LOGIKA MATEMATYCZNA (20–21)

KLASYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW: UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Następną z omawianych operacji konsekwencji w KRP jest konsekwencja ***aksjomatyczna***. Znajomość materiału z tego wykładu nie będzie wymagana na egzaminie. Należy jednak być świadomym, że mówi się w tym wykładzie o centralnych zagadnieniach KRP. Klasyczny Rachunek Predykatów był początkowo prezentowany właśnie w wersji aksjomatycznej. Metoda tablic analitycznych, której znajomość ***będzie wymagana*** na egzaminie jest ujęciem późniejszym.

20.1. Aksjomaty, reguły i konsekwencja aksjomatyczna

20.1.1. Aksjomaty i reguły

Można na wiele sposobów podać aksjomatykę dla KRP. Jedną z możliwości jest przyjęcie za aksjomaty KRP wszystkich formuł powstających z dowolnych tautologii KRZ przez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych jakimikolwiek formułami języka KRP. Aksjomatyka jest wtedy nieskończona, ale efektywna: taki zbiór aksjomatów jest obliczalny, istnieje algorytmiczna procedura sprawdzania, czy dowolna formuła języka KRP jest aksjomatem.

Inna z możliwości to podanie skończonej liczby ***schematów*** aksjomatów. Owe schematy dobierać można na różne sposoby. Wybierzemy właśnie jeden z nich. O niektórych innych informujemy na końcu tego wykładu.

* * *

Niech α, β i γ będą dowolnymi formułami języka KRP. ***Schematami aksjomatów*** dla KRP są wszystkie formuły następującej postaci:

- (A1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- (A2) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
- (A3) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
- (A6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
- (A7) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- (A8) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- (A9) $(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to \beta))$
- (A10) $(\alpha \equiv \beta) \to (\alpha \to \beta)$
- (A11) $(\alpha \equiv \beta) \to (\beta \to \alpha)$
- (A12) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \equiv \beta))$
- (A13) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

- (A14) $\forall x_n\ \alpha \to S(t, x_n, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A15) $S(t, x_n, \alpha) \to \exists x_n\ \alpha$, o ile t jest podstawialny za x_n w α
- (A16) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_n\ \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w α
- (A17) $\forall x_n\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x_n\ \alpha \to \beta)$, o ile x_n nie jest wolna w β.

Przypominamy, że wszystkie powyższe schematy są schematami tautologii KRP, co pokazane zostało na wykładzie dotyczącym semantyki KRP.

Podobnie jak aksjomaty, również reguły wnioskowania dobierać można na różnorakie sposoby. W tym wykładzie przyjmiemy, że ***regułami pierwotnymi*** (aksjomatycznego ujęcia) KRP są:

Reguła odrywania:

$$\text{(RO)} \quad \frac{\alpha \to \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

Reguła generalizacji:

$$\text{(RG)} \quad \frac{\alpha}{\forall x_n\ \alpha}.$$

Poniżej podajemy też przykłady ważnych reguł wyprowadzalnych w (aksjomatycznym ujęciu) KRP.

Zauważmy, że szczególnymi przypadkami schematów (A14) oraz (A15) są, odpowiednio:

- (A14*) $\forall x\ \alpha \to \alpha$
- (A15*) $\alpha \to \exists x\ \alpha$.

Jest tak oczywiście dlatego, że dowolna zmienna x jest podstawialna sama za siebie w dowolnej formule.

20.1.2. Konsekwencja aksjomatyczna

Mówimy, że:

- Formuła α jest ***tezą*** KRP wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Każdy taki ciąg $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ nazywamy ***dowodem*** formuły α.
- Formuła α jest ***wyprowadzalna*** w KRP ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji. Jeśli α jest wyprowadzalna z X, to piszemy $X \vdash_{krp} \alpha$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{krp} \alpha$.
- Zbiór formuł Y jest ***wyprowadzalny*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krp} \alpha$ dla każdej formuły α ze zbioru Y. Jeśli Y jest wyprowadzalny z X, to piszemy $X \vdash_{krp} Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \nvdash_{krp} Y$.
- Reguła $\mathcal{R}$ jest ***wyprowadzalna*** (***wtórna***) w KRP, jeśli $X \vdash \alpha$ dla każdego sekwentu $\langle X, \alpha \rangle$ należącego do $\mathcal{R}$.

Operacja C_{krp} ***konsekwencji aksjomatycznej*** w KRP jest zdefiniowana następująco dla dowolnego zbioru formuł X języka KRP:

$$C_{krp}(X) = \{\alpha : X \vdash_{krp} \alpha\}.$$

Tak zdefiniowana operacja C_{krp} spełnia warunki (C1)–(C4) z definicji ogólnej operacji konsekwencji.

TWIERDZENIE 20.1.2.1.

Relacja konsekwencji aksjomatycznej $\vdash_{krp}$ ma następujące własności:

- (1) $\vdash_{krp}$ jest zwrotna: $X \vdash_{krp} X$ dla każdego X.
- (2) $\vdash_{krp}$ jest przechodnia: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $Y \vdash_{krp} Z$, to $X \vdash_{krp} Z$, dla wszystkich X, Y, Z.
- (3) $\vdash_{krp}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \vdash_{krp} Y$.
- (4) $\vdash_{krp}$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \vdash_{krp} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \vdash_{krp} Z$.
- (5) $\emptyset \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą KRP.

Dowód tego twierdzenia, analogiczny do dowodu odpowiedniego twierdzenia w KRZ, pozostawiamy jako ćwiczenie.

20.1.3. Niektóre tezy i reguły wyprowadzalne

Jest nieskończenie wiele reguł wyprowadzalnych w KRP, ale niektóre uznawane są za ważne ze względu na zastosowania.

Uwaga: będziemy używać symboli x, y, z dla oznaczenia dowolnych zmiennych języka KRP.

TWIERDZENIE 20.1.3.1.

Następujące reguły są wyprowadzalne w KRP:

- (R14)
$$\frac{\forall x\ \alpha}{S(t, x, \alpha)},$$
o ile term t jest podstawialny za x w α.
- (R15)
$$\frac{S(t, x, \alpha)}{\exists x\ \alpha},$$
o ile term t jest podstawialny za x w α.
- (R16)
$$\frac{\forall x\ (\alpha \to \beta)}{\alpha \to \forall x_n\ \beta},$$
o ile x nie jest wolna w α.
- (R17)
$$\frac{\forall x\ (\alpha \to \beta)}{\exists x\ \alpha \to \beta},$$
o ile x nie jest wolna w β.
- Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \forall x\ \beta}{\alpha \to \beta}.$$
- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$:
$$\frac{\exists x\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta}.$$
- Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego RD$\forall$:
$$\frac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\ \beta},$$
o ile x nie jest wolna w α.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:

$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x \; \alpha \to \beta},$$

o ile x nie jest wolna w β.

DOWÓD.

Fakt, że reguły (R14)–(R17) są wyprowadzalne wynika bezpośrednio ze schematów aksjomatów (A14)–(A17), odpowiednio.

Podamy, dla przykładu, dowody wyprowadzalności reguł: opuszczania kwantyfikatora generalnego oraz dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego. Pozostałe dwa dowody pozostawiamy jako ćwiczenie.

Dowód wyprowadzalności reguły opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:

$$\frac{\alpha \to \forall x \; \beta}{\alpha \to \beta}.$$

Należy pokazać, że $\{\alpha \to \forall x \; \beta\} \vdash_{krp} \alpha \to \beta$.

1.	$\alpha \to \forall x \; \beta$	założenie
2.	$\forall x \; \beta \to \beta$	(A14*): α/β
3.	$(\alpha \to \forall x \; \beta) \to ((\forall x \; \beta \to \beta) \to (\alpha \to \beta))$	(A1): $\beta/\forall x \; \beta, \; \gamma/\beta$
4.	$(\forall x \; \beta \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	RO: 3, 1
5.	$\alpha \to \beta$	RO: 4, 2.

Dowód wyprowadzalności reguły dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD$\exists$:

$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x \; \alpha \to \beta},$$

o ile x nie jest wolna w β.

Należy pokazać, że $\{\alpha \to \beta\} \vdash_{krp} \exists x \; \alpha \to \beta$, przy założeniu, że x nie jest wolna w β.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\forall x \; (\alpha \to \beta)$	RG: 1
3.	$\forall x \; (\alpha \to \beta) \to (\exists x \; \alpha \to \beta)$	(A17)
4.	$\exists x \; \alpha \to \beta$	RO: 3, 2.

