

Infinitarna logika Ernsta Zermela

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

VIII PZF 2008

Wprowadzenie

Ernst Zermelo znany jest głównie ze swoich prac dotyczących teorii mnogości:

- dowodu twierdzenia o możliwości dobrego uporządkowania (1904, 1908);
- pierwszej aksjomatyki teorii mnogości (1908) .

Prace Zermela dotyczące projektu logiki infinitarnej, z lat 1921–1935 są mniej znane.

Dobrym przedstawieniem pomysłów Zermela dotyczących logiki infinitarnej jest artykuł:

- Taylor, R.G. 2002. Zermelo's Cantorian theory of systems of infinitely long propositions. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume 8, Number 4, 478–515.

Dyskusja w Sekcji Logiki

Dzisiaj o godzinie 18:00 w Sekcji Logiki odbędzie się dyskusja:

*Zermelo i Szkoła Warszawska.
100 lat aksjomatycznej teorii mnogości.*

- Jan Zygmunt: Zermelo a polscy matematycy.
- Roman Murawski: Warszawska Szkoła Matematyczna.
- Stanisław Krajewski: O metodzie aksjomatycznej.
- Zofia Adamowicz: Forcing.
- Janusz Czelakowski: Kategoryczność teorii mnogości.
- Krzysztof Wójtowicz: Realizm teoriomnogościowy.

„Matematyka jest logiką nieskończonego”

Przetłumaczono na język polski prace Ernsta Zermela z podstaw matematyki.

- Spis treści podaje handout.
- Opracowywane są komentarze do poszczególnych prac.

W szczególności, tłumaczenie to zawiera wszystkie teksty Zermela dotyczące jego projektu logiki infinitarnej.

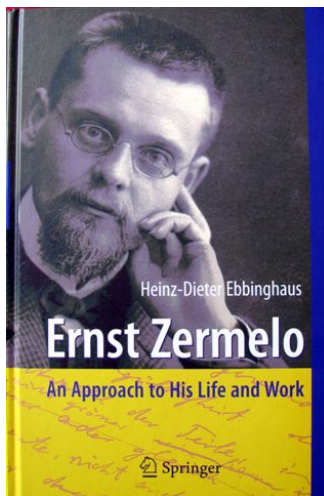
Wykorzystywane notatki własne

Wykorzystujemy też następujące źródła:

- Niepublikowaną monografię: *Infinitarna Logika Ernsta Zermela* (Praca wykonana w latach 2004–2006 w ramach projektu badawczego KBN 2H01A 00725 *Metody nieskończonościowe w teorii definicji*, kierowanego przez Pana Profesora **Janusza Czelakowskiego** w Instytucie Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego, 181 stron.), spis treści dostępny:
<http://www.logic.amu.edu.pl/images/c/cc/2H01A00725.pdf>
- Artykuł: *Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela* opublikowany w 2006 roku w *Investigationes Linguisticae XIV*, 18–49:
<http://www.inveling.amu.edu.pl/index.php?page=issues&vol=14&cat=0&article=119>
Tekst dostępny także na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:
<http://www.logic.amu.edu.pl/images/f/fc/Art04.pdf>

Ernst Zermelo: biografia

Wydawnictwo Springer przygotowuje dwutomową, dwujęzyczną edycję dzieł zebranych Zermela. Polecamy znakomity tekst przedstawiający biografię oraz dokonania naukowe Ernsta Zermela:



Wybrane daty

Ernst Friedrich Ferdynand Zermelo (1871–1953) należał do najwybitniejszych matematyków XX wieku.

- Praca w Getyndze (w pierwszej fazie programu Hilberta, 1900–1910). W tym okresie powstają pierwsze prace Zermela z teorii mnogości.
- Praca w Zurychu (1910–1916).
- Praca we Freiburgu (1921–1935). W tym okresie powstaje projekt logiki infinitarnej.

Trzy wielkie bitwy Zermela:

- krytyka kinetycznej teorii ciepła Boltzmannna
- aksjomat wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu
- walka ze Skolemizmem oraz „przesądami finitystycznymi”.

Postać aksjomatu wyróżniania

Jak dobrze wiadomo, postulowanie istnienia (w naiwnej teorii mnogości) zbioru wszystkich przedmiotów posiadających dowolną wybraną własność prowadzi do antynomii (antynomia Zermelo-Russella).

W aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości unika się tych antynomii proponując różne rozwiązania:

- aksjomatyki Zermela z 1908 i 1930 roku;
- propozycja Skolema
- propozycja von Neumanna
- współczesne wersje aksjomatu wyróżniania.

Druga (1930) aksjomatyka teorii mnogości

W artykule z 1930 roku dodane zostają aksjomaty: zastępowania oraz ufundowania.

Zermelo opuszcza natomiast aksjomaty: nieskończoności (jako „nie należący do ogólnej teorii mnogości”) oraz wyboru (przyjęty jako „ogólna zasada logiczna”).

Ponadto, praca ta przynosi:

- konstrukcję kumulatywnej hierarchii dziedzin normalnych;
- twierdzenia o izomorfizmie dziedzin normalnych (względem dwóch parametrów: mocy bazy oraz charakterystyki);
- rozważania dotyczące liczb kardynalnych mocno nieosiągalnych.

Polemika ze Skolemem

Spory Zermela ze Skolemem dotyczyły dwóch spraw:

- kształtu aksjomatu wyróżniania (Zermelo dopuszczał dowolne funkcje zdaniowe, Skolem proponował ograniczenie do funkcji zdaniowych logiki pierwszego rzędu);
- istnienia modeli teorii mnogości (Zermelo nie mógł pogodzić się ze stosowaniem twierdzenia Löwenheima-Skolema w teorii mnogości; wykluczał sprowadzanie **całej** teorii mnogości do jej przeliczalnego modelu; uważał, że dopiero cała hierarchia dziedzin normalnych opisuje teorię mnogości).

W sporze tym zwyciężyła teoria mnogości formułowana w języku pierwszego rzędu.

Tezy o nieskończonym w matematyce

Ernst Zermelo

17 lipca 1921

- I. Każde autentyczne [w oryginale: „echte”, co tłumacz angielski oddaje przez: „genuine”] zdanie matematyczne ma charakter „infinitarny”, tj. odnosi się do [jakiejś] *nieskończonej* dziedziny i powinno być rozpatrywane jako kombinacja nieskończenie wielu „zdań elementarnych”.
- II. Nieskończone nie jest nam dane w rzeczywistości ani fizycznie, ani psychicznie, musi być pojmowane i „usytuowane” jako „idea” w sensie Platońskim.
- III. Ponieważ zdania infinitarne nigdy nie mogą zostać wyprowadzone z finitarnych, więc także „aksjomaty” każdej teorii matematycznej muszą być infinitarne, a „niesprzeczności” takiej teorii nie można „dowieść” inaczej, jak przez wskazanie odpowiedniego niesprzecznego systemu nieskończenie wielu zdań elementarnych.

Tezy o nieskończonym w matematyce

- IV. Tradycyjna logika „Arystotelesowska” jest ze swojej natury finitarna i stąd nieprzystosowana do ugruntowania nauk matematycznych. Powstaje zatem konieczność rozszerzonej logiki „infinitarnej” lub „Platońskiej”, która opiera się na pewnego rodzaju infinitarnym „oglądzie” [w oryginale: „Anschauung”, co tłumacz angielski oddaje przez: „intuition”.] — jak np. w przypadku „aksjomatu wyboru” — która jednak, paradoksalnie, odrzucana jest przez „intuicjonistów”, z powodu przyzwyczajień.
- V. Każde zdanie matematyczne powinno być rozpatrywane jako połączenie (nieskończenie wielu) zdań elementarnych, poprzez koniunkcję, alternatywę i negację, a każde wyprowadzenie jakiegoś zdania z innych zdań, w szczególności każdy „dowód”, jest niczym innym, jak „przegrupowaniem” leżących u podstaw zdań elementarnych.

Zermelo mówił o tej problematyce podczas swoich wykładów w Warszawie w 1929 roku.

Wykłady w Warszawie

Tematy wykładów:

- W1 Czym jest matematyka?
- W2 Systemy dysjunktywne i prawo wyłączzonego trzeciego.
- W3 Dziedziny skończone i nieskończone.
- W4 Jak uprawomocnia się założenie nieskończonego?
- W5 Czy niesprzeczność arytmetyki może zostać „dowodzona”?
- W6 O zbiorach, klasach i dziedzinach. Próba definicji pojęcia zbioru.

Zermelo i matematycy warszawscy



Siedzą (od lewej): Sierpiński, Zermelo, Dickstein, Przeborski.

Stoją (od lewej): Łukasiewicz, Leśniewski, Knaster, Spława-Neyman, Leja.

Spotkanie we Lwowie



Kuratowski (1), Knaster (2), Banach (3), Stożek (4), Żyliński (5),
Ruziewicz (6), Steinhaus (7), Zermelo, Mazurkiewicz (8).

Polemika z Gödlem

Polemika Zermela z Gödlem dotyczyła spraw następujących:

- możliwości reprezentowania matematyki w ramach finitarnego systemu symboli i reguł;
- rozumienia pojęcia „dowodu matematycznego”.

W sporze tym zwyciężyła wówczas logika pierwszego rzędu, jako zaczynający obowiązywać paradygmat logiki matematycznej.

