III.8. Rezolucja

Pokażemy teraz działanie pewnej metody dowodowej, związanej z metodą drzew semantycznych i mającej istotne zastosowania m.in. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

III.8.1. Definicje

Jeśli P jest predykatem, to stosujemy skrótowe zapisy $P(\vec{x})$ oraz $P(\vec{t})$ dla formuł atomowych utworzonych z predykatu P oraz stosownej liczby jego argumentów — zmiennych (w pierwszym przypadku) lub termów (w drugim przypadku).

Klauzulą nazwiemy dowolny skończony zbiór literałów.

Literałem ***komplementarnym*** do literału ℓ nazywamy literał $\overline{\ell}$, zdefiniowany następująco:

- jeśli ℓ jest literałem pozytywnym ℓ', to $\overline{\ell}$ jest literałem negatywnym $\neg\ell'$
- jeśli ℓ jest literałem negatywnym $\neg\ell'$, to $\overline{\ell}$ jest literałem pozytywnym ℓ'.

Klauzulę pustą (nie zawierającą żadnych elementów) oznaczamy przez $\Box$.

Klauzule zawierające najwyżej jeden literał pozytywny nazywamy ***klauzulami Hornowskimi***.

Klauzulą programową nazywamy każdą klauzulę z dokładnie jednym literałem pozytywnym.

Jeśli klauzula programowa zawiera jakieś literały negatywne, to nazywamy ją ***regułą***; w przeciwnym przypadku nazywamy ją ***faktem***.

Klauzulą celową nazywamy klauzulę bez literałów pozytywnych.

Programem nazywamy zbiór klauzul programowych (reguł lub faktów). Programy odpowiadają programom rozważanym w PROLOGu.

Klauzule reprezentują formuły w skolemowej postaci normalnej. Tak więc, np. klauzula $\{\neg P(x), Q(x)\}$ reprezentuje formułę $\forall x \forall y\ (\neg P(x) \vee Q(x))$ lub, co na jedno wychodzi, formułę $\forall x \forall y\ (P(x) \to Q(x))$.

Niech C_1 i C_2 będą dwiema klauzulami, które nie mają żadnych wspólnych zmiennych i są postaci $D_1 \cup \{P(\overrightarrow{t_1}), \ldots, P(\overrightarrow{t_n})\}$ oraz $D_2 \cup \{\neg P(\overrightarrow{s_1}), \ldots, \neg P(\overrightarrow{s_m})\}$, odpowiednio. Jeśli σ jest najbardziej ogólnym unifikatorem dla $\{P(\overrightarrow{t_1}), \ldots, P(\overrightarrow{t_n}), P(\overrightarrow{s_1}), \ldots, P(\overrightarrow{s_m})\}$, to $D_1\sigma \cup D_2\sigma$ jest ***rezolwentą*** dla C_1 i C_2. Czasem mówi się wtedy także, że $D_1\sigma \cup D_2\sigma$ jest ***dzieckiem*** swoich ***rodziców*** C_1 oraz C_2.

Dowodem rezolucyjnym klauzuli C ze zbioru formuł S nazywamy każdy skończony ciąg klauzul $C_1, \ldots, C_n$ taki, że:

- C jest identyczna z C_n
- każda klauzula C_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) jest albo elementem zbioru S albo rezolwentą pewnych klauzul C_j oraz C_k dla $j, k < i$.

Jeśli istnieje dowód rezolucyjny C z S, to mówimy, że C jest ***rezolucyjnie dowodliwa*** z S i oznaczamy ten fakt przez $S \vdash_R C$.

Każdy dowód rezolucyjny klauzuli pustej $\Box$ ze zbioru S nazywamy ***rezolucyjną refutacją*** S. Jeżeli istnieje rezolucyjna refutacja S, to mówimy, że S jest ***rezolucyjnie odrzucalny*** i oznaczamy ten fakt przez $S \vdash_R \Box$.

Rezolucyjnym drzewem dowodowym klauzuli C ze zbioru S nazywamy każde drzewo binarne T o następujących własnościach:

- korzeniem T jest C

- liśćmi T są pewne elementy zbioru S
- pozostałe (oprócz korzenia i liści) wierzchołki T są klauzulami
- bezpośrednimi następnikami wierzchołka D niebędącego liściem są klauzule D_1 oraz D_2, których rezolwentą jest D.

Niech $res(S)$ będzie zbiorem zawierający wszystkie elementy S oraz rezolwenty wszystkich par elementów S. Dla $n \geqslant 1$, niech $res_{n+1} = res(res_n(S))$. Wreszcie, niech $\mathcal{R}(S)$ będzie sumą wszystkich zbiorów $res(S)$. Zbiór $\mathcal{R}(S)$ nazywamy ***domknięciem rezolucyjnym*** zbioru S.

Uwaga! W definicji dowodu rezolucyjnego oraz rezolucyjnego drzewa dowodowego dopuszczamy (jako przesłanki dowodu lub liście drzewa, odpowiednio) ***formuły otrzymane z elementów zbioru*** S ***przez zastosowanie podstawień przemianowujących zmienne.***

Uwaga. Rozważamy teraz drzewa, których wierzchołki są znakowane ***zbiorami*** formuł.

III.8.2. Przykłady dowodów rezolucyjnych

PRZYKŁAD III.8.2.1. (Nerode, Shore 1997: 146–147).

Rezolwentą klauzul:

- $C_1 = \{Q(x), \neg R(y), P(x,y), P(f(z), f(z))\}$
- $C_2 = \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\}$

jest klauzula:

$$C_3 = \{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}.$$

Aby się o tym przekonać, należy:

- zauważyć, że $C_1 = \{Q(x), \neg R(y)\} \cup \{P(x,y), P(f(z), f(z))\}$
- zauważyć, że $C_2 = \{\neg N(u), \neg R(w)\} \cup \{\neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\}$
- zastosować najbardziej ogólny unifikator $\sigma = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(a), z \mapsto a, w \mapsto a\}$ dla uzgodnienia zbioru literałów $\{P(x,y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$
- $\{Q(x), \neg R(y)\}\sigma = \{Q(f(a)), \neg R(f(a))\}$
- $\{\neg N(u), \neg R(w)\}\sigma = \{\neg N(u), \neg R(a)\}$.

PRZYKŁAD III.8.2.2. (Nerode, Shore 1997: 147).

