# Zermelo i geneza logik infinitarnych

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

VIII PZF 2008

# Ernst Zermelo

Ernst Zermelo (1871–1953)

# Wprowadzenie

Ernst Zermelo znany jest głównie ze swoich prac dotyczących teorii mnogości:

- dowodu twierdzenia o możliwości dobrego uporządkowania (1904, 1908);
- pierwszej aksjomatyki teorii mnogości (1908) .

Prace Zermela dotyczące projektu logiki infinitarnej, z lat 1921–1935 są mniej znane.

Dobrym przedstawieniem pomysłów Zermela dotyczących logiki infinitarnej jest artykuł:

- Taylor, R.G. 2002. Zermelo's Cantorian theory of systems of infinitely long propositions. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **8**, Number **4**, 478–515.

# Dyskusja w Sekcji Logiki

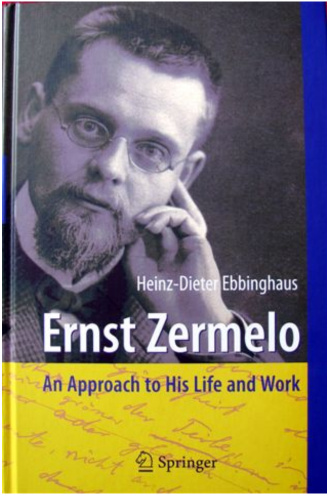
Dzisiaj o godzinie 18:00 w Sekcji Logiki odbędzie się dyskusja:

***Zermelo a Szkoła Warszawska.***
***100 lat aksjomatycznej teorii mnogości.***

- **Roman Murawski**: Program rozwoju teorii mnogości w Szkole Warszawskiej.
- **Jan Zygmunt**: Zermelo a polscy matematycy.
- **Stanisław Krajewski**: O metodzie aksjomatycznej.
- **Zofia Adamowicz**: Teoria mnogości: od Zermela do Cohena.
- **Janusz Czelakowski**: Kategoryczność teorii mnogości.
- **Krzysztof Wójtowicz**: Realizm teoriomnogościowy.

# Ernst Zermelo: biografia

Wydawnictwo Springer przygotowuje dwutomową, dwujęzyczną edycję dzieł zebranych Zermela. Polecamy znakomity tekst przedstawiający biografię oraz dokonania naukowe Ernsta Zermela:



# „Matematyka jest logiką Nieskończonego"

Przetłumaczono na język polski prace Ernsta Zermela z podstaw matematyki.

- Spis treści podaje handout.
- Opracowywane są komentarze do poszczególnych prac.

W szczególności, tłumaczenie to zawiera wszystkie teksty Zermela dotyczące jego projektu logiki infinitarnej.

# Wykorzystywane notatki własne

Wykorzystujemy też następujące źródła:

- Niepublikowaną monografię: ***Infinitarna Logika Ernsta Zermela*** (Praca wykonana w latach 2004–2006 w ramach projektu badawczego KBN 2H01A 00725 *Metody nieskończonościowe w teorii definicji*, kierowanego przez Pana Profesora **Janusza Czelakowskiego** w Instytucie Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, 181 stron.), spis treści dostępny: http://www.logic.amu.edu.pl/images/c/cc/2H01A00725.pdf
- Artykuł: ***Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela*** opublikowany w 2006 roku w *Investigationes Linguisticae* **XIV**, 18–49: http://www.inveling.amu.edu.pl/index.php?page=issues&vol=14&cat=0&article=119
  Tekst dostępny także na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM: http://www.logic.amu.edu.pl/images/f/fc/Art04.pdf

# Kiedy logika jest infinitarna?

Logikę uważamy za infinitarną co najmniej w następujących przypadkach:

- rozważany język dopuszcza formuły nieskończenie długie;
- dopuszcza się nieskończenie długie dowody;
- stosuje się niefinitarne reguły wnioskowania (np. $\omega$-regułę).

Jest osobnym pytaniem, czy logikę zaczynamy uważać za infinitarną także wtedy, gdy alfabet używanych symboli jest nieprzeliczalny, choć wyrażenia i reguły inferencji są finitarne.

Zwróćmy na marginesie uwagę na asymetrię między składnią a semantyką logik finitarnych: oto o dowolnych (dowolnej mocy) strukturach „mówić" mamy w językach o z góry zadanych nie tylko środkach nazywania, ale także wyrażania. W konsekwencji, prowadzi się długotrwałe dyskusje np. na temat paradoksu Skolema, który jest po prostu — w opinii piszącego te słowa — nie paradoksem, lecz jedynie pewnym *efektem* stosowania finitarnych środków wyrażania w „mówieniu" o mnogościach nieprzeliczalnych.

# Ernst Zermelo: uwagi biograficzne

Ernst Friedrich Ferdynand Zermelo (1871–1953) należał do najwybitniejszych matematyków XX wieku.

- Praca w Getyndze (w pierwszej fazie programu Hilberta, 1900–1910). W tym okresie powstają pierwsze prace Zermela z teorii mnogości.
- Praca w Zurychu (1910–1916).
- Praca we Freiburgu (1921–1935). W tym okresie powstaje projekt logiki infinitarnej.

Trzy wielkie bitwy Zermela:

- krytyka kinetycznej teorii ciepła Boltzmanna
- aksjomat wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu
- walka ze Skolemizmem oraz „przesądami finitystycznymi”.

# Projekt logiki infinitarnej

Wydaje się, że wśród inspiracji dla projektu logiki infinitarnej Zermela jako istotne wymienić można następujące czynniki:

- poglądy Zermela na naturę nieskończoności; przekonanie, że *matematyka jest logiką Nieskończonego*;
- przekonanie Zermela o fundamentalnej dla całości matematyki roli (jego systemu) teorii mnogości; w szczególności, traktowanie formuł oraz dowodów jako (dobrze ufundowanych) tworów z hierarchii kumulatywnej zbiorów (przedstawionej w artykule z 1930 roku);
- odrzucenie *skolemizmu*; przekonanie, że ani przedmiotu badań teorii mnogości nie można zredukować do pojedynczego jej modelu, ani nie można zaakceptować *finitystycznego* punktu widzenia w procedurze dowodzenia twierdzeń matematycznych;
- przekonanie, że nie należy nakładać ograniczeń na postać formuł w aksjomacie wyróżniania (w szczególności, nie ograniczać się do języka pierwszego rzędu).

# Projekt logiki infinitarnej

Etapy tworzenia projektu logiki infinitarnej Zermela:

- Zermelo a Skolem: spór o rozumienie pojęcia *Definitheit*
- wykłady w Warszawie: Tezy o Nieskończonym w matematyce
- druga aksjomatyka teorii mnogości: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* **16** (1930), 29–47
- Zermelo a Gödel: spór o rozumienie pojęcia dowodu
- ostatnia opublikowana praca: Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme. Erste Mitteilung. *Fundamenta Mathematicae* **25** (1935), 136–146.

# Postać aksjomatu wyróżniania

Jak dobrze wiadomo, postulowanie istnienia (w naiwnej teorii mnogości) zbioru wszystkich przedmiotów posiadających dowolną wybraną własność prowadzi do antynomii (antynomia Zermelo-Russella).

W aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości unika się tych antynomii proponując różne rozwiązania:

- aksjomatyki Zermela z 1908 i 1930 roku;
- propozycja Skolema
- propozycje Fraenkla, von Neumanna, Bernaysa,. . .
- współczesne wersje aksjomatu wyróżniania.

# Druga (1930) aksjomatyka teorii mnogości

W artykule z 1930 roku dodane zostają aksjomaty: zastępowania oraz ufundowania.
Zermelo opuszcza natomiast aksjomaty: nieskończoności (jako „nie należący do ogólnej teorii mnogości") oraz wyboru (przyjęty jako „ogólna zasada logiczna").

Ponadto, praca ta przynosi:

- konstrukcję kumulatywnej hierarchii dziedzin normalnych;
- twierdzenia o izomorfizmie dziedzin normalnych (względem dwóch parametrów: mocy bazy oraz charakterystyki);
- rozważania dotyczące liczb kardynalnych mocno nieosiągalnych.

# Polemika ze Skolemem

Spory Zermela ze Skolemem dotyczyły dwóch spraw:

- kształtu aksjomatu wyróżniania (Zermelo dopuszczał dowolne funkcje zdaniowe, Skolem proponował ograniczenie do funkcji zdaniowych logiki pierwszego rzędu);
- istnienia modeli teorii mnogości (Zermelo nie mógł pogodzić się ze stosowaniem twierdzenia Löwenheima-Skolema w teorii mnogości; wykluczał sprowadzanie **całej** teorii mnogości do jej przeliczalnego modelu; uważał, że dopiero cała hierarchia dziedzin normalnych opisuje teorię mnogości).

