Logika Radosna 4

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRP

Uszy i Ogon

Zgodzisz się, że z przesłanki:

- *Uszy są krótsze od Ogona.*

można **poprawnie** wyprowadzić np. takie wnioski:

- *Ogon jest dłuższy od Uszu.*
- *Uszy nie są dłuższe od Ogona.*
- *Ogon i Uszy nie sa równej długości.*

Dlaczego jednak uznajesz te wnioskowania za poprawne?
Czy potrafisz podać jakieś **reguły** uzasadniające poprawność tych wnioskowań, a przesądzające ponadto, że na mocy powyższej przesłanki nie można prawomocnie przyjąć np. wniosku:

- *Ogon jest krótszy od Uszu.* ?

Urocza Koreanistka

Pamiętamy, że Urocza Koreanistka miała kłopoty z Polskim Katolicyzmem. Zastanówmy się — jakie **reguły wnioskowania** potrzebne są, aby rozstrzygnąć, że jedno z poniższych wnioskowań jest poprawne, a jedno nie jest poprawne:

- *Nieprawda, że każdy Polak jest katolikiem. Zatem żaden Polak nie jest katolikiem.*
- *Nieprawda, że każdy Polak jest katolikiem. Zatem nie wszyscy Polacy są katolikami.*

Domyślamy się, że katolicyzm i polskość nie mają tu nic do rzeczy: poszukiwane reguły odwoływać się muszą do (znaczenia) spójników prawdziwościowych oraz wyrażeń kwantyfikujących.

Wnioskowania o własnościach i relacjach

Porównaj następujące wnioskowania:

- *Skoro Ania jest starsza od Basi, a Basia starsza od Czesia, to Ania jest starsza od Czesia.*
- *Skoro Adam jest ojcem Bronka, a Bronek jest ojcem Czesia, to Adam jest ojcem Czesia.*

Które z nich uznasz za poprawne? Dlaczego? Te same pytania dla następujących wnioskowań:

- *W naszej wsi są urodziwe panny. Są też w naszej wsi panny posażne. Tak więc, są w naszej wsi posażne panny urodziwe.*
- *W naszej wsi są posażne panny urodziwe. Tak więc, w naszej wsi są urodziwe panny.*

Wojskowa Komenda Uzupełnień

Porównaj pod względem syntaktycznym i semantycznym następujące napisy:

- *Obywatel Jerzy Pogonowski zgłosił się do WKU.*
- *Obywatel x zgłosił się do WKU.*
- *Pewien obywatel zgłosił się do WKU.*
- *Każdy obywatel zgłosił się do WKU.*
- *Większość obywateli zgłosiła się do WKU.*
- *Względnie wielu obywateli zgłosiło się do WKU.*
- *Nieskończenie wielu obywateli zgłosiło się do WKU.*

O których z powyższych napisów skłonna byłabyś wydać werdykt, że są prawdziwe bądź fałszywe?

Wspomnienia ze szkoły

Zakładamy, że pamiętasz ze szkoły: proste pojęcia i konstrukcje dotyczące rachunku zbiorów, pojęcie relacji oraz funkcji.

Nie będziemy tego wszystkiego raz jeszcze przypominać. Pojęcia te zrozumiałe są dla dzieciny jedenastoletniej. W omawianych dalej konstrukcjach i przykładach wykorzystanie tych pojęć nie będzie wymagało niczego poza tę elementarną wiedzę wykraczającego.

Zbiór jest ***nieskończony***, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest ***skończony***.

Język KRP: alfabet

Opiszemy teraz, w skrócie i w sposób przybliżony, składnię i semantykę języka **Klasycznego Rachunku Predykatów** (KRP). Dokładniejszy opis znajdziesz np. w pliku **semkrp.pdf**.

W języku Klasycznego Rachunku Predykatów mamy do dyspozycji nieskończone zbiory każdego z następujących typów symboli:

- ***zmienne (indywidualne)*** (x, y, z, x_1, x_2, x_3, $\ldots$)
- ***predykaty*** (P, Q, R, P_1, P_2, P_3, $\ldots$)
- ***symbole funkcyjne*** (F, G, H, F_1, F_2, F_3, $\ldots$)
- ***stałe (indywidualne)*** (a, b, c, a_1, a_2, a_3, $\ldots$)

Uwaga. W dalszych rozważaniach bardzo istotne będzie odróżnianie języka przedmiotowego KRP od metajęzyka, w którym mówimy o KRP (w szczególności, o jego interpretacjach).

Język KRP: stałe logiczne

W języku Klasycznego Rachunku Predykatów mamy również do dyspozycji ***stałe logiczne***:

- ***spójniki prawdziwościowe***
  - $\neg$ (***negacja***),
  - $\wedge$ (***koniunkcja***),
  - $\vee$ (***alternatywa*** [nierozłączna]),
  - $\rightarrow$ (***implikacja*** [materialna]),
  - $\equiv$ (***równoważność*** [materialna]).
- ***kwantyfikatory***
  - $\forall$ ***generalny*** (***ogólny***)
  - $\exists$ ***egzystencjalny*** (***szczegółowy***).

Język KRP: termy

Definicja ***termu*** języka KRP jest indukcyjna:

- (i) wszystkie zmienne indywidualne oraz wszystkie stałe indywidualne są termami;
- (ii) jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są dowolnymi termami, a F jest (n-argumentowym) symbolem funkcyjnym, to wyrażenie $F(t_1, \ldots, t_n)$ jest termem, dla dowolnej n;
- (iii) nie ma innych termów (języka KRP) prócz zmiennych indywiduowych oraz stałych indywiduowych oraz tych termów, które można skonstruować wedle reguły (ii).

Termy, w których nie występują żadne zmienne nazywamy ***termami bazowymi***.

Język KRP: formuły

Formułą atomową języka KRP nazywamy każde wyrażenie postaci $P_i(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $t_1, \ldots, t_{n_i}$ są dowolnymi termami, a P_i dowolnym predykatem n-argumentowym, dla dowolnej n.

Definicja ***formuły*** języka KRP jest indukcyjna:

- (i) każda formuła atomowa jest formułą;
- (ii) jeśli α jest dowolną formułą, to wyrażenia $\neg(\alpha)$, $\forall x_n\ (\alpha)$, $\exists x_n\ (\alpha)$ są formułami;
- (iii) jeśli α i β są dowolnymi formułami, to wyrażenia $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami;
- (iv) nie ma innych formuł (języka KRP) prócz tych, które można utworzyć wedle reguł (i)–(iii).

Język KRP: zmienne wolne i związane

Wyrażenie α w dowolnej formule o postaci $\forall x_n\ (\alpha)$ lub o postaci $\exists x_n\ (\alpha)$ nazywamy ***zasięgiem*** odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienna x_n występująca na danym miejscu w formule α jest ***na tym miejscu związana***, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów lub też znajduje się w zasięgu jakiegoś kwantyfikatora, pod którym podpisana jest również zmienna x_n.

Jeżeli zmienna x_n, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona ***na tym miejscu wolna*** w formule α.

Język KRP: zmienne wolne i związane

Mówimy, że x_n jest ***zmienną wolną w*** α wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednym miejscu zmienna ta jest wolna w α.

Mówimy, że term t jest ***podstawialny*** za zmienną x_i do formuły α wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna x_i nie znajduje się w α jako zmienna wolna w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego którąś ze zmiennych występujących w t.

Formuły nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy ***zdaniami*** (języka KRP).

Język KRP: kilka ćwiczeń

1. Podaj zmienne wolne i związane formuł:

- (a) $\forall x\,(P(x,y) \rightarrow \exists y\,(Q(x) \wedge R(x,y)))$
- (b) $\exists x\,(P(x) \wedge \forall z\,(Q(z) \rightarrow R(x,z)))$
- (c) $\exists x\,(P(x) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x,y)))$.

- (a) Pierwsze z lewej wystąpienie y jest wolne w tej formule. Zmienna y jest zmienną wolną tej formuły.
- (b) Ta formuła nie zawiera zmiennych wolnych.
- (c) Zmienna y jest jedyną zmienną wolną tej formuły.

Język KRP: kilka ćwiczeń

2. Czy term t jest podstawialny za zmienną x w formule α, gdzie:

- (a) t jest postaci $f(x)$, a α jest formułą $\forall y \exists z\, (P(y,z) \rightarrow Q(x))$; x jest jedyną zmienną w termie t;
- (b) t jest postaci $g(x,y)$, a α jest formułą $\forall y \forall z\, (P(x,y) \rightarrow Q(z))$; x i y są jedynymi zmiennymi w termie t;
- (c) t jest postaci $f(a)$, a α jest formułą $\forall y\, (P(x) \vee Q(y))$; t jest termem bazowym.

- (a) Tak. Żadna zmienna występująca w termie $f(x)$ nie stanie się związana po podstawieniu tego termu do rozważanej formuły.
- (b) Nie. Po wstawieniu termu $g(x,y)$ do formuły $\forall y \forall z\, (P(x,y) \rightarrow Q(z))$ zmienna y występująca w tym termie staje się związana w rozważanej formule.
- (c) Tak. Term $f(a)$ nie zawiera zmiennych wolnych, a więc jest podstawialny do każdej formuły.

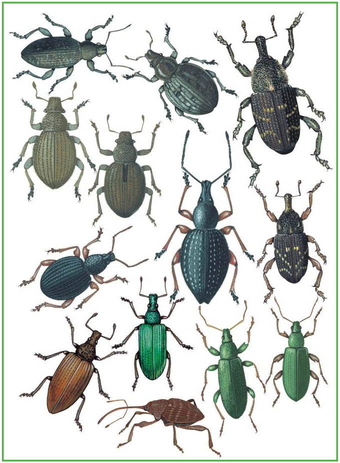
Język KRP: kilka ćwiczeń

3. Które z podanych niżej formuł są zdaniami języka KRP:

- (a) $\forall x \exists y \forall z\, (P(x,y,z) \rightarrow Q(x,x,x))$
- (b) $\exists x\, ((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- (c) $\forall x \exists y\, (P(f(y),x) \wedge Q(x,f(y)))$.

- (a) Tak, jest zdaniem.
- (b) Pierwszy człon koniunkcji zawiera wolne wystąpienie zmiennej y, a więc rozważana formuła nie jest zdaniem.
- (c) Tak, jest zdaniem.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze



Ryjkowcowate.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze

Nasza Pani od Biologii postanowiła zrobić wreszcie porządek w swojej kolekcji chrząszczy. Zapisuje przy okazji, co pamięta o niektórych gatunkach. Znajdziemy schematy poczynionych przez nią obserwacji:

- (1) *Ryjkowcowate biegają szybciej od Spuszczeli, ale Spuszczele żyją od nich dłużej.*
- (2) *Niektóre Przekraskowate biegają szybciej od jakichkolwiek Trzyszczowatych.*
- (3) *Tylko Przekraskowate zjadają Korniki.*
- (4) *Jeśli Przekraskowate zjadają Ryjkowcowate, to szybciej od nich biegają.*
- (5) *Niektóre Trzyszczowate są bardziej podobne do pewnych Przekraskowatych niż do dowolnych Spuszczeli.*
- (6) *Ryjkowcowate, które nie biegają szybciej od Trzyszczowatych są przez nie zjadane lub nie żyją dłużej od nich.*

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze

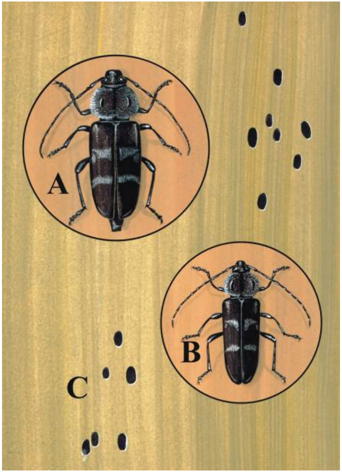
Przekraskowate.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze

Predykaty występujące w schematach powyższych zdań:

- $R(x)$ — x jest Ryjkowcowaty
- $S(x)$ — x jest Spuszczelem
- $P(x)$ — x jest Przekraskowaty
- $T(x)$ — x jest Trzyszczowaty
- $K(x)$ — x jest Kornikiem
- $Z(x, y)$ — x zjada y
- $B(x, y)$ — x biega szybciej niż y
- $D(x, y)$ — x żyje dłużej niż y
- $W(x, y, z)$ — x jest bardziej podobny do y niż do z.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze



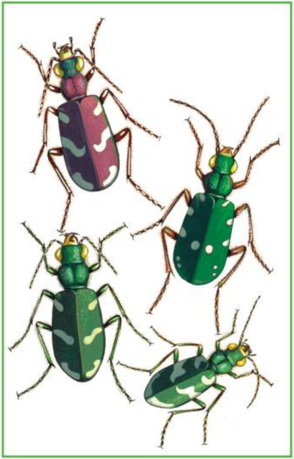
Spuszczele.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze

Schematy powyższych zdań:

- (1) $\forall x \forall y\, ((R(x) \wedge S(y)) \rightarrow (B(x,y) \wedge D(y,x)))$
- (2) $\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (T(y) \rightarrow B(x,y)))$
- (3) $\forall x \forall y\, ((K(y) \wedge Z(x,y)) \rightarrow P(x))$
- (4) $\forall x \forall y\, (((P(x) \wedge R(y)) \wedge Z(x,y)) \rightarrow B(x,y))$
- (5) $\exists x \exists y \forall z\, W(x,y,z)$
- (6) $\forall x \forall y\, (((R(x) \wedge T(y)) \wedge \neg B(x,y)) \rightarrow (Z(y,x) \vee \neg D(x,y)))$.

Nasza Pani od Biologii i Chrząszcze



Trzyszczowate.

Odniesienie przedmiotowe

O czym możemy „mówić" w języku KRP? O dowolnych układach, złożonych z jakiegoś zbioru (całkiem dowolnych) przedmiotów oraz o wszelakich własnościach tych przedmiotów, zależnościach funkcyjnych między rozważanymi przedmiotami, dowolnych łączących owe przedmioty relacjach.

Widzimy więc, że język KRP ma całkiem sporą „moc wyrażania", w porównaniu z językiem KRZ, w którym mogliśmy „mówić" jedynie o dwóch przedmiotach.
Domyślamy się też, że symbole alfabetu języka KRP będzie można interpretować na (nieskończenie) wiele sposobów.

Jeśli rozważamy język KRP o predykatach, symbolach funkcyjnych i stałych indywidualnych branych z ustalonego zbioru Σ, to mówimy o języku KRP ***sygnatury*** Σ.

Struktury relacyjne

Strukturą relacyjną jest dowolny układ postaci:

$$\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{A} \rangle,$$

gdzie

- M jest dowolnym zbiorem, zwanym ***uniwersum*** $\mathfrak{M}$, oznaczanym też przez $|\mathfrak{M}|$
- $\mathcal{R}$ jest rodziną relacji określonych w uniwersum $\mathfrak{M}$
- $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji określonych w uniwersum $\mathfrak{M}$
- $\mathcal{A}$ jest rodziną elementów wyróżnionych w uniwersum $\mathfrak{M}$.

Zarówno relacje, jak i funkcje struktury $\mathfrak{M}$ mogą mieć dowolną liczbę argumentów.