Pokażemy, że warunki przechodniości i symetrii, tj. warunki:

$$\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z))$$

$$\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

implikują następujący warunek (euklidesowości):

$$\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge P(z,y)) \rightarrow P(x,z)).$$

Powyższe warunki mają następujące reprezentacje w postaci klauzul (po rozdzieleniu zmiennych):

- $C_1 = \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}$

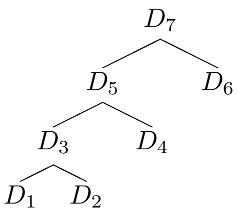
- $C_2 = \{\neg P(u,v), P(v,u)\}$
- $C_3 = \{\neg P(x,y), \neg P(z,y), P(x,z)\}$.

Chcemy zatem uzyskać dowód rezolucyjny C_3 z C_1 oraz C_2. Będzie on się składał z trzech kroków. W każdym z nich z pary klauzul otrzymamy rezolwentę tej pary. W każdym kroku podkreślamy ten literał, względem którego dokonujemy rezolucji (tj. ten, który eliminujemy w wyniku danego kroku).

Tak więc, dowód rezolucyjny C_3 z C_1 oraz C_2 jest następującym ciągiem klauzul $D_1, \ldots D_7$:

- $D_1 = C_1 = \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), \underline{P(x,z)}\}$
- $D_2 = C_2\{u \mapsto x, v \mapsto z\} = \{\neg \underline{P(u,v)}, P(v,u)\}\{u \mapsto x, v \mapsto z\} = \{\underline{\neg P(x,z)}, P(z,x)\}$
- $D_3 = \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), \underline{P(z,x)}\}$ rezolwenta D_1 oraz D_2
- $D_4 = C_2\{u \mapsto z, v \mapsto x\} = \{\neg \underline{P(u,v)}, P(v,u)\}\{u \mapsto z, v \mapsto x\} = \{\underline{\neg P(z,x)}, P(x,z)\}$
- $D_5 = \{\neg P(x,y), \underline{\neg P(y,z)}, P(x,z)\}$ rezolwenta D_3 i D_4
- $D_6 = C_2\{u \mapsto z, v \mapsto y\} = \{\neg P(u,v), \underline{P(v,u)}\}\{u \mapsto z, v \mapsto y\} = \{\neg P(z,y), \underline{P(y,z)}\}$
- $D_7 = \{\neg P(x,y), \neg P(z,y), P(x,z)\} = C_3$ rezolwenta D_5 i D_6.

Rezolucyjne drzewo dowodowe wygląda w tym przypadku następująco:



Zwykle rezolucyjne drzewa dowodowe przedstawia się „korzeniem w dół, liśćmi do góry". W takiej notacji rozważane rezolucyjne drzewo dowodowe wygląda następująco:

$$\dfrac{D_6 \qquad \dfrac{D_4 \qquad \dfrac{D_1 \qquad D_2}{D_3}}{D_5}}{D_7}$$

Przykład III.8.2.3. (Hedman 2004: 124-125).

Niech:

- $C_1 = \{Q(x,y), P(f(x),y)\}$
- $C_2 = \{R(x,c), \neg P(f(c),x), \neg P(f(y),h(z))\}$.

Chcemy znaleźć rezolwentę C_1 oraz C_2. Najpierw dokonamy przemianowania zmiennych (ponieważ pewne zmienne występują zarówno w C_1, jak i w C_2). Mamy: $C_1\{x \mapsto u, y \mapsto v\} = \{Q(u,v), P(f(u),v)\}$. Widać, że $C_1\{x \mapsto u, y \mapsto v\}$ oraz C_2 nie mają wspólnych zmiennych.

Zauważmy, że predykat P występuje zarówno w literałach pozytywnych, jak i negatywnych rozpatrywanych klauzul. Dla zbioru:

$$\{P(f(u),v), \neg P(f(c),x), \neg P(f(y),h(z))\}$$

będziemy zatem szukać najbardziej ogólnego unifikatora. Po zastosowaniu (ćwiczenie!) algorytmu unifikacji widzimy, że takim mgu jest:

$$\sigma = \{u \mapsto c, v \mapsto h(z), x \mapsto h(z)\}.$$

Tak więc, rezolwentą klauzul C_1 oraz C_2 jest klauzula:

$$R = (C_1\sigma - \{P(f(u), v)\}) \cup (C_2\sigma - \{\neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(z))\}) =$$
$$= \{Q(u, v), R(x, c)\}\sigma = \{Q(c, h(z)), R(h(z), c)\}.$$

Sprawdzimy, że R jest logiczną konsekwencją C_1 oraz C_2. Zgodnie z przyjętymi umowami notacyjnymi, klauzule reprezentują formuły w skolemowej postaci normalnej. Tak więc:

- C_1 reprezentuje formułę (1): $\forall x \forall y\ (Q(x, y) \vee P(f(x), y))$
- C_2 reprezentuje formułę (2): $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, c) \vee \neg P(f(c), x) \vee \neg P(f(y), h(z)))$
- R reprezentuje formułę (3): $\forall z\ (Q(c, h(z)) \vee R(h(z), c))$.

Mamy pokazać, że dla dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$, jeśli formuły reprezentowane przez C_1 oraz C_2 są prawdziwe w $\mathfrak{M}$, to formuła reprezentowana przez R jest prawdziwa w $\mathfrak{M}$.

Przypuśćmy, że (1) i (2) są prawdziwe w interpretacji $\mathfrak{M}$. Ponieważ są to zdania uniwersalne, więc w $\mathfrak{M}$ prawdziwe są też wszystkie podstawienia dowolnych termów (bez zmiennych) za zmienne x oraz y w (1) i (2). W szczególności:

- (3) $\forall z\ (Q(c, h(z)) \vee P(f(c), h(z)))$, czyli formuła reprezentowana przez klauzulę $C_1\{x \mapsto u, y \mapsto v\}\sigma$
- (4) $\forall z\ (R(h(z), c) \vee \neg P(f(c), h(z)))$, czyli formuła reprezentowana przez klauzulę $C_2\sigma$

są obie prawdziwe w $\mathfrak{M}$. Łatwo zauważyć, że formuły (3) i (4) są, odpowiednio, równoważne z (5) oraz (6):

- (5) $\forall z\ (\neg Q(c, h(z)) \rightarrow P(f(c), h(z)))$
- (6) $\forall z\ (P(f(c), h(z)) \rightarrow R(h(z), c))$

Z (5) i (6), na mocy praw KRP, otrzymujemy: (7) $\forall z\ (\neg Q(c, h(z)) \rightarrow R(h(z), c))$. Z kolei, formuła (7) jest równoważna z (8): $\forall z\ (Q(c, h(z)) \vee R(h(z), c))$.

Pokazaliśmy, że jeśli (1) i (2) są prawdziwe w dowolnej interpretacji $\mathfrak{M}$, to także (8) jest prawdziwa w interpretacji $\mathfrak{M}$.

Formuła (8) jest reprezentowana przez klauzulę R, a więc zakończyliśmy dowód.

III.8.3. Pożyczka z rozdziału IV: modele Herbranda

W rozdziale IV pokazujemy szczegółowe dowody twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP. Jednym z najważniejszych takich twierdzeń jest twierdzenie Herbranda. Sformułujemy tutaj jego wersję uproszczoną, wystarczającą do dalszych rozważań tego podrozdziału.

Przypomnijmy (z podrozdziału III.0.) niektóre potrzebne pojęcia (uniwersa Herbranda, modele Herbranda).

Jeśli S jest dowolnym zbiorem formuł języka KRP (ustalonej sygnatury), to przez ***uniwersum Herbranda*** dla S rozumiemy zbiór H_S określony indukcyjnie następująco:

- (i) jeśli stała indywiduowa a_k występuje w jakiejś formule ze zbioru S, to $a_k \in H_S$
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_{n_j}$ są dowolnymi termami należącymi do H_S, to $f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ także należy do H_S, dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f_j^{n_j}$.

Jeśli w formułach z S nie występuje żadna stała indywiduowa, to warunek (i) definicji zbioru H_S zastępujemy warunkiem: $a_k \in H_S$ dla dowolnie wybranej stałej indywiduowej a_k.

Jeśli w formułach z S występuje co najmniej jeden symbol funkcyjny, to H_S jest zbiorem nieskończonym.

Uniwersum Herbranda dla danego zbioru formuł S jest zatem zbiorem wszystkich termów bez zmiennych utworzonych (z użyciem symboli funkcyjnych) ze stałych indywiduowych występujących w formułach zbioru S.

Interpretacją Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy interpretację $\langle H_S, \Delta_S \rangle$ spełniającą następujące warunki:

- $\Delta_S(a_k) = a_k$ dla dowolnej stałej indywiduowej a_k należącej do H_S;
- $\Delta_S(f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})) = f_j^{n_j}(t_1, \ldots, t_{n_j})$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_{n_j}$ należących do H_S.

Modelem Herbranda dla zbioru formuł S nazywamy każdą interpretację Herbranda dla S, w której prawdziwe są wszystkie formuły z S.

Zauważmy, że uniwersa Herbranda tworzone są z wyrażeń języka KRP. ***Alfabetem Herbranda*** dla zbioru formuł S nazywamy zbiór wszystkich stałych pozalogicznych występujących w formułach z S (jeśli w S nie występuje żadna stała indywiduowa, to dodajemy dowolną ustaloną stałą indywiduową). Niech V_S oznacza alfabet Herbranda dla S.

W dowodzie twierdzenia Herbranda wykorzystywane jest twierdzenie o pełności metody drzew semantycznych w KRP. Twierdzenie to, wraz z dowodem, podajemy w rozdziale IV.

Ważną konsekwencją twierdzenia Herbranda jest możliwość wykazania niespełnialności zbioru formuł języka KRP w KRZ.

TWIERDZENIE 8.3.1. Niech $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots\}$ będzie zbiorem formuł w skolemowych postaciach normalnych nie zawierających wystąpień symbolu identyczności. Wtedy: Γ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy Γ ma model Herbranda.

DOWÓD. Jeśli Γ ma model Herbranda, to Γ jest oczywiście spełnialny. Pozostaje udowodnić implikację w drugą stronę.

Przypuśćmy, że Γ jest spełnialny. Niech $\mathfrak{N}$ będzie dowolną strukturą sygnatury V_S taką, że $\mathfrak{N} \models \Gamma$. Niech $\mathfrak{M}'$ będzie interpretacją Herbranda. Zbudujemy interpretację $\mathfrak{M}$ sygnatury V_S taką, że $\mathfrak{M} \models \Gamma$.

Uniwersum dla $\mathfrak{M}$ jest uniwersum Herbranda H_Γ. Trzeba podać interpretację w $\mathfrak{M}$ symboli funkcyjnych oraz predykatów. Mówiąc intuicyjnie:

- $\mathfrak{M}$ interpretuje symbole funkcyjne tak, jak robi to $\mathfrak{M}'$ (co nie wymaga uściśleń, ponieważ mowa tu o interpretacjach Herbranda: $\mathfrak{M}$ jest interpretacją Herbranda sygnatury V_Γ, tak samo jak $\mathfrak{M}'$);
- $\mathfrak{M}$ interpretuje predykaty tak, jak robi to $\mathfrak{N}$ (co wymaga uściślenia, bo uniwersa struktur $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ mogą być różne).

Dla dowolnego n-argumentowego predykatu R w V_Γ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$ należących do H_Γ musimy określić, która z poniższych (nawzajem się wykluczających oraz dopełniających) możliwości zachodzi:

- $R(t_1, \ldots, t_n)$
- $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$.

Ponieważ każdy z powyższych termów t_i jest termem bez zmiennych, a $\mathfrak{N}$ jest strukturą sygnatury V_Γ, więc zachodzi dokładnie jedno z dwojga:

- $\mathfrak{N} \models R(t_1, \ldots, t_n)$
- $\mathfrak{N} \models \neg R(t_1, \ldots, t_n)$.

Definiujemy interpretację predykatu R w $\mathfrak{M}$ w ten sposób, aby zachodziła równoważność:

$$\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{N} \models R(t_1, \ldots, t_n).$$

Trzeba teraz pokazać, że $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach:

- (1) pokażemy, że dla dowolnego zdania A języka sygnatury V_Γ, które nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani znaku identyczności zachodzi: $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.
- (2) pokażemy, że z (1) wynika, że dla dowolnego zdania A języka sygnatury V_Γ w skolemowej postaci normalnej, które nie zawiera znaku identyczności zachodzi: jeśli $\mathfrak{N} \models A$, to $\mathfrak{M} \models A$.
- (3) pokażemy, że z (2) wynika $\mathfrak{M} \models \Gamma$.

Dowód (1).

Niech A będzie formułą bez kwantyfikatorów. Pokażemy, że $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$ przez indukcję po złożoności A.