Mogliśmy w powyższym dowodzie skorzystać z aksjomatu (A17), ponieważ zmienna x nie jest, na mocy założenia, wolna w formule β.

Podobnie jak w KRZ, mamy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 20.1.3.2.

Formuła α jest wyprowadzalna ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, którego ostatnim elementem jest formuła α (tj. α jest formułą β_n), a każdy z elementów tego ciągu jest albo elementem zbioru X, albo tezą KRP, albo powstaje ze wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wniosek reguły odrywania bądź reguły generalizacji bądź jakiejkolwiek reguły wyprowadzalnej w KRP.

Dowód tego twierdzenia, który przeprowadza się analogicznie jak w przypadku odpowiedniego twierdzenia w KRZ, pozostawiamy jako ćwiczenie.

Jest nieskończenie wiele tez KRP, ale niektóre uznawane są za ważne ze względu na zastosowania.

Zauważmy, że z każdej tezy KRZ można otrzymać tezę KRP, poprzez konsekwentne zastąpienie zmiennych zdaniowych dowolnymi formułami języka KRP. Czasami mówi się krótko, choć nie całkiem precyzyjnie (gdyż mówimy o tezach w różnych językach), że każda teza KRZ jest także tezą KRP.

TWIERDZENIE 20.1.3.3.

Następujące formuły są tezami KRP, dla dowolnych formuł α oraz β:

- 1. $\forall x\ \alpha \to \alpha$.
- 2. $\forall x\ \alpha \to \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- 3. $\alpha \to \exists x\ \alpha$.
- 4. $\alpha(x/t) \to \exists x\ \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- 5. $\forall x\ \alpha \to \exists x\ \alpha$.
- 6. $\forall x\ \alpha \equiv \forall y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 7. $\exists x\ \alpha \equiv \exists y\ \alpha(x/y)$, o ile zmienna y nie jest wolna w α oraz y jest podstawialna za zmienną x w α.
- 8. $\forall x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 9. $\exists x\ \alpha \equiv \alpha$, o ile α nie zawiera x jako zmiennej wolnej.
- 10. $\forall x \forall y\ \alpha \equiv \forall y \forall x\ \alpha$.
- 11. $\exists x \exists y\ \alpha \equiv \exists y \exists x\ \alpha$.
- 12. $\exists x \forall y\ \alpha \to \forall y \exists x\ \alpha$.
- 13. $\forall x \forall y\ \alpha \to \forall x\ \alpha(x/y)$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 14. $\exists x\ \alpha(x/y) \to \exists x \exists y\ \alpha$, o ile x jest podstawialna za y w α.
- 15. $\neg \forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg \alpha$.
- 16. $\neg \exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg \alpha$.
- 17. $\forall x\ \alpha \equiv \neg \exists x\ \neg \alpha$.
- 18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.
- 19. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$.
- 20. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha(x/t)) \to \beta(x/t)$, o ile t jest podstawialny za x do α i do β.
- 21. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$.
- 22. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$.
- 23. $(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \exists x\ \beta$.
- 24. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \exists x\ \beta)$.
- 25. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$.
- 26. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 27. $\forall x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 28. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \to \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 29. $\exists x\ (\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \to \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 30. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta)$.
- 31. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$.
- 32. $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \to (\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta)$.
- 33. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$.
- 34. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.

- 35. $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 36. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 37. $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 38. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \wedge \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 39. $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha \wedge \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 40. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\ \alpha \vee \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- 41. $\exists x\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\alpha \vee \exists x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- 42. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \forall x\ (\beta \rightarrow \alpha))$.
- 43. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta)$.
- 44. $\forall x\ (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\exists x\ \alpha \equiv \exists x\ \beta)$.

DOWÓD.

Podamy, dla przykładu, dowody niektórych z powyższych tez. Dowody pozostałych pozostawiamy jako ćwiczenie.

DOWÓD TEZY 5. $\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$(\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha))$	(A1): $\alpha/\forall x\ \alpha,\ \beta/\alpha,\ \gamma/\exists x\ \alpha$
4.	$(\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha) \rightarrow (\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha)$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	RO: 4, 2.

DOWÓD TEZY 12. $\exists x \forall y\ \alpha \rightarrow \forall y \exists x\ \alpha$.

1.	$\forall y\ \alpha \rightarrow \alpha$	(A14*)
2.	$\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	(A15*)
3.	$\forall y\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	Reguła Sylogizmu Hipotetycznego: 1, 2
4.	$\exists x \forall y\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	D$\exists$: 3
5.	$\exists x \forall y\ \alpha \rightarrow \forall y \exists x\ \alpha$	D$\forall$: 4.

DOWÓD TEZY 18. $\exists x\ \alpha \equiv \neg \forall x\ \neg \alpha$.

Aby udowodnić tę tezę równoważnościową, dowodzimy że tezami są: implikacja prosta i odwrotna. Następnie wystarczy skorzystać z wyprowadzalnej w KRZ (a więc także w KRP) reguły równoważności RR:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}.$$

DOWÓD TEZY IMPLIKACYJNEJ: $\neg \forall x\ \neg \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$.

1.	$\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	(A15*)
2.	$(\alpha \rightarrow \exists x\ \alpha) \rightarrow (\neg \exists x\ \alpha \rightarrow \neg \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$: $\beta/\exists x\ \alpha$
3.	$\neg \exists x\ \alpha \rightarrow \neg \alpha$	RO: 2, 1
4.	$\neg \exists x\ \alpha \rightarrow \forall x\ \neg \alpha$	D$\forall$: 3
5.	$(\neg \exists x\ \alpha \rightarrow \forall x\ \neg \alpha) \rightarrow (\neg \forall x\ \neg \alpha \rightarrow \neg\neg \exists x\ \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$: $\alpha/\neg \exists x\ \alpha,\ \beta/\forall x\ \neg \alpha$
6.	$\neg \forall x\ \neg \alpha \rightarrow \neg\neg \exists x\ \alpha$	RO: 5, 4
7.	$\neg\neg \exists x\ \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	teza KRZ $\neg\neg \alpha \rightarrow \alpha$: $\alpha/\exists x\ \alpha$
8.	$\neg \forall x\ \neg \alpha \rightarrow \exists x\ \alpha$	Reguła Sylogizmu Hipotetycznego: 6, 7.

DOWÓD TEZY IMPLIKACYJNEJ: $\exists x\ \alpha \rightarrow \neg \forall x\ \neg \alpha$.

1.	$\forall x\ \neg \alpha \rightarrow \neg \alpha$	(A14*)
2.	$(\forall x\ \neg \alpha \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \forall x\ \neg \alpha)$	teza KRZ $(\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha)$: $\alpha/\forall x\ \neg \alpha,\ \beta/\alpha$
3.	$\alpha \rightarrow \neg \forall x\ \neg \alpha$	RO: 2, 1
4.	$\exists x\ \alpha \rightarrow \neg \forall x\ \neg \alpha$	D$\exists$: 3.

20.2. Twierdzenia o dedukcji

Podobnie jak w KRZ, w KRP również zachodzą twierdzenia o dedukcji w wersji syntaktycznej. Potrzebne są jednak pewne dodatkowe założenia.

TWIERDZENIE 20.2.1. ***Twierdzenie o dedukcji wprost*** (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka KRP zachodzi następująca równoważność:

- $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash_{krp} \alpha \to \beta$.

DOWÓD.

Podamy dowody implikacji prostej i odwrotnej.

1. $\Rightarrow$

Zakładamy, że α jest zdaniem oraz $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$. Oznacza to, że β posiada dowód w KRP z $X \cup \{\alpha\}$, czyli że istnieje ciąg formuł

$$(*) \quad \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$$

taki, że γ_n jest identyczna z β, a każdy wyraz ciągu $(*)$ jest bądź założeniem (tj. elementem $X \cup \{\alpha\}$), bądź aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$ jako wynik zastosowania reguły odrywania lub reguły generalizacji. Budujemy ciąg $(**)$:

$$(**) \quad \langle \alpha \to \gamma_1, \ldots, \alpha \to \gamma_n \rangle.$$

Pokażemy teraz, posługując się metodą indukcji matematycznej, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_i$, dla $0 \leqslant i \leqslant n$, czyli że wszystkie elementy ciągu $(**)$ są wyprowadzalne na gruncie KRP ze zbioru X. Ponieważ γ_n jest identyczna z β, otrzymamy w ten sposób tezę twierdzenia.