Projekt logiki infinitarnej

Wydaje się, że wśród inspiracji dla projektu logiki infinitarnej Zermela jako istotne wymienić można następujące czynniki:

- poglądy Zermela na naturę nieskończoności; przekonanie, że *matematyka jest logiką nieskończoności*;
- przekonanie Zermela o fundamentalnej dla całości matematyki roli (jego systemu) teorii mnogości; w szczególności, traktowanie formuł oraz dowodów jako (dobrze ufundowanych) tworów z hierarchii kumulatywnej zbiorów (przedstawionej w artykule z 1930 roku);
- odrzucenie *skolemizmu*; przekonanie, że ani przedmiotu badań teorii mnogości nie można zredukować do pojedynczego jej modelu, ani nie można zaakceptować *finitystycznego* punktu widzenia w procedurze dowodzenia twierdzeń matematycznych;
- przekonanie, że nie należy nakładać ograniczeń na postać formuł w aksjomacie wyróżniania (w szczególności, nie ograniczać się do języka pierwszego rzędu).

Projekt logiki infinitarnej

Etapy tworzenia projektu logiki infinitarnej Zermela:

- Zermelo a Skolem: spór o rozumienie pojęcia *Definitheit*
- wykłady w Warszawie: *Tezy o nieskończoności*
- druga aksjomatyka teorii mnogości: *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Fundamenta Mathematicae* **16** (1930), 29–47
- Zermelo a Gödel: spór o rozumienie pojęcia dowodu
- ostatnia opublikowana praca: *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme. Erste Mitteilung. Fundamenta Mathematicae* **25** (1935), 136–146.

Projekt logiki infinitarnej

Podstawowe założenia projektu logiki infinitarnej Zermela sprowadzają się do następujących:

- Nie ma ograniczeń na długość formuł; dopuszcza się dowolne koniunkcje oraz alternatywy formuł.
- Jedynym ograniczeniem jest to, aby formuły były tworamami (dobrze) ufundowanymi.
- Również dowody mogą być, w ogólności, nieskończone. Muszą być jednak (dobrze) ufundowane.
- Zermelo operuje **semantycznym** pojęciem dowodu.
- **Wszystkie** zdania matematyczne są rozstrzygalne (w stosownym, nieskończonym systemie).

Dalsze dzieje logiki infinitarnej

W latach trzydziestych XX wieku projekt Zermela nie był rozwijany. Systematyczne badania nad logikami infinitarnymi zostały podjęte dopiero dwie dekady później:

- Tarski, Henkin, Robinson, Karp, Scott: logiki infinitarne;
- Mostowski: uogólnione kwantyfikatory (potem: Lindström, Barwise).

W ciągu ostatniego półwiecza logiki infinitarne uzyskały pełną legitymizację, opracowano ich metalogikę, wskazano na ich zastosowania w badaniach matematycznych. Zob. np.:

- Barwise, J., Feferman, S. (eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics*. Springer-Verlag, New York et al.

Also, doch ist die Zeit angekommen. . .

Jak się zdaje, ważne są następujące pytania:

- Dlaczego projekt Zermela nie miał szans na realizację w czasie jego opracowywania?
- Co spowodowało zainicjowanie systematycznych badań nad logikami infinitarnymi w latach pięćdziesiątych XX wieku?
- Czy standardem dla badań matematycznych są raczej logiki infinitarne, a nie klasyczna logika pierwszego rzędu?

„Matematyka jest logiką nieskończonego”

● Przedmowa	1
● Ernst Zermelo: nota biograficzna	11
● Ernst Zermelo: bibliografia	17
● I. Opublikowane prace Zermela (z podstaw matematyki)	26
● O dodawaniu pozaskończonych liczb kardynalnych (1902)	26
● Dowód, że każdy zbiór może zostać dobrze uporządkowany (1904) .	31
● Nowy dowód możliwości dobrego uporządkowania (1908)	34
● Badania nad podstawami teorii mnogości. I. (1908)	53
● O zbiorach skończonych i zasadzie indukcji zupełnej (1909)	72
● O podstawach arytmetyki (1909)	80
● O zastosowaniu teorii mnogości w teorii gry w szachy (1913)	84
● O całkowitych liczbach przestępnych (1914)	88

„Matematyka jest logiką nieskończonego”

- O pojęciu określoności w systemach aksjomatycznych (1929) 97
- Liczby graniczne i dziedziny mnogościowe.
Nowe badania nad podstawami teorii mnogości (1930) 102
- O formie logicznej teorii matematycznych (1930) 119
- O poziomach kwantyfikacji i logice nieskończonego (1932) 120
- O systemach matematycznych i logice nieskończonego (1932) 124
- Elementarne rozważania dotyczące teorii liczb pierwszych (1934) . 127
- Podstawy ogólnej teorii systemów zdaniowych (1935) 130

„Matematyka jest logiką nieskończonego”

● II. Inne	139
● Przedmowa do <i>Gesammelte Abhandlungen</i> Georga Cantora (1932)	139
● Fragmenty korespondencji: (Klein, Hilbert, Cantor, Fraenkel, Gödel, Baer, Bernays)	142
● Fragmenty z <i>Nachlaß</i> :	
● Tezy o nieskończonym w matematyce	163
● Wykłady w Warszawie	164
● Raport dla <i>Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft</i>	169
● Relatywizm w teorii mnogości i tzw. twierdzenie Skolema	174
● Notatki z teorii mnogości	176
● Bibliografia	190–199