W sporze tym zwyciężyła teoria mnogości formułowana w języku pierwszego rzędu.

# Tezy o Nieskończonym w matematyce

Ernst Zermelo 17 lipca 1921

- I. Każde autentyczne [w oryginale: „echte", co tłumacz angielski oddaje przez: „genuine"] zdanie matematyczne ma charakter „infinitarny", tj. odnosi się do [jakiejś] *nieskończonej* dziedziny i powinno być rozpatrywane jako kombinacja nieskończenie wielu „zdań elementarnych".
- II. Nieskończone nie jest nam dane w rzeczywistości ani fizycznie, ani psychicznie, musi być pojmowane i „usytuowane" jako „idea" w sensie Platońskim.
- III. Ponieważ zdania infinitarne nigdy nie mogą zostać wyprowadzone z finitarnych, więc także „aksjomaty" każdej teorii matematycznej muszą być infinitarne, a „niesprzeczności" takiej teorii nie można „dowieść" inaczej, jak przez wskazanie odpowiedniego niesprzecznego systemu nieskończenie wielu zdań elementarnych.

# Tezy o Nieskończonym w matematyce

- IV. Tradycyjna logika „Arystotelesowska" jest ze swojej natury finitarna i stąd nieprzystosowana do ugruntowania nauk matematycznych. Powstaje zatem konieczność rozszerzonej logiki „infinitarnej" lub „Platońskiej", która opiera się na pewnego rodzaju infinitarnym „oglądzie" [w oryginale: „Anschauung", co tłumacz angielski oddaje przez: „intuition".] — jak np. w przypadku „aksjomatu wyboru" — która jednak, paradoksalnie, odrzucana jest przez „intuicjonistów", z powodu przyzwyczajeń.
- V. Każde zdanie matematyczne powinno być rozpatrywane jako połączenie (nieskończenie wielu) zdań elementarnych, poprzez koniunkcję, alternatywę i negację, a każde wyprowadzenie jakiegoś zdania z innych zdań, w szczególności każdy „dowód", jest niczym innym, jak „przegrupowaniem" leżących u podstaw zdań elementarnych.

Zermelo mówił o tej problematyce podczas swoich wykładów w Warszawie w 1929 roku.

# Wykłady w Warszawie

Tematy wykładów:

- W1 Czym jest matematyka?
- W2 Systemy dysjunktywne i prawo wyłączonego trzeciego.
- W3 Dziedziny skończone i nieskończone.
- W4 Jak uprawomacnia się założenie Nieskończonego?
- W5 Czy niesprzeczność arytmetyki może zostać „dowiedziona”?
- W6 O zbiorach, klasach i dziedzinach. Próba definicji pojęcia zbioru.

# Zermelo i matematycy warszawscy

Siedzą (od lewej): Sierpiński, Zermelo, Dickstein, Przeborski.
Stoją (od lewej): Łukasiewicz, Leśniewski, Knaster, Spława-Neyman, Leja.

# Spotkanie we Lwowie


Kuratowski (1), Knaster (2), Banach (3), Stożek (4), Żyliński (5), Ruziewicz (6), Steinhaus (7), Zermelo, Mazurkiewicz (8).

# Polemika z Gödlem

Polemika Zermela z Gödlem dotyczyła spraw następujących:

- możliwości reprezentowania matematyki w ramach finitarnego systemu symboli i reguł;
- rozumienia pojęcia „dowodu matematycznego".

W sporze tym zwyciężyła wówczas logika pierwszego rzędu, jako zaczynający obowiązywać paradygmat logiki matematycznej.

# Projekt logiki infinitarnej

Podstawowe założenia projektu logiki infinitarnej Zermela sprowadzają się do następujących:

- Nie ma ograniczeń na długość formuł; dopuszcza się dowolne koniunkcje oraz alternatywy formuł.
- Jedynym ograniczeniem jest to, aby formuły były tworami (dobrze) ufundowanymi.
- Również dowody mogą być, w ogólności, nieskończone. Muszą być jednak (dobrze) ufundowane.
- Zermelo operuje **semantycznym** pojęciem dowodu.
- **Wszystkie** zdania matematyczne są rozstrzygalne (w stosownym, nieskończonym systemie).

# Projekt logiki infinitarnej

Zermelo nie precyzuje języka swojej logiki infinitarnej z tym stopniem ścisłości, który spełniałby dzisiaj respektowane standardy.
Hierarchia wyrażeń jest budowana na wzór hierarchii zbiorów z artykułu z 1930 roku. Domyślna relacja *bycia podwyrażeniem* jest dobrze ufundowana (podobna do mnogościowego $\in$).

Dla każdej teorii matematycznej $T$, pisze Zermelo, wyznaczyć można:

- jej dziedzinę obiektów $D$
- ogół $R$ relacji określonych na $D$
- ogół $C_R$ tzw. relacji podstawowych (zdań atomowych)
- hierarchię $H_{D,R}$ wszystkich wyrażeń.

# Projekt logiki infinitarnej

Każdy dychotomiczny *podział prawdziwościowy* rodziny $C_R$ można jednoznacznie rozszerzyć na całą hierarchię $H_{D,R}$:

- kierując się ustaleniem, jak wartość logiczna negacji, (dowolnej, także nieskończonej) koniunkcji oraz (dowolnej, także nieskończonej) alternatywy zależy od wartości logicznej argumentów tych funktorów;
- korzystając z dobrego ufundowania hierarchii $H_{D,R}$.

Niech $\Pi$ będzie ogółem wszystkich podziałów prawdziwościowych na $C_R$.

- Za *równoważne (logicznie)* uważa Zermelo te zdania, które przy każdym podziale prawdziwościowym wyrażeń bazowych należą do dokładnie takich samych klas podziałów prawdziwościowych całej hierarchii wyrażeń.
- Pokazuje, że w rozważanym systemie zachodzą prawa de Morgana.

# Projekt logiki infinitarnej

Pojęcie *wynikania logicznego* definiuje Zermelo poprzez podziały prawdziwościowe. Klasa wszystkich zdań z hierarchii $H_{D,R}$, które są prawdziwe przy danym podziale prawdziwościowym jest poddziedziną $H_{D,R}$. Dla danego zdania $s$, przekrój $V^*(s)$ wszystkich takich klas (indeksowany elementami $\Pi$), których elementem jest zdanie $s$ zawiera także wszystkie te zdania, które są prawdziwe, o ile $s$ jest prawdziwe. Tak więc, przekrój ten odpowiada klasie wszystkich zdań, które *wynikają logicznie* z $s$.

Podobnie, przekrój $U^*(s)$ wszystkich klas (poddziedzin $H_{D,R}$) złożonych ze zdań fałszywych i których elementem jest dane zdanie $s$, zawiera te wszystkie zdania, z których $s$ *wynika logicznie*. Zermelo nazywa $V^*(s)$ *der Folgebereich von s*, a $U^*(s)$ *der Ursprungsbereich von s*.

# Projekt logiki infinitarnej

Zdania równoważne logicznie ze zdaniem $s$ to zdania wspólne *der Folgebereich von s* oraz *der Ursprungsbereich von s*:

$$A^*(s) = V^*(s) \cap U^*(s)$$

Zermelo podaje następujący przykład:
Jeśli $s$ jest „systemem aksjomatów" jakiejś ugruntowanej na relacjach fundujących teorii matematycznej, np. arytmetyki lub geometrii euklidesowej, to $A^*(s)$ obejmuje wszystkie równoważne systemy aksjomatyczne, $V^*(s)$ [obejmuje] wszystkie zdania wypływającej z $s$ teorii, a $U^*(s)$ [obejmuje] wszystkie *specjalne* systemy aksjomatyczne.

Zermelo 1935: 144.

Poglądy Zermela na związki między wynikaniem logicznym a dowodliwością ilustrują zdania następujące bezpośrednio po wyżej cytowanych:

# Projekt logiki infinitarnej

Jeśli zdanie $t$ leży w dziedzinie następstw $V^*(s)$, czyli „wynika" z $s$, to jest ono także „logicznie wyprowadzalne" z $s$, a mianowicie już wewnątrz wspólnej „dziedziny zakorzenienia" lub „dziedziny definicyjnej" $W(s,t)$ dla $s$ i $t$. Jest to przekrój wszystkich zawierających $s$ i $t$ „dziedzin zakorzenienia" $W$, a mianowicie wszystkich takich, które wraz z każdym w nich zawartym zdaniem wyprowadzalnym zawierają również jego wszystkie „korzenie", tj.: z każdą negacją $\bar{a}$ [zawierają też] negowane zdanie $a$, a z każdą koniunkcją i alternatywą [zawierają też] wszystkie ich człony. Wtedy każdemu dowolnemu podziałowi prawdziwościowemu całego systemu odpowiada też taki [podział] $W(s,t)$, a każdy przekrój $V'$ z dziedziną prawdy $V$ albo nie zawiera $s$ albo zawiera jednocześnie $t$. Dziedzina $W$ zawiera wszystkie zdania pośrednie potrzebne do wyprowadzenia $t$, a jej „wartość", jej podział prawdziwościowy, powstaje w niej na mocy [podanych] reguł logicznych.

# Projekt logiki infinitarnej

Na mocy powyższego, każde wynikające z $s$ zdanie byłoby też „dowodliwe", jednak najpierw tylko w absolutnym, „infinitystycznym" sensie. Taki „dowód" zawiera zwykle *nieskończenie wiele* zdań pośrednich, i nie zostało jeszcze powiedziane, jak szeroko [daleko?] i za pomocą jakich środków mógłby on zostać rozjaśniony naszemu *skończonemu* rozumowi. W zasadzie *każdy* dowód matematyczny, np. wnioskowanie przez „indukcję zupełną" jest całkowicie „infinitystyczny", a przecież możemy mieć weń wgląd. Ustalonych granic dla rozumienia najwidoczniej tu nie ma.

Ze słów tych widać dość wyraźnie, jak sądzimy, że Zermelo chciał rozumieć pojęcie *dowodu* (matematycznego) w jakimś sensie absolutnym, jako wyznaczone jedynie poprzez semantyczne własności zdań. Przeprowadzane w praktyce dowody matematyczne byłyby swego rodzaju aproksymacjami tak absolutnie rozumianych dowodów.

# Projekt logiki infinitarnej

Teoria matematyczna u Zermela może być rozumiana jako układ: $T = \langle D, C_R, \Pi \rangle$. $Val_\Pi$ jest klasą wszystkich zdań z $H_{D,R}$, które są $\Pi$-prawdziwe, tj. prawdziwe dla wszystkich podziałów prawdziwościowych z $\Pi$. Zarówno $Val_\Pi$ jak i $H_{D,R}$ są dziedzinami *otwartymi*.

Dla $\alpha$ mocno nieosiągalnych dziedziny $Val_\Pi \cap P_\alpha$ są domkniętymi aproksymacjami $T$ (tutaj $P_\alpha$ jest piętrem o indeksie $\alpha$ w hierarchii zbiorów, której bazą jest ogół relacji podstawowych $C_R$. Należy rozumieć, że hierarchia wszystkich wyrażeń, tj. $H_{D,R}$ jest poddziedziną hierarchii zbiorów.

*Zdanie Zermela* $\bigwedge(Val_\Pi \cap P_\alpha)$ jest przykładem *prawdziwego*, ale *niedowodliwego* zdania w systemie $\langle P_\alpha, \prec \rangle$. Tutaj $\prec$ jest relacją syntaktyczną, odpowiadającą wspomnianej wyżej relacji bycia częścią (podformułą).

# Projekt logiki infinitarnej

I o to tu właśnie chodzi: co rozumie się przez dowód? Całkiem ogólnie, rozumie się przez to system zdań tego rodzaju, że przy założeniu przesłanek prawdziwość stwierdzenia jawi się jako *przekonująca*. Pozostaje teraz pytanie, czym wszystkim jest to, co jawi się *przekonującym*? W każdym razie, *nie [są to] po prostu*, jak sam Pan to precyzyjnie pokazuje, zdania jakiegokolwiek systemu finitystycznego, który także w Pańskim przypadku zawsze może zostać dalej rozszerzony. Ale w tym bylibyśmy właściwie zgodni: tyle że ja wychodzę od danego wprzódy *bardziej ogólnego* systemu, który najpierw nie *potrzebuje* być rozszerzany. A w *takim* systemie *wszystkie* zdania są rzeczywiście też rozstrzygalne.

Z listu Zermela do Gödla [29 X 1931].

# Prahistoria logik infinitarnych

Do prahistorii logik infinitarnych zalicza się m.in. następujące prace:

- Boole 1847
- Peirce 1885
- Schröder 1895, 1910
- Hilbert 1905
- Löwenheim 1915
- Lewis 1918
- Skolem 1919, 1920
- Wittgenstein 1922
- Ramsey 1926
- Ajdukiewicz 1928
- Carnap 1929, 1943
- Kuratowski 1937
- Krasner 1938
- Helmer 1938
- Nowikow 1939
- Boczwar 1940
- Jordan 1949
- Robinson 1951.

# Krytyka ze strony Gödla

Kurt Gödel był stanowczo przeciwny:

„[...] the fiction that one can form propositions of infinite (and even non-denumerable) length, i.e. operate with truth-functions of infinitely many arguments, regardless of whether or not one can construct them. But what else is such an infinite truth-function but a special kind of an infinite extension (or structure) and even a more complicated one than a class, endowed in addition with a hypothetical meaning, which can be understood only by an infinite mind?"

Kurt Gödel: Russell's Mathematical Logic. W: P.A. Schilp (ed.) *The Philosophy of Bertrand Russell.* Tudor, New York 1944, 123–153; cytat ze strony 142.

# Historia logik infinitarnych

Ważne prace z okresu **systematycznych** badań logik infinitarnych to m.in.:

- Henkin 1949, 1955, 1959
- Robinson 1957
- Mostowski 1957
- Scott, Tarski 1957, 1958
- Tarski 1958
- Karp 1964
- Lindström 1966, 1969
- Keisler 1971
- Barwise 1974, 1975
- Dickmann 1975.

# Logiki infinitarne: kilka uwag o współczesności

Ograniczmy się jedynie do paru haseł:

- „Moc wyrażeniowa" logiki.
- Teza Pierwszego Rzędu: argumenty za i przeciw.
- Zastosowania infinitarnych reguł wnioskowania.
- Ustalenia metalogiczne dotyczące logik infinitarnych.
- Wyróżniona rola logiki $L_{\omega_1\omega}$.
- Unifikacja teorii mnogości, teorii modeli i teorii rekursji w teorii zbiorów dopuszczalnych.

Logiki infinitarne znajdują stale nowe zastosowania w matematyce oraz informatyce.

# Logiki infinitarne: kilka uwag o współczesności

**Przykład.** Kilka faktów o logice $L_{\omega_1\omega}$:

- w $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności;
- w $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie Scotta o izomorfizmie;
- w $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można model standardowy arytmetyki Peana;
- w $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można klasę wszystkich zbiorów skończonych;
- teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna;
- predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$;
- pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne (pojedynczą formułą) w $L_{\omega_1\omega_1}$.

# Also, doch ist die Zeit angekommen. . .

W latach trzydziestych XX wieku projekt Zermela nie był rozwijany. Propozycje Zermela można rozumieć (w dzisiejszej terminologii) jako:

- logikę $L_{\infty\infty}$;
- logikę $L_{\kappa\kappa}$, gdzie $\kappa$ jest liczbą kardynalną mocno nieosiągalną;
- logikę $L_{\infty\omega}$;
- logikę drugiego rzędu.

W ciągu ostatniego półwiecza logiki infinitarne uzyskały pełną legitymizację, opracowano ich metalogikę, wskazano na ich zastosowania w badaniach matematycznych. Zob. np.:

- Barwise, J., Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics.* Springer-Verlag, New York et al.

# Also, doch ist die Zeit angekommen...

Jak się zdaje, ważne są następujące pytania:

- Dlaczego projekt Zermela nie miał szans na realizację w czasie jego opracowywania?
- Co spowodowało zainicjowanie systematycznych badań nad logikami infinitarnymi w latach pięćdziesiątych XX wieku?
- Czy standardem dla badań matematycznych są raczej logiki infinitarne, a nie klasyczna logika pierwszego rzędu?

**Uprzejmie dziękuję za uwagę i jeszcze raz zapraszam na dzisiejszą dyskusję w Sekcji Logiki.**

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”

# „Matematyka jest logiką Nieskończonego”

# Infinitarna logika Ernsta Zermela

# Infinitarna logika Ernsta Zermela

# Infinitarna logika Ernsta Zermela

# Peirce 1885

Here ... we may use $\sum$ for *some*, suggesting a sum, and $\prod$ for *all*, suggesting a product. Thus $\sum_i x_i$ means that $x$ is true of some of the individuals denoted by $i$ or $\sum_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ etc. In the same way, $\prod_i x_i$ means that $x$ is true of all these individuals, or $\prod_i x_i = x_i x_j x_k$ etc.... $\sum_i x_i$ and $\prod_i x_i$ are only *similar* to a sum and product; they are not strictly of that nature, because the individuals of the universe may be innumerable

Peirce 1885: 194–195; cytat za Moore 1995: 110.

# Mostowski 1967

Wszystkie te wyniki pokazują, że teoria mnogości oparta na aksjomatyce Zermelo-Fraenkla jest niezupełna i to w bardzo silnym stopniu. Oczywiście nikt nie oczekiwał, że okaże się ona zupełna, ale też nikt zapewne nie spodziewał się, że okaże się ona tak słaba. Dowody niezależności przeprowadzone metodą Cohena pokazują, że — w odróżnieniu od arytmetyki liczb naturalnych — nie usuniemy niezupełności wzmacniając reguły wnioskowania np. przez przyjęcie tzw. reguły $\omega$. Niezupełność aksjomatycznej teorii mnogości porównać można raczej do niezupełności teorii grup lub ciał lub podobnych teorii algebraicznych. Nikt nie dziwi się, że te teorie są niezupełne. Ich aksjomatyki były od początku sformułowane tak, by istniały dla nich różnorodne modele. W przypadku aksjomatów teorii mnogości intencja była odmienna, ale wyniki są niemal takie same.

Mostowski 1967: 110.

# Moore 1980

Why did Zermelo's ideas on infinitary logic not take root in the 1930s? Perhaps they would have if Zermelo had been near the beginning of his career rather than close to the end. Indeed, his controversial axiom of choice, as well as his axiomatization of set theory, required considerable time to gain widespread acceptance. Furthermore, by 1931 first-order logic had not yet been investigated in depth, and consequently it was difficult to persuade logicians such as Gödel that a radical extension was needed. Zermelo's ideas were suggestive but perhaps too vague — and too powerful; when infinitary logic took root after 1956, it was the weakest infinitary logic $L_{\omega_1,\omega}$ that attracted the most interest. Perhaps also the difficulty resided in the connection between higher-order logic and set theory, for if one stepped beyond first-order logic, one necessarily depended on set-theoretic assumptions such as the meaning of the power set operation. Finally, but most importantly, what Zermelo denigrated as the 'finitistic prejudice' was a strong historical force in the work of Brouwer, Hilbert, Skolem and Gödel. What remains to be discovered is why, two decades later, infinitary logic took root.

Moore 1980: 130.

As logicians we do our subject a disservice by convincing others that logic is first-order logic and then convincing them that almost none of the concepts of modern mathematics can really be captured in first-order logic. Paging through any modern mathematics book, one comes across concept after concept that cannot be expressed in first-order logic. Concepts from set-theory (like *infinite set*, *countable set*), from analysis (like *set of measure* 0 or *having the Baire property*), from topology (like *open set* and *continuous function*), and from probability theory (like *random variable* and *having probability greater than some real number r*), are central notions in mathematics which, on the mathematician-in-the-street view, have their own logic. Yet none of them fit within the domain of first-order logic. In some cases the basic presuppositions of first-order logic about the kinds of mathematical structures one is studying are inappropriate (as the examples from topology or analysis show). In other cases, the structures dealt with are of the sort studied in first-order logic, but the concepts themselves cannot be defined in terms of the „logical constants."

Barwise 1985: 5–6.

# Keisler, Knight 2004

The landscape of logic has changed in the past 30 years. Developments in classification theory and *o*-minimal structures have left infinitary logic with a much diminished place in model theory. As a result, Barwise's idea of using $HYP_{\mathcal{M}}$ to study a structure $\mathcal{M}$ has remained on the back burner. Perhaps this attractive idea will be taken up again by some future logician. On the other hand, infinitary logic is of growing importance for computable structure theory, finite model theory, and certain parts of theoretical computer science.

Keisler, Knight 2004: 33.

# Ferreirós 2001

Considering Zermelo and his reactions to „Skolemism" — or, as one might say, FOL-mania — one can think of other deviant historical scenarios. Imagine a world in which the 20th century begins with some author who offers such a convincing solution to the paradoxes, that everybody agrees. (This might have been a clear presentation of the iterative conception of sets, which was somehow present in the practice of 19th-century mathematicians.) Imagine, further, that this solution makes set theory appear as a consistent mathematical theory that does not belong to logic. Within such a context, the strong interest in formal systems and proof theory, that was so characteristic of the 1920s and 1930s, might not have emerged. But, without this, the key reason for focusing on FOL would have disappeared from the scene. The main foundational theme of the era might have been, not consistency, but a semantic question — the codification of crucial mathematical notions such as that of natural number and real number, meaning the *categorical* characterization of such notions. Had this been the case, the recommendations of Hilbert and Church would have been heard and second-order logic would probably have taken the paradigmatic role that was played, in fact, by FOL.

Ferreirós 2001: 480.

# Prace cytowane


- Ajdukiewicz, K. 1928. *Główne zasady metodologji nauk i logiki formalnej.* (Skrypt autoryzowany, zredagowany przez Mojżesza Presburgera), Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.
- Barwise, J. 1974. Axioms for abstract model theory. *Annals of Mathematical Logic*, vol. **7**, 221–265.
- Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Barwise, J., Feferman, S. (Eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Barwise, J. 1985. Model-Theoretic Logics: Background and Aims. W: Barwise, Feferman 1985, 4–23.

# Prace cytowane


- Boczwar, D.A. 1940. Über einen Aussagenkalkül mit abzählbaren logischen Summen und Produkten. *Matiematiczeskij Sbornik* vol. **7**, 65–100.
- Boole, G. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic.* Cambridge.
- Carnap, R. 1929. *Abriss der Logistik.* Vienna.
- Carnap, R. 1943. *Formalization of Logic.* Harvard University.
- Dickmann, M.A. 1975. *Large Infinitary Languages.* North Holland, Amsterdam.
- Ferreirós, J. 2001. The road to modern logic — an interpretation. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **7**, Number **4**, 441–484.
- Henkin, L. 1955. The Representation Theorem for Cylindrical Algebras. *Mathematical Interpretation of Formal Systems.* North Holland, 85–97.

# Prace cytowane


- Henkin, L. 1959. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics. Warsaw, 2–9 September 1959.* Pergamon Press, Oxford London New York Paris; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 167–183.
- Helmer, O. 1938. Languages with expressions of infinite length. *Erkenntnis* **8**, 138–141.
- Hilbert, D. 1905. Logische Prinzipien des mathematischen Denkens.
- Jordan, P. 1949. Zur Axiomatik der Verknüpfungsbereiche. *Abhand. Math. Sem. Hamburg. Univ* **16**, 54–70.
- Karp, C. 1964. *Languages with Expressions of Infinite Length.* North Holland, Amsterdam.
- Keisler, H.J. 1971. *Model Theory for Infinitary Logic.*, North Holland, Amsterdam.

# Prace cytowane


- Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.
- Krasner, M. 1938. Une généralisation de la notion de corps. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **9**, 367–385.
- Kuratowski, K. 1937. Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens. *Fundamenta Mathematicae* **29**, 97–100.
- Lewis, C.S. 1918. *A Survey of Symbolic Logic.* University of California, Berkeley.
- Lindström, P. 1966. First order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria*, **32**, 186–195.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, **35**, 1–11.

# Prace cytowane


- Löwenheim, L. 1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, **68**, 169–207.
- Moore, G.H. 1980. Beyond First-order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory. *History and Philosophy of Logic*, **1**, 95–137.
- Moore, G.H. 1995. The prehistory of infinitary logic: 1885–1955. W: Maria Luisa Dalla Chiara, Kees Doets, Daniele Mundici, Johan van Benthem (eds.) *Structures and norms in science.* Volume two of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995, Kluwer Academic Publishers, 105–123.
- Mostowski, A. 1957. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

# Prace cytowane


- Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* **20**, 99–116.
- Nowikow, P.S. 1939. Sur quelques théoremes d'existence. *C.R. Acad. Sciences URSS* n.s. **23**, 438–440.
- Peirce, C.S. 1885. On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation. *American Journal of Mathematics* **7**, 180–202.
- Ramsey, F.P. 1926. The Foundations of Mathematics. *Proc. London Math. Soc.* (**2**) **25**, 338–384.
- Robinson, A. 1951. *On the Metamathematics of Algebra.* North Holland, Amsterdam.
- Robinson, A. 1957. Applications to Field Theory. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 326–331.

# Prace cytowane


- Schröder, E. 1895. *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Vol. **3**, Leipzig.
- Schröder, E. 1910. *Abriss der Algebra der Logik*, **2**, E. Müller (ed.), Leipzig.
- Scott, D., Tarski, A. 1957. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 83–89.
- Scott, D., Tarski, A. 1958. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Colloquium Mathematicum* **6**, 166-170.
- Skolem, T. 1919. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **3**.

# Prace cytowane


- Skolem, T. 1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskappselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **4**.
- Tarski, A. 1958. Remarks on Predicate Logic with Infinitely long Expressions. *Colloq. Math. 6*, 171–176.
- Wittgenstein, L. 1922. *Tractatus Logico-Philosophicus.* London.