POCZĄTKOWY KROK INDUKCJI.

Trzeba sprawdzić, czy zachodzi $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1$. Możliwe są następujące przypadki:

- (1) γ_1 jest założeniem, czyli elementem zbioru $X \cup \{\alpha\}$.
- (2) γ_1 jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17).

W przypadku (1) należy rozważyć dwie możliwości:

- (1.1.) γ_1 jest elementem X.
- (1.2.) γ_1 jest elementem $\{\alpha\}$, czyli γ_1 jest identyczna z α.

Rozpatrzmy możliwość (1.1.). Skoro γ_1 jest elementem X, to (na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$) otrzymujemy: $X \vdash_{krp} \gamma_1$. Zauważmy, że formuła $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$, jako szczególny przypadek schematu (A3), jest tezą KRP, czyli $\emptyset \vdash_{krp} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$. Stąd, na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $X \vdash_{krp} \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$. Pokazaliśmy więc, że $X \vdash_{krp} \{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\}$. Ponieważ zachodzi oczywiście

$$\{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1,$$

więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$) mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1$.

Rozpatrzmy teraz możliwość (1.2.). Z założenia, γ_1 jest identyczna z α. Trzeba zatem pokazać, że $X \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$. Ponieważ formuła $\alpha \to \alpha$ jest podstawieniem tezy KRZ (za zmienną zdaniową podstawiamy formułę α języka KRP), więc jest też tezą KRP. A zatem $\emptyset \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$, i na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \to \alpha$.

Przechodzimy do rozpatrzenia przypadku (2). Jeżeli γ_1 jest aksjomatem KRP, to oczywiście jest również tezą KRP, czyli $\emptyset \vdash_{krp} \gamma_1$. Podobnie jak w punkcie 1.1. powyżej, formuła $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ jest tezą KRP, a zatem pokazaliśmy, że: $X \vdash_{krp} \{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\}$. Ponieważ zachodzi oczywiście

$$\{\gamma_1, \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)\} \vdash_{krp} \alpha \to \gamma_1,$$

więc (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$) mamy: $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_1$.

NASTĘPNIKOWY KROK INDUKCJI.

Przyjmujemy założenie indukcyjne, czyli zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_i$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $k < n$. Należy pokazać, że $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Możliwe są następujące przypadki:

- (1) γ_{k+1} jest założeniem, czyli elementem zbioru $X \cup \{\alpha\}$.
- (2) γ_{k+1} jest aksjomatem opartym na jednym ze schematów (A1)–(A17).
- (3) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania RO do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$.
- (4) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji RG do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$.

W przypadkach (1) oraz (2) postępujemy analogicznie jak w początkowym kroku indukcji i otrzymujemy, że $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Rozważmy przypadek (3). Skoro γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania RO do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$, to istnieją $l \leqslant k$ oraz $m \leqslant k$ takie, że dla formuł γ_l oraz γ_m zachodzi alternatywa:

- γ_l jest identyczna z $\gamma_m \rightarrow \gamma_{k+1}$ lub
- γ_m jest identyczna z $\gamma_l \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_l$ oraz
- $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_m$.

Otrzymujemy więc alternatywę:

- $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow (\gamma_m \rightarrow \gamma_{k+1})$ oraz $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_m$ lub
- $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow (\gamma_l \rightarrow \gamma_{k+1})$ oraz $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_l$.

Oznacza to, że zachodzi alternatywa:

- $X \vdash_{krp} \{\alpha \rightarrow \gamma_m, \alpha \rightarrow (\gamma_m \rightarrow \gamma_{k+1})\}$ lub
- $X \vdash_{krp} \{\alpha \rightarrow \gamma_l, \alpha \rightarrow (\gamma_l \rightarrow \gamma_{k+1})\}$.

Zastosowanie poprzedzonej reguły odrywania PRO, znanej z KRZ, daje alternatywę:

- $\{\alpha \rightarrow \gamma_m, \alpha \rightarrow (\gamma_m \rightarrow \gamma_{k+1})\} \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$ lub
- $\{\alpha \rightarrow \gamma_l, \alpha \rightarrow (\gamma_l \rightarrow \gamma_{k+1})\} \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy ostatecznie: $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Zakończyliśmy więc dowód indukcyjny, a tym samym dowód implikacji $\Rightarrow$.

2. $\Leftarrow$

Zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \beta$. Musimy pokazać, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$.

Skoro $X \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \beta$, to (na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$) zachodzi także $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha \rightarrow \beta$. Na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$ mamy: $\{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. Stąd, ponownie na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. A zatem $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\}$. Ponieważ oczywiście (reguła odrywania!) zachodzi $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash_{krp} \beta$, więc, na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$, mamy ostatecznie $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$.

Zauważmy, że w dowodzie implikacji $\Leftarrow$ nie było potrzebne założenie, że α jest zdaniem, czyli formułą bez zmiennych wolnych.

TWIERDZENIE 20.2.2. ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost*** (wersja syntaktyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α, przy założeniu, że α jest zdaniem (formułą bez zmiennych wolnych) języka KRP zachodzą następujące równoważności:

- (1) $X \vdash_{krp} \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.
- (2) $X \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$.

DOWÓD.

Podamy dowody implikacji prostej i odwrotnej w przypadku (2). Dowód części (1) jest analogiczny (wystarczy zamiast α wpisać konsekwentnie $\neg\alpha$, a zamiast $\neg\alpha$ wpisać α).

1. $\Rightarrow$

Zakładamy, że $X \vdash_{krp} \alpha$. Na mocy monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ mamy również: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \alpha$. Z kolei, na mocy zwrotności relacji $\vdash_{krp}$, mamy: $\{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\alpha$. Z monotoniczności relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy: $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\alpha$. Widać zatem, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\alpha, \neg\alpha\}$. Mamy więc parę formuł wzajem sprzecznych wyprowadzalnych ze zbioru $X \cup \{\neg\alpha\}$, co należało wykazać.

Zauważmy, że w dowodzie implikacji $\Rightarrow$ nie było potrzebne założenie, że α jest zdaniem, czyli formułą bez zmiennych wolnych.

2. $\Leftarrow$

Zakładamy, że istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$. Z definicji relacji $\vdash_{krp}$ otrzymujemy:

- $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ oraz
- $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{krp} \neg\beta$.

Skoro α jest zdaniem, to także $\neg\alpha$ jest zdaniem. Możemy zatem skorzystać z twierdzenia o dedukcji wprost, na mocy którego mamy:

- $X \vdash_{krp} \neg\alpha \rightarrow \beta$ oraz
- $X \vdash_{krp} \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$.

Oznacza to, że $X \vdash_{krp} \{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\}$. Przypominamy, że formuła:

$$(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$$

jest szczególnym przypadkiem prawa sylogizmu destrukcyjnego, prawa KRZ. Stąd, $\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash_{krp} \alpha$. Skoro, jak już pokazaliśmy, $X \vdash_{krp} \{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\}$, to (na mocy przechodniości relacji $\vdash_{krp}$), otrzymujemy ostatecznie: $X \vdash_{krp} \alpha$.

Dodatkowe założenie w twierdzeniach o dedukcji jest istotne, jak widzieliśmy w dowodach tych twierdzeń.

Zauważmy, że tezy wymienione w twierdzeniu 20.1.3.1. mają wszystkie postać implikacji bądź równoważności. Z twierdzenia o dedukcji wprost otrzymujemy cały szereg dalszych reguł wtórnych: z tezy implikacyjnej utworzyć możemy regułę wtórną o przesłance identycznej z poprzednikiem branej pod uwagę implikacji, a wniosku identycznym z następnikiem tej implikacji. Z tezy równoważnościowej utworzyć możemy ***dwie*** reguły wtórne.

20.3. Przykłady dowodów

Podamy dwa przykłady dowodów formuł ze zbioru założeń.

PRZYKŁAD 20.3.1.

Aby udowodnić, że $\{\alpha\} \vdash_{krp} \forall x\ \alpha$ wystarczy do założenia α zastosować regułę generalizacji RG, otrzymując $\forall x\ \alpha$.

Zauważmy, że gdy α jest formułą atomową np. o postaci $P(x)$, gdzie P jest dowolnym predykatem jednoargumentowym, to $P(x) \vdash_{krp} \forall x\ P(x)$, na mocy powyższego.

Warto jednak pamiętać, że ***nie zachodzi***: $P(x) \models_{krp} \forall x\ P(x)$. Niech pokazanie tego będzie ćwiczeniem dla słuchaczek.

PRZYKŁAD 20.3.2.

Pokażemy, że: $\{\forall x\ (\alpha \to \beta),\ \exists x\ \alpha\} \vdash_{krp} \exists x\ \beta$. W tym celu najpierw udowodnimy tezę $(*)$:

$$(*) \quad \forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta).$$

1.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A14*)
2.	$\alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	prawo komutacji: 1
3.	$(\alpha \wedge \forall x\ (\alpha \to \beta)) \to \beta$	prawo importacji: 2
4.	$\beta \to \exists x\ \beta$	(A15*)
5.	$(\alpha \wedge \forall x\ (\alpha \to \beta)) \to \exists x\ \beta$	sylogizm hipotetyczny: 3, 4
6.	$\alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \exists x\ \beta)$	prawo eksportacji: 5
7.	$\exists x\ \alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \exists x\ \beta)$	D$\exists$: 6
8.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$	prawo komutacji: 7.

Teraz poszukiwany dowód jest już całkiem prosty:

1.	$\forall x\ (\alpha \to \beta)$	założenie
2.	$\exists x\ \alpha$	założenie
3.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta)$	teza $*$
4.	$\exists x\ \alpha \to \exists x\ \beta$	RO: 3, 1
5.	$\exists x\ \beta$	RO: 4, 2.

20.4. Trafność i pełność metody aksjomatycznej

20.4.1. Trafność metody aksjomatycznej

W wykładzie dotyczącym semantyki KRP pokazaliśmy, że schematy (A1)–(A17) są wszystkie schematami tautologii KRP. Pokazaliśmy również, że zarówno reguła odrywania, jak i reguła generalizacji zachowują własność bycia tautologią. Wykorzystamy te dwa fakty w dowodzie, że wszystkie tezy KRP są tautologiami KRP.

TWIERDZENIE 20.4.1.1.

Każda teza systemu aksjomatycznego KRP jest tautologią KRP.

DOWÓD.

Niech α będzie tezą systemu aksjomatycznego KRP. Oznacza to, że istnieje dowód formuły α, czyli ciąg formuł:

$$(*) \quad \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$$

taki, że γ_n jest identyczna z α, a każdy wyraz tego ciągu jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), bądź powstaje z wyrazów wcześniejszych w tym ciągu jako wynik zastosowania reguły odrywania lub reguły generalizacji.

Pokażemy, stosując metodę indukcji matematycznej, że każdy wyraz ciągu $(*)$ jest tautologią KRP. Ponieważ α jest identyczna z γ_n, będzie to wystarczało do dowodu całego twierdzenia.

POCZĄTKOWY KROK INDUKCJI.

Mamy pokazać, że γ_1 jest tautologią KRP. Na mocy definicji dowodu, γ_1 musi być aksjomatem KRP. Ponieważ każdy aksjomat KRP jest tautologią KRP (co pokazaliśmy na wykładzie dotyczącym semantyki KRP), więc γ_1 jest tautologią KRP.

NASTĘPNIKOWY KROK INDUKCJI.

Zakładamy, że wszystkie formuły γ_i dla $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $k < n$ są tautologiami KRP. Musimy pokazać, że również γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Należy rozważyć następujące przypadki:

- (1) γ_{k+1} jest aksjomatem KRP.
- (2) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$.
- (3) γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$.

Przypadek (1) jest oczywisty: skoro γ_{k+1} jest aksjomatem KRP, to jest też tautologią KRP.

Rozważmy przypadek (2). Jeśli γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do wyrazów wcześniejszych w ciągu $(*)$, to istnieją liczby $l \leqslant k$ oraz $m \leqslant k$ takie, że:

- γ_l jest identyczna z $\gamma_m \rightarrow \gamma_{k+1}$ lub
- γ_m jest identyczna z $\gamma_l \rightarrow \gamma_{k+1}$.

Na mocy założenia indukcyjnego, γ_l oraz γ_m są tautologiami KRP. Ponieważ reguła odrywania zachowuje własność bycia tautologią, więc także γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Rozpatrzmy teraz przypadek (3). Jeśli γ_{k+1} jest wynikiem zastosowania reguły generalizacji do wyrazu wcześniejszego w ciągu $(*)$, to istnieją: liczba $l \leqslant k$ oraz zmienna x_m takie, że γ_{k+1} jest identyczna z $\forall x_m\ \gamma_l$. Na mocy założenia indukcyjnego, γ_l jest tautologią KRP. Ponieważ reguła generalizacji zachowuje własność bycia tautologią, więc także γ_{k+1} jest tautologią KRP.

Zakończyliśmy więc dowód indukcyjny, a tym samym dowód całego twierdzenia.

Warto zauważyć, że dla wykazania, iż formuła α ***nie jest*** tezą KRP wystarczy, na mocy powyższego twierdzenia, wykazać, że nie jest ona tautologią, czyli znaleźć strukturę relacyjną, w której α jest fałszywa.

20.4.2. Pełność metody aksjomatycznej

Następne twierdzenie to bodaj najważniejsze twierdzenie KRP. Głosi ono (w jednym ze sformułowań), że aksjomatyka KRP jest pełna, czyli że każda tautologia KRP jest jego tezą. Jest wiele metod dowodu tego twierdzenia. Polecamy artykuł Jana Zygmunta *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, zamieszczony w podanej w odnośnikach bibliograficznych monografii pod redakcją Stanisława Surmy, szczegółowo omawiający różne wersje tego twierdzenia oraz sposoby jego dowodu. Poniżej podajemy szkic dowodu, wykorzystujący metodę Henkina. Ograniczamy się przy tym jedynie do omówienia głównej konstrukcji, pomijając szczegółowe uzasadnienia. W rozważanym ujęciu buduje się pewien model z „materiału językowego”, tj. ze stosownego zbioru stałych indywidualnych. Korzysta się z niektórych pojęć metalogicznych (teoria, teoria niesprzeczna, teoria zupełna), o których wspominamy krótko w punkcie 20.8. poniżej. W poprzednich wykładach wspominano już także o metodzie budowania modelu ilorazowego, wykorzystywanej poniżej.

TWIERDZENIE 20.4.2.1.

Każda tautologia KRP jest tezą systemu aksjomatycznego KRP.

DOWÓD (SZKIC).

Wprowadzamy, na potrzeby niniejszego dowodu, kilka użytecznych oznaczeń:

- S oznacza zbiór wszystkich formuł języka KRP o sygnaturze złożonej z jednego predykatu jednoargumentowego P, jednego predykatu dwuargumentowego Q oraz predykatu identyczności $\doteq$. Ograniczenie do takiej sygnatury nie powoduje utraty ogólności dowodu.
- Przez Sys oznaczamy rodzinę wszystkich *systemów dedukcyjnych* (wszystkich *teorii*) relacji konsekwencji $\vdash_{krp}$, tj. rodzinę tych wszystkich zbiorów formuł X, dla których zachodzi: $C_{krp}(X) = X$.
- Przez Con oznaczamy rodzinę wszystkich *niesprzecznych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których $C_{krp}(X) \neq S$ (warunek ten jest równoważny warunkowi: nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$).
- Przez Com oznaczamy rodzinę wszystkich *zupełnych* zbiorów formuł, tj. takich zbiorów X, dla których: $X \vdash_{krp} \alpha$ lub $X \vdash_{krp} \neg\alpha$, dla dowolnej formuły α.

Do (schematów) aksjomatów podanych powyżej (w 20.1.1.) dodajemy aksjomaty dla predykatu identyczności $\doteq$, omówione w wykładzie dotyczącym tablic analitycznych dla KRP z identycznością (wykłady 18–19).

W dowodzie twierdzenia wykorzystuje się Lemat Lindenbauma (zob. punkt 20.8.) oraz twierdzenie o dedukcji nie wprost (twierdzenie 20.2.2.).

Dowód twierdzenia dzieli się w sposób naturalny na dwie części:

- I. Dowód, iż każdy niesprzeczny zbiór formuł języka KRP ma model.
- II. Dowód (nie wprost), że każda tautologia KRP jest tezą KRP, wykorzystujący część I.

I. KONSTRUKCJA MODELU.

Rozpoczynamy od języka L o sygnaturze wspomnianej wyżej. Niech

$$C = \{c_i : i \in \omega\}$$

będzie zbiorem stałych indywidualnych (ω jest tu zbiorem wszystkich skończonych liczb porządkowych). Przez $L(C)$ oznaczamy rozszerzenie języka L otrzymane poprzez dodanie do L wszystkich stałych indywidualnych ze zbioru C.

Niech Y będzie dowolnym niesprzecznym i zupełnym systemem dedukcyjnym w języku $L(C)$. Definiujemy relację $\sim$ na zbiorze C w sposób następujący:

$$c_i \sim c_j \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } c_i \doteq c_j \text{ należy do } Y.$$

Wykorzystując własności Y można pokazać, że $\sim$ jest relacją równoważności w C. Niech $c_i^\sim$ oznacza klasę równoważności elementu c_i względem tej relacji.

Budujemy strukturę relacyjną

$$\mathfrak{M}(Y, C) = \langle U, P, Q, \{s_i : i \in \omega\}, id\rangle$$

w sposób następujący:

- (i) $U = \{c_i^\sim : c_i \in C\}$
- (ii) $s_i = c_i^\sim$
- (iii) $c_i^\sim \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(c_i) \in Y$
- (iv) $(c_i^\sim, c_j^\sim) \in Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(c_i, c_j) \in Y$
- (v) $(c_i^\sim, c_j^\sim) \in id$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \doteq c_j \in Y$.

Z powyższego wynika, że id jest relacją identyczności w uniwersum U.

Powiemy, że zbiór zdań Y spełnia warunek (H) (warunek Henkina) w zbiorze stałych C, gdy dla każdego zdania egzystencjalnego $\exists x\ \alpha(x)$ z faktu, że $\exists x\ \alpha(x)$ jest elementem Y wynika, iż istnieje stała $c \in C$ taka, że $\alpha(x/c)$ jest elementem Y.

Dowodzi się teraz szeregu lematów (w tej wersji niniejszych notatek pomijamy dowody):

LEMAT 1.

Jeśli Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$ takim, że:

- Y jest teorią niesprzeczną i zupełną (tj. elementem rodziny $Sys \cap Con \cap Com$),
- Y spełnia warunek (H) w zbiorze C,

to dla dowolnego zdania α:

- $\mathfrak{M}(Y, C) \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$.

LEMAT 2.

Jeśli α oraz β są zdaniami, to z $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krp} \beta$ wynika $X \vdash_{krp} \alpha \to \beta$.

LEMAT 3.

Jeżeli:

- stała indywidualna c nie występuje w formułach ze zbioru X,
- $\alpha(x)$ powstaje z $\alpha(c)$ przez wstawienie zmiennej x w miejsce c w formule $\alpha(c)$ oraz x nie jest w $\alpha(x)$ na żadnym miejscu związana,
- $X \vdash_{krp} \alpha(c)$,

to

- $X \vdash_{krp} \alpha(x)$.

LEMAT 4.

Jeżeli:

- $X \in Con$
- stała c nie występuje w elementach zbioru X,
- $\exists x\ \alpha(x)$ jest elementem X,

to

- $X \cup \{\alpha(x/c)\} \in Con.$

Do sformułowania następnego lematu potrzeba kilku pojęć pomocniczych. Dla każdej liczby naturalnej i niech C_i będzie nieskończonym ciągiem wzajemnie jednoznacznym $\langle c^i_j \rangle$, gdzie j przebiega wszystkie liczby naturalne. Każdy ciąg C_i jest zatem ciągiem bez powtórzeń. Niech $C = \bigcup\limits_{i \in \omega} C_i$.

Określamy ciąg języków L_n. Za L_0 bierzemy L. Język L_n otrzymujemy z L_0 poprzez dodanie do niego zbioru stałych $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$. Przez $S_{(n)}$ rozumiemy zbiór zdań języka L_n.

LEMAT 5.

Jeżeli:

- $X \in Con$,
- $X \subseteq S_{(n)}$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- $X \subseteq Y$,
- $Y \subseteq S_{(n+1)}$
- $Y \in Con$,
- Y spełnia względem X warunek (H) w zbiorze $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} C_i$, tj. dla dowolnego zdania $\exists x\ \alpha(x) \in X$ istnieje stała $c \in \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} C_i$ taka, że $\alpha(c) \in Y$.

LEMAT 6.

Jeżeli:

- $X \subseteq S_{(0)}$,
- $X \in Con$,

to istnieje zbiór Y taki, że:

- Y jest zbiorem zdań języka $L(C)$,
- $X \subseteq Y$,
- $Y \in Sys \cap Con \cap Com$,
- Y spełnia warunek (H) w C.

Na mocy lematów 1 i 6 otrzymujemy:

KAŻDY NIESPRZECZNY ZBIÓR ZDAŃ MA MODEL.

II. KAŻDA TAUTOLOGIA KRP JEST TEZĄ KRP.

Załóżmy, że α jest tautologią KRP i przypuśćmy, że α nie jest tezą KRP. Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a zatem trzeba je odrzucić.

Przypominamy: uniwersalne domknięcie formuły α to formuła powstająca z α poprzez poprzedzenie α kwantyfikatorami generalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne w α. Uniwersalne domknięcie dowolnej formuły jest oczywiście zdaniem.

Jeśli α nie jest tezą, to również jej uniwersalne domknięcie $\overline{\alpha}$ nie jest tezą. Gdyby bowiem $\overline{\alpha}$ było tezą, to (na mocy (A14)) także α byłaby tezą, wbrew przypuszczeniu.

Skoro $\overline{\alpha}$ nie jest tezą, to ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$. Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest zdaniem, więc można skorzystać z twierdzenia o dedukcji nie wprost: ***nie zachodzi*** $\emptyset \vdash_{krp} \overline{\alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***nie istnieje*** formuła β taka, że:

$$\{\neg\overline{\alpha}\} \vdash_{krp} \{\beta, \neg\beta\}.$$

Oznacza to, że zbiór $\{\neg\overline{\alpha}\}$ jest niesprzeczny. Na mocy części I dowodu, istnieje model $\mathfrak{M}$ tego zbioru, a zatem:

$$(\dagger) \quad \mathfrak{M} \models \neg\overline{\alpha}.$$

Z założenia, α jest tautologią. Również $\overline{\alpha}$ jest więc tautologią, ponieważ reguła generalizacji zachowuje własność bycia tautologią. Tak więc, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej (stosownej sygnatury). W szczególności, $\overline{\alpha}$ jest prawdziwa w każdej strukturze relacyjnej $\mathfrak{M}$, skonstruowanej na mocy części I dowodu:

$$(\ddagger) \quad \mathfrak{M} \models \overline{\alpha}.$$

Warunki $(\dagger)$ oraz $(\ddagger)$ są jednak wzajem sprzeczne, ze względu na definicję relacji $\models$. Tak więc, przypuszczenie, że α nie jest tezą należy odrzucić. Ostatecznie, każda tautologia KRP jest tezą KRP.

20.5. Twierdzenie o zwartości syntaktycznej

TWIERDZENIE 20.5.1.

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α zachodzi następująca równoważność:

- $X \vdash_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$.

DOWÓD.

Dowód implikacji odwrotnej $\Leftarrow$ jest natychmiastowy: skoro $Y \vdash_{krp} \alpha$ dla pewnego skończonego zbioru formuł $Y \subseteq X$, to — ze względu na monotoniczność relacji $\vdash_{krp}$ — zachodzi także $X \vdash_{krp} \alpha$.

Dowód implikacji prostej $\Rightarrow$ również nie jest trudny. Skoro $X \vdash_{krp} \alpha$, to istnieje dowód α z X w KRP, a więc skończony ciąg formuł $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ taki, że γ_n jest identyczna z α, a każdy element ciągu $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ jest bądź aksjomatem opartym na którymś ze schematów (A1)–(A17), bądź wynikiem zastosowania reguły podstawiania lub reguły generalizacji do wyrazów wcześniejszych w tym ciągu. Niech teraz Y będzie zbiorem tych wyrazów ciągu $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$, które są elementami zbioru X. Zbiór Y jest oczywiście skończony. Jest także oczywiste, że można zbudować dowód w KRP formuły α w oparciu o zbiór Y, czyli że $Y \vdash_{krp} \alpha$.

W dowodzie powyższego twierdzenia odwołujemy się zatem w istocie do finitystyczności operatora konsekwencji C_{krp}.

20.6. Niesprzeczność KRP

Mówimy, że zbiór formuł X jest (syntaktycznie) ***niesprzeczny*** wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła α taka, że $X \vdash_{krp} \alpha$ oraz $X \vdash_{krp} \neg\alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest (syntaktycznie) ***sprzeczny***.

TWIERDZENIE 20.6.1.

Zbiór wszystkich tez KRP jest niesprzeczny.

DOWÓD.

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że zbiór wszystkich tez KRP nie jest niesprzeczny. Istnieje wtedy formuła α taka, że zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są konsekwencjami zbioru wszystkich tez KRP, czyli są tezami KRP.

Na mocy twierdzenia o pełności, zarówno α, jak i $\neg\alpha$ są tautologiami KRP, czyli są obie spełnione w każdej interpretacji. Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolną strukturą relacyjną, a w dowolnym wartościowaniem w $\mathfrak{M}$. Wtedy zachodziłoby zarówno $\mathfrak{M} \models_w \alpha$, jak i $\mathfrak{M} \models_w \neg\alpha$, co jest jednak sprzeczne z definicją relacji spełniania. Ostatecznie zatem nie istnieje formuła α o podanej wyżej własności, a więc zbiór wszystkich tez KRP jest (syntaktycznie) niesprzeczny.

20.7. Informacja o innych twierdzeniach metalogicznych dotyczących KRP

W wykładach dotyczących semantyki KRP oraz metody tablic analitycznych dla KRP podaliśmy kilka ważnych twierdzeń metalogicznych dotyczących KRP, np.:

- twierdzenie Churcha
- twierdzenie Herbranda
- twierdzenie Löwenheima-Skolema
- twierdzenie o prefiksowych postaciach normalnych.

Twierdzenia te mogą być również sformułowane w aksjomatycznym ujęciu KRP.

Dodajmy do tej listy jeszcze jedno twierdzenie, zwane *twierdzeniem o neutralności logiki wobec stałych indywiduowych, predykatów oraz symboli funkcyjnych*. Przypominamy, że $S(a_j, x_i, \alpha)$, gdzie a_j jest stałą indywidualną, x_i zmienną, a α formułą języka KRP oznacza wynik podstawienia stałej a_j za zmienną x_i w formule α (tj. za wszystkie wolne wystąpienia x_i w α). Niech ponadto, dla formuły α, m-argumentowych predykatów P_i^m i P_j^m oraz m-argumentowych symboli funkcyjnych F_i^m i F_j^m:

- $\alpha(P_i^m/P_j^m)$ oznacza wynik konsekwentnego zastąpienia wszystkich wystąpień predykatu P_i^m w formule α predykatem P_j^m;
- $\alpha(F_i^m/F_j^m)$ oznacza wynik konsekwentnego zastąpienia wszystkich wystąpień symbolu funkcyjnego F_i^m w formule α symbolem funkcyjnym F_j^m.

Zapowiadane twierdzenie ma następujące sformułowanie:

- Jeśli żadna ze stałych indywidualnych a_m, a_n nie występuje w α, to $S(a_m, x_i, \alpha)$ jest tezą KRP wtedy i tylko wtedy, gdy $S(a_n, x_i, \alpha)$ jest tezą KRP.
- Jeśli α jest tezą KRP, to $\alpha(P_i^m/P_j^m)$ jest tezą KRP.
- Jeśli α jest tezą KRP, to $\alpha(F_i^m/F_j^m)$ jest tezą KRP.

Powyższe twierdzenie jest też nazywane *twierdzeniem o niewyróżnianiu stałych pozalogicznych*. Głosi ono, mówiąc krótko, że:

- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnej stałej indywidualnej, da się także udowodnić o dowolnej innej stałej;

- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnym predykacie, da się także udowodnić o dowolnym innym predykacie;
- cokolwiek da się udowodnić w KRP o pewnym symbolu funkcyjnym, da się także udowodnić o dowolnym innym symbolu funkcyjnym.

20.8. Niektóre własności teorii elementarnych

Teorie aksjomatyczne budowane w języku KRP mają wyszczególnione zbiory:

- pojęć specyficznych (pierwotnych, niedefiniowalnych)
- aksjomatów (założeń przyjmowanych bez dowodu).

Środkami dowodowymi w takich teoriach są reguły wnioskowania KRP.

W języku klasycznego rachunku predykatów formułować można tzw. ***teorie elementarne***. Gdy wyróżnimy pewien zbiór *stałych pozalogicznych* (predykatów, symboli funkcyjnych, stałych indywidualnych) S oraz zbiór A zdań, zwanych *aksjomatami* rozważanej teorii elementarnej T, to sama formalna definicja T jest następująca.

Teorią elementarną w języku KRP o sygnaturze S oraz zbiorze aksjomatów A nazywamy zbiór wszystkich formuł wyprowadzalnych na gruncie KRP ze zbioru aksjomatów A. Tak więc, T jest teorią elementarną, gdy

$$T = \{\alpha : A \vdash_{krp} \alpha\}.$$

Jeśli T jest teorią elementarną, to $C_{krp}(T) = T$, co wynika wprost z powyższej definicji. Przypomnijmy, że w przypadku dowolnego operatora konsekwencji C, ***teoriami*** (tego operatora) nazywamy jego punkty stałe, tj. takie zbiory X, dla których $X = C(X)$.

W poprzednich wykładach podano przykłady czterech takich teorii:

- teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema ZFC
- arytmetyka Peana PA
- teoria algebr Boole'a (dwie aksjomatyki)
- teoria grup (trzy aksjomatyki).

Podajmy jeszcze jeden przykład prostej teorii elementarnej: teorii gęstych liniowych porządków bez elementu pierwszego i ostatniego. Jest to teoria, w której języku występuje, obok predykatu identyczności $\doteq$ jeden predykat dwuargumentowy, powiedzmy $\prec$. Teoria jest scharakteryzowana następującymi aksjomatami:

- (1) $\forall x \ (x \doteq x)$
- (2) $\forall x \forall y \ (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- (3) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z)$
- (4) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \doteq y \wedge x \prec z) \rightarrow y \prec z)$
- (5) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \doteq y \wedge z \prec x) \rightarrow z \prec y)$
- (6) $\forall x \forall y \ (x \prec y \rightarrow \neg y \prec x)$
- (7) $\forall x \forall y \forall z \ ((x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z)$
- (8) $\forall x \forall y \ (x \doteq y \vee x \prec y \vee y \prec x)$
- (9) $\forall y \exists x \ (y \prec x)$
- (10) $\forall y \exists x \ (x \prec y)$

- (11) $\forall x \forall y\ (x \prec y \rightarrow \exists z\ (x \prec z \wedge z \prec y))$.

Modelami tej teorii są np.: zbiór wszystkich liczb wymiernych wraz ze zwykłą relacją porządku $<$, a także zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wraz ze zwykłą relacją porządku $<$. Zbiór wszystkich liczb całkowitych, ze zwykłą relacją porządku $<$ nie jest modelem tej teorii, ponieważ nie spełnia warunku (11), czyli warunku gęstości. Przedział domknięty $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych (ze zwykłą relacją porządku $<$) również nie jest modelem tej teorii, gdyż nie spełnia ani warunku (9), ani warunku (10).

* * *

Ważnym zadaniem metalogiki jest badanie własności teorii (tu: elementarnych). Podamy kilka przykładów takich własności oraz (bez dowodów) informacje, jakim teoriom własności te przysługują.

Oczywistym wymogiem, któremu sprostać powinna teoria jest jej niesprzeczność. Teorie sprzeczne nie są interesujące (z formalnego punktu widzenia), gdyż wszystko (każda formuła języka KRP) daje się w nich udowodnić.

Na mocy twierdzenia o pełności, teoria jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model. Jednak czysto ***syntaktyczne*** dowody niesprzeczności teorii są, w ogólności, trudne do uzyskania. Stosuje się w nich np. takie techniki, jak: metoda interpretacji syntaktycznej, metoda relatywizacji kwantyfikatorów.

Przypominamy, że $C_{krp}(X)$ to zbiór wszystkich konsekwencji logicznych zbioru X. Odnotujmy (bez dowodu) kilka faktów dotyczących niesprzeczności:

- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{krp}(X)$ jest niesprzeczny.
- Podzbiór zbioru niesprzecznego jest niesprzeczny. Nadzbiór zbioru sprzecznego jest sprzeczny.
- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła α taka, że α nie jest elementem zbioru $C_{krp}(X)$.
- Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest niesprzeczny. W konsekwencji, zbiór X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór jest sprzeczny. [To także jedna z postaci twierdzenia o zwartości.]
- Jeżeli $\langle X_1, X_2, X_3, \ldots \rangle$ jest nieskończonym ciągiem niesprzecznych zbiorów formuł oraz

$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots,$$

  to zbiór $\bigcup_i X_i$ jest niesprzeczny.
- Jeśli α jest zdaniem (nie zawiera zmiennych wolnych) oraz $\neg\alpha$ nie należy do zbioru $C_{krp}(X)$, to zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest niesprzeczny.

* * *

Inną ważną własnością metalogiczną jest zupełność. Mówimy, że zbiór formuł języka KRP (o sygnaturze σ) jest ***zupełny*** (ze względu na tę sygnaturę) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α (w języku sygnatury σ) bądź α jest elementem $C_{krp}(X)$, bądź $\neg\alpha$ jest elementem $C_{krp}(X)$.

Gdy X jest zbiorem aksjomatów jakiejś teorii T (w języku o określonej sygnaturze), a α zdaniem (tego języka) takim, że ani α, ani $\neg\alpha$ nie należy do $C_{krp}(X)$, to mówimy, że α jest zdaniem ***nierozstrzygalnym*** na gruncie aksjomatów X (lub: w teorii T). Jeśli teoria jest zupełna, to nie istnieją w niej zdania nierozstrzygalne. Oznacza to, że w teorii zupełnej każdy problem sformułowany w jej języku znajduje rozstrzygnięcie na gruncie tej teorii.

Większość ważnych, interesujących teorii matematycznych to teorie, które nie są zupełne. Należy przy tym pamiętać, że nie zawsze zupełność jest pożądaną własnością teorii: dla przykładu teoria algebr Boole'a (niezupełna) została zbudowana z myślą o wielu bardzo różnych interpretacjach. Zupełność jest natomiast własnością pożądaną, gdy budujemy teorię z myślą o jakiejś jednej, ustalonej interpretacji (jak np. w przypadku arytmetyki Peana). Jednak właśnie w przypadku arytmetyki Peana (oraz, ogólniej, w przypadku wszelkich teorii zawierających stosowną część tej arytmetyki) mamy do czynienia z brakiem zupełności.

Teorią zupełną jest natomiast podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Fakt ten może zostać udowodniony przy pomocy techniki zwanej *eliminacją kwantyfikatorów*.

Podamy (bez dowodów) kilka faktów dotyczących pojęcia zupełności (pomijamy wszędzie określenie: „ze względu na dany język"):

- Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{krp}(X)$ jest zupełny.
- Jeżeli zbiór X nie jest zupełny, to jest niesprzeczny.
- Zbiór X jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły α nie należącej do $C_{krp}(X)$ zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest sprzeczny.
- (LEMAT LINDENBAUMA). Jeśli X jest zbiorem niesprzecznym, to istnieje niesprzeczna i zupełna teoria Y taka, że $X \subset Y$.

SZKIC DOWODU LEMATU LINDENBAUMA.

Wszystkie zdania języka KRP można ustawić w nieskończony ciąg:

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle,$$

przyjmując jakąś umowę dotyczącą uporządkowania zbioru ciągów symboli z alfabetu skończonego (metody takie omówiono na zajęciach ze *Wstępu do matematyki*).

Przez indukcję określamy teraz ciąg $\langle Y_1, Y_2, Y_3, \ldots \rangle$ zbiorów formuł zdaniowych w sposób następujący:

- $Y_1 = X$
- jeśli $\neg\alpha_i$ nie jest elementem $C_{krp}(Y_i)$, to przyjmujemy: $Y_{i+1} = Y_i \cup \{\alpha_i\}$
- jeśli $\neg\alpha_i$ jest elementem $C_{krp}(Y_i)$, to przyjmujemy: $Y_{i+1} = Y_i$.

Tak określony ciąg zbiorów jest wstępujący, czyli $Y_i \subset Y_{i+1}$ dla wszystkich i. Ponadto, wszystkie zbiory Y_i są niesprzeczne, co wykazuje się przez indukcję po i. W konsekwencji, zbiór:

$$Y = C_{krp}(\bigcup_{i=1}^{\infty})Y_i$$

również jest zbiorem niesprzecznym. Oczywiście, Y jest teorią i zawiera X. Na mocy konstrukcji zbiorów Y_i, dla każdego zdania α zachodzi alternatywa:

- α jest elementem Y, lub
- $\neg\alpha$ jest elementem Y.

A zatem zbiór Y spełnia tezę Lematu Lindenbauma: jest niesprzeczną zupełną teorią zawierającą zbiór X.

UWAGA. Dowód Lematu Lindenbauma nie jest konstruktywny (korzysta z aksjomatu wyboru), wiemy więc tylko, że każdy niesprzeczny zbiór formuł można rozszerzyć do teorii niesprzecznej i zupełnej.

* * *

Następna z własności metalogicznych to niezależność. Mówimy, że formuła α jest ***niezależna*** od zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy α nie należy do $C_{krp}(X)$. Mówimy, że zbiór formuł X jest ***niezależny*** wtedy i tylko wtedy, gdy α nie należy do $C_{krp}(X - \{\alpha\})$, dla wszystkich formuł α należących do X.

Gdy budujemy system aksjomatów, to wymóg jego niezależności stanowi wyraz troski o ekonomię: aksjomaty, które nie są niezależne od pozostałych są po prostu zbędne, gdyż można je z owych pozostałych wyprowadzić. Czasami jednak nie przykłada się pierwszorzędnej wagi do własności niezależności (zbioru aksjomatów), przedkładając nad nią (pragmatyczne) własności: zrozumiałości, estetyki, łatwości zapamiętania.

Powiemy, że zbiory X i Y formuł są ***logicznie równoważne*** wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{krp}(X) = C_{krp}(Y)$. Zbiory logicznie równoważne mają zatem dokładnie te same konsekwencje logiczne.

Przypominamy, że $\overline{\alpha}$ oznacza ***uniwersalne domknięcie*** formuły α, tj. formułę otrzymaną z α poprzez poprzedzenie α kwantyfikatorami generalnymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne w α. Oto dwa fakty dotyczące pojęcia niezależności (podane bez dowodów):

- Jeśli zbiór $X \cup \{\neg\overline{\alpha}\}$ jest niesprzeczny, to formuła α jest niezależna od zbioru X.
- Jeżeli zbiór X jest skończony, to istnieje niezależny zbiór Y równoważny logicznie zbiorowi X.

Istnieją nieskończone zależne zbiory formuł, które nie są równoważne logicznie z żadnym swoim skończonym niezależnym podzbiorem. Rozważmy bowiem następujący ciąg zdań (niech ich zapisanie w języku KRP będzie ćwiczeniem dla słuchaczek):

- Istnieją co najmniej dwa obiekty.
- Istnieją co najmniej trzy obiekty.
- Istnieją co najmniej cztery obiekty.
- ...

Każde zdanie tego zbioru jest tutaj zależne, ponieważ jest konsekwencją logiczną zdania po nim następującego. Jednak żaden skończony zbiór tych zdań nie jest logicznie równoważny całemu ich zbiorowi.

* * *

Dodajmy, że poszukiwanie ***skończonych*** zbiorów formuł mogących stanowić aksjomatykę rozważanej teorii elementarnej T, równoważną logicznie z (być może nieskończoną) aksjomatyką teorii T jest ważnym problemem metodologicznym: jest to pytanie o tzw. ***skończoną aksjomatyzowalność*** teorii.

* * *

Zakładamy, że słuchaczki znają pojęcie izomorfizmu oraz pojęcie (nieskończonej) liczby kardynalnej z zajęć ze *Wstępu do matematyki*. Pojęcia te wykorzystujemy dla sformułowania jeszcze jednej własności mogącej przysługiwać teoriom elementarnym.

Mówimy mianowicie, że teoria T jest ***kategoryczna w mocy*** κ, gdzie κ jest (nieskończoną) liczbą kardynalną, gdy wszystkie modele teorii T, których uniwersa mają moc κ są izomorficzne. Kategoryczność w ustalonej mocy oznacza zatem, że wszystkie modele tej mocy branej pod uwagę teorii są strukturalnie nieodróżnialne, są „tak samo zbudowane".

Przykładem teorii kategorycznej w mocy $\aleph_0$ jest podana powyżej elementarna teoria liniowego gęstego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego. Nie jest natomiast kategoryczna w mocy $\aleph_0$ arytmetyka Peana. A zatem aksjomaty tej arytmetyki nie charakteryzują ***dokładnie jednej*** (z dokładnością do izomorfizmu) struktury.

20.9. Przykłady innych aksjomatyk KRP

Jak wspomniano na początku, można na różne sposoby dobierać aksjomaty KRP. Oto kilka znanych propozycji. Tytuły poniższych punktów odnoszą się do pozycji zamieszczonych w odnośnikach bibliograficznych.

Pogorzelski 1992, 242.

Aksjomatami są domknięcia uniwersalne wszystkich formuł o postaci:

- $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- $\forall x_k\ \alpha \rightarrow S(t, x_k, \alpha)$, o ile term t jest podstawialny za x_k w α
- $\forall x_k\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x_k\ \alpha \rightarrow \forall x_k\ \beta)$
- $\alpha \rightarrow \forall x_k\ \alpha$, o ile x_k nie jest zmienną wolną formuły α.

Jedyną regułą wnioskowania w tym systemie jest reguła odrywania RO.

Cori, Lascar 2000, 194–195.

Za schematy aksjomatów bierzemy wszystkie podstawienia tautologii KRZ oraz schematy następujące:

- $\exists x\ \alpha \equiv \neg\forall x\ \neg\alpha$
- $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\ \beta)$, o ile x nie jest wolna w α
- $\forall x\ \alpha \rightarrow S(t, x, \alpha)$, o ile t jest podstawialny za x w α.

Regułami wnioskowania są tu: reguła odrywania oraz reguła generalizacji.

Marciszewski 1987, 26 i następne.

W omawianym tu systemie aksjomatami są wszystkie podstawienia tez KRZ oraz następujące schematy:

- $\forall x\ \alpha(x) \rightarrow \alpha(y)$
- $\alpha(y) \rightarrow \exists x\ \alpha(x)$.

Regułami systemu są (zakłada się tu, że x nie jest wolna w β):

$$\frac{\beta \rightarrow \alpha(x)}{\beta \rightarrow \forall x\ \alpha(x)} \qquad\qquad \frac{\alpha(x) \rightarrow \beta}{\exists x\ \alpha(x) \rightarrow \beta}.$$

21. Ćwiczenia

Teraz to, co lubicie najbardziej, czyli zadania do samodzielnego rozwiązania. Wszystkie zaopatrzone zostały w odpowiedzi.

1. Podaj dowody następujących tez KRP:

- (a) $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$
- (b) $(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$.

2. Pokaż, że następujące reguły są wyprowadzalne w KRP:

- (a)
$$\frac{\exists x\ \alpha}{\exists x\ (\alpha \vee \beta)}$$
- (b)
$$\frac{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta}{\forall x\ (\gamma \to \alpha)}.$$

3. Wykorzystaj twierdzenia o dedukcji w dowodach następujących tez:

- (a) $(\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$
- (b) $(\exists x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)) \to \forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Rozwiązania

1(a). $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$

1.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(A14*)
2.	$\alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	prawo komutacji: 1
3.	$\forall x\ \alpha \to \alpha$	(A14*)
4.	$\forall x\ \alpha \to (\forall x\ (\alpha \to \beta) \to \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 3, 2
5.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \beta)$	prawo komutacji: 4
6.	$(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \forall x\ \alpha) \to \beta$	prawo importacji: 5
7.	$(\forall x\ (\alpha \to \beta) \wedge \forall x\ \alpha) \to \forall x\ \beta$	D$\forall$: 6
8.	$\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\forall x\ \alpha \to \forall x\ \beta)$	prawo eksportacji: 7.

1(b). $(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$

1.	$(\exists x\ \alpha \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to ((\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to ((\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)))$	prawo dodawania poprzedników
2.	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	(A7)
3.	$(\alpha \vee \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	(A15*)
4.	$\alpha \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 2, 3
5.	$\exists x\ \alpha \to (\alpha \vee \beta)$	D$\exists$: 4
6.	$((\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)) \to ((\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)))$	RO: 1, 5
7.	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	(A8)
8.	$\beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	sylogizm hipotetyczny: 7, 3
9.	$\exists x\ \beta \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	D$\exists$: 8
10.	$(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \to \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	RO: 6, 9.

2(a).

$$\frac{\exists x\ \alpha}{\exists x\ (\alpha \vee \beta)}$$

Trzeba pokazać, że: $\{\exists x\ \alpha\} \vdash_{krp} \exists x\ (\alpha \vee \beta)$.

1.	$\exists x\ \alpha$	założenie
2.	$\exists x\ \alpha \rightarrow (\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta)$	(A7)
3.	$\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta$	RO: 2, 1
4.	$(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \rightarrow \exists x\ (\alpha \vee \beta)$	teza (ćw. 1(b))
5.	$\exists x\ (\alpha \vee \beta)$	RO: 4, 3.

2(b).

$$\frac{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta}{\forall x\ (\gamma \rightarrow \alpha)}$$

Trzeba pokazać, że: $\{\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta,\ \forall x\ \beta\} \vdash_{krp} \forall x\ (\gamma \rightarrow \alpha)$.

1.	$\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta$	założenie
2.	$\forall x\ \beta$	założenie
3.	$(\forall x\ \alpha \equiv \forall x\ \beta) \rightarrow (\forall x\ \beta \rightarrow \forall x\ \alpha)$	(A11)
4.	$\forall x\ \beta \rightarrow \forall x\ \alpha$	RO: 3, 1
5.	$\forall x\ \alpha$	RO: 4, 2
6.	$\forall x\ \alpha \rightarrow \alpha$	(A14*)
7.	α	RO: 6, 5
8.	$\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha)$	(A3)
9.	$\gamma \rightarrow \alpha$	RO: 8, 7
10.	$\forall x\ (\gamma \rightarrow \alpha)$	RG: 9.

3(a). $(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$

$(\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$ jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\emptyset \vdash_{krp} (\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)).$$

Ponieważ $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ jest zdaniem, więc (na mocy twierdzenia o dedukcji) zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)\} \vdash_{krp} \forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x).$$

Jeszcze raz stosujemy twierdzenie o dedukcji (co możemy uczynić, gdyż $\forall x\ P(x)$ jest zdaniem) i otrzymujemy, że zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x),\ \forall x\ P(x)\} \vdash_{krp} \exists x\ Q(x).$$

Budujemy zatem dowód tego ostatniego:

1.	$\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$	założenie
2.	$\forall x\ P(x)$	założenie
3.	$\forall x\ P(x) \rightarrow P(x)$	(A14*)
4.	$P(x)$	RO: 3, 2
5.	$P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$	(A15*)
6.	$\exists x\ P(x)$	RO: 5, 4
7.	$\exists x\ Q(x)$	RO: 1, 6.

3(b). $(\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

$(\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\emptyset \vdash_{krp} (\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Ponieważ $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$ jest zdaniem, więc (na mocy twierdzenia o dedukcji) zachodzi to dokładnie wtedy, gdy

$$\{\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)\} \vdash_{krp} \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Budujemy dowód tego ostatniego:

1.	$\exists x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)$	założenie
2.	$P(x) \to \forall x\ Q(x)$	O$\exists$: 1
3.	$P(x) \to Q(x)$	O$\forall$: 2
4.	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	RG: 3.

Wykorzystywana literatura

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Cori, R., Lascar, D. 2000. *Mathematical Logic. A Course with Exercises*. Oxford University Press, Oxford.
Part I: *Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems*.
Part II: *Recursion Theory, Gödel's Theorems, Set Theory, Model Theory*.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.

Zygmunt, J. 1973. A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem. W: Surma 1973, 165–238.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl