METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

KONWERSATORIUM 3: METODA AKSJOMATYCZNA

V rok kognitywistyki UAM

1 Twoje pragnienia

Studenci mogą domagać się ćwiczeń dotyczących wcześniej omawianych tematów. Wysłuchujemy ich pragnień i proponujemy stosowne ćwiczenia. Dla przykładu: drzewa syntaktyczne formuł, przekład z jednej notacji na inną, itp.

2 Metoda aksjomatyczna w KRZ

2.1 Twierdzenie o dedukcji

Wykorzystując twierdzenie o dedukcji, pokaż, że:

1. $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ prawo komutacji
2. $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ prawo importacji
3. $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ sylogizm hipotetyczny

2.2 Dowód twierdzenia o dedukcji

Podaj dowód implikacji: jeśli $S \vdash_{ph} (\varphi \rightarrow \psi)$, to $S \cup \{\varphi\} \vdash_{ph} \psi$.

2.3 Z ciemnych zakamarków pamięci

Pokaż, że reguła MP zachowuje własność bycia tautologią.

3 Relacje

UWAGA: Podane niżej zadania nie były omawiane 27x2015. Aksjomatycznym rachunkiem relacji Tarskiego zajmiemy się trochę później.

3.1 Operacje na relacjach

Udowodnij następujące fakty dotyczące operacji na relacjach:

1. Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.
2. Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
3. $R \circ id_X = id_X \circ R = R$,.
4. $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$.
5. $(R^{-1})^{-1} = R$, $-(R^{-1}) = (-R)^{-1}$.
6. Jeśli $R \subseteq S$, to:
   (a) $R^{-1} \subseteq S^{-1}$, $R^{tr} \subseteq S^{tr}$
   (b) $T \circ R \subseteq T \circ S$ oraz $R \circ T \subseteq S \circ T$.
7. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
8. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
9. $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.
10. $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$,
11. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
12. † jest łączna, czyli $(R \dagger S) \dagger T = R \dagger (S \dagger T)$
13. $R \dagger S = -((-R) \circ (-S))$, a w konsekwencji:
    (a) $-(R \dagger S) = (-R) \circ (-S)$
    (b) $-(R \circ S) = (-R) \dagger (-S)$
14. $(R \dagger S)^{-1} = S^{-1} \dagger R^{-1}$.

Złożeniem symetrycznym relacji R i S nazywamy relację:

$$R \odot S = (R \circ S) \cup (S \circ R).$$

Domknięciem sumy relacji R i S nazywamy relację

$$R \oplus S = (R \cup S)^{tr}.$$

Ćwiczenie. Ile jest relacji dwuargumentowych na zbiorze n-elementowym?

Ćwiczenie. Wybierzmy uniwersum oraz jakieś relacje na nim określone (np.: liczby naturalne wraz z relacjami mniejszości, podzielności, itd.). Obliczmy, czym będą wyniki omawianych operacji, zastosowanych do tych relacji.

3.2 Własności relacji

Czy potrafisz udowodnić, że:

1. Każda relacja przechodnia i asymetryczna jest przeciwzwrotna.
2. Każda relacja asymetryczna, przechodnia i serialna ma nieskończone pole.
3. Każda relacja symetryczna i przechodnia jest kołowa.
4. Nie ma relacji jednocześnie:
   (a) symetrycznych i asymetrycznych;
   (b) zwrotnych i przeciwzwrotnych.
5. Istnieją relacje, które nie są:
   (a) ani symetryczne, ani asymetryczne;
   (b) ani zwrotne, ani przeciwzwrotne.

3.3 Operacje na relacjach a własności relacji

Niech $R \subseteq X \times X$. Czy widoczne jest, że:

1. R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $id_X \subseteq R$
2. R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap id_X = \emptyset$
3. R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
4. R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$
5. R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq id_X$
6. R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
7. R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{tr}$
8. R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup id_X = X \times X$.

Czy potrafisz udowodnić, że:

1. Jeśli relacje R i S są zwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$, R^{-1}, R^{tr} też są zwrotne.
2. Jeśli relacje R i S są przeciwzwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1} też są zwrotne.
3. Złożenie $R \circ S$ relacji przeciwzwrotnych jest przeciwzwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
4. Jeśli relacje R i S są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R \cup S, \ R \cap S, \ R^{-1}, \ R \circ R^{-1}, \ R^{tr}$.
5. Jeśli relacje R i S są symetryczne, to $R \circ S$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.
6. Jeśli R jest asymetryczna, to R^{-1} też.
7. Jeśli R jest asymetryczna, to $R \cap S$ jest asymetryczna, dla dowolnej S.
8. Jeśli R i S są przechodnie, to $R \cap S$, R^{-1} i R^{tr} też.
9. Jeśli R i S są antysymetryczne, to $R \cap S$ i R^{-1} też.
10. Jeśli R i S są antysymetryczne, to: $R \cup S$ jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} \subseteq id_X$.
11. Jeśli R i S są asymetryczne, to: $R \cup S$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
12. Jeśli R jest symetryczna i przechodnia, to R jest zwrotna, czyli $R = R^{-1}$ oraz $R \circ R \subseteq R$ implikują $id_X \subseteq R$.
13. $R \subseteq R \oplus S$ oraz $S \subseteq R \oplus S$.
14. Jeśli R, S, T są przechodnie, to $(R \oplus S) \oplus T = R \oplus (S \oplus T)$.
15. Jeśli R, S, T są przechodnie, to: jeśli $R \subseteq T$ i $S \subseteq T$, to $(R \oplus S) \subseteq T$.

3.4 Równoważności i porządki

Relacje równoważności oraz porządki (częściowe i liniowe) omawiane były na kursie *Logika I*.

Niech R i S będą równoważnościami na X. Czy potrafisz udowodnić, że:

1. $R \cup S$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$
2. $R \circ S$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = R \cup S$
3. $R \odot S$ i $R \oplus S$ są równoważnościami.
4. $R \oplus i_X = R$.
5. $R \oplus S = (R \odot S)^{tr}$.
6. Jeśli $R \circ S = S \circ R$, to $R \circ S = R \oplus S$.

Czy potrafisz udowodnić, że:

1. Jeśli R jest porządkiem częściowym, to R^{-1} jest porządkiem częściowym.
2. Jeśli R i S są porządkami częściowymi, to $R \cap S$ porządkiem częściowym.
3. Jeśli R i S są porządkami częściowymi (ostrymi porządkami częściowymi), to $R \cup S$ jest porządkiem częściowym (ostrym porządkiem częściowym) wtedy i tylko wtedy, gdy: $(R \circ S) \cup (S \circ R) \subseteq R \cup S$.
4. Jeśli R i S są porządkami częściowymi, to $R \cup S$ jest porządkiem częściowym wtedy i tylko wtedy, gdy: $(R \circ S) \cup (S \circ R) \subseteq R \cup S$ oraz $R \cap S^{-1} \subseteq i_X$.
5. Jeśli R i S są ostrymi porządkami częściowymi oraz $R \circ S = S \circ R$ i $R \cap S^{-1} = \emptyset$, to $R \circ S$ jest ostrym porządkiem częściowym.

Ćwiczenie. Jakimi strukturami są: wszystkie porządki (częściowe, liniowe), wszystkie równoważności, itd. na danym zbiorze? Czy np. wszystkie relacje równoważności na danym zbiorze tworzą kratę?

Dowody w powyższych ćwiczeniach dotyczących relacji prowadzone były, rzecz jasna, w metajęzyku. Pokażemy później, jak dowodzi się niektórych z powyższych faktów wybranymi metodami dowodowymi.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl