowe założenia:

1. Jeśli $b_n \neq 0$ oraz ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy różnej od zera, to zbieżny jest też ciąg $(\frac{1}{b_n})$ i zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

2. Jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne, $b_n \neq 0$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to zbieżny jest też ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ i zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Poświęcimy teraz chwilę uwagi ciągom rozbieżnym, rozważając ich różne rodzaje.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba N taka, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi $a_n > M$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (albo, krócej, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$).

Podobnie, mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba N taka, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi $a_n < -M$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

UWAGI.

1. Mamy oczywiście: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$.
2. Każdy ciąg rozbieżny do granicy niewłaściwej jest nieograniczony, ale istnieją ciągi nieograniczone bez granicy niewłaściwej, np. $a_n = (-1)^n \cdot n$.
3. Używamy tu symboli ∞ oraz $-\infty$ jako użytecznych w *mówieniu* o pewnych rodzajach rozbieżności. Symbole te nie oznaczają żadnej liczby rzeczywistej.
4. Symboli tych używa się też dla zaznaczenia, że jakiś zbiór A jest nieograniczony z góry (piszemy wtedy $\sup A = \infty$) lub z dołu (piszemy wtedy $\inf A = -\infty$).
5. Zachęcamy zainteresowanych słuchaczy do zadumy nad tym, czy na ciągach rozbieżnych do granic niewłaściwych też można wykonywać operacje arytmetyczne (zob. np. Musielak, Musielak 2004, 40–41).

Ciąg może nie być zbieżny także z tego powodu, że może istnieć kilka punktów (liczb), wokół których *skupia* się nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Liczbę s nazywamy *punktem skupienia* ciągu (a_n), gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ oraz każdej liczby naturalnej N istnieje liczba naturalna $n > N$ taka, że $|a_n - s| < \varepsilon$.

UWAGI.

1. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to oczywiście g jest (jedynym) punktem skupienia ciągu (a_n).

2. Wprost z definicji widać, że jeśli s jest punktem skupienia ciągu (a_n), to w dowolnym (dowolnie małym) *otoczeniu* punktu s znajduje się *nieskończenie wiele* wyrazów tego ciągu.

3. Punktami skupienia ciągu $a_n = (-1)^n$ są liczby: 1 oraz -1. Te same liczby są punktami skupienia np. ciągu $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n}$.

4. Liczba s jest punktem skupienia ciągu (a_n) dokładnie wtedy, gdy pewien podciąg ciągu (a_n) jest zbieżny do s.

Własności topologiczne zbioru $\mathbb{R}$ częściowo charakteryzuje następujące ważne twierdzenie:
TWIERDZENIE BOLZANO-WEIERSTRASSA. *Każdy ciąg ograniczony posiada co najmniej jeden punkt skupienia.*
DOWÓD. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Tworzymy parę zbiorów (A, B) w sposób następujący:
$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a_n$ dla nieskończenie wielu $n\}$
$B = \mathbb{R} - A.$

1. Para (A, B) jest przekrojem Dedekinda zbioru $\mathbb{R}$. Na mocy aksjomatu ciągłości: albo w klasie A istnieje element największy, albo w klasie B istnieje element najmniejszy. Niech s będzie tym elementem. Pokażemy, że s jest (największym) punktem skupienia ciągu (a_n).

2. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ mamy: $s - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ oraz $s + \frac{\varepsilon}{2} \in B$.

3. Z definicji zbiorów A i B wynika, że: $s - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$ dla nieskończenie wielu n, zaś $s + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n$ dla co najwyżej skończonej liczby indeksów n.

4. Tak więc, $a_n < s + \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich n poza skończoną ich liczbą. W konsekwencji, dla nieskończenie wielu n mamy:
$$s - \varepsilon < s - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n < s + \frac{\varepsilon}{2} < s + \varepsilon.$$

5. To z kolei oznacza, że $|a_n - s| < \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n. Tak więc, s jest punktem skupienia ciągu (a_n).

6. Ponadto, jest to największy punkt skupienia tego ciągu. Gdyby bowiem dla pewnej $\varepsilon > 0$ punktem skupienia był $s + 2 \cdot \varepsilon$, to, ponieważ $s + \varepsilon \in B$,

mielibyśmy $s + \varepsilon < a_n$ tylko dla skończonej liczby indeksów n, wbrew poczynionemu przypuszczeniu, że $s + 2 \cdot \varepsilon$ jest punktem skupienia ciągu (a_n).

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa można też udowodnić, wykorzystując Twierdzenie Ascoliego.

Największy punkt skupienia ciągu ograniczonego (a_n) nazywamy jego *limes superior* i oznaczamy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Podobnie, najmniejszy punkt skupienia ciągu ograniczonego (a_n) nazywamy jego *limes inferior* i oznaczamy $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

W konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych metodą Cantora wykorzystaliśmy pewne szczególne ciągi, nazywane tam *ciągami podstawowymi*. Używa się też następującej terminologii.

Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia *warunek Cauchy'ego*, gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $m > N$ oraz $n > N$ zachodzi nierówność: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Tak więc, ciąg spełnia warunek Cauchy'ego, gdy – począwszy od pewnego miejsca – wszystkie jego wyrazy są sobie dowolnie bliskie.

UWAGI.

1. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.
2. Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.
3. Ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny do pewnej liczby g jest zbieżny do g.

Dowody tych faktów znajdą słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004 (strona 46). Wynika z nich następujące ważne twierdzenie:

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO. *Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

SZKIC DOWODU. Na mocy uwagi 1, wystarczy udowodnić, że każdy ciąg Cauchy'ego (a_n) jest zbieżny. Na mocy uwagi 2, ciąg (a_n) jest ograniczony. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, ciąg (a_n) ma co najmniej jeden punkt skupienia g. W konsekwencji, ciąg (a_n) zawiera podciąg zbieżny do g. Na mocy uwagi 3, ciąg (a_n) jest zbieżny do g.

Wykorzystując charakterystykę zbieżności ciągów z użyciem warunku Cauchy'ego możemy poprawnie zdefiniować wiele ważnych konstrukcji dotyczących liczb rzeczywistych. Dla przykładu, potęga o wykładniku rzeczywistym dowolnej liczby rzeczywistej wykorzystuje właśnie tę charakterystykę. Jeśli mianowicie $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ to a^x definiujemy jako granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, gdzie (x_n) jest dowolnym ciągiem liczb wymiernych, zbieżnym do x, czyli takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

3 Szeregi liczbowe

Która z liczb: 1 oraz $0,99999\ldots$ (czyli nieskończony ułamek okresowy $0,(9)$) jest większa?

Niech $x = 0,99999\ldots$ Wtedy:

1. $10x = 9,9999\ldots$
2. $10x - x = 9x$
3. $9x = 9,9999\ldots - x$
4. $9x = 9,9999\ldots - 0,99999\ldots$
5. $9x = 9$
6. $x = 1$.

Tak więc, *udowodniliśmy* równość $1 = 0,999999\ldots$ Dodajmy, że – trudno właściwie powiedzieć z jakiego powodu – niektórzy pozostają nieprzekonani powyższym (lub podobnym) dowodem.

Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych (podobnie jak rozwinięcia w dowolnej bazie) mogą być – jak słuchacze pamiętają ze szkoły – skończone, okresowe lub nieskończone. Liczby wymierne mają skończone lub okresowe rozwinięcia dziesiętne, liczby niewymierne mają nieskończone rozwinięcia dziesiętne. Oznacza to, że liczbę niewymierną traktować możemy jako *nieskończoną* sumę ułamków, których mianowniki są kolejnymi potęgami liczby 10.

Jak radzimy sobie z całkiem ogólnymi nieskończonymi sumami liczb? Przede wszystkim, interesuje nas, kiedy takie nieskończone sumowanie daje wielkość skończoną.

Każdemu ciągowi rzeczywistemu (a_n) przyporządkować można ciąg $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Wyrazy tak określonego ciągu (s_n) nazywamy *sumami częściowymi* (ciągu (a_n)).

Słuchacze pamiętają ze szkoły, w jaki sposób obliczano sumy częściowe ciągu geometrycznego $a_n = x^{n-1}$ (gdzie $x \neq 1$). Ponieważ $s_n = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$, więc (mnożąc obie strony tego równania przez $1-x$) mamy: $(1-x)\cdot s_n = 1-x^n$, co daje znany ze szkoły wzór: $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$.

Jeżeli ciąg (s_n) sum częściowych ciągu (a_n) jest zbieżny do liczby s, tę liczbę nazywamy *sumą* szeregu nieskończonego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

jest *zbieżny* do liczby s oraz piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zauważmy jednak, że nie musi być na odwrót: *szereg harmoniczny* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (co udowodniliśmy na poprzednim wykładzie, rozważając *Mrówkę na linie*), chociaż ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny do 0.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy:

1. *bezwzględnie zbieżnym*, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.
2. *bezwarunkowo zbieżnym*, gdy dla dowolnej permutacji zbioru liczb naturalnych (czyli bijekcji przyporządkowującej każdej liczbie naturalnej n jakąś liczbę naturalną k_n) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ jest zbieżny.
3. *warunkowo zbieżnym*, gdy jest on zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Na szeregach liczbowych można wykonywać operacje arytmetyczne. Jest to problematyka chyba zbyt skomplikowana na potrzeby tego usługowego kursu. Zainteresowani słuchacze, którzy nie zrażają się takimi trudnościami, zechcą zajrzeć do książki Musielak, Musielak 2004, gdzie na stronach 51–98 w przejrzysty sposób omówiono tę problematykę.

Oprócz szeregów liczbowych rozważa się także *iloczyny nieskończone*, określa pojęcie ich zbieżności, podaje stosowne kryteria zbieżności, itd.
UWAGI.

1. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.
2. Szereg jest bezwarunkowo zbieżny dokładnie wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.
3. Warunkowa zbieżność szeregu jest dość słabą własnością. Zachodzi mianowicie TWIERDZENIE RIEMANNA, które głosi, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, zaś s jest całkiem dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje taka permutacja wskaźników wyrazów tego szeregu, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$. Tak więc, w szeregach jedynie warunkowo zbieżnych można tak poprzestawiać ich wyrazy (zmienić kolejność sumowania wyrazów), że jako sumę

szeregu otrzymać można całkiem dowolną liczbę rzeczywistą (a nawet $+\infty$ lub $-\infty$).

4 Przestrzenie metryczne

Znamy już przykłady struktur porządkowych oraz algebraicznych. Teraz poznamy struktury, które związane są z pojęciem *odległości* oraz z pojęciami wobec niego pochodnymi. Jak widzieliśmy przed chwilą, pojęcie *zbieżności* jest właśnie jednym z tego typu pojęć.

4.1 Przestrzenie euklidesowe

Przez *(rzeczywistą) przestrzeń euklidesową n-wymiarową* rozumiemy parę $(\mathbb{R}^n, d)$, gdzie $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n-tek uporządkowanych elementów zbioru $\mathbb{R}$, zaś d jest funkcją $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określoną wzorem:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

dla dowolnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ należących do $\mathbb{R}^n$. Funkcję d nazywamy *metryką* (*funkcją odległości*). Zamiast terminu *metryka* używa się też terminu *funkcja odległości*, opatrując te terminy określeniem *euklidesowa*.
UWAGI.

1. Dla $n = 1$ odległość d wyrażamy przez wartość bezwzględną: $d(x, y) = |x - y|$.
2. Dla $n = 2$ odległość d punktów $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ wyrażamy przez wzór: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.
3. Słuchacze bez trudu zauważają rolę twierdzenia Pitagorasa w definicji metryki euklidesowej.
4. Odległość w przestrzeniach euklidesowych spełnia warunki:
   (a) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$
   (b) $d(x, y) = d(y, x)$ (*warunek symetrii*)
   (c) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*).

Zbieżność ciągów punktów przestrzeni euklidesowej określamy w terminach metryki tej przestrzeni. Mówimy mianowicie, że ciąg punktów (x_n) o wyrazach należących do $\mathbb{R}^n$ jest *zbieżny* do punktu $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

W interpretacji geometrycznej zbieżność ciągu punktów przestrzeni euklidesowej wyrazić możemy w terminach *otoczeń* punktów w tej przestrzeni. Owe otoczenia reprezentowane są przez kule otwarte. Mówimy mianowicie, że $K(x, \varepsilon)$ jest *kulą otwartą o środku x oraz promieniu ε*, gdy:

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Ciąg (x_n) o wyrazach należących do $\mathbb{R}^n$ jest zbieżny do punktu $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym otoczeniu punktu x (czyli w każdej kuli otwartej o dowolnie małym promieniu) znajdują się wszystkie wyrazy ciągu (x_n) oprócz co najwyżej skończonej ich liczby.

4.2 Przestrzenie metryczne

Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną* (a d nazywamy *metryką* w X), gdy X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś d jest dwuargumentową funkcją określoną na X i przyjmującą nieujemne wartości rzeczywiste taką, że:

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*warunek symetrii*)
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*warunek trójkąta*).

Zamiast terminu *metryka* używa się też terminu *funkcja odległości*.

PRZYKŁADY.

1. *Metryka euklidesowa*. Nietrudno sprawdzić rachunkiem, że przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^n, d)$, jest przestrzenią metryczną. Słuchacze są doskonale oswojeni z własnościami metrycznymi tej przestrzeni dla n od 1 do 3.
2. *Metryka taksówkowa*. W zbiorze $\mathbb{R}^n$ określić można wiele funkcji odległości różnych od metryki euklidesowej. Przez metrykę *taksówkową* (*metrykę Manhattan*) rozumiemy funkcję d określoną następująco dla dowolnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

Dla $n = 2$ mamy zatem: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Metryka ta opisuje poruszanie się w mieście z prostokątną siatką ulic, prowadzących jedynie np. ze wschodu na zachód oraz z południa na północ, przy założeniu, że poruszamy się, dbając o to, aby znaleźć możliwie najkrótszą drogę między dwoma punktami. Zauważmy, że (inaczej niż w przypadku metryki euklidesowej) w tej metryce istnieje *wiele* dróg między dwoma punktami, które mają taką samą długość w sensie metryki. Kule w tej metryce wyglądają inaczej niż kule w metryce euklidesowej – czy słuchacze potrafią wyobrazić sobie kule, wyznaczone tą metryką?

3. *Metryka Czebyszewa*. Innym przykładem metryki w $\mathbb{R}^n$ jest *odległość Czebyszewa* (*metryka maksimum*), zdefiniowana dla dowolnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wzorem:

$$d(x, y) = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_k - y_k|.$$

Na płaszczyźnie metryka ta opisuje np. liczbę ruchów króla szachowego, które musi on wykonać, aby przejść z jednego pola szachownicy na inne. W tej metryce kule również wyglądają inaczej niż kule w metryce euklidesowej – czy słuchacze potrafią wyobrazić sobie kule, wyznaczone tą metryką?

4. *Metryka trywialna*. W każdym zbiorze można określić metrykę w dość banalny sposób: $d(x, y) = 1$, gdy $x \neq y$ oraz $d(x, y) = 0$, gdy $x = y$. Tak rozumiana metryka nie dostarcza jednak żadnej informacji na temat struktury zbioru, na którym jest określona.

5. Praktycznym problemem jest ustalanie *najkrótszej drogi*, gdy poruszamy się w terenie z różnorakimi utrudnieniami (np. przedzielonym rzeką, urozmaiconym górami) lub, powiedzmy, w labiryncie lub w sieci kolejowej. Opracowano wiele propozycji, opisujących matematycznie takie sytuacje.

6. Funkcje odległości wprowadzać można także na zbiorach, których elementy mają złożoną strukturę (są np. ciągami lub funkcjami). Być może, słuchacze spotkają później np. *odległość Hamminga*, określoną dla ciągów.

7. W terminach wyjściowej metryki definiować można dalsze pojęcia metryczne, np. charakteryzować odległość elementu od zbioru, lub odległość między zbiorami elementów.

8. Przestrzeniami metrycznymi są np.:

   (a) Zbiór wszystkich rzeczywistych ciągów zbieżnych.

(b) Zbiór wszystkich rzeczywistych ciągów ograniczonych.

(c) Zbiór wszystkich rzeczywistych ciągów zbieżnych do zera.

Metrykę w każdym z powyższych przypadków określamy tak samo dla dowolnych ciągów $x = (x_n)$ oraz $y = (y_n)$ z rozważanego zbioru:

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|.$$

4.3 Zbiory w przestrzeniach metrycznych

Zbieżność ciągów w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) określamy analogicznie, jak czyniliśmy to dla przestrzeni euklidesowych. Mówimy mianowicie, że ciąg punktów (x_n) przestrzeni metrycznej (X, d) jest *zbieżny* do punktu $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Piszemy w takim przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Pojęcia *kuli otwartej* $K(x, r)$ oraz *kuli domkniętej* $\overline{K}(x, r)$ (o środku w punkcie x oraz promieniu r) definiujemy w naturalny sposób:

1. $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$
2. $\overline{K}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$.

Zbieżność ciągów w przestrzeni metrycznej charakteryzować możemy, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej, poprzez otoczenia, czyli kule otwarte. Zachęcamy słuchaczy do samodzielnego sformułowania stosownego określenia.

Granica zbieżnego ciągu elementów przestrzeni metrycznej jest wyznaczona jednoznacznie, czyli ciąg w takiej przestrzeni nie może być zbieżny do dwóch różnych granic.

Zbiór $A \subseteq X$ punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ograniczony*, gdy „mieści się w całości w pewnej kuli”, czyli gdy istnieje kula $K(x, r)$ taka, że $A \subseteq K(x, r)$. W szczególności, ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ograniczony*, gdy zbiór wszystkich jego wyrazów jest ograniczony. Łatwo wykazać, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej jest w niej ograniczony.

Mówimy, że ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ciągiem Cauchy'ego* (*spełnia warunek Cauchy'ego*), gdy dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $m > N$ oraz $n > N$ zachodzi nierówność $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tak więc, wyrazy ciągów Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej stają się, od pewnego miejsca, dowolnie bliskie sobie (w sensie rozważanej metryki).
UWAGI.

1. Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

2. Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.

3. Każdy ciąg Cauchy'ego, który zawiera podciąg zbieżny do jakiegoś punktu też jest zbieżny do tego punktu.

4. Nie w każdej przestrzeni metrycznej ciąg Cauchy'ego musi być zbieżny. Za przykład niech służy zbiór wszystkich liczb wymiernych, traktowany jako przestrzeń metryczna (z odległością wyznaczoną przez wartość bezwzględną). W tej przestrzeni istnieją ciągi o wyrazach wymiernych, spełniające warunek Cauchy'ego, które nie mają granicy *wymiernej*: pomyślmy np. o coraz dokładniejszych przybliżeniach wymiernych jakiejś liczby *niewymiernej* (np. $\sqrt{2}$ lub π).

Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego elementów tej przestrzeni jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.
PRZYKŁADY.

1. Przestrzeń wszystkich liczb wymiernych (z metryką $d(x, y) = |x - y|$) nie jest zupełna.

2. Przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$ są zupełne. Dla $n = 1$ wynika to bezpośrednio z faktu, że $\mathbb{R}$ spełnia aksjomat ciągłości. Dla pozostałych n dowód zupełności $\mathbb{R}^n$ otrzymujemy z tego, że zbieżność i spełnianie warunku Cauchy'ego dla tych przestrzeni daje się wyrazić przez zbieżność i spełnianie warunku Cauchy'ego dla ich „współrzędnych", z których każda jest zbiorem $\mathbb{R}$.

3. Czy twory *geometryczne*, takie jak *prosta*, *płaszczyzna*, *przestrzeń trójwymiarowa* są przestrzeniami zupełnymi? Odpowiedź jest twierdząca, gdy twory te *reprezentujemy* za pomocą struktur arytmetycznych:

   (a) prosta: $\mathbb{R}$

   (b) płaszczyzna: $\mathbb{R}^2$

   (c) przestrzeń trójwymiarowa: $\mathbb{R}^3$.

   Przy takiej reprezentacji, system geometrii (np. w aksjomatycznym opisie Hilberta) ma własność *kategoryczności*: istnieje tylko jeden (z dokładnością do izomorfizmu) *model* tego systemu. Istotną rolę w dowodzie tego stwierdzenia odgrywa aksjomat ciągłości.

4. Dociekliwi słuchacze mogą jednak odważnie zapytać: czy aksjomat ciągłości jest niezbędny do uprawiania geometrii? To świetne pytanie, może ono wywołać istną lawinę dalszych ważnych pytań, dla przykładu następujących

(które tylko anonsujemy, gdyż ich szersze komentowanie wykracza poza ramy tego kursu):

(a) *Świat monitora*. Stworzenia (obrazki) poruszające się na monitorach komputerowych składają się z pojedynczych *pikseli*. Jakkolwiek wielki i wyrafinowanie rozdzielczy byłby monitor, to liczba tych pikseli jest *skończona*. Tak więc, geometria świata przedstawianego na monitorze komputerowym obywa się bez aksjomatu ciągłości.

(b) *Ciągłość a gęstość*. Czy do uprawiania geometrii wystarczy gęsty zbiór punktów, np. zbiór wszystkich liczb wymiernych? A może wystarczy uzupełnić ten zbiór o *wybrane* liczby niewymierne, np. liczby algebraiczne, m.in. aby uporać się z niewspółmiernością boku kwadratu jednostkowego i jego przekątnej? Zachęcamy do refleksji.

(c) *Przestrzeń fizyczna*. Czy przestrzeń fizyczna jest ciągła czy dyskretna? Słuchacze zechcą zauważyć, że nie jest to pytanie matematyczne i uzyskanie na nie odpowiedzi – o ile w ogóle byłoby możliwe – leży poza domeną matematyki. Czy poszukując coraz mniejszych składników materii dotrzemy w końcu do *najmniejszych* takich składników? Czy możliwy jest dowód, że Wszechświat jest nieskończenie wielki?

(d) *Przestrzeń percepcyjna*. Jaką geometrią rządzą się nasze (oraz innych Stworzeń) reprezentacje świata fizycznego? Ludzkie reprezentacje geometryczne związane są głównie ze wzrokiem oraz dotykiem. Wiele Stworzeń bazuje swoje reprezentacje np. na węchu. Słuchacze z pewnością dyskutować będą znany problem nauk kognitywnych: *Jak to jest być nietoperzem*?

(e) *Koszmar sennej pogoni i struktury niearchimedesowe*. Przedstawiane są raporty ze snów, w których zdarza nam się gonić kogoś, nie mogąc go (jej) dogonić, mimo że biegniemy *coraz szybciej*. Zachowujemy się więc w takim śnie tak, jakby nie zachodził aksjomat Archimedesa, który gwarantuje, że dodając do siebie odpowiednio wiele razy dowolną wielkość, przekroczymy zawsze inną, z góry podaną wielkość. Czyżbyśmy byli zdolni obcować w snach z wielkościami *nieskończenie małymi* oraz *nieskończenie wielkimi*? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tym problemem zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat liczb *hiperrzeczywistych*.

(f) *Które metryki są „naturalne"?* Odległość między liczbami rzeczywistymi określaliśmy w terminach wartości bezwzględnej. Czy jakaś inna funkcja liczbowa mogłaby równie dobrze opisywać – jakoś rozumianą

– odległość między punktami przestrzeni? Czy rozsądne może być traktowanie jako *bliskich* tych liczb, powiedzmy, naturalnych, które są *podobnie zbudowane*: np. są podzielne przez potęgę jakiejś liczby pierwszej? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tym problemem zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat liczb p*-adycznych*.

(g) *Powierzchnia sfery*. Sfera (dwuwymiarowa) jest „zanurzona" w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, jest jej *podprzestrzenią*. Możemy więc wykorzystać własności metryczne $\mathbb{R}^3$ w opisie sfery. *Wyobraźmy* sobie jednak ową sferę jako *twór sam w sobie*: pomyślmy o mieszkańcach takiego Wszechświata, który *jest sferą*. Czy mieszkańcy takiego Wszechświata (kleksy żyjące na sferze, inteligentne, a jakże) mają możliwość przekonania się, że ich Wszechświat ma strukturę sfery? Czy mogą ustalić, że ten Wszechświat *nie ma granic*, ale *jest ograniczony*? Albo: czy mogą ustalić, że ich Wszechświat jest *wszędzie tak samo „wypukły"*? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat np.: *geometrii eliptycznej*, *sfery Riemanna*, *krzywizny Gaussa*, itd.

(h) *„Wewnętrzna" powierzchnia sfery*. Podobne pytania zadać można dla powierzchni, która odpowiada sferze (dwuwymiarowej) „widzianej od wewnątrz". Jest to świat „wszędzie wklęsły", mówiąc metaforycznie. Jaka jest geometria takich światów? Czy ich mieszkańcy mogą to w jakiś sposób ustalić? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat *geometrii hiperbolicznej*.

(i) *Przestrzenie z „dziurami"*. Podobne pytania zadać można dla całego szeregu innego rodzaju przestrzeni, np. *torusa*, *precelka*, *sfery z wieloma „rączkami"*, itd. Czy można w jakiś naturalny sposób *poklasyfikować* takie przestrzenie? Czy mieszkańcy takich przestrzeni mogą jakoś – np. odbywając *podróże*, albo dokonując *obserwacji* – ustalić ich strukturę? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat *topologii algebraicznej*.

(j) *Przestrzenie „zapętlone"*. Nie tylko marynarze potrafią stwierdzić, że okrąg różni się, zarówno *kształtem*, jak i *położeniem w przestrzeni* od solidnie zasupłanego *węzła*. Jak różnią się od siebie węzły? Czy można poklasyfikować węzły? Ile jest możliwości zaplatania warkoczy? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat *teorii węzłów*.

(k) *Metryka a najkrótsza droga*. Widzieliśmy – na przykładzie metryki taksówkowej – że w pewnych przestrzeniach metrycznych między dowolnymi dwoma punktami może istnieć *wiele dróg* o tej samej *długości*. Pamiętamy też, że na płaszczyźnie najkrótsza (w metryce euklidesowej) droga między dwoma punktami wyznaczona jest przez długość odcinka, którego końcami są te punkty. Właściciele linii lotniczych nie mają też kłopotów (oprócz, oczywiście, utrudnień natury politycznej) z ustalaniem *najkrótszej* drogi łączącej dwa lotniska na kuli ziemskiej, traktowanej jako – w przybliżeniu – sfera dwuwymiarowa. Te fakty skłaniają do różnorakich refleksji: *czym jest linia prosta?* (w danej przestrzeni), *czym jest najkrótsza droga?* (w danej przestrzeni), *czy metryka przestrzeni może być lokalnie inna w poszczególnych jej punktach?* itp. Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat *geodetyk*, *rozmaitości riemannowskich*, *geometrii różniczkowej*, itd.

(l) *Czy przestrzenie muszą być zbiorami punktów?* Rozważane w systemie geometrii Euklidesa *punkty*, *proste* i *płaszczyzny* są tworami wysoce abstrakcyjnymi. Czy możliwe jest oparcie rozważań geometrycznych i topologicznych na *kolektywnym* rozumieniu pojęcia zbioru, czyli traktowaniu zbiorów jako pewnych *całości*, złożonych z *części*, a nie *dystrybutywnie* – jak czynimy to w teorii mnogości – jako *całości*, złożonych z *elementów*? Czy można np. wyjść od pojęcia *obszaru*, traktując *punkty* jako *obiekty graniczne* ciągów obszarów *zstępujących*? Słuchacze ewentualnie zainteresowani tymi problemami zechcą samodzielnie znaleźć informacje na temat *mereotopologii*.

Wielce żałujemy, że ograniczone ramy czasowe tego kursu i jego usługowy jedynie charakter zmuszają nas do milczenia na te frapujące tematy. Zdajemy sobie oczywiście sprawę, że podane wyżej przykładowe pytania sformułowane były w sposób dość naiwny.

Każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych. Każdy punkt w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ także jest granicą ciągu punktów o wszystkich współrzędnych wymiernych. Tak więc liczby wymierne są w bardzo szczególny sposób „usytuowane” w zbiorze liczb rzeczywistych. Nasuwa to pomysł rozważenia odpowiedników tej sytuacji w dowolnych przestrzeniach metrycznych.

Mówimy, że zbiór A jest *gęsty* w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy każdy punkt zbioru X jest granicą zbieżnego ciągu punktów (x_n) należących do zbioru A. Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ośrodkową*, gdy istnieje w niej co najwyżej przeliczalny zbiór gęsty (nazywany wtedy *ośrodkiem* tej przestrzeni).

W myśl tej definicji każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest ośrodkowa, a ośrodkiem jest w tym przypadku zbiór $\mathbb{Q}^n$. Przestrzeń wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych z metryką podaną wyżej dla tej przestrzeni nie jest ośrodkowa.

Słuchacze są dobrze oswojeni z pojęciami: przedziału otwartego oraz domkniętego zbioru liczb rzeczywistych. Mają też zapewne dobre intuicje geometryczne, dotyczące tego, co to znaczy, że jakiś punkt znajduje się *we wnętrzu* danej figury lub na jej *brzegu*. Z tymi intuicjami związane są m.in. następujące pojęcia.

1. Punkt x nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d) gdy istnieje liczba rzeczywista $r > 0$ taka, że $K(x, r) \subseteq A$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A oznaczamy przez $int(A)$ i nazywamy *wnętrzem* zbioru A.

2. Punkt x nazywamy *punktem skupienia* zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy x jest granicą co najmniej jednego ciągu (x_n) różnych od x punktów przestrzeni (X, d). Te punkty zbioru A, które nie są jego punktami skupienia nazywamy *punktami izolowanymi* zbioru A.

3. Te zbiory A, które są równe swojemu wnętrzu, nazywamy zbiorami *otwartymi*. Tak więc, zbiór otwarty składa się z samych punktów wewnętrznych.

4. Te zbiory A, które zawierają wszystkie swoje punkty skupienia, nazywamy zbiorami *domkniętymi*.

5. *Domknięciem* zbioru A nazywamy sumę zbioru A oraz zbioru wszystkich jego punktów skupienia. Domknięcie A oznaczamy przez $cl(A)$. Innym często używanym oznaczeniem domknięcia zbioru A jest $\overline{A}$.

6. *Brzegiem* zbioru A nazywamy zbiór $cl(A) - int(A)$. Brzeg zbioru A oznaczamy zwykle przez $fr(A)$.

Może warto w tym momencie wspomnieć, że powyższe pojęcia wprowadzić można nie tylko dla przestrzeni metrycznych (w szczególności: euklidesowych), ale także dla całkiem ogólnych *przestrzeni topologicznych*, w których *bliskość*, *otoczenie* i podobne pojęcia scharakteryzowane są stosownymi warunkami, niekoniecznie odwołującymi się do metryki. Takie ogólne przestrzenie określa się na różne sposoby, np. definiując rodziny *otoczeń* dla każdego punktu, albo rozważając operator domknięcia (lub alternatywnie, operator wnętrza), spełniający stosowne warunki formalne. Przechodząc na tego rodzaju wyższy stopień ogólności uzyskujemy niesłychane bogactwo zastosowań rozważanych pojęć topologicznych, co poświadcza historia matematyki ostatniego stulecia.
PRZYKŁADY.

1. Punktami wewnętrznymi przedziału $[a, b]$ w zbiorze liczb rzeczywistych są wszystkie punkty przedziału otwartego (a, b).

2. Punktami wewnętrznymi przedziału (a, b) w zbiorze liczb rzeczywistych są wszystkie punkty tego przedziału.

3. Mamy oczywiście: $cl((a, b)) = [a, b]$ oraz $cl([a, b]) = [a, b]$.

4. Ponadto: $int([a, b]) = (a, b)$ oraz $int((a, b)) = (a, b)$.

5. Mamy również: $fr((a, b)) = fr([a, b]) = \{a, b\}$.

6. Każda kula otwarta w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.

7. Każda kula domknięta w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni.

8. Rozważmy zbiór $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ jako podzbiór przestrzeni metrycznej (euklidesowej) $\mathbb{R}$. Jego (jedynym) punktem skupienia jest 0. Zauważmy, że 0 nie jest elementem tego zbioru. Wszystkie punkty rozważanego zbioru są jego punktami izolowanymi.

9. Każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru $\mathbb{R}$.

10. Każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb wymiernych.

11. Zauważmy, że każdy przedział $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$. Iloczyn tych wszystkich przedziałów to zbiór jednoelementowy $\{0\}$, który nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$.

12. Zauważmy, że każdy przedział $[\frac{1}{n}, 1]$ jest zbiorem domkniętym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$. Suma tych wszystkich przedziałów to przedział $(0, 1]$, który nie jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$.

Wspomnimy jeszcze o wybranych własnościach zbiorów otwartych i domkniętych, które dotyczą przestrzeni metrycznych (a więc w szczególności, przestrzeni euklidesowych), ale które przysługują też takim zbiorom w całkiem ogólnych przestrzeniach topologicznych:

1. Zbiór pusty $\emptyset$ oraz cała przestrzeń X są zbiorami jednocześnie otwartymi i domkniętymi w przestrzeni metrycznej (X, d).

2. Dowolny zbiór skończony jest domknięty w każdej przestrzeni metrycznej (X, d).

3. Dopełnienie $X - A$ zbioru otwartego A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni.

4. Dopełnienie $X - A$ zbioru domkniętego A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.

5. Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.

6. Przekrój skończonej liczby zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.

7. Iloczyn dowolnej rodziny zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni.

8. Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni.

4.4 Zwartość i spójność

Te dwie własności zbiorów mają dość intuicyjną interpretację, zarówno w przypadku przestrzeni metrycznych (a więc w szczególności, przestrzeni euklidesowych), jak też w przypadku ogólniejszych przestrzeni. Dla słuchaczy tego kursu wystarczy ich rozumienie w omawianym tu przypadku przestrzeni metrycznych.

Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *zwartym*, gdy każdy ciąg (x_n) jego punktów zawiera podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in A$. Tak więc, zbiór A ***nie*** jest zwarty w (X, d), gdy istnieje co najmniej jeden ciąg jego elementów, który nie ma żadnego punktu skupienia należącego do A.

Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *zwartą*, gdy cały zbiór X jest zwarty w tej przestrzeni.
PRZYKŁADY.

1. Każdy przedział domknięty w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ jest zwarty.

2. Każdy zbiór skończony jest zwarty w dowolnej przestrzeni metrycznej.

3. Zbiór $\mathbb{R}$ nie jest zwarty w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$. Dla przykładu, ciąg $a_n = n$ nie zawiera żadnego podciągu zbieżnego do jakiejś liczby rzeczywistej. Tak więc, przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}$ nie jest zwarta.

4. Zbiór wszystkich ciągów mających dokładnie jeden wyraz równy 1, a wszystkie pozostałe wyrazy równe 0 nie jest zwarty w przestrzeni metrycznej wszystkich ciągów zbieżnych do zera (z metryką określoną w stosownym punkcie powyżej).

Wspomniane wcześniej twierdzenie Bolzano-Weierstrassa ma następującą wersję w odniesieniu do przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$:

> Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest ograniczony i domknięty, to każdy ciąg (x_n) punktów tego zbioru zawiera podciąg (x_{m_n}) zbieżny do jakiegoś punktu zbioru A.

Dowód tego twierdzenia znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004 (strona 109).

Własność zwartości w przestrzeniach metrycznych charakteryzować można z wykorzystaniem pojęcia pokrycia zbioru. Mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d) jest *pokryciem* zbioru A, gdy $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Zachodzi następujące twierdzenie, którego dowód znajdą zainteresowani słuchacze np. w podręczniku Musielak, Musielak 2004 (strona 112):

TWIERDZENIE BORELA. *Każde pokrycie zbioru zwartego A w przestrzeni metrycznej (X, d) zawiera podpokrycie skończone zbioru A, czyli pokrycie zbioru A skończoną rodziną zbiorów należących do wyjściowego pokrycia.*

Dla dowolnych przestrzeni metrycznych (a więc nie tylko euklidesowych) zachodzi też następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. *Każdy zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej (X, d) jest domknięty i ograniczony w tej przestrzeni.*

SZKIC DOWODU. Niech A będzie zbiorem zwartym w przestrzeni metrycznej (X, d). Trzeba pokazać, że A jest: 1) domknięty oraz 2) ograniczony.

1. Weźmy dowolny ciąg (x_n) elementów zbioru A, który jest zbieżny do elementu $x \in X$. Aby udowodnić, że A jest domknięty, trzeba pokazać, że $x \in A$. Na mocy zwartości A, ciąg (x_n) zawiera podciąg (x_{m_n}) zbieżny do jakiegoś $y \in A$. Z definicji zbieżności ciągu w przestrzeni metrycznej musi zachodzić $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = x$. Ponieważ ciąg nie może być zbieżny do dwóch różnych granic, więc $x = y$, a w konsekwencji $x \in A$.

2. Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że A nie jest ograniczony. Oznacza to, że w A można wybrać ciąg punktów tak, że odległość między dowolnymi dwoma wyrazami tego ciągu jest niemniejsza od 1. Wtedy jednak żaden podciąg takiego ciągu nie może spełniać warunku Cauchy'ego, a zatem zbiór A nie jest zwarty, co daje sprzeczność z założeniem twierdzenia i kończy dowód nie wprost.

Na mocy powyższych faktów otrzymujemy bardzo ważną charakterystykę zbiorów zwartych w przestrzeniach euklidesowych:

> *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Pojęcie zwartości to jedno z najważniejszych pojęć topologicznych. W następnych wykładach zobaczymy, jak istotną rolę odgrywa ono w opisie własności funkcji rzeczywistych.

Zbiór A w zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *spójnym*, gdy nie istnieją zbiory otwarte B oraz C w przestrzeni (X, d) takie, że: $A \subseteq B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ oraz $A \cap C \neq \emptyset$. Tak więc, zbiór spójny w zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) nie może zostać „rozłożony" na dwa rozłączne „kawałki", będące zbiorami otwartymi w tej przestrzeni.
UWAGI.

1. Jedynymi zbiorami spójnymi w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ są: zbiór pusty, zbiory jednoelementowe oraz przedziały (właściwe lub niewłaściwe).

2. Własność spójności zbiorów otwartych w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$ scharakteryzować można, korzystając z pojęcia *linii łamanej* w $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $y \in \mathbb{R}^n$ przez *odcinek* $\langle x, y \rangle$ w $\mathbb{R}^n$ rozumiemy zbiór wszystkich punktów o postaci $t \cdot x + (1-t) \cdot y$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Linią łamaną* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy każdą skończoną sumę $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ odcinków w $\mathbb{R}^n$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Zauważmy, że każda linia łamana w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, a więc jest zbiorem zwartym.

3. Niepusty zbiór otwarty $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest spójny dokładnie wtedy, gdy dowolne dwa jego punkty można połączyć linią łamaną w $\mathbb{R}^n$.

4. *Obszarem otwartym* w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy każdy niepusty, otwarty i spójny zbiór w tej przestrzeni.

5. *Obszarem domkniętym* w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy każdy niepusty, domknięty i spójny zbiór w tej przestrzeni.

5 Zachęta do refleksji

1. Jak wyrazić fakt, że jeden ciąg jest zbieżny (np. do zera) *szybciej* niż inny ciąg?

2. Jak wyrazić fakt, że jeden szereg jest *szybciej* zbieżny (lub: *wolniej* rozbieżny) od innego?
3. Ile elementów ma część wspólna rodziny wszystkich przedziałów rzeczywistych o postaci $[n, \infty)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$?
4. Czy Twierdzenie Ascoliego zachodzi także, gdy termin *domknięty* zastąpimy przez *otwarty*?
5. Jak klasyfikować kształty? Czy np. wszystkie powierzchnie można otrzymać przez składanie pewnych *wzorcowych* kawałków?
6. Czy powierzchnia zawsze ma dwie *strony* (umownie nazywane wewnętrzną i zewnętrzną)?
7. Czym jest dziura?
8. Jak wyobrażamy sobie wymiar?
9. Czy metrykę możemy *sensownie* (w nietrywialny sposób) określić w dowolnym zbiorze? Czy istnieją przestrzenie, w których takiej nietrywialnej metryki wprowadzić nie można?
10. Gdy z okręgu usuniemy jeden punkt, dostaniemy odcinek otwarty. Co dostaniemy, gdy do prostej dodamy jeden punkt?
11. Co dostaniemy, gdy ze sfery usuniemy jeden punkt?

6 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Ciąg zbieżny, granica ciągu, punkt skupienia ciągu.
2. Warunek Cauchy'ego.
3. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
4. Szereg liczbowy, jego suma częściowa, definicja zbieżności szeregu.
5. Metryka, przestrzeń metryczna.
6. Zbiory: otwarte, domknięte, zwarte, gęste, spójne.

7 Wybrane pozycje bibliograficzne

Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.