Funkcja denotacji

Nazwiemy ***interpretacją języka KRP sygnatury*** Σ dowolny układ $\langle M, \Sigma, \triangle \rangle$, gdzie M jest zbiorem, a $\triangle$ funkcją (***funkcją denotacji***) o dziedzinie Σ, która przyporządkowuje (dla dowolnej n):

- każdej stałej indywiduowej a_k element $\triangle(a_k) \in M$;
- każdemu n-argumentowemu predykatowi P_i relację n-argumentową $\triangle(P_i) \subseteq M^n$;
- każdemu n-argumentowemu symbolowi funkcyjnemu F_j funkcję n-argumentową $\triangle(F_j) : M^n \to M$.

Przy ustalonej sygnaturze Σ, każda interpretacja języka KRP sygnatury Σ jest zatem pewną strukturą relacyjną. Oznaczmy klasę wszystkich takich struktur przez $\mathcal{M}_\Sigma$. Każdy element $\mathcal{M}_\Sigma$ jest więc strukturą postaci $\mathfrak{M} = \langle M, \Delta[\Sigma] \rangle$, dla pewnych M oraz Δ.

Funkcja denotacji

W niektórych dalej rozważanych przykładach będziemy stosować także następujące, przydatne oznaczenia:

- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest strukturą z $\mathcal{M}_\Sigma$, to interpretację symbolu σ z Σ w strukturze $\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać przez $\sigma_\mathfrak{M}$.
- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest strukturą z $\mathcal{M}_\Sigma$, a r jest relacją, funkcją lub elementem wyróżnionym w $\mathfrak{M}$, to przez $\underline{r}$ rozumieć będziemy symbol językowy (z sygnatury Σ), interpretowany w $\mathfrak{M}$ jako r. Ten zapis stosować będziemy jedynie w tych przypadkach, gdy nie będzie to powodowało niejednoznaczności.

Uwaga. Symbole z Σ należą do języka przedmiotowego, a symbole, których używamy dla „mówienia" o strukturach relacyjnych, relacjach, funkcjach, itp. należą do metajęzyka.

Wartościowania

Wartościowaniem zmiennych w uniwersum M nazywamy dowolny nieskończony przeliczalny ciąg $w = \langle w_n \rangle$ elementów zbioru M. Gdy

$$w = \langle w_n \rangle = \langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots \rangle$$

jest wartościowaniem w M oraz $m \in M$, to przez w_i^m oznaczamy wartościowanie:

$$\langle w_0, w_1, \ldots, w_{i-1}, m, w_{i+1}, \ldots \rangle.$$

Uwaga. Nie lękaj się! Te matematyczne Potwory nie uczynią ci krzywdy! Proste rysunki przedstawiane na wykładzie wystarczą do uzyskania przekonania, że wszystko rozumiesz.

Wartość termu

Jeśli t jest termem, $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\Sigma]\rangle$ strukturą relacyjną sygnatury Σ oraz $w = \langle w_i \rangle$ jest wartościowaniem zmiennych w M, to ***wartość termu t w strukturze $\langle M, \triangle[\Sigma]\rangle$ przy wartościowaniu w***, oznaczana przez $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t)$ określona jest indukcyjnie:

- gdy t jest zmienną x_i, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = w_i$;
- gdy t jest stałą a_k, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(a_k)$;
- gdy t jest termem złożonym postaci $F_j(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $t_1, \ldots, t_n$ są termami, to $\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t) = \triangle(F_j)(\triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \triangle_w^{\mathfrak{M}}(t_n))$.

Można pokazać, że wartość termu przy danym wartościowaniu zmiennych zależy jedynie od wartości nadanych przy tym wartościowaniu zmiennym występującym w rozważanym termie.

Relacja spełniania

Niech $\mathfrak{M} = \langle M, \triangle[\Sigma]\rangle$ będzie strukturą relacyjną sygnatury Σ, w wartościowaniem w M, a α formułą języka KRP sygnatury Σ. Definicja relacji $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ ***spełniania formuły*** α ***w strukturze*** $\mathfrak{M}$ ***przez wartościowanie*** w ma następującą postać indukcyjną:

- $\mathfrak{M} \models_w P_i(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\triangle(P_i)(\triangle_w(t_1), \ldots, \triangle_w(t_n))$ (dla n-argumentowego predykatu P);
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \wedge (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \vee (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \rightarrow (\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ lub zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \beta$;
- $\mathfrak{M} \models_w \neg(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{M} \models_w \alpha$;
- $\mathfrak{M} \models_w \forall x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla każdego $m \in M$;
- $\mathfrak{M} \models_w \exists x_i\ (\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_{w_i^m} \alpha$ dla pewnego $m \in M$.

Relacja spełniania

Ćwiczenie. Podaj definicję dla przypadku $\mathfrak{M} \models_w (\alpha) \equiv (\beta)$.

Zdefiniowana przed chwilą relacja jest relacją trójargumentową: łączy interpretacje, formuły i wartościowania. Za chwilę określimy z jej pomocą pewne dalsze (dwu- oraz jednoargumentowe) relacje semantyczne.

Pojęcie wyżej zdefiniowane pochodzi od Alfreda Tarskiego, z lat trzydziestych XX wieku. Jest fundamentalne dla klasycznego rozumienia pojęcia prawdy (w językach logiki).

Prawdziwość

Jeżeli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich wartościowań w, to mówimy, że formuła α jest ***prawdziwa*** w strukturze $\mathfrak{M}$ i piszemy wtedy $\mathfrak{M} \models \alpha$. W przeciwnym przypadku mówimy, że α jest ***fałszywa*** w $\mathfrak{M}$ i piszemy $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

Jeśli $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X, to mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest ***modelem*** zbioru X i piszemy $\mathfrak{M} \models X$.

Uwaga. Jeśli α jest zdaniem, a $\mathfrak{M}$ dowolną strukturą relacyjną, to następujące warunki są równoważne:

- α jest prawdziwa w $\mathfrak{M}$ (czyli $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich wartościowań w)
- $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla pewnego wartościowania w.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Niech $w = \langle 1, 1, \ldots \rangle$ będzie wartościowaniem zmiennych w uniwersum $\mathfrak{M}$ o stałej wartości 1. Czy wartościowanie w spełnia formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\exists x_1\, (x_1 \prec x_2) \wedge \exists x_2\, (x_1 \prec x_2)$
- (b) α postaci $\forall x_1\, (x_1 \prec x_2) \wedge \forall x_2\, (x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

(1a) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami egzystencjalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_1\ x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 0: ciąg $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Podobnie dla drugiego członu rozważanej koniunkcji: ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon tej koniunkcji, czyli formułę $\exists x_2\ x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***co najmniej jeden*** ciąg $w' = \langle 1, a, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest jakąś liczbą naturalną. Wystarczy teraz za a wziąć liczbę 2: ciąg $\langle 1, 2, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Ponieważ ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ oba człony koniunkcji, spełnia też w strukturze $\mathfrak{M}$ całą koniunkcję.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

(1b) Rozważana formuła jest koniunkcją, a więc ciąg stały $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa jej człony. Oba człony tej koniunkcji są formułami generalnie skwantyfikowanymi. Ciąg $w = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ pierwszy człon tej koniunkcji, czyli formułę $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ***każdy*** ciąg $w' = \langle a, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną. Jednak np. ciąg $\langle 2, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Widzimy więc, że ciąg w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1\ x_1 \prec x_2$, czyli pierwszego członu rozważanej koniunkcji. Nie spełnia zatem również całej koniunkcji. Szukanie odpowiedzi na pytanie, czy ciąg w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ drugi człon rozważanej koniunkcji (a nietrudno pokazać, że nie spełnia) nie jest już potrzebne.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

2. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Jakie wartościowania spełniają formułę α w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x_1\,(x_1 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)$
- (b) α postaci $\forall x_1\,(x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2\,(x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

(2a) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\,(x_1 \prec x_2 \land x_2 \prec x_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ***każdego*** wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$, gdzie a jest ***dowolną*** liczbą naturalną, w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2 \land x_2 \prec x_1$. Ponieważ ta ostatnia formuła jest koniunkcją, więc w' spełnia ją w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia obydwa człony tej koniunkcji. Widać jednak, że np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia ***żadnego*** z członów tej koniunkcji. Oznacza to, że nie wszystkie wartościowania $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniają koniunkcję $x_1 \prec x_2 \land x_2 \prec x_1$, a to z kolei znaczy, że nie ma wartościowania $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełniającego w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1\,(x_1 \prec x_2 \land x_2 \prec x_1)$.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

(2b) Wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1(x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2(x_1 \prec x_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi alternatywa: (1) w nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $\forall x_1(x_1 \prec x_2)$ ***lub*** (2) w spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_2(x_1 \prec x_2)$. Punkt (1) oznacza, że nie dla wszystkich wartościowań $w' = \langle a, w_2, w_3 \ldots \rangle$ wartościowanie w' spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $x_1 \prec x_2$. Istotnie, tak właśnie jest: np. wartościowanie $\langle w_2, w_2, w_3 \ldots \rangle$ nie spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formuły $x_1 \prec x_2$. Ponieważ zachodzi jeden (pierwszy) z członów alternatywy (1) ***lub*** (2), więc zachodzi cała ta alternatywa. Oznacza to, że ***dowolne*** wartościowanie $w = \langle w_1, w_2, w_3 \ldots \rangle$ spełnia w strukturze $\mathfrak{M}$ formułę $\forall x_1(x_1 \prec x_2) \rightarrow \forall x_2(x_1 \prec x_2)$.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

3. Niech $\mathfrak{M}$ będzie strukturą o uniwersum złożonym ze zbioru wszystkich liczb naturalnych uporządkowanych przez relację mniejszości $<$. Niech $\prec$ będzie predykatem denotującym relację $<$. Czy formuła α jest prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$, dla:

- (a) α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (x \prec z \wedge z \prec y)$
- (b) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (z \prec x \wedge z \prec y)$
- (c) α postaci α postaci $\forall x \forall y \exists z\, (x \prec z \wedge y \prec z)$.

Relacja spełniania: kilka ćwiczeń

- (a) Rozpatrywana formuła stwierdza, że między każdymi dwiema liczbami naturalnymi istnieje liczba „pośrednia" (w sensie porządku $<$). Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ np. między liczbami 1 i 2 nie ma żadnej liczby naturalnej n takiej, że $1 < n$ oraz $n < 2$.
- (b) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba mniejsza od nich obu. Formuła ta jest więc fałszywa w strukturze $\mathfrak{M}$, ponieważ nie istnieje np. liczba mniejsza od liczb 0 oraz 1.
- (c) Rozpatrywana formuła stwierdza, że dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje liczba większa od nich obu. Formuła ta jest więc prawdziwa w strukturze $\mathfrak{M}$: dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n np. liczba $m + n + 1$ jest większa zarówno od m, jak i od n.

Uwaga. W powyższej interpretacji nie mamy możliwości stwierdzania, że rozważane liczby naturalne są różne (nie dysponujemy predykatem identyczności).

Tautologie KRP

Tautologią (klasycznego rachunku predykatów sygnatury σ) nazywamy każdą formułę (języka KRP sygnatury σ), która jest prawdziwa we wszystkich strukturach relacyjnych (sygnatury σ).
Jeśli α jest tautologią KRP, to piszemy $\models_{krp} \alpha$, albo krócej: $\models \alpha$.

Zamiast terminu „tautologia KRP" używamy także terminu „***prawo KRP***".

Przez ***kontrtautologię KRP*** rozumiemy formułę fałszywą we wszystkich interpretacjach.

Tautologie KRP: przykłady

Niech α i β będą dowolnymi formułami języka KRP. Tautologiami KRP są:

- $\neg\forall x\, \alpha \equiv \exists x\, \neg\alpha$.
- $\neg\exists x\, \alpha \equiv \forall x\, \neg\alpha$.
- $\forall x\, \alpha \equiv \neg\exists x\, \neg\alpha$.
- $\exists x\, \alpha \equiv \neg\forall x\, \neg\alpha$.
- $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\, \alpha \rightarrow \forall x\, \beta)$.
- $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\, \alpha \rightarrow \exists x\, \beta)$.
- $\forall x\, (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta)$.
- $\exists x\, (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta)$.
- $(\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta) \rightarrow \forall x\, (\alpha \vee \beta)$.
- $\exists x\, (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta)$.

Tautologie KRP: przykłady

- $\forall x\, \alpha \rightarrow \alpha(x/t)$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- $\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\, \alpha$, o ile term t jest podstawialny za x w α.
- $\exists x \forall y\, \alpha \rightarrow \forall y \exists x\, \alpha$.
- $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\exists x\, \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \forall x\, \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.
- $\exists x\, (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\forall x\, \alpha \rightarrow \beta)$, o ile x nie jest wolna w β.
- $\exists x\, (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \exists x\, \beta)$, o ile x nie jest wolna w α.

Wierzyć — dobrze, kontrolować — lepiej, jak mawiał W.I. Lenin. Jak przekonać się, że są to tautologie? Wystarczy to udowodnić metodą nie wprost. Spróbuj.

Wynikanie logiczne w KRP

Mówimy, że α ***wynika logicznie*** z X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem $\{\alpha\}$. Piszemy wtedy $X \models_{krp} \alpha$. Ogólniej, mówimy, że ze zbioru X ***wynika logicznie*** (na gruncie KRP) zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model zbioru X jest też modelem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \models_{krp} Y$. Jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} Y$, to piszemy $X \not\models_{krp} Y$. Podobnie, jeśli nie zachodzi $X \models_{krp} \alpha$, to piszemy $X \not\models_{krp} \alpha$.

Widzimy więc, że formuła α nie wynika logicznie ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jeden model $\mathfrak{M}$ zbioru X taki, że α jest fałszywa w $\mathfrak{M}$.

Tautologiami KRP są dokładnie te formuły, które wynikają logicznie z pustego zbioru formuł, czyli:

- α jest tautologią KRP wtedy i tylko wtedy, gdy $\emptyset \models_{krp} \alpha$.

Semantyczna niesprzeczność w KRP

Mówimy, że zbiór formuł X jest ***semantycznie niesprzeczny*** (***spełnialny***) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma model, czyli gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich α ze zbioru X. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest ***semantycznie sprzeczny*** (***niespełnialny***).

Widzimy więc, że zbiór formuł X jest semantycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje struktura relacyjna $\mathfrak{M}$ taka, że wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe w $\mathfrak{M}$.

W szczególności, jeśli $\{\alpha\}$ jest spełnialny, to mówimy, że formuła α jest spełnialna.

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

1. Wykaż, że nie są tautologiami KRP:
   - (a) $(\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
   - (b) $(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
   - (c) $\forall x \exists y\, P(y, x) \rightarrow \exists y \forall x\, P(y, x)$.

2. Wykaż, że ze zbioru X nie wynika logicznie formuła α, dla:
   - (a) $X = \{\forall x \exists y\, P(x, y),\ \exists x\, P(x, x)\}$, α postaci $\forall x\, P(x, x)$
   - (b) $X = \{\exists x\, P(x),\ \forall x\, (P(x) \vee Q(x))\}$, α postaci $Q(x)$.

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

(1a) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

- być liczbą podzielną przez 2
- być liczbą podzielną przez 4.

Wtedy:

- Poprzednik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Jeśli wszystkie liczby są podzielne przez 2, to wszystkie liczby są podzielne przez 4*. Ta implikacja jest prawdziwa w rozważanej interpretacji, ponieważ ma fałszywy poprzednik.
- Następnik rozważanej implikacji jest zdaniem, które odczytujemy: *Każda liczba podzielna przez 2 jest też podzielna przez 4*. Ta implikacja jest fałszywa w rozważanej interpretacji, ponieważ np. liczba 2 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 4.

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

(1b) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacje predykatów P oraz Q odpowiadają własnościom:

- być liczbą parzystą
- być liczbą nieparzystą.

Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta).

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

(1c) Aby pokazać, że rozważana implikacja nie jest tautologią KRP wystarczy znaleźć taką strukturę $\mathfrak{M}$, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Niech np. M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i niech denotacja predykatu P będzie relacją „być następnikiem". Wtedy poprzednik rozważanej implikacji jest prawdziwy (każda liczba ma następnik), a jej następnik jest fałszywy (nie istnieje liczba, będąca następnikiem wszystkich liczb naturalnych).

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

(2a) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P w tym zbiorze. Niech:

- $M = \{1, 2, 3\}$
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(P) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

Tautologie i wynikanie logiczne: kilka ćwiczeń

(2b) Wystarczy znaleźć interpretację $\mathfrak{M}$ taką, że $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$, czyli w tym przypadku znaleźć zbiór M oraz podać odpowiednią interpretację $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ predykatu P oraz $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ predykatu Q w tym zbiorze. Niech:

- M będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(P)$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych
- $\Delta_{\mathfrak{M}}(Q)$ będzie zbiorem wszystkich liczb nieparzystych.

Wtedy $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.

Reguły wnioskowania — ujęcie semantyczne

Niech F_{KRP} oznacza zbiór wszystkich formuł języka KRP. ***Regułą*** (regułą wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRP}} \times F_{KRP}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Każdy układ postaci $(X, \alpha) \in R$ nazywamy ***sekwentem*** reguły R. Poprzedniki relacji R nazywamy ***przesłankami reguły*** R, a następniki ***wnioskami reguły*** R.

Niech $\mathcal{R}$ będzie regułą wnioskowania w KRP. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest ***niezawodna*** wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$ dla dowolnego sekwentu (X, α) reguły $\mathcal{R}$.
Reguła (o schemacie) (X, α) **zachowuje własność bycia tautologią**, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami KRP, to również α jest tautologią KRP.

Reguły wnioskowania — ujęcie semantyczne

Każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

Przez ***regułę generalizacji*** rozumiemy następującą regułę wnioskowania:

$$(RG) \quad \frac{\alpha}{\forall x_n \, \alpha}.$$

Reguła odrywania:

$$(RO) \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

jest znana z wykładów semestru zimowego.

Reguła odrywania i reguła generalizacji są niezawodne (a więc także zachowują własność bycia tautologią).

Reguły wnioskowania — ujęcie semantyczne

Następujące reguły są niezawodne:

- Reguła opuszczania kwantyfikatora generalnego RO$\forall$:

$$\frac{\alpha \rightarrow \forall x_n\ \beta}{\alpha \rightarrow \beta}.$$

- Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO$\exists$:

$$\frac{\exists x_n\ \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}.$$

Reguły wnioskowania — ujęcie semantyczne

Następujące reguły są niezawodne:

- Reguła dołączania kwantyfikatora generalnego RD∀:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \forall x_n\, \beta},$$

  o ile x_n nie jest wolna w α.

- Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego RD∃:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\exists x_n\, \alpha \rightarrow \beta},$$

  o ile x_n nie jest wolna w β.

Reguły wnioskowania — ujęcie semantyczne

Można pokazać, że również następujące reguły są niezawodne:

$$\frac{\forall x_n\,(\alpha \rightarrow \beta)}{\alpha \rightarrow \forall x_n\,\beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w α.

$$\frac{\forall x_n\,(\alpha \rightarrow \beta)}{\exists x_n\,\alpha \rightarrow \beta},$$

o ile zmienna x_n nie jest wolna w β.

Uwaga!

Należy zwracać uwagę, w jakich kontekstach występuje symbol $\models$ i jak poszczególne relacje semantyczne są definiowane:

- $\mathfrak{M} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models_w \alpha$ dla wszystkich w.
- $\mathfrak{M} \not\models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$ dla co najmniej jednego w.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in X$.
- $\mathfrak{M} \models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in X$ oraz dla wszystkich w: $\mathfrak{M} \models_w \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in X$ taka, że $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $\mathfrak{M} \not\models X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha \in X$ oraz w takie, że $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Uwaga!

- $X \models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models Y$.
- $X \not\models_{krp} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models Y$.
- $X \models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej struktury $\mathfrak{M}$: jeśli $\mathfrak{M} \models X$, to $\mathfrak{M} \models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje struktura $\mathfrak{M}$ taka, że: $\mathfrak{M} \models X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models \alpha$.
- $X \not\models_{krp} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: struktura $\mathfrak{M}$ oraz wartościowanie w takie, że $\mathfrak{M} \models_w X$ oraz $\mathfrak{M} \not\models_w \alpha$.

Twierdzenie o dedukcji wprost

Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, jeśli α jest zdaniem, to zachodzi następująca równoważność:

$X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha \rightarrow \beta$.

Twierdzenie o dedukcji nie wprost

Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).

Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α i β, jeśli α jest zdaniem, to zachodzą następujące równoważności:

- (a) $X \cup \{\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \neg\alpha$.
- (b) $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krp} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krp} \alpha$.

Skrzydlate Mróweczki

Nie wszystkie kwantyfikacje wyrazić można w KRP. Dla przykładu: ***nieskończenie wiele***, ***większość***, ***względnie wiele*** to kwantyfikatory spoza KRP.

Czym są własności?

Predykaty jednoargumentowe denotują ***własności*** przedmiotów.

Nie jest nam potrzebne rozważanie statusu ontologicznego własności, wystarczy jedynie powyższa charakterystyka.

Jeśli sygnatura Σ zawiera jedynie predykaty jednoargumentowe, to KRP sygnatury Σ nazywamy **monadycznym** rachunkiem predykatów (sygnatury Σ).

Monadyczny rachunek predykatów jest ***rozstrzygalny***: istnieją efektywne (obliczalne) metody ustalania, czy dowolna formuła języka tego rachunku jest jego tautologią.

Niektóre tautologie monadycznego KRP

Niech P będzie dowolnym predykatem jednoargumentowym. Tautologiami monadycznego KRP są:

- $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$.
- $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$.
- $\forall x\ P(x) \equiv \neg\exists x\ \neg P(x)$.
- $\exists x\ P(x) \equiv \neg\forall x\ \neg P(x)$.

Prawa powyższe ukazują, że kwantyfikator generalny jest definiowalny w terminach kwantyfikatora egzystencjalnego (oraz negacji), a także *vice versa*.

Niektóre tautologie monadycznego KRP

Niech P oraz Q będą dowolnymi predykatami jednoargumentowymi. Tautologiami monadycznego KRP są:

- $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$.
- $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x))$.
- $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$.
- $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x))$.
- $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.
- $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$.

Ćwiczenie. Dla każdej z powyższych implikacji pokaż, że implikacja do niej odwrotna **nie jest** tautologią monadycznego KRP.

Kolorowy Świat Sylogizmów

Zdania kategoryczne

Niech S oraz P będą predykatami jednoargumentowymi. ***Zdaniami kategorycznymi*** są zdania jednej z czterech następujących postaci:

- $\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ *Wszystkie S są P*.
  Zdanie ogólno-twierdzące.
- $\neg\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$ *Żadne S nie są P*.
  Zdanie ogólno-przeczące.
- $\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$ *Pewne S są P*.
  Zdanie szczegółowo-twierdzące.
- $\neg\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ *Nie wszystkie S są P*.
  Zdanie szczegółowo-przeczące.

Ćwiczenie. Wykorzystując prawa monadycznego KRP pokaż, jakim zdaniom są (semantycznie) równoważne poszczególne zdania kategoryczne.

Tradycyjny kwadrat logiczny

Niektóre zależności logiczne między zdaniami kategorycznymi reprezentowane są w **Tradycyjnym Kwadracie Logicznym**:

$$
\begin{array}{ccccc}
\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x)) & \longleftarrow & \text{wykluczanie} & \longrightarrow & \neg\exists x\,(S(x) \wedge P(x)) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
\downarrow & & \text{sprzeczność} & & \downarrow \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
\exists x\,(S(x) \wedge P(x)) & \longleftarrow & \text{dopełnianie} & \longrightarrow & \neg\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))
\end{array}
$$

Tradycyjny kwadrat logiczny

Mówimy, że zdania α i β:

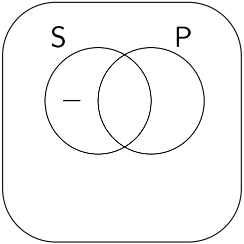
- ***wykluczają się***, gdy nie są oba prawdziwe
- ***dopełniają się***, gdy nie są oba fałszywe
- ***są wzajem sprzeczne***, gdy jedno z nich jest (semantycznie równoważne z) zaprzeczeniem drugiego.

Tak więc, w TKL (przy założeniu niepustości S):

- wykluczają się zdania: ogólno-twierdzące i ogólno-przeczące
- dopełniają się zdania: szczegółowo-twierdzące i szczegółowo-przeczące
- są wzajem sprzeczne zdania: ogólno-twierdzące i szczegółowo-przeczące
- są wzajem sprzeczne zdania: ogólno-przeczące i szczegółowo-twierdzące.

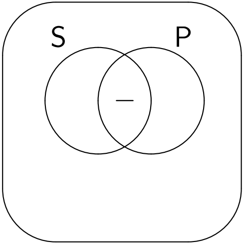
Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)

Warunki prawdziwości zdań kategorycznych reprezentować można na diagramach (znak „+" stawiamy w obszarze niepustym, a „–" w obszarze pustym):



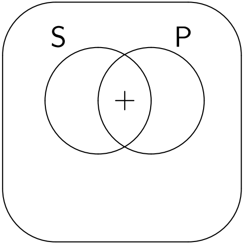
Warunek prawdziwości zdania ogólno-twierdzącego $\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$.

Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



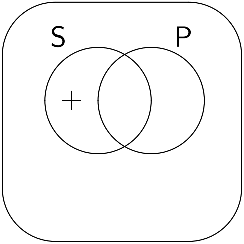
Warunek prawdziwości zdania ogólno-przeczącego $\neg \exists x \ (S(x) \wedge P(x))$.

Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



Warunek prawdziwości zdania szczegółowo-twierdzącego $\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$.

Diagramy Venna (dla dwóch zbiorów)



Warunek prawdziwości zdania szczegółowo-przeczącego $\neg\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$.

Stosunki zakresowe

Predykaty jednoargumentowe są, z syntaktycznego punktu widzenia, ***nazwami ogólnymi***. Tradycyjnie wyróżnia się następujące ***stosunki zakresowe*** miedzy nazwami, czyli (niepustymi) predykatami jednoargumentowymi S i P:

- S jest ***podrzędna*** względem P, gdy $\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$
- P jest ***nadrzędna*** względem S, gdy $\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$
- S i P są ***równoważne***, gdy S jest podrzędna i nadrzędna względem P
- S i P ***wykluczają się***, gdy $\neg\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$
- S i P ***dopełniają się***, gdy $\forall x\,(S(x) \vee P(x))$
- S i P są ***wzajem sprzeczne***, gdy wykluczają się i dopełniają
- S i P są ***niezależne***, gdy nie wykluczają się, nie dopełniają się i żadna z nich nie jest podrzędna względem drugiej.

Notacja dla zdań kategorycznych

Czasami używa się tradycyjnej notacji dla zdań kategorycznych:

- **SaP** dla $\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$ *Wszystkie S są P*.
  Zdanie ogólno-twierdzące.
- **SeP** dla $\neg\exists x\, (S(x) \wedge P(x))$ *Żadne S nie są P*.
  Zdanie ogólno-przeczące.
- **SiP** dla $\exists x\, (S(x) \wedge P(x))$ *Pewne S są P*.
  Zdanie szczegółowo-twierdzące.
- **SoP** dla $\neg\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$ *Nie wszystkie S są P*.
  Zdanie szczegółowo-przeczące.

Negacja przynazwowa jest często oznaczana następująco:
$P'(x)$ zamiast $\neg P(x)$.

Tzw. wnioskowania bezpośrednie

Załóżmy, że bierzemy pod uwagę tylko nazwy niepuste i nieuniwersalne.

Tautologiami monadycznego KRP są:

1.	$SaP \rightarrow \neg SoP$	9.	$SaP \rightarrow SiP$
2.	$SeP \rightarrow \neg SiP$	10.	$SeP \rightarrow SoP$
3.	$SiP \rightarrow \neg SeP$	11.	$SaP \rightarrow \neg SeP$
4.	$SoP \rightarrow \neg SaP$	12.	$SeP \rightarrow \neg SaP$
5.	$\neg SaP \rightarrow SoP$	13.	$\neg SiP \rightarrow SoP$
6.	$\neg SeP \rightarrow SiP$	14.	$\neg SoP \rightarrow SiP$
7.	$\neg SiP \rightarrow SeP$	15.	$\neg SiP \rightarrow \neg SaP$
8.	$\neg SoP \rightarrow SaP$	16.	$\neg SoP \rightarrow \neg SeP$

Tzw. wnioskowania bezpośrednie

Tautologiami monadycznego KRP są:

17.	$SaP \rightarrow SeP'$	25.	$SeP \rightarrow P'oS'$
18.	$SaP \rightarrow P'eS$	26.	$SeP \rightarrow S'iP$
19.	$SaP \rightarrow P'aS'$	27.	$SeP \rightarrow S'oP'$
20.	$SaP \rightarrow S'oP$	28.	$SiP \rightarrow SoP'$
21.	$SaP \rightarrow S'iP'$	29.	$SiP \rightarrow PiS$
22.	$SeP \rightarrow SaP'$	30.	$SoP \rightarrow SiP'$
23.	$SeP \rightarrow PeS$	31.	$SoP \rightarrow P'iS$
24.	$SeP \rightarrow P'iS$	32.	$SoP \rightarrow P'oS'$.

Ćwiczenie. Zapisz te prawa z użyciem kwantyfikatorów. Pokaż (metodą nie wprost), że są tautologiami. Pamiętaj o niepustości rozważanych nazw!

Sylogizmy

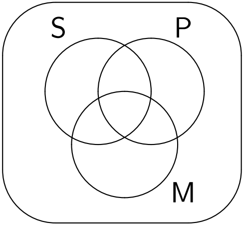
Sylogizmem jest wnioskowanie, w którym przesłanki i wniosek są zdaniami kategorycznymi i ponadto:

- są dwie przesłanki
- jedna z nazw ogólnych (tzw. ***termin średni***) nie występuje we wniosku, a występuje w każdej z przesłanek
- dwie pozostałe nazwy występują łącznie we wniosku; każda z nich występuje w jednej przesłance.

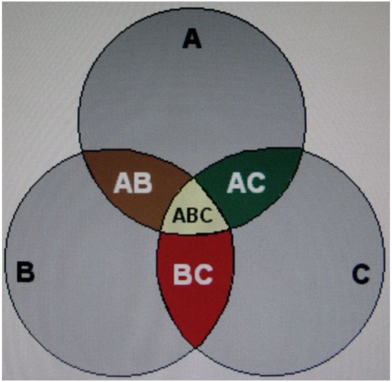
Podmiot wniosku nazywany jest ***terminem mniejszym***, a jego orzecznik ***terminem większym***.

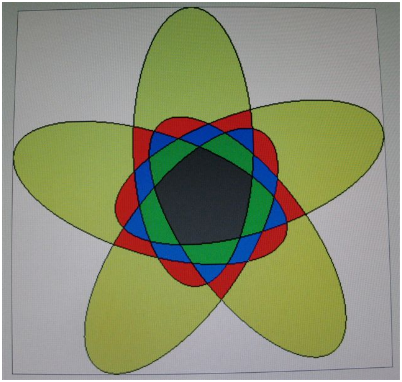
Diagramy Venna (dla trzech zbiorów)

Diagramów Venna można używać także dla zaznaczania stosunków zakresowych między dowolną liczbą nazw:



Diagramy Venna (dla trzech i pięciu zbiorów)





Diagramy Venna (dla trzech i pięciu zbiorów).

Tryby i figury sylogistyczne

Reguły wnioskowania, wedle których budowane są sylogizmy dzielimy tradycyjnie na ***figury*** oraz ***tryby***. Są cztery figury oraz 256 trybów. Figury:

I	II	III	IV
$\dfrac{\text{MP} \quad \text{SM}}{\text{SP}}$	$\dfrac{\text{PM} \quad \text{SM}}{\text{SP}}$	$\dfrac{\text{MP} \quad \text{MS}}{\text{SP}}$	$\dfrac{\text{PM} \quad \text{MS}}{\text{SP}}$

W każdej figurze są 64 tryby:

pierwsza → przesłanka	a	e	i	o	wniosek ↓
druga → przesłanka a	aaa aae aai aao	eaa eae eai eao	iaa iae iai iao	oaa oae oai oao	a e i o
druga → przesłanka e	aea aee aei aeo	eea eee eei eeo	iea iee iei ieo	oea oee oei oeo	a e i o
druga → przesłanka i	aia aie aii aio	eia eie eii eio	iia iie iii iio	oia oie oii oio	a e i o
druga → przesłanka o	aoa aoe aoi aoo	eoa eoe eoi eoo	ioa ioe ioi ioo	ooa ooe ooi ooo	a e i o

Semantyczna metoda badania poprawności sylogizmów

Wśród wszystkich 256 trybów sylogistycznych są 24 tryby ***poprawne***, tj. takie, w których wniosek nie jest fałszywy przy prawdziwych przesłankach.

Jest wiele metod ustalania poprawności sylogizmów, np.:

- metoda aksjomatyczna
- metoda „filologiczna"
- metoda diagramów Venna
- metoda diagramów Carrolla
- metoda tablic analitycznych.

Oto wszystkie poprawne tryby sylogistyczne:

1. $\dfrac{MaP, SaM}{SaP}$

2. $\dfrac{MaP, SaM}{SiP}$

3. $\dfrac{MeP, SaM}{SeP}$

4. $\dfrac{MeP, SaM}{SoP}$

5. $\dfrac{MaP, SiM}{SiP}$

6. $\dfrac{MeP, SiM}{SoP}$

7. $\dfrac{MaP, SoP}{SoM}$

8. $\dfrac{MaP, SeP}{SoM}$

9. $\dfrac{MeP, SiP}{SoM}$

10. $\dfrac{MeP, SaP}{SoM}$

11. $\dfrac{MaP, SeP}{SeM}$

12. $\dfrac{MeP, SaP}{SeM}$

13. $\dfrac{SoP, SaM}{MoP}$

14. $\dfrac{SeP, SaM}{MoP}$

15. $\dfrac{SiP, SaM}{MiP}$

16. $\dfrac{SaP, SaM}{MiP}$

17. $\dfrac{SeP, SiM}{MoP}$

18. $\dfrac{SaP, SiM}{MiP}$

19. $\dfrac{PaM, MaS}{SiP}$

20. $\dfrac{PaM, MeS}{SeP}$

21. $\dfrac{PaM, MeS}{SoP}$

22. $\dfrac{PiM, MaS}{SiP}$

23. $\dfrac{PeM, MaS}{SoP}$

24. $\dfrac{PeM, MiS}{SoP}$

Semantyczna metoda badania poprawności sylogizmów

Diagramy Venna można wykorzystać w następujący sposób w ustalaniu, czy tryb sylogistyczny jest poprawny:

- Zaznaczamy na jednym diagramie informację niesioną przez przesłanki.
- Zaznaczamy na drugim diagramie informację niesioną przez wniosek.
- Porównujemy oba diagramy:
  - Jeśli informacja podana we wniosku została już podana w przesłankach, to wniosek wynika logicznie z przesłanek; tryb jest poprawny.
  - Jeśli we wniosku została podana informacja, której nie było w przesłankach, to wniosek nie wynika logicznie z przesłanek; tryb nie jest poprawny.

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste. . .

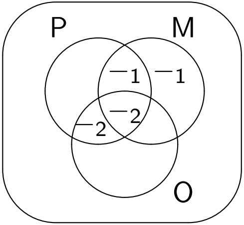
Semantyczna metoda badania poprawności sylogizmów

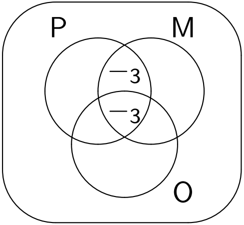
Który z poniższych sylogizmów jest poprawny:

- A. *Wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Żaden Ogoniasty nie jest Pierzasty. Wynika stąd, że żaden Pierzasty nie jest Myszasty.*
- B. *Wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Żaden Myszasty nie jest Pierzasty. Wynika stąd, że żaden Ogoniasty nie jest Pierzasty.*

- $M(x)$ — x jest Myszasty
- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $O(x)$ — x jest Ogoniasty.

Semantyczna metoda badania poprawności sylogizmów

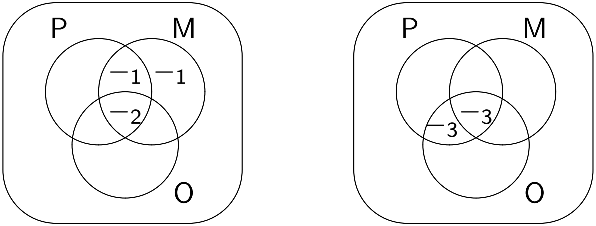




Sylogizm A. Z lewej diagram dla przesłanek, z prawej dla wniosku. Sylogizm poprawny, wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste...

Semantyczna metoda badania poprawności sylogizmów



Sylogizm B. Z lewej diagram dla przesłanek, z prawej dla wniosku. Sylogizm nie jest poprawny, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Informacja, że $(P \cap O) - M = \emptyset$ nie była zawarta w przesłankach.

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste...

Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP

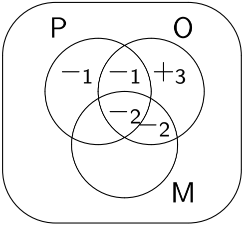
Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania:

Nie wszystkie Pierzaste są Myszaste. Wśród Myszastych są Ogoniaste. Nie ma Ogoniastych.

Co ***prawdziwie*** można wtedy powiedzieć o związkach między Ogoniastymi a Pierzastymi?

Skoro fałszywe są zdania:		to prawdziwe są zdania:
$\exists x\, (P(x) \wedge \neg M(x))$	1.	$\neg\exists x\, (P(x) \wedge \neg M(x))$
$\exists x\, (M(x) \wedge O(x))$	2.	$\neg\exists x\, (M(x) \wedge O(x))$
$\neg\exists x\, O(x)$	3.	$\exists x\, O(x)$.

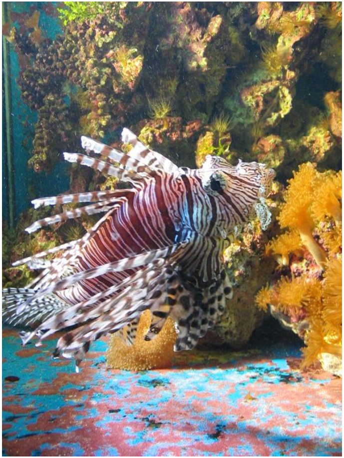
Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP

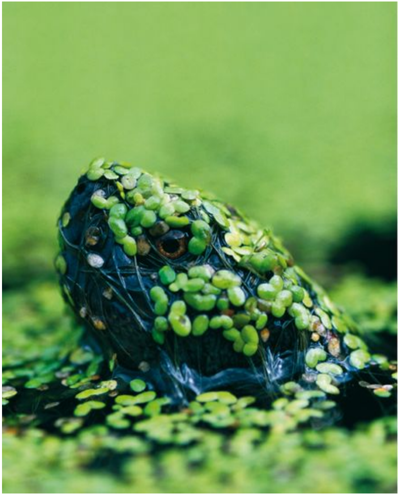


Z rysunku możemy odczytać, co da się prawdziwie powiedzieć o zależnościach między zakresami nazw *Pierzaste* oraz *Ogoniaste*:

- *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty.*
- *Są Ogoniaste, które nie są Pierzaste.*

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste. . .





Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP

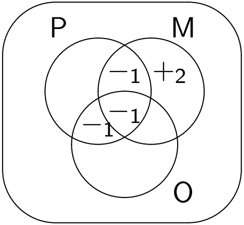
Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania:

- *Niektóre Pierzaste są Myszaste lub Ogoniaste.*
- *Każdy Myszasty jest Ogoniasty.*

Co można wtedy ***prawdziwie*** powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Skoro fałszywe są zdania:		to prawdziwe są zdania:
$\exists x\,(P(x) \wedge (M(x) \vee O(x)))$	1.	$\neg\exists x\,(P(x) \wedge (M(x) \vee O(x)))$
$\forall x\,(M(x) \rightarrow O(x))$	2.	$\neg\forall x\,(M(x) \rightarrow O(x))$.

Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP



Z diagramu tego widać, że o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi prawdziwie można powiedzieć, że:

- *Nie wszystko jest Ogoniaste lub Pierzaste* lub, równoważnie: *Istnieje coś: ani Ogoniaste, ani Pierzaste. Jest ono w dodatku Myszaste*.
- *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty*.

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste. . .

Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP

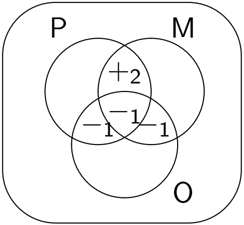
Przypuśćmy, że ***fałszywe*** są zdania:

- *Niektóre Ogoniaste są Pierzaste lub Myszaste.*
- *Żaden Pierzasty nie jest Myszasty.*

Co można wtedy ***prawdziwie*** powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Skoro fałszywe są zdania:		to prawdziwe są zdania:
$\exists x\,(O(x) \wedge (P(x) \vee M(x)))$	1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge (P(x) \vee M(x)))$
$\neg\exists x\,(P(x) \wedge M(x))$	2.	$\exists x\,(P(x) \wedge M(x))$.

Badanie wynikania logicznego w monadycznym KRP



Z diagramu tego widać, że o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi prawdziwie można powiedzieć, że:

- *Nie wszystkie Pierzaste są Ogoniaste*.
- *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty*.

Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste...

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Diagramy Venna można wykorzystać w następujący sposób do ustalania, czy zbiór formuł monadycznego KRP jest semantycznie niesprzeczny:

- (1) Zaznaczamy na diagramie informację niesioną przez poszczególne zdania.
- (2) Są dwie możliwości:
  - (2a) Wykonanie (1) jest możliwe. Wtedy rozważany zbiór zdań jest semantycznie niesprzeczny.
  - (2b) Wykonanie (1) nie jest możliwe: w co najmniej jednym obszarze mielibyśmy postawić jednocześnie znak „+" oraz znak „−". Wtedy rozważany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny.

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Jesteś na intensywnej terapii. Trzeba ci **natychmiast** podać lek zawierający jednocześnie alfaminę, betaminę oraz deltaminę. [Nazwy leków są zmyślone, jak mi się wydaje. Nie jestem opłacany przez żadną firmę medyczną.] Pielęgniarce trzęsą się ręce i próbuje sobie przypomnieć:

Zaraz, jak to było. . . Ten stary łysy profesor coś tam o tym bredził, na tym wykładzie, podczas którego podrywałam Roberta. . . Każda alfamina jest też betaminą. Niektóre betaminy są deltaminami. Jeżeli lek jest betaminą lub deltaminą, to jest również alfaminą. Co prawda, nie ma leku, który jest alfaminą i betaminą, lecz nie jest deltaminą. Ale czy to wszystko oznacza, że jest lek, którego ona potrzebuje?! Joszua, Miriam!!! Dla niej nie ma ratunku!

Ona rozmyśla, czas płynie. **Twój** czas właśnie się **kończy**. . . Bo przecież nie ma dla ciebie ratunku, prawda? Przyjmijmy, że to, co mamrocze pielęgniarka ***jest prawdą***. Czy istnieje lek zawierający alfaminę, betaminę oraz deltaminę?

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Przyjmiemy oznaczenia:

- $A(x)$ — x jest alfaminą;
- $B(x)$ — x jest betaminą;
- $D(x)$ — x jest deltaminą.

Wiadomości zapamiętane przez pielęgniarkę zapisane w języku KRP mają postać:

- 1. $\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x))$
- 2. $\exists x\, (B(x) \wedge D(x))$
- 3. $\forall x\, ((B(x) \vee D(x)) \rightarrow A(x))$
- 4. $\neg\exists x\, ((A(x) \wedge B(x)) \wedge \neg D(x))$.

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Najpierw pokażemy, że:

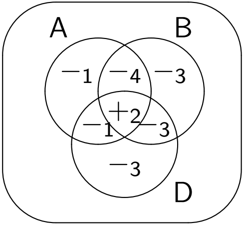
- a) wiadomości zapamiętane przez pielęgniarkę są semantycznie niesprzeczne.

Potem zaś pokażemy, że:

- b) z 2. oraz 3. wynika logicznie dająca Ci ratunek formuła:

$$(\bigstar) \quad \exists x\,(A(x) \wedge (B(x) \wedge D(x))).$$

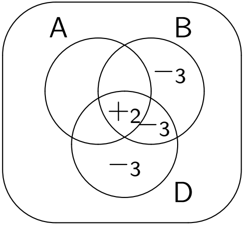
Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)



Z diagramu tego widać, że $A = B = D = A \cap B \cap D \neq \emptyset$.

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Nadto, jeśli sporządzimy taki diagram tylko dla warunków 2. oraz 3., to zobaczymy, iż obszar $A \cap B \cap D$ jest niepusty:



Przeżyjesz, jeśli pielęgniarka zrobi szybki użytek z Logiki.

Szybka Pomoc Medyczna

Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Ustalimy, czy jest zbiorem semantycznie sprzecznym:

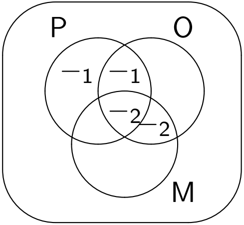
Tylko Myszaste są Pierzaste. Cokolwiek jest Ogoniaste, nie jest Myszaste. Niektóre Pierzaste są Ogoniaste.

Schematy powyższych zdań:

- (1) $\forall x\,(P(x) \rightarrow M(x))$
- (2) $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg M(x))$
- (3) $\exists x\,(P(x) \wedge O(x))$.

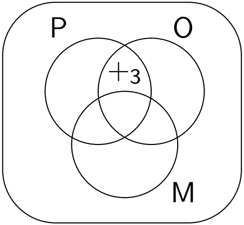
Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

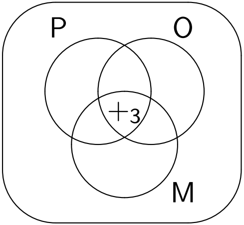
Zaznaczamy na diagramie Venna, które obszary są puste, a które niepuste. Najpierw informacja niesiona przez zdania (1) i (2):



Semantyczna niesprzeczność (w monadycznym KRP)

Zdanie (3) każe wstawić znak „+" ***albo*** tak, jak na rysunku lewym, ***albo*** tak, jak na rysunku prawym. Obie te możliwości są jednak wykluczone, bo na mocy zdań (1) i (2) odnośne obszary zawierają już znak „−" (są puste). Zatem badany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny.





Myszaste, Pierzaste, Ogoniaste, Uszaste. . .

O łańcusznikach

Metodę diagramów Venna można wykorzystać również do badania wnioskowań ze zdaniami kategorycznymi, w których liczba przesłanek nie jest ograniczona do dwóch, a liczba predykatów do trzech. Mamy wtedy do czynienia z tzw. ***łańcusznikami***. Oto prosty przykład.

Czy z poniższych przesłanek wynika jakiś wniosek dotyczący zależności między inteligentnymi a sympatycznymi? Ponadto: co można powiedzieć o uczciwych, którzy nie są sympatyczni?

Co najmniej jeden uczciwy jest sympatyczny. Nie wszyscy są uczciwi. Każdy jest uczciwy lub inteligentny lub sympatyczny. Wszyscy inteligentni są uczciwi lub sympatyczni. Wszyscy uczciwi inteligentni są sympatyczni. Wszyscy sympatyczni są uczciwi lub inteligentni. Żaden uczciwy sympatyczny nie jest inteligentny.

O łańcusznikach

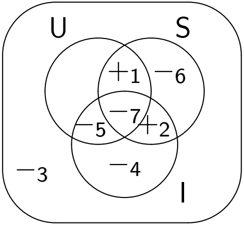
Wprowadźmy oznaczenia:

- $U(x)$ — x jest uczciwy
- $I(x)$ — x jest inteligentny
- $S(x)$ — x jest sympatyczny.

Rozważane przesłanki mają następujące schematy:

- (1) $\exists x\ (U(x) \wedge S(x))$
- (2) $\neg\forall x\ U(x)$
- (3) $\forall x\ (U(x) \vee (I(x) \vee S(x)))$
- (4) $\forall x\ (I(x) \rightarrow (U(x) \vee S(x)))$
- (5) $\forall x\ ((U(x) \wedge I(x)) \rightarrow S(x))$
- (6) $\forall x\ (S(x) \rightarrow (U(x) \vee I(x)))$
- (7) $\neg\exists x\ (U(x) \wedge (S(x) \wedge I(x)))$.

O łańcusznikach



Z powyższego diagramu widać, że (przy prawdziwości przesłanek):

- *Istnieją inteligentni i sympatyczni. Wszyscy inteligentni są sympatyczni. Istnieją sympatyczni, którzy nie są inteligentni.*
- *Jeśli ktoś jest uczciwy, ale nie jest sympatyczny, to nie jest inteligentny. Nie wiadomo jednak, czy istnieją uczciwi niesympatyczni.*

Pozdrawiamy Wszystkie Myszaste

Co denotują predykaty wieloargumentowe?

Predykaty wieloargumentowe denotują ***relacje*** między przedmiotami.

Podobnie jak w przypadku własności, nie jest nam potrzebne rozważanie statusu ontologicznego relacji, wystarczy jedynie powyższa charakterystyka.

Gdy rozważamy KRP o sygnaturze Σ, która zawiera choć jeden predykat dwuargumentowy, to wkraczamy na teren **Nierozstrzygalnego**.

Nie istnieje efektywna (obliczalna) metoda ustalania, czy dowolna formuła języka KRP o sygnaturze Σ, która zawiera choć jeden predykat dwuargumentowy jest jego tautologią.

KRP jest nierozstrzygalny.

Własności formalne relacji dwuargumentowych

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ między przedmiotami z uniwersum U jest:

- ***zwrotna***, gdy xRx dla wszystkich $x \in U$
- ***przeciwzwrotna***, gdy xRx nie zachodzi dla żadnego $x \in U$
- ***symetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli xRy, to yRx
- ***asymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli xRy, to nie zachodzi yRx
- ***przechodnia***, gdy dla wszystkich $x, y, z \in U$: jeśli xRy oraz yRz, to xRz
- ***serialna***, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in U$ taki, że: xRy.

Własności formalne relacji dwuargumentowych: przykłady

Niech uniwersum stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych. Rozważmy relacje:

- mniejszości $<$
- niewiększości $\leqslant$
- xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są względnie pierwsze
- relację $>$ większości.

Wtedy:

- Relacja $<$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia, serialna.
- Relacja $\leqslant$ jest: zwrotna, przechodnia, serialna.
- Relacja R jest: zwrotna, symetryczna, serialna.
- Relacja $>$ jest: przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia.

Własności formalne relacji dwuargumentowych

Ustalenie, że dana relacja ma (bądź nie ma) pewne własności formalne umożliwia przeprowadzanie wnioskowań na temat jej zachodzenia (bądź niezachodzenia) między jakimiś przedmiotami, gdy wiemy, że zachodzi ona między pewnymi innymi przedmiotami.

Zestawy pewnych własności implikują inne (np. każda relacja przechodnia i asymetryczna jest przeciwzwrotna).
Niektóre własności wykluczają się nawzajem (np. nie ma relacji jednocześnie symetrycznych i asymetrycznych).
Zwróć uwagę, że np. symetria i asymetria nie są własnościami dopełniającymi się: istnieją relacje, które nie są ani symetryczne, ani asymetryczne.
Podane własności były jedynie przykładowe. Istnieją relacje, które nie maja żadnej z nich.

Równoważności, podobieństwa, opozycje

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ między przedmiotami z uniwersum U jest:

- ***relacją podobieństwa*** (***tolerancji***), gdy jest ona zwrotna i symetryczna w U
- ***relacją równoważności***, gdy jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia w U
- ***relacją opozycji***, gdy jest ona przeciwzwrotna i symetryczna w U.

- Równoważności to relacje zachodzące między przedmiotami nieodróżnialnymi (ze względu na ustalony zestaw cech).
- Podobieństwa to relacje zachodzące między przedmiotami posiadającymi co najmniej jedną wspólną cechę (z ustalonego zestawu cech).
- Opozycje to relacje zachodzące między przedmiotami różniącymi się co najmniej jedną cechą (z ustalonego zestawu cech).

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Niech R będzie równoważnością w zbiorze U. ***Klasą równoważności*** (względem relacji R) przedmiotu $x \in U$ nazywamy zbiór: $[x]_R = \{y \in U \ : \ xRy\}$.
Rodzinę $U/R = \{[x]_R \ : \ x \in U\}$ nazywamy ***podziałem*** U ***wyznaczonym przez*** R.

Podziałem uniwersum U nazywamy każdą rodzinę niepustych, parami rozłącznych podzbiorów U, której suma równa jest U. Tak więc, $\mathcal{A}$ jest podziałem U, gdy:

- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \subseteq U$
- $\forall A \in \mathcal{A} \ \ A \neq \emptyset$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} \ \ (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$
- $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podziałami U a relacjami równoważności określonymi na U:

- Jeśli R jest relacją równoważności na U, to U/R jest podziałem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem U, to równoważnością jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem:
  $xR_{\mathcal{A}}y \quad \equiv \quad \exists A \in \mathcal{A} \;\; x, y \in A$.

Skrzyżowaniem podziałów $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ zbioru U nazywamy rodzinę:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A \cap B \;:\; A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{B}\}.$$

Mówimy, że podziały $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są ***niezależne***, gdy $\emptyset \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, czyli gdy ich skrzyżowanie nie ma jako elementu zbioru pustego.
Operację krzyżowania podziałów można iterować, otrzymując w ten sposób ***klasyfikacje wielopoziomowe***.

Równoważności, podziały, klasyfikacje

	fließend	stehend	natürlich	künst-lich	groß	klein
Fluß	+		+		+	
Bach	+		+			+
Kanal	+			+	+	
Graben	+			+		+
See		+	+		+	
Tümpel		+	+			+
Teich		+		+	+	
Becken		+		+		+

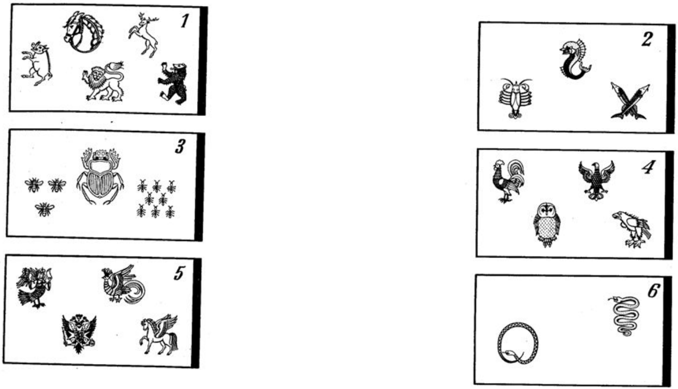
W tej tabeli podane są trzy podziały pewnych mokrych obiektów. Jakie są relacje równoważności, które wyznaczają te podziały?

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Te trzy podziały reprezentować można też poprzez drzewo:

- mokre
  - stoi
    - naturalne
      - duże
      - małe
    - sztuczne
      - duże
      - małe
  - płynie
    - naturalne
      - duże
      - małe
    - sztuczne
      - duże
      - małe

Równoważności, podziały, klasyfikacje



Przykład podziału (klasyfikacji) pewnego zbioru Stworzeń. Czy widzisz, jaka relacja równoważności odpowiada temu podziałowi?

Równoważności, podziały, klasyfikacje

Uwaga. Zachęcam do wykonania kilku ćwiczeń ze *Zbioru zadań z językoznawstwa* (Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1990; jeden egzemplarz tej książki dostępny był w Bibliotece IJ UAM). W ćwiczeniach tych dokonuje się m.in.: klasyfikacji oraz szeregowania danych językowych. Stawia się hipotezy na temat przekładu, wykorzystując zasadę, iż regularnościom w ***sposobach wyrażania*** znaczeń odpowiadają ***relacje semantyczne***. Zob. np. zadania:

- 140. Tłumaczenie z arabskiego. [Klasyfikowanie]
- 68. Tłumaczenie z sanskrytu. [Klasyfikowanie]
- 139. Tłumaczenie z lapońskiego. [Klasyfikowanie + znajdowanie podobieństw znaczeniowych]
- 66. Tłumaczenie z azerbejdżańskiego. [Szeregowanie]
- 91. Tłumaczenie z indonezyjskiego. [Znajdowanie izomorfizmu].

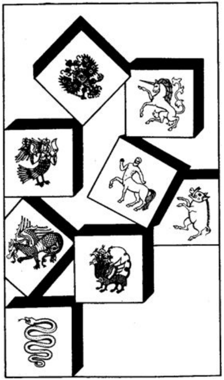
Podobieństwa i opozycje

Zarówno podobieństwa, jak i opozycje można reprezentować przez systemy postaci $\langle O, F, \phi \rangle$, gdzie:

- O jest zbiorem obiektów;
- F jest zbiorem cech;
- relacja $\phi \subseteq O \times F$ zachodzi między obiektem $x \in O$ a cechą $f \in F$ gdy x ma cechę f.

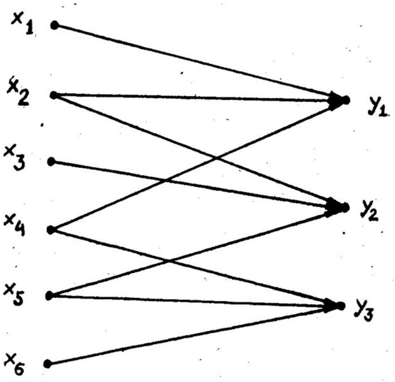
Rodzinę $\mathcal{A}$ niepustych podzbiorów U nazywamy ***pokryciem*** U, gdy jej suma równa jest U: $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Podobieństwa i opozycje



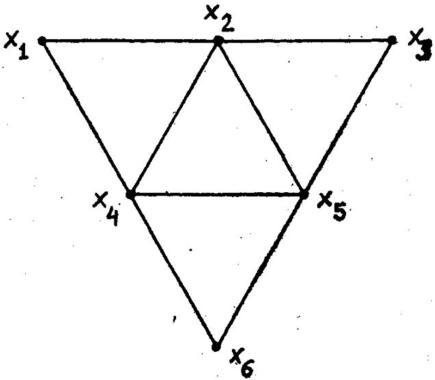
Szukaj podobieństw między obiektami w każdym z obu powyższych przypadków.

Podobieństwa i opozycje



Przykład przypisania obiektom cech.

Podobieństwa i opozycje



To graf relacji podobieństwa wyznaczonej przez przypisanie obiektom cech (z poprzedniego slajdu).

Podobieństwa i opozycje

Niech R będzie relacją podobieństwa na U. Mówimy, że:

- $A \subseteq U$ jest R-***preklasą***, gdy $\forall x, y \in A \; xRy$.
- $A \subseteq U$ jest R-***klasą***, gdy A jest maksymalną (względem inkluzji) preklasą.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-***rozproszonym***, gdy $\forall x, y \in A \, (x \neq y \rightarrow \neg xRy)$.
- $A \subseteq U$ jest zbiorem R-***pochłaniającym***, gdy $\forall x \in U \exists y \in A \; yRx$.
- Relację R^+ zdefiniowaną warunkiem: $xR^+y \equiv \forall z \in U \, (xRz \equiv yRz)$ nazywamy relacją ***stowarzyszoną*** z R. Jest ona równoważnością na U. Jej klasy równoważności nazywamy R-***jądrami***.
- Przechodnie domknięcie relacji podobieństwa R (czyli najmniejszą, względem inkluzji, relację przechodnią zawierającą R) oznaczamy przez R^{tr}. To także jest relacja równoważności.

Podobieństwa i opozycje

Niech $U//R$ oznacza rodzinę wszystkich R-klas. Rodzinę klas $U//R$ relacji podobieństwa R na U nazywa się czasami ***typologią*** obiektów z U.

Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między pokryciami U a relacjami podobieństwa określonymi na U:

- Jeśli R jest relacją podobieństwa na U, to $U//R$ jest pokryciem U.
- Jeśli $\mathcal{A}$ jest pokryciem U, to podobieństwem jest relacja $R_{\mathcal{A}} \subseteq U^2$ zdefiniowana dla dowolnych $x, y \in U$ warunkiem: $xR_{\mathcal{A}}y \equiv \exists A \in \mathcal{A}\ x, y \in A$.

Każdą minimalną (względem inkluzji) rodzinę $\mathcal{B} \subseteq U//R$ taką, że dla dowolnych $x, y \in U$ zachodzi $xRy \equiv \exists A \in \mathcal{B}\ x, y \in A$ nazywamy R-***bazą***.

Podobieństwa i opozycje

$X = \{a, b, c\}$

$\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

$H_{\tau_{\mathcal{A}}} = \{\{a, b, c\}\}$

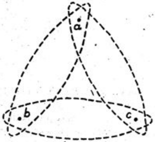


Fig. 7.

$X = \{x_1, \ldots, x_6\}$

$\mathcal{A} = \{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\},$
$\{x_4, x_5, x_6\}\}$

$H_{\tau_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A} \cup \{\{x_2, x_4, x_5\}\}$

Observe that (X, τ_A) is the space from 1.11.

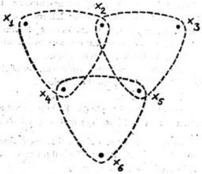


Fig. 8.

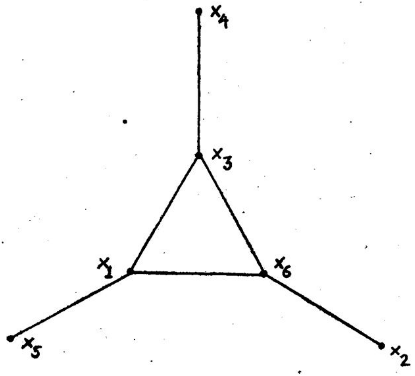
Pokrycia a relacje podobieństwa. Znajdź bazę.

Podobieństwa i opozycje

Kilka faktów o relacjach podobieństwa:

- Dla każdej relacji podobieństwa R istnieje R-baza.
- Dla każdej relacji podobieństwa R: $R^{+} \subseteq R \subseteq R^{tr}$.
- Zbiory, które są jednocześnie maksymalnymi zbiorami R-rozproszonymi i minimalnymi zbiorami R-pochłaniającymi są najbardziej „ekonomicznymi opisami" relacji R.

Podobieństwa i opozycje



Znajdź zbiory, które są jednocześnie minimalnymi zbiorami pochłaniającymi i maksymalnymi zbiorami rozproszonymi.

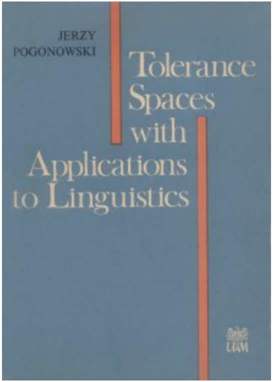
Podobieństwa i opozycje

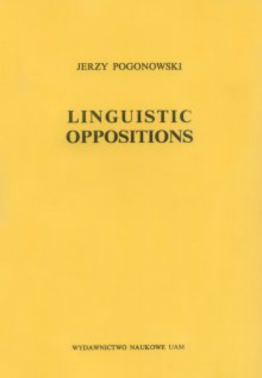
Własności formalne relacji opozycji bada się podobnie, jak własności relacji podobieństwa. Nie będziemy się tu nad tym rozwodzić. Wymienimy jedynie kilka ważnych rodzajów relacji opozycji, spotykanych w badaniach języków etnicznych:

- kontekstowe (np. oparte na dystrybycji);
- parametryczne (np. bazujące na wymiarach semicznych);
- opozycje typu nieporównywalności (np. hiponimiczne).

Podobieństwa i opozycje

O matematycznej teorii relacji podobieństwa oraz opozycji, a także jej zastosowaniach poczytać możesz np. w:





Operacje na relacjach dwuargumentowych

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq Y \times Z$ są relacjami, to ***złożeniem*** relacji R i S jest relacja $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowana warunkiem: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy oraz ySz. Jeśli $R \subseteq X \times X$, to $R \circ R$ oznaczamy też przez R^2.

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ jest relacją, to przez ***konwers*** (***relację odwrotną***) relacji R rozumiemy relację R^{-1} zdefiniowaną następująco:
$xR^{-1}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy yRx.

Ponieważ relacje są zbiorami, można na nich dokonywać wszystkich operacji, których dokonujemy na zbiorach: sumy, iloczynu, dopełnienia, itd.

Operacje na relacjach dwuargumentowych: przykłady

Niech xRy zachodzi, gdy x jest ojcem y. Wtedy $R \circ R$ jest relacją „być dziadkiem (po mieczu)”: $xR \circ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest dziadkiem (po mieczu) y.
Niech xRy zachodzi, gdy x jest bratem y, a xQy zachodzi, gdy x jest ojcem y. Wtedy $xR \circ Qy$ zachodzi, gdy x jest stryjem y.

Konwersem relacji mniejszości $<$ jest relacja większości $>$.
Konwersem relacji R zdefiniowanej przez warunek: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są liczbami względnie pierwszymi, jest relacja R.

Dopełnieniem relacji $<$ jest relacja $\geqslant$ (która jest też sumą relacji $<$ i $=$).
Iloczynem relacji $\leqslant$ i $\geqslant$ jest relacja $=$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Oto niektóre własności operacji na relacjach:

- Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $-R^{-1} = (-R)^{-1}$.
- Jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to $R \circ R_1 \subseteq R \circ R_2$ oraz $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$ dla dowolnych relacji R, R_1 i R_2.
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- $\exists z\ (yRz \wedge zSx)$
- $\exists z\ (zSx \wedge yRz)$
- $\exists z\ (xS^{-1}z \wedge RS^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Oto niektóre związki miedzy własnościami relacji a operacjami na nich:

- Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$.
- Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$.
- Jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacja $R \circ S$ też jest zwrotna.
- Jeśli relacje R_1 i R_2 są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ R_1^{-1},\ R_1 \circ R_1^{-1}$.
- Suma $R_1 \cup R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.
- Złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Operacje na relacjach dwuargumentowych

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością. Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

Relacja identyczności

Identyczność jest relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna oraz przechodnia. Nadto, przedmioty identyczne są nieodróżnialne, ani przez żadną własność, ani poprzez pozostawanie w zależnościach z innymi przedmiotami.

Zauważmy, że bez relacji identyczności praktycznie niewyobrażalne jest uprawianie większości dyscyplin matematycznych — współczesne rozumienie pojęcia ***funkcji***, jednego z najistotniejszych pojęć matematycznych, wykorzystuje relację identyczności.

Predykat identyczności

Dla ***predykatu*** identyczności tradycyjnie używanym symbolem jest $=$ i tradycja ta zostanie tu uszanowana. To, że ***relację*** identyczności oznaczamy tym samym symbolem, nie powinno prowadzić do nieporozumień — z kontekstu zawsze będzie jasno wynikać, czy odnosimy się do predykatu (język), czy do relacji (odniesienie przedmiotowe języka, interpretacje).

Tak więc, identyczność termów t_1 oraz t_2 zapisywać będziemy formułą: $t_1 = t_2$. Formułę $\neg t_1 = t_2$ będziemy (także zgodnie z tradycją), zapisywać też czasem w postaci $t_1 \neq t_2$.

Predykat identyczności

O predykacie identyczności zakłada się następujące aksjomaty:

- (1) $\forall x\,(x = x)$
- (2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n)))$
- (3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\,((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(y_1, \ldots, y_n)))$.

dla wszystkich n-argumentowych symboli funkcyjnych F oraz wszystkich predykatów n-argumentowych P, Q, dla wszystkich n.

Zwrotność predykatu identyczności wyraża warunek (1). Własności: symetryczności oraz przechodniości predykatu identyczności, czyli:

- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

są konsekwencją powyższych aksjomatów.

Antysymetria i spójność

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ jest:

- ***spójna***, gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $y \in U$ taki, że $x \neq y$ oraz: xRy lub yRx
- ***antysymetryczna***, gdy dla wszystkich $x, y \in U$: jeśli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

Przykłady. Relacja $\leqslant$ jest spójna oraz antysymetryczna w zbiorze wszystkich liczb całkowitych. Relacja inkluzji w rodzinie podzbiorów dowolnego zbioru jest w tej rodzinie antysymetryczna. Relacja R zdefiniowana w zbiorze generałów Wojska Polskiego warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x ma nie więcej orderów niż y nie jest w tym zbiorze antysymetryczna, o ile istnieją różni generałowie o tej samej liczbie orderów.

Kwantyfikatory numeryczne

Kwantyfikator egzystencjalny pozwala wyrazić pojęcie „co najmniej jeden". Pojęcia „istnieje co najwyżej jeden", „istnieją dokładnie dwa", itp. wymagają w swoim sformułowaniu użycia, oprócz kwantyfikatorów, także predykatu identyczności. Oto kilka takich kwantyfikatorów ***numerycznych*** (P jest tu dowolnym predykatem):

- $\exists x\, P(x)$ (istnieje co najmniej jeden przedmiot o własności P)
- $\exists x \exists y\, ((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y)$ (istnieją co najmniej dwa przedmioty o własności P)
- $\exists x \exists y \exists z\, (((P(x) \wedge P(y)) \wedge P(z)) \wedge ((x \neq y \wedge y \neq z) \wedge x \neq z))$ (istnieją co najmniej trzy przedmioty o własności P)

Z powyższego powinno być jasne, jak zapisać „istnieje co najmniej n przedmiotów o własności P".

Kwantyfikatory numeryczne

Wyrażenie: „Istnieje co najwyżej n przedmiotów o własności P" jest równoważne wyrażeniu: „Nieprawda, że istnieje co najmniej $n+1$ przedmiotów o własności P".

Wyrażenie: „Istnieje dokładnie n przedmiotów o własności P" jest równoważne koniunkcji wyrażeń:

- „Istnieje co najmniej n przedmiotów o własności P".
- „Istnieje co najwyżej n przedmiotów o własności P".

Ćwiczenie. Zapisz w języku KRP formułę stwierdzającą, że istnieją dokładnie trzy przedmioty posiadające własność P.

Porządki

Uwaga. Poszczególne podręczniki różnią się terminologią dotyczącą relacji porządkujących.

Mówimy, że relacja $R \subseteq U \times U$ jest:

- ***preporządkiem***, gdy jest ona zwrotna i przechodnia w U
- ***częściowym porządkiem***, gdy jest ona zwrotna, przechodnia i antysymetryczna w U
- ***liniowym porządkiem***, gdy jest ona spójnym częściowym porządkiem w U
- ***ostrym częściowym porządkiem***, gdy jest ona asymetryczna i przechodnia w U
- ***ostrym liniowym porządkiem***, gdy jest ona spójnym ostrym częściowym porządkiem w U.

Porządki

Przykłady.

- Inkluzja $\subseteq$ jest porządkiem częściowym.
- Inkluzja właściwa $\subset$ jest ostrym porządkiem częściowym.
- Relacja mniejszości $<$ jest ostrym porządkiem liniowym.
- Relacja niewiększości $\leqslant$ jest porządkiem liniowym.
- Relacja R określona (dla liczb naturalnych dodatnich) warunkiem: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli bez reszty y jest porządkiem częściowym.

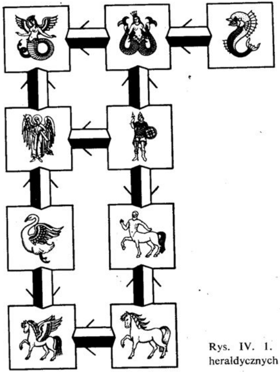
Porządki

Niech R będzie częściowym porządkiem na U. Element $x \in U$ nazywamy:

- R-***minimalnym***, gdy $\forall y \in U \ (yRx \rightarrow x = y)$
- R-***maksymalnym***, gdy $\forall y \in U \ (xRy \rightarrow x = y)$
- R-***najmniejszym***, gdy $\forall y \in U \ xRy$
- R-***największym***, gdy $\forall y \in U \ yRx$.

Uwaga: element R-najmniejszy (resp. R-największy), o ile istnieje, jest też elementem R-minimalnym (resp. R-maksymalnym), lecz niekoniecznie na odwrót.

Porządki



Rys. IV. 1. Uporządkowanie symboli heraldycznych

Znajdź elementy: minimalne, maksymalne oraz (jeśli istnieją) największy oraz najmniejszy.

Porządki

Gdy xRy oraz nie istnieje $z \in U$ taki, że $x \neq z$, $y \neq z$, xRz i zRy, to mówimy, że x jest **bezpośrednim R-poprzednikiem y** (a y **bezpośrednim R-następnikiem x**).

Mówimy, że liniowy porządek R jest:

- ***dyskretny***, gdy każdy element U ma bezpośredni R-poprzednik oraz R-następnik.
- ***gęsty***, gdy $\exists x, y \in U\ (xRy) \wedge \forall x, y \in U\ (xRy \rightarrow \exists z \in U\ (x \neq z \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy))$.

Uwaga. Żaden porządek (na zbiorze niepustym) nie może być jednocześnie dyskretny i gęsty, ale są porządki, które nie są ani dyskretne, ani gęste.

Porządki

Przykłady.

- Zbiór wszystkich liczb całkowitych (i każdy jego podzbiór) jest uporządkowany w sposób dyskretny przez relację mniejszości $<$.
- Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przez relację mniejszości $<$ uporządkowany w sposób gęsty.
- Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych także jest uporządkowany w sposób gęsty przez relację mniejszości $<$. Ale liczb rzeczywistych jest ***istotnie więcej*** niż liczb wymiernych. Relacja mniejszości porządkuje wszystkie liczby rzeczywiste w tzw. sposób ***ciągły***.

Porządki

Liniowy porządek R nazywamy ***dobrym*** porządkiem na U, jeśli każdy niepusty podzbiór U ma element R-najmniejszy.

- Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest uporządkowany liniowo przez relację $\leqslant$. Relacja ta jest na tym zbiorze także dobrym porządkiem.
- Zbiór wszystkich liczb całkowitych jest liniowo uporządkowany przez relację $\leqslant$. Uporządkowanie to nie jest dobrym porządkiem na tym zbiorze.

Uwaga. Termin ***dobry*** nie ma tu charakteru ocennego.

Porządki

Niech R będzie częściowym porządkiem zbioru U i niech $A \subseteq U$. Mówimy, że element $u \in U$ jest:

- ***ograniczeniem dolnym*** zbioru A, gdy uRx dla wszystkich $x \in A$
- ***ograniczeniem górnym*** zbioru A, gdy xRu dla wszystkich $x \in A$
- ***kresem dolnym*** zbioru A, gdy u jest R-największym z ograniczeń dolnych zbioru A
- ***kresem górnym*** zbioru A, gdy u jest R-najmniejszym z ograniczeń górnych zbioru A.

Porządki

Przykłady.

- Iloczyn $A \cap B$ jest kresem dolnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Suma $A \cup B$ jest kresem górnym zbioru $\{A, B\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U uporządkowanej częściowo przez relację inkluzji.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 < 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem górnym zbioru A.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych x takich, że $x^2 > 2$. Wtedy liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ jest kresem dolnym zbioru A.

Symbole funkcyjne

Symbole funkcyjne denotują funkcje, czyli relacje wielo-jednoznaczne.

Przypominamy (wiadomości ze szkoły): f jest ***funkcją*** (jednoargumentową) ze zbioru X w zbiór Y, gdy $f \subseteq X \times Y$ (czyli f jest relacją między elementami zbiorów X oraz Y) oraz dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że xfy.

Jeśli f jest funkcją z X w Y, to piszemy $f : X \to Y$. Zamiast xfy zwykło się pisać $y = f(x)$.

Symbole funkcyjne

Przypominamy, że funkcje ***wieloargumentowe*** to funkcje określone na iloczynach kartezjańskich zbiorów. Dla przykładu, funkcja, która parze liczb naturalnych przyporządkowuje ich sumę jest funkcją dwuargumentową.

W przypadku, gdy f jest funkcją n-argumentową określoną na zbiorze $X \times X \times \ldots \times X$ ($\times$ n razy) i o wartościach w zbiorze X, czyli gdy $f : X^n \to X$, mówimy, że f jest n-argumentową operacją na zbiorze X.

Wiosna jest tak piękna. A ty jesteś Etnolingwistką Oziębłą wobec Matematyki. Nie będę cię molestował intelektualnie, strasząc wzorami. Podam tylko parę przykładów struktur, o których można mówić w języku KRP z symbolami funkcyjnymi.

Algebry Boole'a

Niech $\prec$ będzie częściowym porządkiem zbioru U. Mówimy, że $\langle U, \prec \rangle$ jest ***kratą***, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in U$ istnieją: najmniejszy kres górny oraz największy kres dolny zbioru $\{x, y\}$. Ponieważ elementy te są wyznaczone jednoznacznie, więc możemy przyjąć oznaczenia:

- $\boxtimes(x, y)$ — dla największego kresu dolnego zbioru $\{x, y\}$;
- $\boxplus(x, y)$ — dla najmniejszego kresu górnego zbioru $\{x, y\}$.

Krata $\langle U, \prec \rangle$ jest ***dystrybutywna***, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in U$ zachodzą warunki:

- $\forall x \forall y \forall z \ \boxplus (x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z))$
- $\forall x \forall y \forall z \ \boxtimes (x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z))$.

Algebry Boole'a

Kratę dystrybutywną $\langle U, \prec \rangle$ nazywamy ***algebrą Boole'a***, jeśli dla dowolnego elementu $x \in U$ istnieje jego ***dopełnienie***, tj. element $\boxminus(x)$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y \ \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y$
- $\forall x \forall y \ \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y$.

Uwaga o standardowej notacji. Dla operacji w algebrach Boole'a używa się zwykle standardowych oznaczeń:

- $\cup$ — dla kresu górnego (także: $\vee$);
- $\cap$ — dla kresu dolnego (także: $\wedge$);
- $-$ — dla operacji dopełnienia (także: $'$).

Algebry Boole'a

Każda algebra Boole'a ma element największy, zwany ***jedynką*** algebry i oznaczany zwykle przez $\mathbf{1}$. Każda algebra Boole'a ma element najmniejszy, zwany ***zerem*** algebry i oznaczany zwykle przez $\mathbf{0}$.

Przykłady algebr Boole'a.

- Wszystkie ***podzbiory dowolnego zbioru*** U wraz z operacjami teoriomnogościowymi: sumy (kres górny), iloczynu (kres dolny), dopełnienia (do U), zbiorem U jako jedynką oraz zbiorem pustym $\emptyset$ jako zerem tworzą algebrę Boole'a.
- **Algebra wartości logicznych.** Tabliczki prawdziwościowe funktorów odpowiadających spójnikom zdaniowym pokazują, że w zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ można wprowadzić strukturę algebry Boole'a. Zerem tej algebry jest 0, jej jedynką jest 1. Kres dolny odpowiada koniunkcji, kres górny alternatywie (nierozłącznej), a operacja dopełnienia odpowiada negacji.

Algebry Boole'a

Algebry Boole'a mogą być opisane (na różne sposoby) ***aksjomatycznie***, w języku KRP z symbolami funkcyjnymi. Podamy jeden z takich opisów, wykorzystujący następujące predykaty, symbole funkcyjne oraz stałe indywidualne:

- $=$ predykat identyczności
- $\sqcup$ dwuargumentowy symbol funkcyjny (dla najmniejszego kresu górnego)
- $\sqcap$ dwuargumentowy symbol funkcyjny (dla największego kresu dolnego)
- $'$ jednoargumentowy symbol funkcyjny (dla dopełnienia)
- $\mathbf{1}$ stała indywidualna (dla jedynki)
- $\mathbf{0}$ stała indywidualna (dla zera).

Algebry Boole'a

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & \forall x \forall y\, (x \sqcup y = y \sqcup x) \\
(2) & \forall x \forall y\, (x \sqcap y = y \sqcap x) \\
(3) & \forall x \forall y \forall z\, (x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z) \\
(4) & \forall x \forall y \forall z\, (x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z) \\
(5) & \forall x \forall y \forall z\, (x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)) \\
(6) & \forall x \forall y \forall z\, (x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)) \\
(7) & \forall x\, (x \sqcup \mathbf{0} = x) \\
(8) & \forall x\, (x \sqcap \mathbf{1} = x) \\
(9) & \forall x\, (x \sqcup x' = \mathbf{1}) \\
(10) & \forall x\, (x \sqcap x' = \mathbf{0}).
\end{array}
$$

Algebry Boole'a

Osobną grupę aksjomatów stanowią aksjomaty identyczności:

- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow x' = y')$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow (x \sqcup z = y \sqcup z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow (x \sqcap z = y \sqcap z))$.

Uwaga. W żadnej teorii aksjomatycznej w języku KRP nie możemy zagwarantować, że denotacja predykatu identyczności jest relacją identyczności.

Algebry Boole'a

A oto niektóre prawa teorii algebr Boole'a:

- $x = x \sqcap y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = x \sqcup y$.
- $(x \sqcup y)' = x' \sqcap y'$.
- $(x \sqcap y)' = x' \sqcup y'$.
- $x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
- Jeśli $(x \sqcup y) = y$,to $x \sqcap y' = \mathbf{0}$.

Różnica $x - y$ elementów x i y oraz ***porządek*** $\prec$ są definiowalne:

- $x - y = x \sqcap y'$
- $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sqcap y' = \mathbf{0}$.

Arytmetyka Robinsona

Dodawania i mnożenia liczb naturalnych uczysz się w wieku kilku lat. Chociaż, gdy się chwilę zastanowisz, to być może dopadnie cię refleksja: skąd właściwie wiesz, jaki jest wynik wykonywania tych operacji (tj. dodawania i mnożenia) na liczbach naturalnych? Prawdopodobnie, nauczono cię tabliczek dodawania i mnożenia podobnie jak naucza się wierszyków, „na pamięć". Stosowano przy tym różne heurystyki; np. rysunki jabłuszek, kotków, monet, itp. No i teraz umiesz dodawać i mnożyć. Czyżby jednak ta ***wiedza*** miała uzasadnienie wyłącznie w owych dogmatycznych rysunkach? To temat na zajęcia z filozofii matematyki lub, ogólniej, z filozofii nauki. Te zajęcia dotyczą tylko Elementarza Logicznego, a więc nie znajdziesz w nich wyczerpującej odpowiedzi na tego typu pytania metafizyczne. Ograniczymy się do stwierdzenia, że arytmetykę można zbudować na bazie aksjomatycznej, jako teorię pierwszego rzędu (a więc teorię w języku KRP, z predykatem identyczności oraz symbolami funkcyjnymi).

Arytmetyka Robinsona

Tabliczki dodawania i mnożenia zbudować można w **Arytmetyce Robinsona**. Jest to system aksjomatyczny w języku KRP z identycznością oraz następującymi symbolami funkcyjnymi:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: ***następnik*** t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***suma*** t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: ***iloczyn*** t_1 i t_2.

Nadto, w języku Arytmetyki Robinsona używamy stałej indywiduowej $\bigcirc$. Jest to symbol, który czytamy: ***zero***.

Arytmetyka Robinsona

Aksjomaty dotyczące jedynie predykatu identyczności:

- $\forall x\,(x = x)$
- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$.

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$:

- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \oplus(x,z) = \oplus(y,z))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \oplus(z,x) = \oplus(z,y))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \otimes(x,z) = \otimes(y,z))$
- $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \rightarrow \otimes(z,x) = \otimes(z,y))$.

Arytmetyka Robinsona

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

- A_1: $\forall x \forall y\, (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$
- A_2: $\forall x\, (\bigcirc \neq \sigma(x))$
- A_3: $\forall x\, (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\, (x = \sigma(y)))$
- A_4: $\forall x\, (\oplus(x, \bigcirc) = x)$
- A_5: $\forall x \forall y\, (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$
- A_6: $\forall x\, (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$
- A_7: $\forall x \forall y\, (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$.

Arytmetyka Robinsona

Modelem zamierzonym dla tych aksjomatów jest struktura, której uniwersum jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, a denotacjami poszczególnych terminów pozalogicznych są:

- symbolu $\bigcirc$ — liczba zero;
- symbolu σ — operacja następnika;
- symbolu $\oplus$ — operacja dodawania;
- symbolu $\otimes$ — operacja mnożenia.

Arytmetyka Robinsona

Co „mówią” poszczególne aksjomaty (o owej interpretacji zamierzonej)? Oto możliwe odczyty ***Humanistyczne***:

- A_1: Różne liczby naturalne mają różne następniki.
- A_2: Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.
- A_3: Każda liczba różna od zera jest następnikiem jakiejś liczby.
- A_4: Wynik dodania zera do dowolnej liczby jest tą liczbą.
- A_5: Suma: pierwszej liczby oraz następnika drugiej równa jest następnikowi sumy liczb: pierwszej oraz drugiej.
- A_6: Wynik przemnożenia dowolnej liczby przez zero jest zerem.
- A_7: Iloczyn: pierwszej liczby oraz następnika drugiej równy jest sumie: iloczynu liczb pierwszej i drugiej oraz pierwszej liczby.

Arytmetyka Robinsona

Jeśli aksjomaty te wydają ci się oczywiste, to witaj we Wspólnocie Intelektualnej Ludzkości! Nie są chyba znani osobnicy, którym zdania te wydawałyby się fałszywe, przy podanej powyżej interpretacji zamierzonej. Powstaje naturalnie pytanie: czy z tych aksjomatów ***wynikają*** (przy interpretacji symbolu $=$ jako relacji identyczności.) ***dokładnie wszystkie*** prawdy arytmetyczne?

Odpowiedzi na to, wydawałoby się proste, pytanie dostarczają ważne twierdzenia metalogiczne, o których tu nie usłyszysz. Odpowiedź jest negatywna; chociaż każde zdanie wyprowadzalne z aksjomatów jest prawdziwe w zamierzonej interpretacji, to jednak nie wszystkie zdania prawdziwe w tej interpretacji są wyprowadzalne z aksjomatów. Ma to też związek z ***nierozstrzygalnością*** KRP.

Arytmetyka Robinsona

Pierwsze trzy z powyższych aksjomatów mają gwarantować, że uniwersum interpretacji zamierzonej jest poprawnie utworzoną kolejką: na początku jest zero, potem następnik zera (czyli jedynka), potem następnik następnika zera (czyli następnik jedynki, a więc dwójka), i tak dalej. Za każdą liczbą naturalną jest dokładnie jedna liczba większa od niej o jeden, a od każdej liczby naturalnej jest tylko ***skończenie*** (Uwaga: pojęcia ***skończoności*** nie można wyrazić w języku pierwszego rzędu; ten intuicyjny komentarz czyniony jest w metajęzyku) wiele „kroków wstecz", do zera.

Aksjomaty A_4 oraz A_5 charakteryzują dodawanie, natomiast A_6 oraz A_7 ustalają własności mnożenia. Nie obawiaj się: w charakterystykach tych ***nie*** popełnia się błędnego koła, są to poprawne charakterystyki tych operacji.

Arytmetyka Peana

Rozszerzymy teraz system arytmetyki Robinsona poprzez dodanie do jego aksjomatów ***schematu*** aksjomatów, zwanego ***zasadą indukcji***. Otrzymany w ten sposób system nazywa się **Arytmetyką Peana**.

Stałe pozalogiczne Arytmetyki Peana są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona:

- σ — jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: *następnik* t;
- $\oplus$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *suma* t_1 i t_2;
- $\otimes$ — dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *iloczyn* t_1 i t_2;
- $\bigcirc$ — stała indywiduowa; symbol $\bigcirc$ czytamy: *zero*.

Arytmetyka Peana

Aksjomaty specyficzne Arytmetyki Peana:

P_1: $\forall x \forall y\, (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$

P_2: $\forall x\, (\bigcirc \neq \sigma(x))$

P_3: $\forall x\, (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

P_4: $\forall x \forall y\, (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$

P_5: $\forall x\, (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

P_6: $\forall x \forall y\, (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$

P_7: $(\alpha(\bigcirc) \wedge \forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \alpha(\sigma(x)))) \rightarrow \forall x\, \alpha(x)$
(dla dowolnej formuły α, o jednej zmiennej wolnej, języka Arytmetyki Peana).

P_7 nie jest jednym aksjomatem, lecz schematem (przeliczalnie wielu) aksjomatów. P_7 nazywamy ***zasadą indukcji***.

Arytmetyka Peana

Aksjomaty identyczności dla symboli $\bigcirc$, σ, $\oplus$ oraz $\otimes$ są takie same, jak w Arytmetyce Robinsona.

Czy te aksjomaty dobrze charakteryzują poczciwe, powszechnie znane liczby naturalne? Nieco żartobliwie powiemy, że są dwie odpowiedzi na to pytanie. Jedna brzmi **TAK**, a druga brzmi **NIE**.

Odpowiedź **TAK** uzasadniona jest faktem, że wszystkie tzw. obliczalne funkcje są reprezentowane w powyższym systemie.

Natomiast odpowiedź **NIE** uzasadniona jest m.in. tym, że powyższy system nie jest ***rozstrzygalny***.

Dygresje

Dodajemy do tej prezentacji dwie dygresje:

- aksjomatykę teorii mnogości Zermelo-Fraenkla
- popularne przedstawienie pojęcia nieskończoności.

Pierwsza dygresja uzasadniona jest dwojako. Po pierwsze stanowi przykład fundamentalnej teorii aksjomatycznej, którą można sformułować w języku KRP. Po drugie, dostarcza — jak się wydaje — podstaw do nabycia przekonania, że niewinne igraszki z rachunkiem zbiorów, znane ze szkoły, są dobrze ugruntowane.

Uzasadnienie dla drugiej dygresji widzimy w tym, że jesteś Humanistką. Pojęcie **Nieskończoności** powinno zatem być dla ciebie wielce frapujące.

Czym są zbiory?

Posługujesz się dość swobodnie, bez zahamowań, pojęciem ***zbioru***. Rozumiesz przy tym prawdopodobnie, że zbiorami są pewne przedmioty abstrakcyjne, tworzone poprzez pogrupowanie razem pewnych innych przedmiotów.

Tworzysz zbiory przedmiotów wedle dwóch sposobów, jak sądzę:

- poprzez (jawne) wyliczenie wszystkich elementów zbioru
- poprzez podanie pewnej własności wspólnej wszystkim elementom tworzonego zbioru.

Mówimy przy tym o zbiorach w sensie ***dystrybutywnym***, a nie zbiorach w sensie ***kolektywnym***.

Czym są zbiory?

Pojęcia zbioru nie definiujemy, przyjmujemy, że jest to pojęcie ***pierwotne***. Podobnie, za pojęcie pierwotne uważamy relację ***należenia*** elementu do zbioru.

Pojęcia pierwotne są charakteryzowane przez ***aksjomaty***, które określają ich znaczenie.

Podajemy niżej aksjomaty dla najbardziej popularnego ujęcia teorii mnogości (zbiorów). Sformułowane są one w języku KRP z identycznością i jednym terminem pozalogicznym $\in$, będącym predykatem dwuargumentowym, nazywającym należenie elementu do zbioru.

Aksjomatyka teorii mnogości ZF

Aksjomat ekstensjonalności:
$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y)$
Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.
Aksjomat pary:
$\forall x \forall y \exists z \forall u\, (u \in z \equiv (u = x \vee u = y))$
To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.
Aksjomat sumy:
$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \equiv \exists u\, (z \in u \wedge u \in x))$
Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.
Aksjomat zbioru potęgowego:
$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$
Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists z \forall u\, (u \in z \equiv (u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)))$

gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x\, (\exists y\, (y \in x \wedge \neg \exists z\, (z \in y)) \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u\, (u \in z \equiv u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:

$\forall u(\forall x \forall y \forall z\, (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to \exists w \forall v\, (v \in w \equiv \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\, (u \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \forall z\, (z \in y \to \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć **Aksjomat wyboru**:
$\forall x((\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,(z \in y)) \wedge \forall y \forall u\,((y \in x \wedge u \in x) \rightarrow y = u \vee \neg \exists v\,(v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w(\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,((z \in y \wedge z \in w) \wedge \forall v\,((v \in y \wedge v \in w) \rightarrow v = z)))))$
To otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także **aksjomaty dla identyczności**:

- $\forall x\,(x = x)$
- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge x \in z) \rightarrow y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge z \in x) \rightarrow z \in y)$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: nieskończony i przeliczalny należą do metajęzyka.

Hotel Hilberta

Wybierzemy się do **Hotelu Hilberta**, czegoś w rodzaju matematycznej Wieży Babel (jednak udanej). Odwiedziny te powinny być pomocne dla uzyskania wglądu w naturę **Nieskończoności**.

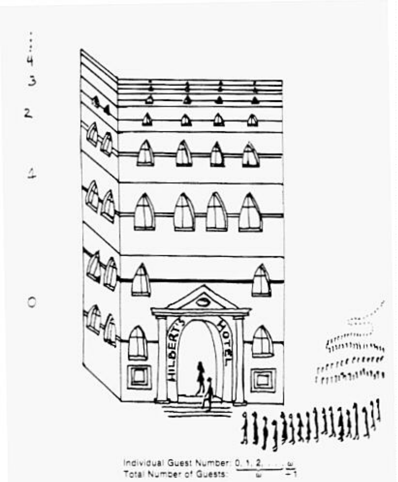


Figure 45.

Przykład: Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Przypuśćmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb n, które mają dokładnie dwa podzielniki: 1 oraz n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,…,p

Zatem p jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn: $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot p$ (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.

Liczba $m + 1$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,…,p. Nadto, $m + 1$ jest większa od p.

Otrzymujemy sprzeczność: $m + 1$ jest liczbą pierwszą **większą** od (rzekomo) największej liczby pierwszej p. Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

Hotel Hilberta

Hotel Hilberta ma nieskończoną liczbę pokoi:

1	2	3	4	5	...

Jest jasne, że nawet gdy wszystkie pokoje są zajęte, to można umieścić w nim nowego gościa, w dowolnym pokoju o numerze n: wystarczy, aby ***każdy*** z gości zamieszkujących pokoje o numerach n, $n+1$, $n+2$, ... przemieścił się do pokoju o numerze o jeden większym od numeru swojego dotychczasowego pokoju. Wtedy pokój o numerze n staje się wolny.

Jest też jasne, że nawet gdy wszystkie pokoje są zajęte, to można umieścić w nim ***dowolną skończoną*** liczbę nowych gości. Pytanie: w jaki sposób?

Hotel Hilberta

Pytanie (tylko trochę) trudniejsze: czy w zapełnionym już Hotelu Hilberta pomieścić można nieskończoną (przeliczalną, tj. równoliczną ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych; lub, co na jedno wychodzi, równoliczną ze zbiorem wszystkich pokoi w Hotelu Hilberta) liczbę nowych gości?

Oczywiście, **TAK**. Można np. umieścić wszystkich dotychczasowych gości w pokojach o numerach nieparzystych, a gości nowych w pokojach o numerach parzystych.

Kolejne (znów, odrobinę trudniejsze) pytanie: czy w zapełnionym już Hotelu Hilberta można pomieścić dodatkowo **przeliczalną** liczbę **przeliczalnych** zbiorów nowych gości?

I w tym przypadku odpowiedź brzmi: **TAK**. Widzicie, jak to zrobić?

Hotel Hilberta

Czyżby więc w zapełnionym już Hotelu Hilberta można było pomieścić dodatkowo DOWOLNĄ liczbę nowych gości?
Odpowiedź brzmi: **NIE**. Można pokazać (przy użyciu metody przekątniowej), że zbiór $\mathbb{R}$ WSZYSTKICH przeliczalnych ciągów (kolejek) nowych gości nie zmieści się w Hotelu Hilberta. Argument jest prosty. Po pierwsze, jest jasne, że możemy utożsamiać każdy element zbioru $\mathbb{R}$ z jakimś ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Wyliczmy wszystkie elementy zbioru $\mathbb{R}$, w dowolnej kolejności:

$$
\begin{array}{l}
A_1 = \langle\, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \,\rangle \\
A_2 = \langle\, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \,\rangle \\
A_3 = \langle\, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots \,\rangle \\
\vdots
\end{array}
$$

Hotel Hilberta

Rozważmy teraz ciąg:
$A = \langle\, a_{11},\, a_{22},\, a_{33},\, \ldots\, \rangle$
i zbudujmy ciąg:
$A^{\delta} = \langle\, a^{\delta}_{11},\, a^{\delta}_{22},\, a^{\delta}_{33},\, \ldots\, \rangle$
wedle reguły:

- jeśli $a_{nn} = 8$, to $a^{\delta}_{nn} = 7$
- jeśli $a_{nn} \neq 8$, to $a^{\delta}_{nn} = 8$.

Wtedy ciąg A^{δ} jest różny od ***każdego*** ciągu A_n (dla wszystkich n), a więc nie mógł wystąpić na liście (rzekomo) wszystkich elementów $\mathbb{R}$.

Liczba elementów zbioru $\mathbb{R}$ jest oczywiście nieskończona. Jest ona jednak (w intuicyjnym sensie) „większa" od liczby pokoi Hotelu Hilberta.

Hotel Hilberta

Nie możemy tu opowiedzieć o arytmetyce liczb będących licznościami (***mocami***) zbiorów nieskończonych — zob. dowolny porządny podręcznik teorii mnogości. Powiedzmy tylko, że skala kolejnych nieskończoności jest ***pozaskończona*** (nie daje się przedstawić jako równoliczna z jakąkolwiek liczbą nieskończoną).

Hotel Hilberta jest metaforą nieskończoności potencjalnej: wyobrażamy sobie sytuację, gdy po każdym kroku możemy wykonać następny, bez ograniczenia (nie ma znaku ***stop*** w Hotelu Hilberta).
Gdy bierzemy pod uwagę Hotel Hilberta jako ***całość***, to zaczynamy operować nieskończonością ***aktualną***. Mamy wtedy możliwość (gwarantowaną stosownymi aksjomatami teorii mnogości) tworzenia coraz to nowych nieskończoności.

Równoliczność

Dwa zbiory są **równoliczne**, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja z jednego z nich na drugi.

Widzieliśmy, że w przypadku zbiorów, których liczba elementów nie jest skończona (na razie: w intuicyjnym sensie) możemy mieć do czynienia z dwoma przypadkami:

- dwa zbiory nieskończone mogą być równoliczne (np. zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich liczb parzystych);
- dwa zbiory nieskończone mogą nie być równoliczne (np. zbiór wszystkich liczb naturalnych i zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach będących dodatnimi liczbami naturalnymi).

Tak więc, **nie jest prawdą**, iż wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne!

Definicja nieskończoności: Dedekind

Definicja Dedekinda. Zbiór jest nieskończony, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest skończony.

Na „paradoksalną" własność pewnych zbiorów, polegającą na tym, iż są one równoliczne z jakimś swoim podzbiorem właściwym, zwracano uwagę już wcześniej (Galileusz, Bolzano).

Można, jak się okazuje, przyjąć tę własność jako cechę definicyjną zbiorów nieskończonych.

Twierdzenie Cantora

Twierdzenie Cantora.
Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

Dowód. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy teraz następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ \neg x \in f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż:

$$x_f \in X_f \ \leftrightarrow \ \neg x_f \in X_f.$$

a to jest sprzeczność. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Zbiory nieprzeliczalne

Zbiór nieskończony nazywamy **przeliczalnym**, jeśli jest on równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Zbiór jest **nieprzeliczalny**, gdy jest nieskończony i nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

Przykład zbioru nieprzeliczalnego poznaliśmy podczas wizyty w Hotelu Hilberta: nieprzeliczalny jest np. zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów dodatnich liczb naturalnych. Podobnie, zbiór wszystkich nieskończonych (przeliczalnych) ciągów o wyrazach 0 lub 1 jest nieprzeliczalny.

Istnienie zbiorów nieprzeliczalnych jest konsekwencją aksjomatu nieskończoności, aksjomatu zbioru potęgowego oraz Twierdzenia Cantora.

Liczby niewymierne

Istnieją liczby niewymierne. Przypomnimy szkolny dowód, iż $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, tj. nie jest równa ilorazowi $\frac{a}{b}$ dla żadnych liczb całkowitych a oraz b takich, że $b \neq 0$ oraz a i b są względnie pierwsze (tzn. nie mają wspólnego podzielnika różnego od którejkolwiek z nich i > 1).

Przypuśćmy, a contrario, że **istnieją** takie a oraz b. Wtedy:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2 \cdot b^2 = a^2$$

Ponieważ lewa strona tego równania jest liczbą parzystą, więc prawa też. Jeśli a^2 jest parzysta, to i a jest parzysta. Stąd $a = 2 \cdot c$ dla pewnego c i mamy:

$2 \cdot b^2 = (2 \cdot c)^2$

$$2 \cdot b^2 = 4 \cdot c^2$$

$$b^2 = 2 \cdot c^2$$

Liczby niewymierne

Prawa strona tego równania jest liczbą parzystą, a więc także b^2 jest liczbą parzystą. Stąd, b jest liczbą parzystą i otrzymujemy ***sprzeczność*** z przypuszczeniem, iż a oraz b są względnie pierwsze: wszak pokazaliśmy przed chwilą, że obie są parzyste (a więc obie dzielą się bez reszty przez 2). Zatem musimy odrzucić uczynione przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Ostatecznie, $\sqrt{2}$ ***nie jest*** liczbą wymierną.

Uwaga. Odkrycie ***liczb niewymiernych***, dokonane przez Pitagorejczyków, było — można bez przesady użyć tego określenia — szokiem cywilizacyjnym. To tak, jakbyś ujrzała DUCHA: oto okazuje się, że w Kosmosie, który (wedle Pitagorejczyków) rządzony jest wyłącznie przez Liczby (wymierne) istnieją byty, niedostępne dotychczasowemu rozumieniu pojęcia liczby.

Definicja nieskończoności: Frege

Definicja Fregego. Zbiór jest ***skończony***, gdy ma n elementów, dla pewnej liczby naturalnej n. W przeciwnym przypadku jest ***nieskończony***.

Ta definicja zakłada, że wiemy, czym są liczby naturalne.

Otóż wcale nie jest bezdyskusyjne, jaki jest status tej wiedzy. Problematyka ta należy do filozofii matematyki i nie może tu być omawiana.

Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, cała reszta jest dziełem człowieka — napisał kiedyś Leopold Kronecker.

Definicja nieskończoności: von Neumann

Definicja von Neumanna. Dla dowolnego zbioru X, niech $X^* = X \cup \{X\}$. Iteracje operacji * określamy indukcyjnie:

- $X^0 = X$
- $X^1 = X^*$
- $X^{n+1} = (X^n)^*$.

Zbiór jest ***skończony***, gdy jest równoliczny z $\emptyset^n$, dla pewnego n, gdzie $\emptyset$ jest zbiorem pustym. W przeciwnym przypadku, jest ***nieskończony***.

Uwaga. W definicji von Neumanna tylko z pozoru odwołujemy się do liczb naturalnych: w poprawnej, nieuproszczonej wersji (której nie będziemy tu podawać) definicja ta używa tylko pojęć teoriomnogościowych; liczby naturalne zostają wtedy zdefiniowane (na gruncie teorii mnogości).

Definicja nieskończoności: von Neumann

Iterujmy operację *, wychodząc od zbioru pustego:

$\emptyset$, $(\emptyset)^* = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $((\emptyset)^*)^* = (\{\emptyset\})^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
$(((\emptyset)^*)^*)^* = (\{\emptyset, \{\emptyset\}\})^* = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$

Każdy element tego ciągu jest zbiorem, którego elementami są wszystkie poprzednie wyrazy tego ciągu. Wprowadźmy *oznaczenia*:
$0 = \emptyset$, $1 = 0^* = (\emptyset)^*$, $2 = 1^* = ((\emptyset)^*)^*$, $3 = 2^* = (((\emptyset)^*)^*)^*, \ldots$
Wtedy: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$

Otrzymujemy rodzinę $\mathbb{N}$ zbiorów $0, 1, 2, 3, \ldots$, które możemy identyfikować z *liczbami naturalnymi*. Nadto, rodzina ta jest dobrze uporządkowana przez relację $\in$: *definiujemy* $m < n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in n$, dla $m, n \in \mathbb{N}$.

Definicja nieskończoności: Tarski

Definicja Tarskiego. Zbiór jest ***skończony***, gdy każdy $\subseteq$-łańcuch w rodzinie jego podzbiorów jest domknięty na kres górny. W przeciwnym przypadku jest ***nieskończony***.

Podobnie jak u Zermela i von Neumanna, definicja Tarskiego wykorzystuje jedynie pojęcia teoriomnogościowe.

Proszę zauważyć, że np. ciąg zbiorów:

$$\{\{k : k \leqslant n\} : n \geqslant 0\}$$

nie jest domknięty na kres górny; kresem górnym (względem porządku $\subseteq$) tego ciągu jest jego teoriomnogościowa suma, a nie jest ona jednym z elementów tego ciągu.

Opuszczamy Hotel Hilberta

Już starczy, prawda?

To, co najważniejsze: mamy precyzyjne definicje ***nieskończoności***, nie odwołujące się ani do czasu, ani do przestrzeni. Definicji tych możemy używać w dalszych rozważaniach dotyczących KRP.

I jeszcze uwaga dotycząca Hotelu Hilberta. Ponieważ mamy nieskończoną liczbę gości, więc dochody właściciela są nieskończone. Są też jednak pewne utrudnienia. Np.: jakiej długości powinien być wąż przeciwpożarowy? Ile płacić pokojówce, która ma posprzątać wszystkie pokoje?


"HILBERT'S HOTEL" ©2002 CAROL LAY
THE INFINITE HOTEL WAS ALWAYS FILLED TO CAPACITY.
HILBERT'S HOTEL ∞
NO VACANCY
WWW.WAYLAY.COM
YET, IF A NEW GUEST ARRIVED, SHE WAS ALWAYS GIVEN A ROOM.
AFTER ALL, THERE WERE AN INFINITE NUMBER OF ROOMS.
ROOM 8437229486714392645913653898652,732 NEEDS FRESH TOWELS.
THIS PARADOX ASSUMED THAT MANAGEMENT COULD ALWAYS ADD ONE OR MORE TO INFINITY.
WE'LL SIMPLY PUT YOU IN ROOM 1, THEN ASK EVERYONE TO SHIFT OVER ONE ROOM.
THE BRAIN-BRUISING HOTEL ATTRACTED A LOT OF MATHEMATICIANS AND PHILOSOPHERS.
JUST A MOMENT, PLEASE.
THEY LIKED TO ARGUE INTO THE WEE HOURS ABOUT THE NATURE OF INFINITY.
UNFORTUNATELY, THEY WERE A BUNCH OF SLOBS.
OH, DEAR.
TSK
MANAGEMENT HAD TO HIRE A NEW MAID TO KEEP UP WITH THE MESS.
RING IF YOU GET LOST...
DAUNTED BY THE NUMBER OF ROOMS TO CLEAN...
RM. 6329468517432
NOK NOK
THE MAID SET FIRE TO THE JOINT.
SCREW IT.
ETHER
THE PHILOSOPHERS ESCAPED...
BUT THE HOTEL BURNED FOREVER.

Koniec

W dalszym ciągu nie potrafimy rozwiązać problemu Uszu i Ogona za pomocą (czysto syntaktycznych) reguł wnioskowania, chociaż wiemy już, w jakim języku należy problem sformułować.
To zaczyna być denerwujące, prawda?

Zainteresowanych uprzejmie zapraszam do lektury wykładów semestru letniego Logiki Matematycznej.

Pokazuje się w nich, jak określić w języku przedmiotowym operację konsekwencji tak, aby możliwe stało się scharakteryzowanie wynikania logicznego środkami czysto syntaktycznymi.