Jeśli A jest formułą atomową, to — ponieważ nie zawiera wystąpień predykatu identyczności — musi być postaci $R(t_1, \ldots, t_n)$ dla pewnego predykatu n-argumentowego R z alfabetu V_Γ oraz termów $t_1, \ldots, t_n$. Ponieważ A jest zdaniem, więc żaden z termów t_i nie może zawierac zmiennych. Oznacza to, że wszystkie termy t_i są elementami H_Γ. Z definicji $\mathfrak{M}$ otrzymujemy wtedy, że $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.

Przypuśćmy, że:

- $\mathfrak{M} \models A_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_1$
- $\mathfrak{M} \models A_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_2$.

Wtedy oczywiście także:

- $\mathfrak{M} \models \neg A_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models \neg A_1$
- $\mathfrak{M} \models A_1 \wedge A_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A_1 \wedge A_2$.

(podobnie dla innych spójników zdaniowych). To kończy dowód (1).

Dowód (2).

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby kwantyfikatorów w A. Jeśli A nie zawiera żadnych kwantyfikatorów, to na mocy (1) mamy: $\mathfrak{M} \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{N} \models A$.

Przypuśćmy, że A jest postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, B$, gdzie B nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani predykatu identyczności. Założenie indukcyjne głosi, że (2) zachodzi dla wszystkich formuł, które mają mniej niż n kwantyfikatorów. Niech $C(x_1)$ będzie formułą otrzymaną z $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, B$ poprzez opuszczenie pierwszego kwantyfikatora. Niech t będzie termem bez zmiennych z języka o sygnaturze V_Γ (oznacza to, że t jest elementem H_Γ). Mamy:

- jeśli $\mathfrak{N} \models C(x_1)$, to $\mathfrak{N} \models C(t/x_1)$ (z definicji relacji $\models$),
- jeśli $\mathfrak{N} \models C(t/x_1)$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$ (z założenia indukcyjnego).

Tak więc, jeśli $\mathfrak{N} \models C(x_1)$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$. Term t był dowolnie wybranym elementem zbioru H_Γ. Mamy zatem: jeśli $\mathfrak{N} \models A$, to $\mathfrak{M} \models C(t/x_1)$ dla wszystkich $t \in H_\Gamma$. Ponieważ H_Γ jest uniwersum struktury $\mathfrak{M}$, więc z definicji relacji $\models$ otrzymujemy: $\mathfrak{M} \models \forall x_1 C(x_1)$. Ponieważ A jest identyczne z $\forall x_1 C(x_1)$, dowód (2) został zakończony.

Dowód (3).

Dla każdego $A_i \in \Gamma$ mamy:

- $\mathfrak{N} \models A_i$
- A_i jest w skolemowej postaci normalnej

- A_i nie zawiera predykatu identyczności.

Spełnione są zatem wszystkie założenia (2). Tak więc, $\mathfrak{N} \models \Gamma$. To kończy dowód (3), a zarazem całego twierdzenia 8.3.1.

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że:

- (†) Jeśli A jest formułą w skolemowej postaci normalnej bez predykatu identyczności, to: A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy A ma model Herbranda.

Dlaczego w twierdzeniu 8.3.1. istotne było założenie, że Γ nie zawiera wystąpień znaku identyczności? Poniższy przykład stanowi odpowiedź na to pytanie.

Przykład III.8.3.1.1. (Hedman 2004: 115).

Rozważmy zdanie A postaci $\forall x\, ((f(x) \neq x) \wedge (f(f(x)) = x))$. Słownikiem Herbranda dla A jest zbiór $\{c, f\}$, gdzie c jest dowolną stałą indywiduową. Uniwersum Herbranda dla A jest zbiorem nieskończonym: $H_A = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$. W każdej interpretacji Herbranda elementy c oraz $f(f(c))$ są oczywiście różne. Ponieważ konsekwencją A jest zdanie $\forall x\, f(f(x)) = x$, więc w szczególności $c = f(f(c))$ także jest konsekwencją A. Zdanie A nie może zatem posiadać żadnego modelu Herbranda. Łatwo jednak zobaczyć, że zbiór $\{A\}$ jest spełnialny: modelem dla A jest np. zbiór wszystkich liczb całkowitych (bez zera), w którym symbol funkcyjny f interpretujemy tak, aby $f(x) = -x$.

Jak radzić sobie w przypadku, gdy rozważany zbiór formuł zawiera wystąpienia znaku identyczności? Oto stosowna procedura.

Przypuśćmy, że A jest formułą w skolemowej postaci normalnej i że w A występuje predykat identyczności. Wtedy (†) nie zachodzi dla A. Zdefiniujemy formułę A^* taką, że:

- (†) zachodzi dla A^*
- (‡) A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy A^* jest spełnialna.

Niech E będzie dwuargumentowym predykatem nie występującym w V_A. Poszukiwana formuła A^* jest koniunkcją formuł A_1, A_2, A_3 oraz A_4, zdefiniowanych następująco:

- A_1 jest formułą powstającą z A poprzez zastąpienie każdej równości termów $t_1 = t_2$ występującej w A przez formułę $E(t_1, t_2)$.
- A_2 jest koniunkcją warunków stwierdzających, że E denotuje relację równoważności (tj. zwrotną, przechodnią i symetryczną).
- Dla każdego n-argumentowego predykatu R z V_A niech A_R będzie formułą:

  $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} (E(x_i, y_i \wedge R(x_1, \ldots, x_n))) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

  Niech A_3 będzie koniunkcją wszystkich formuł A_R.
- Dla każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego f z V_A niech A_f będzie formułą:

  $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \rightarrow E(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n))).$$

  Niech A_4 będzie koniunkcją wszystkich formuł A_f.

Niech A^* będzie skolemową postacią normalną koniunkcji formuł A_1, A_2, A_3 oraz A_4. Z konstrukcji A^* widać, że nie zawiera ona predykatu identyczności. Tak więc, (†) zachodzi dla A^*. Niech wykazanie, że zachodzi także (‡) będzie ćwiczeniem dla czytelniczek. Wskazówka: należy oczywiście rozważyć model ilorazowy.

Rozważmy jeszcze raz formułę A postaci $\forall x\ ((f(x) \neq x) \wedge (f(f(x)) = x))$ z przykładu 8.3.1.1. i zastosujmy do niej powyżej opisaną procedurę. Ponieważ formuła A^* spełnia warunek (†), więc A^* posiada model Herbranda o uniwersum $H_A = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$. Możemy interpretować E w tym modelu jako relację równoważności o dwóch klasach: w jednej są termy zawierające parzystą liczbę wystąpień symbolu f, a w drugiej pozostałe termy. Wynika stąd również, że formuła A ma model dwuelementowy o uniwersum np. postaci $\{a, b\}$, w którym symbol funkcyjny f interpretujemy tak, aby: $f(a) = b$ oraz $f(b) = a$.

Teraz możemy opisać procedurę pozwalającą ustalać, czy dowolna formuła języka KRP jest niespełnialna.

Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej, nie zawierającą predykatu identyczności. Tak więc, A jest postaci $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie B nie zawiera ani kwantyfikatorów, ani predykatu identyczności. Przypominamy, że H_A jest uniwersum Herbranda dla A. Zdefiniujmy zbiór:

$$E(A) = \{B(t_1, \ldots, t_n)\ :\ t_1, \ldots, t_n \in H_A\}.$$

Zbiór $E(A)$ otrzymujemy zatem przez podstawienia wszelkich możliwych termów z H_A za zmienne w B, na wszelkie możliwe sposoby. Niech $\{A_1, A_2, \ldots\}$ będzie wyliczeniem wszystkich elementów zbioru $E(A)$. Pokażemy, że A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ jest spełnialny.

Lemat 8.3.2. Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej, nie zawierającą predykatu identyczności. Wtedy: A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ jest spełnialny.

Dowód.

Dowód implikacji z lewa na prawo jest dość prosty. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest modelem dla A, to:

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n).$$

W szczególności, $\mathfrak{M} \models B(t_1, \ldots, t_n)$ dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in H_A$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models A_i$ dla wszystkich i, a więc $\mathfrak{M} \models E(A)$.

Dla dowodu implikacji w drugą stronę załóżmy, że $E(A)$ jest spełnialny. Wtedy, na mocy twierdzenia 8.3.1., $E(A)$ ma model Herbranda $\mathfrak{M}$. Alfabet Herbranda dla $E(A)$ jest taki sam jak alfabet Herbranda dla A. Tak więc, uniwersum $\mathfrak{M}$ jest równe H_A. Dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in H_A$, mamy $\mathfrak{M} \models B(t_1, \ldots, t_n)$, ponieważ $B(t_1, \ldots, t_n) \in E(A)$. Z definicji relacji $\models$ otrzymujemy, że $\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ B(x_1, \ldots, x_n)$. Oznacza to, że $\mathfrak{M} \models A$, czyli że A jest spełnialna.

Z powyższego wynika, że A ***nie*** jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ ***nie*** jest spełnialny. Ponieważ $E(A)$ zawiera jedynie zdania bez kwantyfikatorów, więc możemy uważać $E(A)$ za zbiór formuł języka KRZ (po stosownych podstawieniach zmiennych zdaniowych za formuły atomowe). Ponieważ A jest w skolemowej postaci normalnej, więc każda formuła w $E(A)$ jest w koniunkcyjnej postaci normalnej. W rozdziale II udowodniono, że zbiór S formuł języka KRZ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in \mathcal{R}(S)$ (zob. też Lemat 8.4.2. poniżej). Wiemy zatem, że $E(A)$ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in \mathcal{R}(E(A))$. Z Twierdzenia o Zwartości dla KRZ (również udowodnionego w rozdziale II) wynika, że $E(A)$ jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien skończony podzbiór $\{A_1, \ldots, A_m\}$ zbioru $E(A)$ jest niespełnialny. Tak więc, jeśli A jest niespełnialna, to $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$ dla pewnego m. Zauważmy, że $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$ jest zbiorem ***skończonym***.

Procedura powyższa dostarcza metody ustalania, że A jest niespełnialna. Sprawdzamy, czy dla pewnego m zachodzi $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m\})$. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to A jest niespełnialna. W przeciwnym przypadku sprawdzamy, czy $\Box \in \mathcal{R}(\{A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}\})$, itd. Jeśli A ***jest*** niespełnialna, to ta procedura poda tę odpowiedź po skończonej liczbie kroków. Jeśli natomiast A ***jest*** spełnialna, to omawiana procedura nie zakończy się.

Zauważmy, że nie ma żadnego ograniczenia (z góry) liczby kroków, w której powyższa procedura ewentualnie się zakończy.

III.8.4. Trafność i pełność rezolucyjna

Pokażemy teraz, że metoda rezolucji ma „porządne” własności metalogiczne, tj. że jest (w ściśle określonym sensie) trafna oraz pełna.

Przypuśćmy, że literały pozytywne $C_1, \ldots, C_n$ nie zawierają zmiennych wolnych. Niech S będzie dowolnym zbiorem klauzul. Chcielibyśmy, aby rezolucyjny dowód klazuli pustej $\Box$ ze zbioru $S \cup \{\neg C_1, \ldots, \neg C_n\}$ implikował, że wszystkie C_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ wynikają logicznie ze zbioru S. Będzie to konsekwencją podanego niżej twierdzenia o pełności metody rezolucji.

Jeśli P jest programem, a $G = \{\neg A_1, \ldots \neg A_n\}$ klauzulą celową, to powiemy, że podstawienie θ (za zmienne z G) jest ***podstawieniem wyznaczającym poprawną odpowiedź***, gdy $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\theta$ wynika logicznie z (uniwersalnego domknięcia) P. W rozdziale IV pokażemy, że jeśli program $P \cup \{G\}$ nie jest spełnialny, to istnieje podstawienie wyznaczające poprawną odpowiedź o wartościach w zbiorze termów bez zmiennych. Będzie to konsekwencją twierdzenia Herbranda.

W rozdziale II omówiono metodę rezolucji dla KRZ. Pojęcia: dowodu rezolucyjnego, rezolucyjnej refutacji, rezolucyjnego drzewa dowodowego, domknięcia rezolucyjnego są w KRZ analogiczne, jak podane wyżej dla KRP (z oczywistymi modyfikacjami). Przypomnimy niżej (bez dowodów) pewne twierdzenia dotyczące rezolucji w KRZ. Będą one potrzebne w dowodach trafności i pełności rezolucji w KRP.

- Lemat 8.4.1. Istnieje rezolucyjne drzewo dowodowe dla C z S wtedy i tylko wtedy, gdy C jest rezolucyjnie dowodliwa z S w KRZ.
- Lemat 8.4.2. C jest rezolucyjnie dowodliwa z S w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \in \mathcal{R}(S)$. W szczególności, istnieje rezolucyjna refutacja S wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in \mathcal{R}(S)$.
- Lemat 8.4.3. Jeśli $S = \{C_1, C_2\}$ jest spełnialny w KRZ oraz C jest rezolwentą C_1 i C_2, to C jest spełnialna w KRZ. Co więcej, każde wartościowanie zmiennych zdaniowych, które spełnia S, spełnia też C.
- Lemat 8.4.4. Dla dowolnego zbioru formuł T języka KRZ oraz dowolnego literału ℓ: jeśli T jest niespełnialny, to niespełnialny jest także zbiór $\{C \in \mathcal{R}(T) \ : \ \ell, \overline{\ell} \notin C\}$.
- Twierdzenie 8.4.5. (***Trafność rezolucji w KRZ***). Jeżeli istnieje rezolucyjna refutacja S, to S nie jest spełnialny w KRZ.
- Twierdzenie 8.4.6. (***Pełność rezolucji w KRZ***). Jeżeli S jest niespełnialny w KRZ, to istnieje rezolucyjna refutacja S.

Dowody tych twierdzeń podano w rozdziale II. Przypomnijmy jeszcze następujące porównanie reguły rezolucji z regułą modus ponens w KRZ:

- Reguła rezolucji: z formuł $A \vee C$ oraz $\neg A \vee B$ wywnioskuj $C \vee B$
- Reguła modus ponens: z formuł $A \to B$ oraz A wywnioskuj B (lub, w postaci równoważnej: z formuł $\neg A \vee B$ oraz A wywnioskuj B).

Najpierw udowodnimy trafność metody rezolucji, tj. pokażemy, że jeśli klauzula pusta należy do rezolucyjnego domknięcia zbioru S, to S nie jest spełnialny.

Twierdzenie 8.4.7. (***Trafność metody rezolucji w KRP***). Jeśli $\Box \in \mathcal{R}(S)$, to S nie jest spełnialny.

Dowód. Niech $\Box \in \mathcal{R}(S)$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że S jest spełnialny, czyli że istnieje interpretacja $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models S$.

Dla udowodnienia twierdzenia wystarczy pokazać, że:

- $(\bigstar)$ jeśli $\mathfrak{M} \models C_1$ i $\mathfrak{M} \models C_2$, to $\mathfrak{M} \models C$, gdzie C jest rezolwentą C_1 oraz C_2.

Istotnie, jeśli zachodzi (★), to można pokazać (przez indukcję po złożoności formuł), że $\mathfrak{M} \models C$ dla wszystkich $C \in \mathcal{R}(S)$. Ponieważ $\Box \in \mathcal{R}(S)$, więc byłoby wtedy $\mathfrak{M} \models \Box$, a to jest sprzeczność.

Dowód (★) jest uogólnieniem procedury, którą wykonywaliśmy w przykładzie III.8.2.3.

Jeśli C jest rezolwentą C_1 i C_2, to C ma postać $D_1\sigma \cup D_2\sigma$ (gdzie D_1, D_2 oraz σ są oznaczeniami takimi, jakie występują w definicji rezolwenty). Przypominamy, że klauzula odpowiada formule generalnie skwantyfikowanej.

Dla każdego podstawienia τ, którego wartościami są termy bez zmiennych mamy:

- $\mathfrak{M} \models D_1\sigma\tau$ albo
- $\mathfrak{M} \models D_2\sigma\tau$.

W konsekwencji, także $C\tau$, które jest sumą $D_1\tau$ oraz $D_1\tau$, jest prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

Tak więc, jeśli ze zbioru S klauzul da się rezolucyjnie wyprowadzić klauzulę pustą $\Box$ (reprezentującą sprzeczność), to zbiór S jest niespełnialny, nie ma modelu.

Pokażemy teraz dowód implikacji odwrotnej, tj. tego, że jeśli zbiór S jest niespełnialny, to można z niego rezolucyjnie wyprowadzić klauzulę pustą $\Box$.

Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej, nie zawierającą predykatu identyczności. W Lemacie 8.3.2. pokazano, ze wtedy: A jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $E(A)$ jest spełnialny. Ponieważ elementami zbioru $E(A)$ są zdania (!) otrzymane z A przez opuszczenie kwantyfikatorów oraz zastąpienie wszystkich zmiennych termami z H_A, więc elementy $E(A)$ można traktować jak formuły języka KRZ.

Przypuśćmy, że D_1 oraz D_2 są elementami $E(A)$ i że R' jest rezolwentą D_1 oraz D_2 ***w sensie rezolucji w KRZ***. Istnieją wtedy klauzule C_1 oraz C_2 otrzymane z A (tj. klauzule odpowiadające dwóm członom koniunkcyjnej postaci A) takie, że $D_1 = C_1\sigma_1$ oraz $D_2 = C_2\sigma_2$ dla pewnych σ_1 oraz σ_2. Pokażemy w następnym lemacie, że istnieje wtedy rezolwenta ***w sensie rezolucji w KRP*** R dla C_1 oraz C_2 oraz podstawienie σ takie, że $R\sigma = R'$. Mówiąc nie całkiem precyzyjnie, lemat ten stwierdza, że cokolwiek może zostać wyprowadzone rezolucyjnie *w sensie KRZ* z $E(A)$, może też zostać wyprowadzone rezolucyjnie *w sensie KRP* z A.

LEMAT 8.4.8. (***Lemat o podnoszeniu***). Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej. Jeśli $R' \in res(E(A))$, to istnieje $R \in res(A)$ taka, że $R\sigma' = R'$.

DOWÓD.

Może, przed właściwym dowodem, pożyteczna będzie pewna ilustracja (wyjaśniająca jednocześnie nazwę lematu).

Niech A będzie dowolną formułą języka KRP w skolemowej postaci normalnej. Niech C_1 i C_2 będą dwiema klauzulami z A. Niech τ będzie podstawieniem takim, że $C_1\tau$ oraz C_2 nie mają żadnych wspólnych zmiennych. Niech C_1' i C_2' będą takimi elementami $E(A)$, że $C_1\tau\sigma_1 = C_1'$ oraz $C_2\sigma_2 = C_2'$ dla pewnych podstawień σ_1 oraz σ_2. Wreszcie, niech R' będzie rezolwentą (w sensie KRZ) dla C_1' i C_2'. Sytuacje tę przedstawia diagram (kreski ukośne odpowiadają rezolucji):

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 & & & & \\
\downarrow^{\tau} & & & & \\
C_1\tau & & & & C_2 \\
\downarrow^{\sigma_1} & & & & \downarrow^{\sigma_2} \\
C_1' & & & & C_2' \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 & & R' & &
\end{array}$$

Teza lematu o podnoszeniu mówi wtedy, że istnieje rezolwenta R dla $C_1\tau$ oraz C_2 (w sensie KRP) taka, że $R\sigma' = R'$, co symbolizuje poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C_1 \arrow[d, "\tau"] & & \\
C_1\tau \arrow[dr, no head] & & C_2 \arrow[dl, no head] \\
& R & \\
& R' \arrow[u, "\sigma'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pierwszy z powyższych diagramów dotyczy rezolucji w KRZ, drugi rezolucji w KRP.

Przejdźmy do dowodu. Przypuśćmy, że zachodzą założenia lematu (zob. pierwszy diagram). Wtedy, na mocy definicji rezolucji w KRZ, musi istnieć literał $L \in C_1'$ taki, że $\overline{L}C_2'$ oraz $R' = (C_1' - \{L\}) \cup (C_2' - \overline{L})$.

Niech $\sigma' = \sigma_1\sigma_2$. Ponieważ $C_1\tau$ oraz C_2 nie mają żadnych wspólnych zmiennych, więc $C_1\tau\sigma' = C_1\tau\sigma_1 = C_1'$ oraz $C_2\sigma' = C_2\sigma_2 = C_2'$.

Niech $\mathbb{L}_1 = \{L_1, \ldots, L_n\}$ będzie zbiorem tych wszystkich literałów L_i z $C_1\tau$, dla których $L_i\sigma' = L$. Podobnie, niech $\mathbb{L}_2 = \{L_1', \ldots, L_m'\}$ będzie zbiorem tych wszystkich literałów L_i z C_2, dla których $L_i'\sigma' = \overline{L}$.

Zilustrujmy dokonane konstrukcje diagramem:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{L}_1 \arrow[d, "\sigma'"] & \subset & C_1\tau \arrow[d, "\sigma'"] & & & C_2 \arrow[d, "\sigma'"] & \supset & \mathbb{L}_2 \arrow[d, "\sigma'"] \\
L & \in & C_1' \arrow[drr, no head] & & & C_2' \arrow[dl, no head] & \ni & \overline{L} \\
& & & & R & & &
\end{tikzcd}$$

Niech $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$. Zbiór $\mathbb{L}$ jest uzgadnialny, ponieważ $\mathbb{L}\sigma' = \{\overline{L}\}$. Niech σ będzie najbardziej ogólnym unifikatorem dla $\mathbb{L}$. Z definicji rezolucji w KRP znajdujemy rezolwentę R dla C_1 oraz C_2:

$$R = ((C_1\tau - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2))\sigma.$$

Trzeba jeszcze pokazać, że R' może zostać otrzymana z R przez podstawienie. Pokażemy, że $R\sigma' = R$. Zwróćmy uwagę, że ponieważ σ' jest unifikatorem dla $\mathbb{L}$, a σ jest najbardziej ogólnym unifikatorem dla $\mathbb{L}$, więc $\sigma\sigma' = \sigma'$. Mamy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
R\sigma' \quad &= ((C_1\tau - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2))\sigma\sigma' = \\
&= ((C_1\tau - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2))\sigma' = \\
&= (C_1\tau\sigma' - \mathbb{L}_1\sigma') \cup (C_2\sigma' - \mathbb{L}_2\sigma') = \\
&= (C_1' - \{L\}) \cup (C_2' - \{\overline{L}\}) = \\
&= R'
\end{aligned}$$

Tym samym dowód lematu o podnoszeniu został zakończony. Konsekwencją tego lematu jest lemat następujący.

LEMAT 8.4.9. Niech A będzie dowolnym zdaniem języka KRP w skolemowej postaci normalnej. Jeśli $C' \in \mathcal{R}(E(A))$, to istnieje $C \in \mathcal{R}(A)$ oraz podstawienie σ' takie, że $C\sigma' = C$.

DOWÓD.

Jeśli $C' \in \mathcal{R}(E(A))$, to $C' \in res_n(E(A))$ dla pewnego n. Dowód przeprowadzimy przez indukcję po n.

Gdy $n = 0$, to $C\sigma' \in E(A)$. Wtedy, z definicji $E(A)$, $C\sigma'$ otrzymujemy przez podstawienie za zmienne termów bez zmiennych w pewnej klauzuli C z A.

W kroku indukcyjnym skorzystamy z lematu o podnoszeniu. Przypuśćmy, że dla pewnego m każda klauzula w $res_m(E(A))$ otrzymana jest z pewnej klauzuli z $\mathcal{R}(A)$ poprzez podstawienie. Niech $\widetilde{A} \subset \mathcal{R}(A)$ będzie taka, że każda klauzula z $res_m(E(A))$ otrzymana jest z pewnej klauzuli z $\widetilde{A}$. Wtedy $res_m(E(A)) \subset E(\widetilde{A})$. Jeśli $C' \in res_{m+1}(E(A))$, to $C' \in res(E(\widetilde{A}))$. Na mocy lematu o podnoszeniu, istnieje $C \in res(\widetilde{A})$ taka, że $C\sigma' = C'$ dla pewnego podstawienia σ'. Ponieważ $\widetilde{A} \subset \mathcal{R}(A)$, więc $C \in \mathcal{R}(A)$. To kończy dowód.

Powyższe lematy są potrzebne do udowodnienia najważniejszego wyniku w tym podrozdziale, a mianowicie twierdzenia o pełności rezolucji.

TWIERDZENIE 8.4.10. (***Twierdzenie o pełności rezolucji w KRP***). Niech A będzie dowolnym zdaniem języka KRP w skolemowej postaci normalnej. Jeśli A jest niespełnialna, to $\Box \in \mathcal{R}(A)$.

DOWÓD.

Na mocy lematu 8.4.9., jeśli $\Box \in \mathcal{R}(E(A))$, to istnieje $C \in \mathcal{R}(A)$ taka, że $C\sigma' = \Box$ dla pewnego podstawienia σ'. To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy $C = \Box$. Tak więc, jeśli $\Box \in \mathcal{R}(E(A))$, to $\Box \in \mathcal{R}(A)$. Wnioskujemy stąd, że jeśli A jest niespełnialna, to $\Box \in \mathcal{R}(A)$.

Uwaga. Czasem przez twierdzenie o pełności rezolucji w KRP rozumie się łącznie twierdzenia 8.4.7. oraz 8.4.10.

* * *

Jest wiele różnych, bardziej subtelnych od powyższego — całkowicie ogólnego — rodzajów rezolucji. Problematyka ta jest intensywnie badana, przede wszystkim w związku z zastosowaniami metody rezolucji w automatycznym dowodzeniu twierdzeń. O pewnych zastosowaniach tej metody piszemy w rozdziale V.

III.8.5. Uwagi końcowe do rozdziału III

Brauchen wir eine Lebensregel, so sei es diese:
„Bewahre den Geist der Jugend!”
Denn er ist der Sinn des Lebens.
Moritz Schlick: Vom Sinn des Lebens.
Symposion **1**, 1927: 354.

Rozdział III skryptu ma charakter propedeutyczny. Podrozdziały III.0.–III.1. wprowadzały podstawowe pojęcia związane z metodą drzew semantycznych w KRP. Część tego materiału zostanie przeniesiona do rozdziału I, gdzie piszemy m.in. o: językach formalnych, grafach i drzewach, dowodach indukcyjnych, itd. Podrozdziały III.2.–III.5. miały charakter zabawowy: omówione w nich przykłady mogą posłużyć do urozmaicenia kursu logiki. Podrozdziały III.6.–III.8. miały charakter kompilacyjny: sprawozdano w nich pewne ustalenia dotyczące prostych zastosowań KRP (III.6.) oraz pojęć unifikacji i rezolucji, ważnych dla materiału przedstawionego w rozdziale IV. Problematyka podrozdziału III.6. jest w bardziej rozwiniętej postaci przedstawiona w podrozdziale IV.9. Zadania podane w podrozdziale III.9. zostaną włączone do rozdziału VI, grupującego wszystkie zadania skryptu.

Metodę drzew semantycznych dla KRZ przedstawiono w rozdziale II. Związki metody drzew semantycznych z innymi metodami dowodowymi w Klasycznym Rachunku Logicznym omawiamy w rozdziale IV (przede wszystkim w IV.6.). Zastosowania metody drzew semantycznych omawiane są w rozdziale V.

* * *

Skrypt nie jest pomyślany jako standardowy podręcznik logiki. Ma być jedynie prezentacją określonej metody dowodowej — metody drzew semantycznych. Wydaje się, że tekst można zalecić jako uzupełnienie do przeprowadzenia ***dwóch*** kursów:

- Kurs Zabawowy. Rozdziały: I, II, III (oraz część zadań z rozdziału VI). Materiał ten może stanowić lekturę uzupełniającą w kursie Logiki dla np.: filolożek, psycholożek, socjolożek, filozofek, lingwistek, itp.
- Kurs Standardowy. Rozdziały: I, IV, V (oraz część zadań z rozdziału VI). Ten materiał może być wykorzystany jako lektura uzupełniająca w kursie Logiki Matematycznej dla np.: studentów matematyki oraz informatyki.

Całość skryptu jest tak skomponowana, aby materiał dla każdego z obu wymienionych wyżej kursów mógł być poznawany niezależnie od drugiego.

* * *

Jak wiadomo, Logika zajmuje się pojęciami: Dowodu oraz Wynikania Logicznego. Związki między tymi pojęciami ustalają twierdzenia metalogiczne: Twierdzenie o Trafności oraz Twierdzenie o Pełności. Pewne Twierdzenia Limitacyjne określają samoograniczenia stosowalności metod KRP. Tak więc, Klasyczny Rachunek Logiczny jest dyscypliną o dobrze rozwiniętej metodologii. Należy jednak pamiętać, że Logika nie jest dyscypliną zamkniętą. Nowe inspiracje dla niej znajdujemy na kilku obszarach. Wymieńmy trzy z nich:

- Praktyka Badawcza Matematyki. Pojęcie Dowodu rozważane w logice jest tylko idealizacją (normatywną względem *Przeszłości*?) praktyki matematycznej. Przy tym, to owa praktyka matematyków jest fundamentalna dla tworzenia pojęć logicznych (a nie na odwrót). Tak więc, rozwój logiki może być inspirowany przez badania matematyczne. W ten sposób powstały np. logiki wyższych rzędów, logiki infinitarne, logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami, logiki intuicjonistyczne, itd.

- TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI. Z oczywistych powodów badania informatyczne muszą być wspomagane badaniami logicznymi. Źródeł informatyki teoretycznej poszukiwać należy przecież w rozważaniach logicznych. Rozwój informatyki inspiruje z kolei nowe badania logiczne. W ten sposób powstały np. logiki algorytmiczne, nowe interpretacje dla logik modalnych, itd.

- PRAGMATYKA LOGICZNA. Pojęcie NIEZAWODNEJ REGUŁY WNIOSKOWANIA zostało wyabstrahowane (w cywilizacji Zachodu) z rozumowań przeprowadzanych w językach naturalnych. W tej postaci, w jakiej stosowane jest ono obecnie (odwołującej się do czysto FORMALNYCH, składniowych, własności komunikatów oraz do znaczenia ustalonego zestawu STAŁYCH LOGICZNYCH) jest ono adekwatne do opisu tworzenia i przekształcania WIEDZY w aparaturze pojęciowej poszczególnych nauk. Jest problemem otwartym, czy ***obecnie*** znane systemy logiczne potrafią trafnie reprezentować wszelkie rozumowania przeprowadzane w języku naturalnym, którym chcielibyśmy nadać walor — jakoś pragmatycznie rozumianej — prawomocności. Stąd kolejna inspiracja dla badań logicznych.

* * *

Jednym ze skromnych celów niniejszego skryptu jest to, aby uświadomić ewentualnym czytelniczkom różnice między:

- ***Wynikaniem logicznym*** a ***uzasadnianiem*** oraz ***uznawaniem*** zdań. Pierwsze z tych pojęć ma, w dzisiejszym rozumieniu, charakter obiektywny; drugie i trzecie mogą odwoływać się do różnych czynników, także natury pragmatycznej. Uzasadnianie może mieć postać precyzyjnego dowodu, ale może też odwoływać się do zabawnych reguł LOGIKI UZNANIOWEJ.

- ***Dowodzeniem*** a procedurami czysto ***algorytmicznymi***. Pierwsza z tych aktywności ma charakter ***twórczy***, drugie są działaniami wedle określonego przepisu.

Jeśli lektura skryptu nie przeszkodzi w osiągnięciu tych celów, to pozwolimy sobie uznać, że praca nad nim miała SENS.

Odnośniki bibliograficzne do podrozdziału III.8.

Bachmair, L., Ganzinger, H. 2001. Resolution theorem proving. W: *Handbook of Automated Reasoning.*, 19–99.

Ben-Ari, M. 2005. *Logika matematyczna w informatyce.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Handbook of Automated Reasoning. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hedman, S. 2004. *A first course in logic.* Oxford University Press.

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for applications.* Springer.

* * *

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl